

Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (11)$$

donde a , b y c son positivos. Consulte la figura 24.

La intersección del plano $z = 0$ con la superficie es un punto, el origen. Las secciones transversales de la superficie en los planos $z = k$, donde $k \neq 0$, son elipses, y las longitudes de los semiejes aumentan conforme k se incrementa. Las secciones transversales en los planos $x = 0$ y $y = 0$ son pares de rectas que se intersectan. En los planos $x = k$ y $y = k$, donde $k \neq 0$, las secciones transversales son hipérbolas.

► **EJEMPLO 8** Dibuje la gráfica de la ecuación

$$4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$$

e identifique la superficie.

Solución La ecuación dada se puede escribir como

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

la cual es de la forma de (11) con y y z intercambiadas. Por tanto, la superficie es un cono elíptico que tiene al eje y como su eje. La superficie intersecta al plano $y = 0$ sólo en el origen. La intersección de la superficie con el plano $x = 0$ es el par de rectas que se intersectan en $y = \pm 5z$, y la intersección con el plano $z = 0$ es el par de rectas que se intersectan en $y = \pm 2x$. Las secciones transversales en los planos $y = k$, donde $k \neq 0$, son las elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{100}$$

En los planos $x = k$ y $z = k$, donde $k \neq 0$, las secciones transversales son, respectivamente, las hipérbolas

$$\frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{4} = \frac{k^2}{25} \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{25} = \frac{k^2}{4}$$

La superficie se presenta en la figura 25. ◀

La tabla 1 resume la discusión de los seis tipos básicos de superficies cuadráticas. En dicha tabla se muestran dos gráficas para cada superficie. Una gráfica fue dibujada, y la otra fue trazada mediante un programa de computadora empleado para generar superficies. Muchos programas para trazar gráficas en computadora se encuentran disponibles, generalmente involucran muchos cálculos numéricos. Estos programas se denominan **graficadores matemáticos**, los cuales se tratan con mayor detalle en la sección 12.1, donde se presentarán diversas e intrincadas superficies que pueden ser trazadas mediante estos programas.

La ecuación (5) es la ecuación general de segundo grado en x , y y z . Puede demostrarse que mediante una traslación y rotación de los ejes coordina-



Cono elíptico



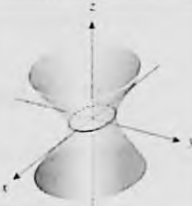








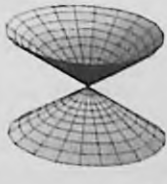
FIGURA 24



Cono elíptico $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$

FIGURA 25

Tabla 1

Superficie cuadrada	Trazas en el plano indicado	Gráfica dibujada	Gráfica trazada por medio de Mathematica
<p>Elipsoide</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	<p>plano xy: $z = k < c$: plano yz: $x = k < c$: plano xz: $y = k < c$:</p>	<p>Elipse Elipse Elipse Elipse Elipse Elipse</p> 	
<p>Hiperboloide elíptico de una hoja</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	<p>plano xy: $z = k$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:</p>	<p>Elipse Elipse Hipérbola Hipérbola Hipérbola Hipérbola</p> 	
<p>Hiperboloide elíptico de dos hojas</p> $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	<p>plano xy: $z = k < c$: $z = k > c$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:</p>	<p>Ninguna Ninguna Elipse Hipérbola Hipérbola Hipérbola</p> 	
<p>Paraboloide elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ <p>$c > 0$</p>	<p>plano xy: $z = k > 0$: $z = k < 0$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:</p>	<p>Punto (origen) Elipse Ninguno Parábola Parábola Parábola Parábola</p> 	
<p>Paraboloide hiperbólico</p> $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ <p>$c > 0$</p>	<p>plano xy: $z = k \neq 0$: plano yz: $x = k$: plano xz: $y = k$:</p>	<p>Dos rectas que se intersectan (en el origen) Hipérbola Parábola Parábola Parábola Parábola</p> 	
<p>Cono elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	<p>plano xy: $z = k \neq 0$: plano yz: $x = k \neq 0$: plano xz: $y = k \neq 0$:</p>	<p>Punto (origen) Elipse Dos rectas que se intersectan (en el origen) Hipérbola Dos rectas que se intersectan (en el origen) Hipérbola</p> 	

denados del espacio tridimensional (cuyo estudio está más allá del alcance de este libro) esta ecuación puede reducirse a una de las dos formas siguientes:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad (12)$$

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0 \quad (13)$$

Las gráficas de las ecuaciones de segundo grado serán uno de los seis tipos anteriores de cuádricas o bien, degenerarán en un cilindro, un plano, una recta, un punto o el conjunto vacío.

Las superficies no degeneradas asociadas con ecuaciones de la forma (12) son las cuádricas centrales, mientras que aquéllas asociadas con ecuaciones de la forma (13) son las cuádricas no centrales. A continuación se presentan algunos casos degenerados:

$$x^2 - y^2 = 0; \text{ dos planos, } x - y = 0 \quad \text{y} \quad x + y = 0$$

$$z^2 = 0; \text{ un plano, el plano } xy$$

$$x^2 + y^2 = 0; \text{ una recta, el eje } z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0; \text{ un punto, el origen}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0; \text{ el conjunto vacío}$$

EJERCICIOS 10.6

En los ejercicios 1 a 4, dibuje la sección transversal del cilindro dado en el plano indicado.

1. $4x^2 + y^2 = 16$, plano xy

2. $4z^2 - y^2 = 4$; plano yz

3. $z = e^x$, plano xz

4. $x = |y|$; plano xy

En los ejercicios 5 a 12, dibuje el cilindro que tiene la ecuación indicada.

5. $4x^2 + 9y^2 = 36$

6. $z = \sin y$

7. $y = |z|$

8. $x^2 - z^2 = 4$

9. $z = 2x^2$

10. $z^2 = 4y^2$

11. $y = \cosh x$

12. $x^2 = y^3$

En los ejercicios 13 a 20, obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva plana alrededor del eje indicado. Dibuje la superficie.

13. $x^2 = 4y$ en el plano xy , alrededor del eje y .

14. $x^2 + 4z^2 = 16$ en el plano xz , alrededor del eje z .

15. $x^2 + 4z^2 = 16$ en el plano xz , alrededor del eje x .

16. $x^2 = 4y$ en el plano xy , alrededor del eje x .

17. $y = 3z$ en el plano yz , alrededor del eje y .

18. $9y^2 - 4z^2 = 144$ en el plano yz , alrededor del eje z .

19. $y = \sin x$ en el plano xy , alrededor del eje x .

20. $y^2 = z^3$ en el plano yz , alrededor del eje z .

En los ejercicios 21 a 28, obtenga una curva generatriz y el eje para la superficie de revolución dada. Dibuje la superficie.

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

22. $x^2 + z^2 = y$

23. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

24. $y^2 + z^2 = e^{2x}$

25. $x^2 + z^2 = |y|$

26. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

27. $9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$

28. $4x^2 + 4y^2 - z = 9$

29. En los incisos (a)–(f), relacione la ecuación con la superficie correspondiente, generada en computadora (i)–(vi), e identifique la superficie.

(a) $9x^2 - 4y^2 + 36z = 36$

(b) $5x^2 - 2z^2 = 3y$

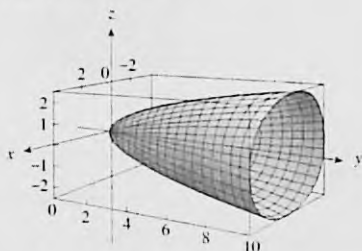
(c) $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 0$

(d) $5x^2 + 2z^2 = 3y$

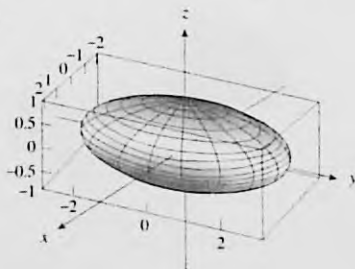
(e) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

(f) $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 = 36$

(i)



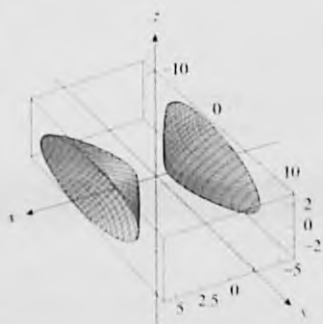
(ii)



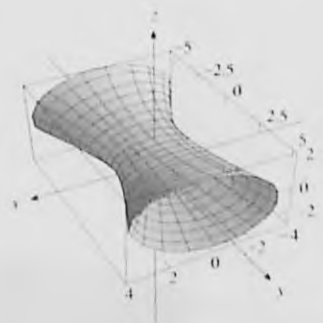
(iii)



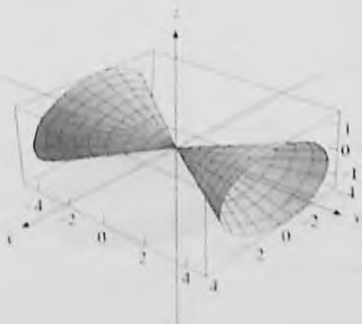
(iv)



(v)



(vi)



30. En los incisos (a)–(f), relacione la ecuación con la superficie correspondiente, generada en computadora. (i)–(vi) se identifican la superficie.

(a) $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$

(b) $3y^2 + 7z^2 = 6x$

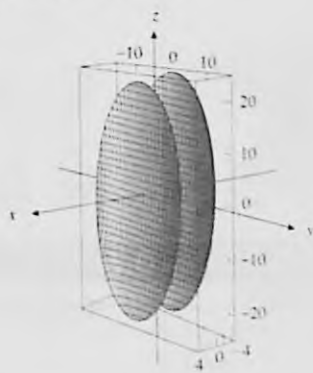
(c) $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$

(d) $3y^2 - 7z^2 = 6x$

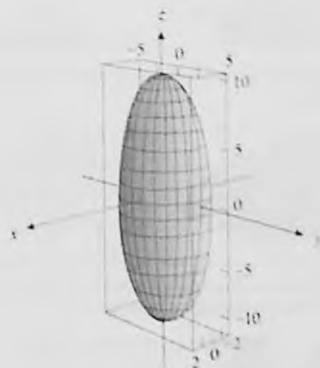
(e) $25x^2 = 4y^2 - z^2 + 100$

(f) $25x^2 = 100 - 4y^2 - z^2$

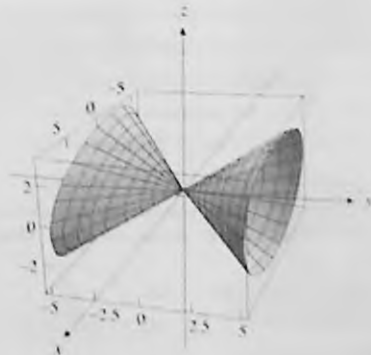
(i)



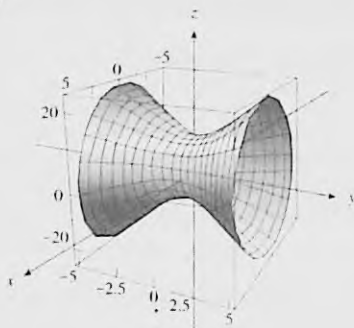
(ii)



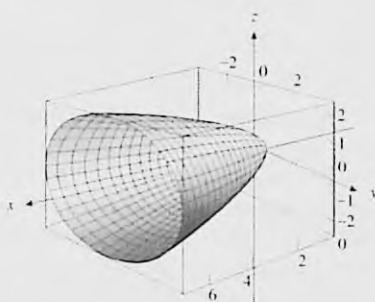
(iii)



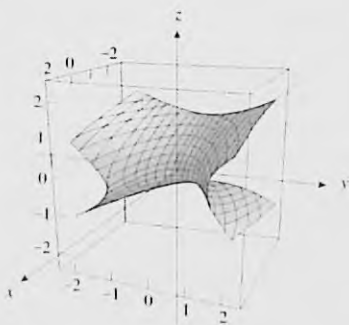
(iv)



(v)



(vi)



En los ejercicios 31 a 42, dibuje la gráfica de la ecuación e identifique la superficie.

31. $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$

32. $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$

33. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$

34. $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$

35. $x^2 = y^2 - z^2$

36. $x^2 = y^2 + z^2$

37. $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$

38. $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{36} = 4x$

39. $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$

40. $x^2 = 2y + 4z$

41. $x^2 + 16z^2 = 4y - 16$

42. $9y^2 - 4z^2 + 18x = 0$

43. Obtenga los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = 1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ sea (a) una elipse, y (b) una hipérbola.

44. Determine el vértice y el foco de la parábola que es la intersección del plano $y = 2$ y el paraboloid hiperbólico $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = \frac{z}{9}$.

45. Obtenga el vértice y el foco de la parábola que es la intersección del plano $x = 1$ y el paraboloid hiperbólico $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} = \frac{y}{3}$.

46. Calcule el área de la sección plana formada por la intersección del plano $y = 3$ y el sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$.

47. Demuestre que la intersección de la superficie $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ y el plano $x + z = 9$ es una circunferencia.

48. Pruebe que la intersección del paraboloid hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ y el plano $z = bx + ay$ consiste de dos rectas que se cortan.

En los ejercicios 49 a 51, utilice el método del rebanado para calcular el volumen del sólido. La medida del área de la región limitada por la elipse que tiene semiejes a y b es πab .

49. El sólido limitado por el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

50. El sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

51. El sólido limitado por el plano $z = h$, donde $h > 0$, y el paraboloid elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, donde $c > 0$.

52. Dibuje la superficie de revolución generada al girar la tratriz

$$x = 3 \ln \left(\frac{3 + \sqrt{9 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{9 - y^2}$$

alrededor del eje v .

53. Describa como dibujarla la superficie cilíndrica generada al girar la curva $x = f(y)$ del plano xy alrededor del eje v . En su descripción invente un ejemplo de una curva particular $x = f(y)$ e incluya la ecuación de la superficie cilíndrica obtenida.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

► SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 10

- Defina un *vector* (i) en el plano, y (ii) en el espacio tridimensional.
- ¿Cómo se representan los vectores geoméricamente? ¿Cómo determina cuándo dos representaciones denotan el mismo vector?
- ¿Cómo se determina el *módulo* y la *dirección* de un vector en (i) V_2 , y (ii) V_3 ? Invente un ejemplo para cada caso.
- ¿Cómo se determina la *suma* y la *diferencia* de dos vectores en (i) V_2 , y (ii) V_3 ? Invente un ejemplo para cada caso.
- Interprete geoméricamente la suma y la diferencia de dos vectores.
- Defina el *producto* de un escalar c y un vector A en (i) V_2 , y (ii) V_3 . Invente un ejemplo para cada caso.
- ¿Cuál es la relación entre cA y A si (i) $c > 0$, y (ii) $c < 0$? Invente un ejemplo para cada situación.
- ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por las operaciones de adición algebraica y multiplicación por un escalar de cualesquiera vectores de V_2 y V_3 ?
- ¿Cómo se expresa cualquier vector de (i) en V_2 en términos de los vectores i y j , y (ii) en V_3 en términos de los vectores i , j y k ? Invente un ejemplo para cada caso.
- ¿Por qué i y j forman una base para el espacio vectorial V_2 , e i , j y k forman una base para el espacio vectorial V_3 ?
- ¿Cómo se expresa un vector (i) en V_2 en términos de su módulo y ángulo director, y (ii) en V_3 en términos de su módulo y sus *cosenos directores*? Invente un ejemplo para cada situación.
- Escriba una ecuación que exprese la relación que satisfacen los cosenos directores de cualquier vector de V_3 .
- ¿Cuál es la *fórmula para la distancia no dirigida* entre dos puntos de R^3 ? Invente un ejemplo.
- ¿Cuáles son las *fórmulas para las coordenadas del punto medio* de un segmento de recta entre dos puntos de R^3 ? Invente un ejemplo.
- Defina una *esfera*. ¿Cuál es la forma centro-radio de la ecuación de una esfera de radio r y centro (h, k, l) ? Invente un ejemplo.
- Defina el *producto punto* de dos vectores (i) en V_2 , y (ii) en V_3 ? Invente un ejemplo para cada caso.
- ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por el producto punto de dos vectores?
- Defina el *ángulo entre dos vectores*.
- ¿Cómo se utiliza el producto punto para calcular el ángulo entre dos vectores? Invente un ejemplo.
- ¿Cómo se emplea el producto punto para determinar si dos vectores son *ortogonales*? Invente un ejemplo.
- Defina la *proyección escalar* de un vector sobre otro. ¿Cuál es la fórmula para determinar la proyección escalar de un vector B sobre el vector A ? Invente un ejemplo.
- ¿Cuál es la fórmula para determinar el *vector proyección* del vector B sobre el vector A ? Invente un ejemplo.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se emplean los vectores para calcular la *distancia de un punto P a una recta* que pasa por los puntos A y B en R^3 .
- Invente un ejemplo que ilustre cómo calcular el trabajo realizado por una fuerza F que desplaza un objeto de un punto A hasta el punto B si la dirección de F no coincide con la recta de movimiento de A a B .
- Defina el *plano* que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene a N como un vector normal. Escriba una ecuación de este plano si N es el vector $\langle a, b, c \rangle$. Invente un ejemplo.
- Defina el *ángulo entre dos planos*. Invente un ejemplo.
- Invente un ejemplo de (i) dos *planos paralelos*, y (ii) dos *planos perpendiculares*.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se utilizan los vectores para calcular la *distancia de un punto a un plano*.
- Escriba las *ecuaciones paramétricas* de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a la representación del vector $\langle a, b, c \rangle$. Escriba las *ecuaciones simétricas* de esta recta.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo obtener las ecuaciones simétricas de una recta que pasa por dos puntos de R^3 .
- Defina el *producto cruz* de dos vectores. Escriba la notación de determinantes empleada como un recurso mnemotécnico para recordar la fórmula del producto cruz. Invente un ejemplo.
- ¿Qué leyes algebraicas son satisfechas por el producto cruz de dos vectores, y cuáles no?
- Escriba tres productos cruz que contengan al vector A y que tengan como resultado al vector cero.
- ¿A qué es igual el *triple producto escalar* de los tres vectores A , B y C ? Invente un ejemplo.
- ¿A qué es igual el *triple producto vectorial* de los tres vectores A , B y C ? Invente un ejemplo.
- Escriba la fórmula que permite expresar $\|A \times B\|$ en términos de $\|A\|$, $\|B\|$, y el ángulo entre A y B .
- Proporcione la interpretación geométrica de $\|A \times B\|$. Invente un ejemplo.
- ¿Cómo puede emplearse el producto cruz para determinar si dos vectores son paralelos? Invente un ejemplo.
- Invente un ejemplo que muestre cómo puede emplearse el producto cruz para obtener la ecuación de un plano que pasa por tres puntos de R^3 .

40. ¿En qué consiste la interpretación geométrica del triple producto escalar? Invente un ejemplo.
41. Defina el término *cilindro*.
42. Invente un ejemplo de una ecuación de un cilindro cuyas *regladuras* sean paralelas al (i) eje x , (ii) eje y , y (iii) eje z . Dibuje la superficie.
43. Invente un ejemplo de una ecuación de una *superficie de revolución* cuya *curva generatriz* esté en el plano xy y cuyo eje sea (i) el eje x , y (ii) el eje y . Dibuje la superficie.
44. Invente un ejemplo de una ecuación de un *clipsoid* y dibuje la superficie.
45. Invente un ejemplo de una ecuación de un *hiperboloide elíptico de una hoja* y dibuje la superficie.
46. Invente un ejemplo de una ecuación de un *hiperboloide elíptico de dos hojas* y dibuje la superficie.
47. Invente un ejemplo de una ecuación de un *paraboloide elíptico* y dibuje la superficie.
48. Invente un ejemplo de una ecuación de un *paraboloide hiperbólico* y dibuje la superficie.
49. Invente un ejemplo de una ecuación de un *cono elíptico* y dibuje la superficie.

► EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 10

En los ejercicios 1 a 18, considere $A = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $B = \mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $C = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

- Calcule $3B - 7A$.
- Obtenga $5B - 3C$.
- Obtenga $\|3B - 7A\|$.
- Calcule $\|5B - 3C\|$.
- Calcule $\|3B\| - \|7A\|$.
- Obtenga $\|5B\| - \|3C\|$.
- Obtenga $(A - B) \cdot C$.
- Calcule $(A \cdot B)$.
- Determine un vector unitario que tenga la misma dirección que $2A + B$.
- Calcule el vector unitario ortogonal a B .
- Encuentre los escalares h y k tales que $A = hB + kC$.
- Obtenga los escalares h y k tales que $hA + kB = -C$.
- Determine la proyección escalar de A sobre B .
- Obtenga la proyección escalar de C sobre A .
- Calcule el vector proyección de A sobre B .
- Determine el vector proyección de C sobre A .
- Obtenga la componente de B en la dirección de A .
- Calcule $\cos \alpha$ si α es el ángulo entre A y C .

En los ejercicios 19 y 20, $A = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $B = h\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

- Determine h de modo que el ángulo entre A y B sea $\frac{2}{3}\pi$.
- Demuestre que no existe h tal que el ángulo entre A y B sea $\frac{1}{3}\pi$.

En los ejercicios 21 a 30, $A = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $B = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $C = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $D = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $E = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

- Obtenga $6C + 4D - E$.
- Calcule $3A - 2B + C$.
- Calcule $D \cdot B \times C$.
- Obtenga $(A \times C) \cdot (D \times E)$.
- Obtenga $\|A \times B\| \|D \times E\|$.
- Calcule $2B \cdot C + 3D \cdot E$.
- Determine la proyección escalar de A sobre B .
- Obtenga la proyección escalar de C sobre D .
- Calcule el vector proyección de E sobre C .
- Determine el vector proyección de D sobre E .

En los ejercicios 31 a 36, existe sólo una forma para obtener una expresión que tenga sentido al insertar paréntesis. Escriba los paréntesis y determine el vector o escalar indicado si

$A = \langle 3, -2, 4 \rangle$, $B = \langle -5, 7, 2 \rangle$ y $C = \langle 4, 6, -1 \rangle$.

- $AB \cdot C$
- $A \cdot BC$
- $A + B \cdot C$
- $B \cdot A - C$
- $A \times B \cdot A + B - C$
- $A \times B \cdot C \times A$
- Dibuje la gráfica de $x = 3$ en R, R^2 y R^3 .
- Dibuje el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones simultáneas $x = 6$ y $y = 3$ en R^2 y R^3 .

En los ejercicios 39 a 48, describa en palabras el conjunto de puntos de R^3 que satisfacen la ecuación o par de ecuaciones. Dibuje la gráfica.

- $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- $y^2 - z^2 = 0$
- $x = y$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
- $x^2 + y^2 = 9z$
- $x^2 + y^2 = z^2$
- $x^2 - y^2 = z^2$
- $x^2 + z^2 = 4$
- Dos fuerzas cuyas intensidades son de 50 lb y 70 lb forman un ángulo de 60° entre sí y se aplican a un objeto en el mismo punto. Calcule (a) la intensidad de la fuerza resultante, y (b) el ángulo que forman la resultante y la fuerza de 50 lb, con aproximación de grados.
- Determine el ángulo entre dos fuerzas de 112 lb y 136 lb aplicadas a un objeto en el mismo punto si la fuerza resultante tiene una intensidad de 168 lb.
- Una fuerza está representada por el vector F que tiene una intensidad de 30 lb y un ángulo director de $\frac{3}{4}\pi$ rad. Si la distancia se mide en pies, calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar una partícula a lo largo de una recta que va del punto $(3, 6)$ al punto $(-2, 7)$.
- El enfilamiento de un avión es de 107° y su velocidad al aire es de 210 mi/h. Si el viento sopla del oeste a 36 mi/h, ¿cuál es (a) la velocidad a tierra del avión, y (b) su curso?
- Se dibuja una recta que pasa por el punto $(-3, 5, 1)$ y perpendicular al plano xz . Determine las coordenadas de

los puntos sobre esta recta que están a una distancia de 13 unidades del punto $(-2, 0, 0)$.

54. Determine una ecuación de la esfera que tiene como un diámetro al segmento de recta cuyos extremos son $(3, 5, -4)$ y $(-1, 7, 4)$.
55. Obtenga una ecuación de la esfera concéntrica con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$ y que contiene al punto $(-4, 2, 5)$.
56. Demuestre que los puntos $(4, 1, -1)$, $(2, 0, 1)$ y $(4, 3, 0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcule el área del triángulo.
57. Determine una curva generatriz y el eje para la superficie de revolución que tiene la ecuación $x^2 + z^2 = e^{4y}$.
58. Obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada al girar la elipse $9x^2 + 4z^2 = 36$ del plano xz alrededor del eje x . Dibuje la superficie.
59. Determine el valor de c tal que los vectores $3\mathbf{i} + c\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son ortogonales.
60. Demuestre que existen representaciones de los tres vectores $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, las cuales forman un triángulo.
61. Dados los puntos $A(5, 9, -3)$ y $B(-2, 4, -5)$, obtenga (a) los cosenos directores de $\mathbf{V}(\overline{AB})$, y (b) el vector unitario que tiene la dirección de $\mathbf{V}(\overline{AB})$.
62. Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{D} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, determine los escalares a , b y c tales que $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{D}$.
63. Si $\mathbf{A} = \langle 7, -1, 5 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle -2, 3, 1 \rangle$, determine (a) la proyección escalar de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} , y (b) el vector proyección de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} .
64. Obtenga una ecuación del plano que contenga los puntos $(1, 7, -3)$ y $(3, 1, 2)$ y que no interseca al eje x .
65. Determine una ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(-1, 2, 1)$, $(1, 4, 0)$ y $(1, -1, 3)$ mediante dos métodos: (a) utilice el producto cruz; (b) sin emplear el producto cruz.
66. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $(7, -2, -5)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-3, 0, 4)$ y $(3, 2, 1)$.
67. Calcule la distancia del origen al plano que pasa por el punto $(-6, 3, -2)$ y tiene al vector $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ como un vector normal.
68. Obtenga dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y cuyas representaciones sean paralelas al plano yz .
69. Determine la distancia del punto $P(4, 6, -4)$ a la recta que pasa por los dos puntos $A(2, 2, 1)$ y $B(4, 3, -1)$.
70. Calcule la distancia del plano $9x - 2y + 6z + 44 = 0$ al punto $(-3, 2, 0)$.
71. Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, calcule $\cos \theta$ en dos formas: (a) emplee el producto punto; (b) utilice el producto cruz y una identidad trigonométrica.

72. Demuestre que las rectas $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{2}$ y $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-5}{1}$ son rectas oblicuas (o cruzantes), y calcule la distancia entre ellas.

73. Determine las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a cada una de las rectas del ejercicio 72.

74. Obtenga las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por los dos puntos $(-3, 5, 2)$ y $(1, -3, 4)$.

75. Demuestre que las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{4}$ y $\frac{x+1}{-6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-8}$ son coincidentes.

76. Determine una ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{1}{2}(x-3) = -(y+5) = \frac{1}{3}(z+2)$ y al punto $(5, 0, -4)$.

77. Calcule el área de la sección transversal del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

en el plano $z = 4$.

78. Calcule el área del paralelogramo que tiene a las representaciones de posición de los vectores $2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ como dos de sus lados.

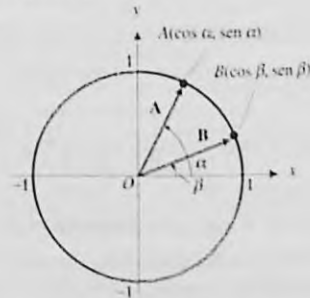
79. Calcule el volumen del paralelepípedo que tiene vértices en $(1, 3, 0)$, $(2, -1, 3)$, $(-2, 2, -1)$ y $(-1, 1, 2)$.

80. Demuestre mediante análisis vectorial que las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.

En los ejercicios 81 y 82, considere

$$\mathbf{A} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}$$

y refiérase a la figura adjunta.



81. Emplee el producto punto de \mathbf{A} y \mathbf{B} para demostrar que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

82. Utilice el producto cruz de \mathbf{A} y \mathbf{B} , con o como la componente \mathbf{k} de cada vector, para demostrar que

$$|\sin(\alpha - \beta)| = |\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta|$$

83. Si \mathbf{A} es cualquier vector de V_3 , demuestre que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

84. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} vectores de V_3 , y c_1, c_2 y c_3 los cosenos directores de \mathbf{A} , y d_1, d_2 y d_3 los cosenos directores de \mathbf{B} . Si

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}$$

demuestre que \mathbf{A} y \mathbf{B} son paralelos.

85. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ y \mathbf{D} son vectores de V_3 , demuestre la identidad de Lagrange

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$$

86. Considere un triángulo ABC , si los puntos D, E y F están sobre los lados AB, BC y AC , respectivamente, y

$$\overrightarrow{V(AD)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{V(AB)} \quad \overrightarrow{V(BE)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{V(BC)}$$

$$\overrightarrow{V(CF)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{V(CA)}$$

demuestre que $\overrightarrow{V(AE)} + \overrightarrow{V(BF)} + \overrightarrow{V(CD)} = \mathbf{0}$.

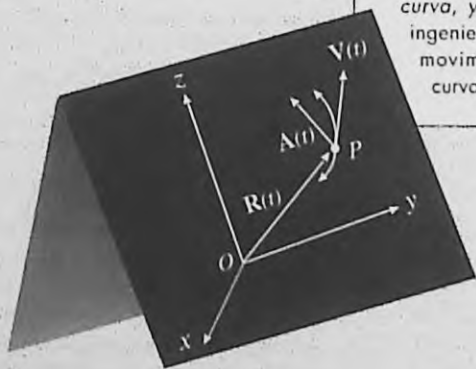
Funciones vectoriales

VISIÓN PRELIMINAR

- 11.1 Funciones vectoriales y curvas en R^3
- 11.2 Cálculo de las funciones vectoriales
- 11.3 Vectores tangente unitario y normal unitario, y longitud de arco como parámetro
- 11.4 Curvatura
- 11.5 Movimiento curvilíneo

Las *funciones vectoriales* son aquellas cuyo dominio es un conjunto de números reales tales que su contradominio es un conjunto de vectores. Estas funciones se definen en la sección 11.1, donde también se estudian sus gráficas. Las gráficas de estas funciones son curvas, las cuales también pueden representarse mediante ecuaciones paramétricas. El Cálculo de las funciones vectoriales, tratado en la sección 11.2, se refiere a las derivadas e integrales indefinidas de estas funciones, y se verá que las definiciones y teoremas son semejantes a las del Cálculo de funciones reales.

En las secciones restantes del capítulo se tratan aplicaciones de los vectores a la geometría, física e ingeniería. Las aplicaciones geométricas incluyen la *longitud de arco*, *vectores tangentes* y *normales* a una *curva*, y *curvatura*. En las aplicaciones de física e ingeniería se emplean los vectores para estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, el cual se denomina *movimiento curvilíneo*.



11.1 FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN \mathbb{R}^3

En la sección 9.1 se introdujeron las ecuaciones paramétricas al considerar una partícula que se mueve en un plano de modo que las coordenadas (x, y) de su posición en cualquier instante t están determinadas por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad (1)$$

Esta idea se puede extender al espacio tridimensional, donde las coordenadas (x, y, z) de la posición de la partícula en cualquier tiempo t están dadas por las tres ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad (2)$$

Para cualquier posición de la partícula existe un vector y los puntos terminales de las representaciones de posición de estos vectores determinan una curva recorrida por la partícula. Esta idea nos conduce a considerar una función cuyo dominio es un conjunto de números reales tal que su contradominio es un conjunto de vectores. A esta función se le llama *función vectorial*.

11.1.1 Definición de función vectorial

Sean f , g y h funciones reales de la variable real t . Entonces se define la **función vectorial \mathbf{R}** por medio de

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde t es cualquier número real del dominio común de f , g y h . En el plano, se define una **función vectorial \mathbf{R}** mediante

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

donde t pertenece al dominio común de f y g .



EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea \mathbf{R} la función vectorial definida por

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-2}\mathbf{i} + (t-3)^{-1}\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$$

Si $f(t) = \sqrt{t-2}$, $g(t) = (t-3)^{-1}$ y $h(t) = \ln t$, entonces el dominio de \mathbf{R} es el conjunto de valores de t para los cuales $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ están definidas. Como $f(t)$ está definida para $t \geq 2$, $g(t)$ está definida para todo número real diferente de 3, y $h(t)$ está definida para todos los números positivos, el dominio de \mathbf{R} es $\{t \mid t \geq 2, t \neq 3\}$. ◀

La ecuación

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (3)$$

se denomina **ecuación vectorial** la cual describe la curva C definida por las correspondientes ecuaciones paramétricas (2); esto es, una curva puede definirse por medio de una ecuación vectorial o por un conjunto de ecuaciones paramétricas. Si en (3), $h(t) = 0$ para todo t del dominio de \mathbf{R} , entonces la curva C yace en el plano xy y está definida por las correspondientes ecuaciones paramétricas (1). Estas curvas se estudiaron en la sección 9.1.

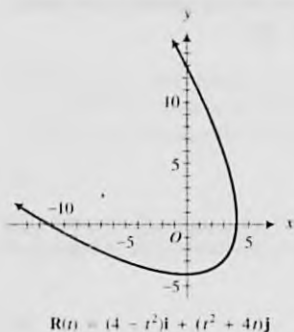


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La curva plana definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (4 - t^2)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j}$$

también puede definirse por las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 - t^2 \quad y = t^2 + 4t$$

En el ejemplo 5 de la sección 9.1 se dibujó esta curva obteniéndose la gráfica mostrada en la figura 1.

Una ecuación vectorial de una curva proporciona una dirección a la curva en cada punto. Esto es, si se piensa que la curva es descrita por una partícula, se puede considerar la dirección positiva a lo largo de la curva como la dirección en la que la partícula se mueve a medida que el parámetro t aumenta. En tal caso, t puede ser una medida del tiempo, de modo que al vector $\mathbf{R}(t)$ se le llama **vector de posición**.

Al eliminar t de las ecuaciones paramétricas (2) se obtienen dos ecuaciones en x , y y z , denominadas **ecuaciones cartesianas** de la curva C . La gráfica de cada ecuación cartesiana es una superficie, y C es la intersección de las dos superficies. Las ecuaciones de cualesquiera dos superficies que contienen a C pueden considerarse como las ecuaciones que definen a C .

EJEMPLO 1 Dibuje la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = 2 \cos t \quad y = 2 \sin t \quad z = t$$

El parámetro t de las dos primeras ecuaciones se elimina al elevar al cuadrado los dos miembros de estas ecuaciones y sumar los miembros correspondientes, obteniéndose

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la curva está completamente contenida en el cilindro circular recto cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ del plano xy y cuyas regladuras (o posiciones de su generatriz) son paralelas al eje z . La tabla 1 proporciona conjuntos de valores de x , y y z para valores específicos de t . La figura 2 muestra la curva.

La curva del ejemplo 1 se denomina **hélice circular**. Una hélice más general tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (4)$$

y ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad z = ct$$

donde a , b y c son constantes diferentes de cero. Cuando $a = b$, la curva es una hélice circular. Para eliminar t de las dos primeras ecuaciones paramétricas se escriben dichas ecuaciones como

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad y \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

Tabla 1

t	x	y	z
0	2	0	0
$\frac{1}{2}\pi$	0	2	$\frac{1}{2}\pi$
π	-2	0	π
$\frac{3}{2}\pi$	0	-2	$\frac{3}{2}\pi$
2π	2	0	2π
$\frac{5}{2}\pi$	0	2	$\frac{5}{2}\pi$
3π	-2	0	3π
$\frac{7}{2}\pi$	0	-2	$\frac{7}{2}\pi$
4π	2	0	4π



$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

FIGURA 2

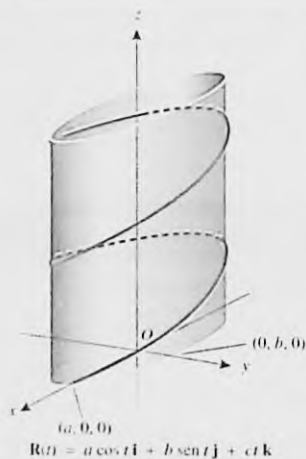


FIGURA 3



FIGURA 4

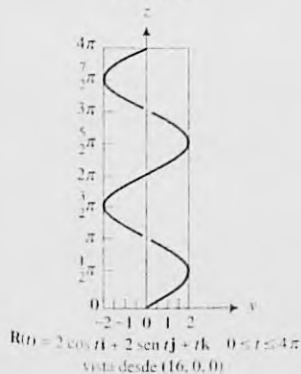


FIGURA 5a



FIGURA 5b



FIGURA 5c

Al sumar los miembros correspondientes de estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por tanto, la curva definida por (4) está contenida completamente en el cilindro elíptico con regladuras paralelas al eje z y cuya directriz es una elipse del plano xy , y cuyas regladuras son paralelas al eje z , como se muestra en la figura 3.

Una curva que tiene la ecuación vectorial

$$R(t) = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^3\mathbf{k}$$

donde a , b y c son constantes diferentes de cero, se denomina **cúbica alabeada**, un caso particular de esta ecuación se presenta en el próximo ejemplo.

► **EJEMPLO 2** Dibuje la cúbica alabeada que tiene la ecuación vectorial

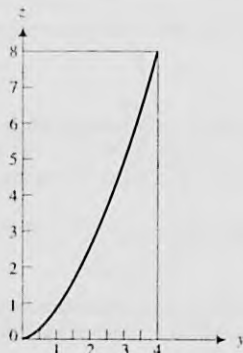
$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de esta cúbica alabeada son

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3$$

Al eliminar t de las dos primeras ecuaciones se obtiene $y = x^2$, que es la ecuación de un cilindro que tiene como directriz una parábola del plano xy y sus regladuras son paralelas al eje z . Si se elimina t de las ecuaciones primera y tercera se obtiene $z = x^3$, la cual es la ecuación de un cilindro con regladuras paralelas al eje y y cuya directriz yace en el plano xz . La cúbica alabeada es la intersección de los dos cilindros. La figura 4 muestra los dos cilindros y la cúbica alabeada de $t = 0$ a $t = 2$. ◀

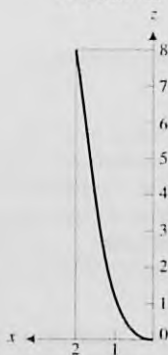
La hélice y la cúbica alabeada de los dos ejemplos anteriores se dibujaron de manera bastante simple. Sin embargo, el dibujo de la mayoría de las curvas tridimensionales es mucho más complicada. Afortunadamente, en esta época tecnológica, puede recurrirse a las computadoras y programas graficadores para trazar estas curvas. Con frecuencia los programas graficadores (o *software* para graficar) permiten la elección de puntos de vista desde donde se observa la curva con diferentes perspectivas. Las figuras 5(a)–(c) muestran la hélice del ejemplo 1, generada por el software *Mathematica*, vista desde



$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

vista desde (16, 0, 0)

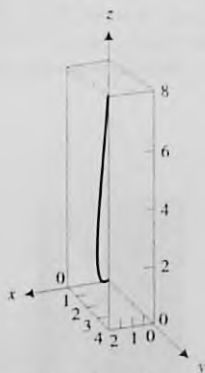
FIGURA 6a



$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

vista desde (0, 16, 0)

FIGURA 6b



$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

vista desde (8, 16, 8)

FIGURA 6c

tres puntos diferentes del espacio. Las figuras 6(a)–(c) muestran la cúbica alabeada del ejemplo 2, también generada por *Mathematica*, vista desde los mismos tres puntos de las figuras 5(a)–(c).

Se pueden realizar operaciones vectoriales con funciones vectoriales aplicando los procedimientos estudiados en el capítulo 10, y como se indica en la definición siguiente de estas operaciones.

11.1.2 Definición de las operaciones con funciones vectoriales

Dadas las funciones vectoriales F y G y las funciones reales f y g :

- (i) la **suma** de F y G , denotada por $F + G$, es la función vectorial definida por

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t)$$

- (ii) la **diferencia** de F y G , denotada por $F - G$, es la función vectorial definida por

$$(F - G)(t) = F(t) - G(t)$$

- (iii) el **producto punto** de F y G , denotado por $F \cdot G$, es la función vectorial definida por

$$(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

- (iv) el **producto cruz** de F y G , denotado por $F \times G$, es la función vectorial definida por

$$(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$$

- (v) el **producto** de $f(t)$ por $F(t)$, denotado por fF , es la función vectorial definida por

$$(fF)(t) = f(t)F(t)$$

- (vi) la **función compuesta** de F y g , denotada por $F \circ g$, es la función vectorial definida por

$$(F \circ g)(t) = F(g(t))$$

► **EJEMPLO 3** Dada $F(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $G(t) = -\cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, y $f(t) = t^{3/2}$, calcule: (a) $(F + G)(t)$; (b) $(F - G)(t)$; (c) $(F \cdot G)(t)$; (d) $(F \times G)(t)$; (e) $(fF)(t)$; (f) $(G \circ f)(t)$.

Solución

$$(a) (F + G)(t) = (\sin 2t - \cos 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t + \sin 2t)\mathbf{j} + 2\sqrt{t}\mathbf{k}$$

$$(b) (F - G)(t) = (\sin 2t + \cos 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t - \sin 2t)\mathbf{j}$$

$$(c) (F \cdot G)(t) = -\sin 2t \cos 2t + \sin 2t \cos 2t + \sqrt{t}^2 = t \quad (\text{porque } t \geq 0)$$

$$(d) (F \times G)(t) = \sqrt{t} \cos 2t \mathbf{i} - \sqrt{t} \cos 2t \mathbf{j} + \sin^2 2t \mathbf{k} + \cos^2 2t \mathbf{k} - \sqrt{t} \sin 2t \mathbf{i} - \sqrt{t} \sin 2t \mathbf{j} = \sqrt{t}(\cos 2t - \sin 2t)\mathbf{i} - \sqrt{t}(\cos 2t + \sin 2t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad (f\mathbf{F})(t) &= t^{3/2} \operatorname{sen} 2t \mathbf{i} + t^{3/2} \operatorname{cos} 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} \\ \text{(f)} \quad (\mathbf{G} \circ f)(t) &= \mathbf{G}(f(t)) \\ &= -\operatorname{cos} 2t^{3/2} \mathbf{i} + \operatorname{sen} 2t^{3/2} \mathbf{j} + t^{3/4} \mathbf{k} \end{aligned}$$

El límite de una función vectorial se define en términos de los límites de sus componentes reales.

11.1.3 Definición del límite de una función vectorial

Sea \mathbf{R} una función vectorial cuyos valores de función están dados por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Entonces el límite de $\mathbf{R}(t)$ cuando t tiende a a está definido por

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{R}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k}$$

si $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow a} g(t)$, y $\lim_{t \rightarrow a} h(t)$ existen.

Por supuesto, esta definición también se aplica a las funciones vectoriales del plano al considerar la componente \mathbf{k} como cero.

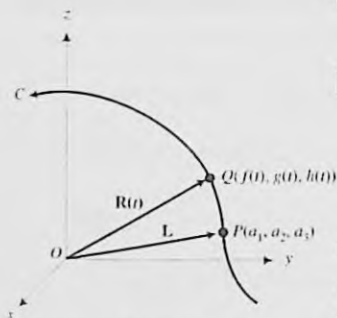


FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Si $\mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2e^t \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t) &= \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right) \mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} 2e^t \right) \mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} 3 \right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Considere la figura 7 a fin de obtener una interpretación geométrica de la definición 11.1.3, donde $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = a_1$, $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = a_2$, $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = a_3$, y $\mathbf{L} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. La función vectorial \mathbf{R} define la curva C , la cual contiene a los puntos $Q(f(t), g(t), h(t))$ y $P(a_1, a_2, a_3)$. Las representaciones de los vectores \mathbf{R} y \mathbf{L} son, respectivamente, \vec{OQ} y \vec{OP} . Conforme t se aproxima a a , $\mathbf{R}(t)$ tiende a \mathbf{L} , de modo que el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de C .

Los límites de funciones vectoriales que corresponden a los teoremas de límites de funciones reales estudiados en el capítulo 1, pueden demostrarse a partir de la definición 11.1.3. Se le pedirá que demuestre algunos de estos teoremas de límites en los ejercicios.

11.1.4 Definición de continuidad de una función vectorial

La función vectorial \mathbf{R} es continua en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- (i) $\mathbf{R}(a)$ existe;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{R}(t)$ existe;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(a)$

De esta definición, una función vectorial es continua en el número a si y sólo si sus componentes reales son continuas en a .

► **EJEMPLO 4** Determine los números en los que la siguiente función vectorial es continua:

$$\mathbf{R}(t) = \sin t \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + \frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{k}$$

Solución Puesto que $\sin t$ está definido para todos los números reales, $\ln t$ está definida sólo cuando $t > 0$, y $(t^2 - 1)/(t - 1)$ está definida en todo número real distinto de 1, el dominio de \mathbf{R} es $\{t \mid t > 0 \text{ y } t \neq 1\}$. Si a es cualquier número del dominio de \mathbf{R} , entonces

$$\mathbf{R}(a) = \sin a \mathbf{i} + \ln a \mathbf{j} + (a + 1) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{R}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \sin t \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow a} \ln t \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow a} \frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{k} \\ &= \sin a \mathbf{i} + \ln a \mathbf{j} + (a + 1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Así, $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(a)$, y \mathbf{R} es continua en a .

Por tanto, la función vectorial \mathbf{R} es continua en cada número de su dominio. ◀

EJERCICIOS 11.1

En los ejercicios 1 a 8, determine el dominio de la función vectorial.

- $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t} \mathbf{i} + \sqrt{4 - t} \mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3) \mathbf{i} + \frac{1}{t - 1} \mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (\sin^{-1} t) \mathbf{i} + \ln(t + 1) \mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (\cos^{-1} t) \mathbf{i} + (\sec^{-1} t) \mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t + 2} \mathbf{i} + \sqrt{4 - t} \mathbf{j} + \cot t \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 - 9} \mathbf{i} + \ln|t - 3| \mathbf{j} + (t^2 + 2t - 8) \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \ln|\sin t| \mathbf{i} + \sqrt{16 - t^2} \mathbf{j} + \ln|t + 4| \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \tan t \mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2} \mathbf{j} + \frac{1}{2 + t} \mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 12, calcule: (a) $(\mathbf{F} + \mathbf{G})(t)$; (b) $(\mathbf{F} - \mathbf{G})(t)$; (c) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t)$; (d) $(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t)$.

- $\mathbf{F}(t) = (t + 1) \mathbf{i} + (t^2 - 1) \mathbf{j} + (t - 1) \mathbf{k}$;
 $\mathbf{G}(t) = (t - 1) \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t + 1) \mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(t) = (4 - t^2) \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} - (4 - t^2) \mathbf{k}$;
 $\mathbf{G}(t) = t^2 \mathbf{i} + (t^2 - 4) \mathbf{j} - 4 \mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(t) = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$;
 $\mathbf{G}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - t \mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(t) = \sec t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} - 2 \mathbf{k}$;
 $\mathbf{G}(t) = \sec t \mathbf{i} - \tan t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

En los ejercicios 13 a 16, calcule: (a) $(f\mathbf{F})(t)$; (b) $(f\mathbf{G})(t)$; (c) $(\mathbf{F} \circ g)(t)$; (d) $(\mathbf{G} \circ g)(t)$.

- \mathbf{F} y \mathbf{G} son las funciones del ejercicio 9;
 $f(t) = t - 1$; $g(t) = t + 1$.
- \mathbf{F} y \mathbf{G} son las funciones del ejercicio 10;
 $f(t) = 1/(2 - t)$; $g(t) = 2 - t$.
- \mathbf{F} y \mathbf{G} son las funciones del ejercicio 11;
 $f(t) = \sin t$; $g(t) = \sin^{-1} t$.

16. \mathbf{F} y \mathbf{G} son las funciones del ejercicio 12;
 $f(t) = \cos t$; $g(t) = \cos^{-1} t$.

En los ejercicios 17 a 24, calcule el límite indicado, si existe.

- $\mathbf{R}(t) = (t - 2) \mathbf{i} + \frac{t^2 - 4}{t - 2} \mathbf{j} + t \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 1} \mathbf{i} + \frac{t + 1}{t - 1} \mathbf{j} + |t + 1| \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow -1} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{1 - \cos t}{t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{|t - 2|}{t - 2} \mathbf{i} + \frac{\sin \pi t}{t^2 - 1} \mathbf{j} + \frac{\tan \pi t}{t - 1} \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t} \mathbf{i} + \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \cos t} \mathbf{j} + \frac{t^2}{\sin t} \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = e^{t+1} \mathbf{i} + e^{1-t} \mathbf{j} + (1 + t)^{1/t} \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t)$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{\ln(t + 1)}{t} \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$; $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t)$

En los ejercicios 25 a 30, determine los números para los que la función vectorial es continua.

- $\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + \ln(t - 1) \mathbf{j} + \frac{1}{t - 2} \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = (t - 1) \mathbf{i} + \frac{1}{e^t - 1} \mathbf{j} + \frac{|t - 1|}{t - 1} \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sec t \mathbf{j} + \tan t \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \sin \pi t \mathbf{i} - \tan \pi t \mathbf{j} + \cot \pi t \mathbf{k}$

$$29. \mathbf{R}(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$30. \mathbf{R}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} \mathbf{i} + \frac{1 - \cos t}{t} \mathbf{j} + \frac{1 - e^t}{t} \mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ \mathbf{i} - \mathbf{k} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

En los ejercicios 31 a 42, dibuje la gráfica de la función vectorial.

$$31. \mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + (t + 1) \mathbf{j} \quad 32. \mathbf{R}(t) = \frac{4}{t^2} \mathbf{i} + \frac{4}{t} \mathbf{j}$$

$$33. \mathbf{R}(t) = (t - 2) \mathbf{i} + (t^2 + 4) \mathbf{j}$$

$$34. \mathbf{R}(t) = 3 \cosh t \mathbf{i} + 5 \sinh t \mathbf{j}$$

$$35. \mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + (6 - 4t) \mathbf{j} + (5 - 2t) \mathbf{k}$$

$$36. \mathbf{R}(t) = (t + 1) \mathbf{i} + (2t - 3) \mathbf{j} + (2t + 3) \mathbf{k}$$

$$37. \mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$38. \mathbf{R}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$39. \mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$40. \mathbf{R}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \frac{1}{2} t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

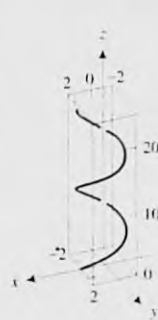
$$41. \mathbf{R}(t) = 3t \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$$

$$42. \mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \frac{3}{2} t^3 \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$$

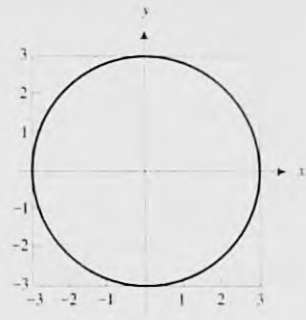
En los ejercicios 43 a 46, las figuras (a)-(c) son gráficas, generadas en una computadora, de la curva del ejercicio indicado. Relacione la gráfica con uno de los puntos de vista dados.

$$43. \text{Ejercicio 37; } (0, 0, 8), (0, 8, 0) \text{ y } (4, 8, 4).$$

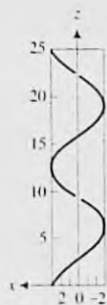
$$44. \text{Ejercicio 38; } (0, 0, 28), (0, 28, 0) \text{ y } (14, 28, 14).$$



(a)

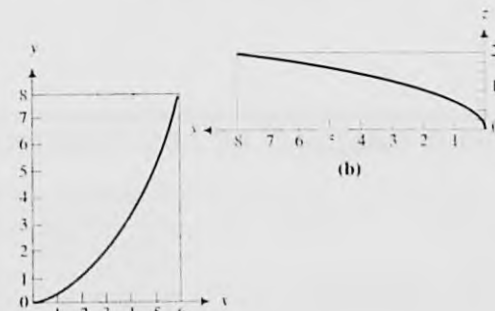


(b)

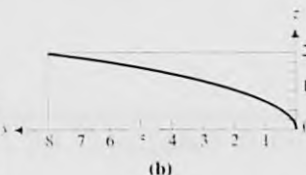


(c)

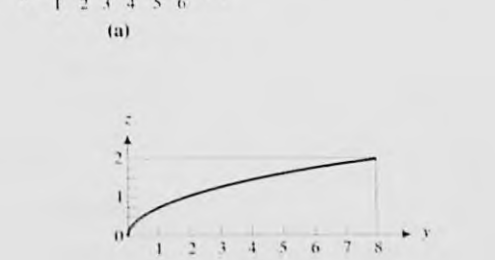
$$45. \text{Ejercicio 41; } (10, 0, 0), (-10, 0, 0) \text{ y } (0, 0, 10).$$



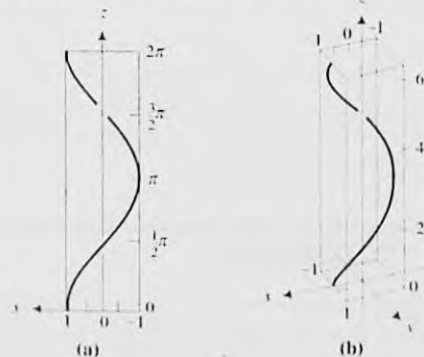
(a)



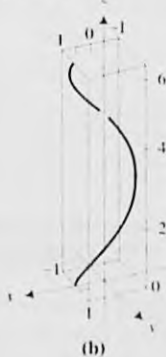
(b)



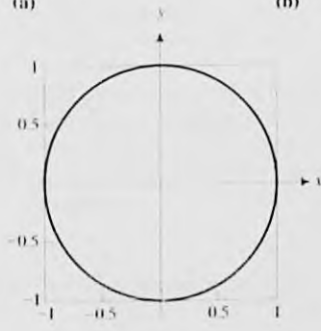
(c)



(a)

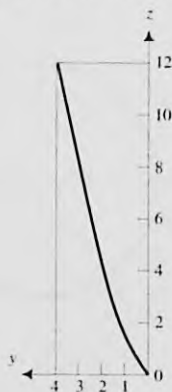


(b)

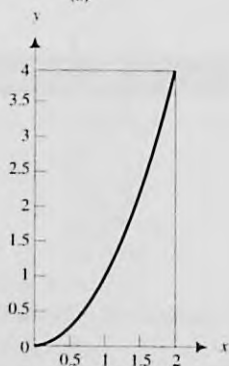


(c)

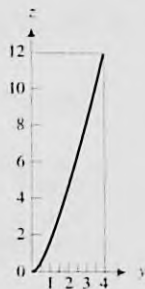
46. Ejercicio 42; $(15, 0, 0)$, $(-15, 0, 0)$ y $(0, 0, 15)$.



(a)



(b)



(c)

En los ejercicios 47 a 49, demuestre el teorema de límites si $\mathbf{U}(t)$ y $\mathbf{V}(t)$ son funciones vectoriales tales que $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{U}(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t)$ existen.

$$47. \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{U}(t) + \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{U}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t)$$

$$48. \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{U}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t)$$

$$49. \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{U}(t) \times \mathbf{V}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{U}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t)$$

50. Si f es una función real tal que $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ existe y \mathbf{V} es una función vectorial tal que $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t)$ existe, demuestre que

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t)\mathbf{V}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{V}(t).$$

51. Demuestre que si la función vectorial \mathbf{V} es continua en un número a , entonces $\|\mathbf{V}(t)\|$ es continua en a .

52. En lugar de la definición 11.1.3, el límite de una función vectorial puede definirse como sigue: el límite de $\mathbf{R}(t)$ cuando t tiende a a es el vector \mathbf{L} si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |t - a| < \delta \text{ entonces } \|\mathbf{R}(t) - \mathbf{L}\| < \epsilon$$

Sin emplear las palabras *límite*, *tiende* o *aproxima* y sin utilizar símbolos tales como ϵ y δ , exprese en palabras lo que esto significa.

11.2 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES VECTORIALES

El estudio de curvas y superficies mediante el Cálculo constituyen los temas principales de un curso de *geometría diferencial*, de la cual se presentará una breve introducción en las secciones 11.3 y 11.4; mientras que en la sección 11.5, se aplicará el Cálculo al *movimiento curvilíneo*. En esta sección se prepara el terreno para estos temas.

Las definiciones de derivadas e integrales indefinidas de funciones vectoriales involucran las definiciones correspondientes para funciones reales, de igual manera en que se estudiaron en la sección 11.1 límites y continuidad de estas funciones. En la siguiente definición de derivada, la expresión

$$\frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

se utiliza para indicar la división de un vector entre un escalar y significa

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]$$

11.2.1 Definición de la derivada de una función vectorial

Si \mathbf{R} es una función vectorial, entonces la derivada de \mathbf{R} es una función vectorial, denotada por \mathbf{R}' y definida por

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

si este límite existe.

La notación $D_t \mathbf{R}(t)$ se emplea en ocasiones en lugar de $\mathbf{R}'(t)$.

El teorema siguiente se deduce de la definición 11.2.1 y de la definición de la derivada de una función real.

11.2.2 Teorema

Si \mathbf{R} es una función vectorial definida por

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

si $f'(t)$, $g'(t)$ y $h'(t)$ existen.

Demostración De la definición 11.2.1

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si $\mathbf{R}(t) = (2 + \sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$. ◀

Al considerar las representaciones de los vectores $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ y $\mathbf{R}'(t)$ se obtiene una interpretación geométrica de la definición 11.2.1. Refiérase a la figura 1. La curva C es descrita por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ conforme t toma todos los valores del dominio de \mathbf{R} . Sea \overline{OP} la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y \overline{OQ} la representación de posición de $\mathbf{R}(t + \Delta t)$. Entonces $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ es un vector para el cual \overline{PQ} es una representación. Si el vector $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ se multiplica por el escalar $1/\Delta t$, se obtiene un vector que tiene la misma dirección y cuyo módulo es $1/|\Delta t|$ veces el módulo de $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$. Conforme Δt se aproxima a cero, el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de C , y el vector $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ tiende a un vector que tiene una de sus representaciones tangente a la curva C en el punto P .

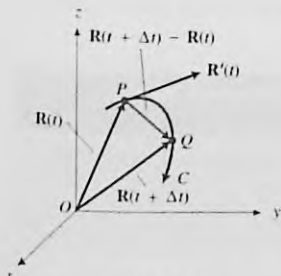


FIGURA 1

Observe que para vectores del plano donde

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

la dirección de $\mathbf{R}'(t)$ está dada por θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) donde $\tan \theta = g'(t)/f'(t)$; esto es, con $x = f(t)$ y $y = g(t)$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Las derivadas de orden superior de funciones vectoriales se definen de manera similar a las derivadas de orden superior para funciones reales. De este modo, si \mathbf{R} es una función vectorial, la segunda derivada de \mathbf{R} , denotada por $\mathbf{R}''(t)$, está dada por

$$\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)]$$

La notación $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ puede emplearse en lugar de $\mathbf{R}''(t)$. Al aplicar el teorema 11.2.2 a $\mathbf{R}(t)$, se tiene

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

si $f''(t)$, $g''(t)$ y $h''(t)$ existen.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - \frac{1}{t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j} + \frac{2}{t^3}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{2}{t^3}\mathbf{j} - \frac{6}{t^4}\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

11.2.3 Definición de función vectorial diferenciable en un intervalo

Se dice que una función vectorial \mathbf{R} es diferenciable en un intervalo si $\mathbf{R}'(t)$ existe para todos los valores de t del intervalo.

Los teoremas siguientes proporcionan fórmulas de diferenciación para funciones vectoriales. Las demostraciones se basan en el teorema 11.2.2 y los teoremas de diferenciación de funciones reales.

11.2.4 Teorema La derivada de la suma de dos funciones vectoriales

Si \mathbf{R} y \mathbf{Q} son dos funciones vectoriales diferenciables en un intervalo, entonces $\mathbf{R} + \mathbf{Q}$ es diferenciable en el intervalo, y

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 29).

▷ **EJEMPLO 1** Verifique el teorema 11.2.4 si

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Solución

$$\begin{aligned}
 D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t[(t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}) + (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})] \\
 &= D_t[(t^2 + \sin t)\mathbf{i} + (t-1 + \cos t)\mathbf{j}] \\
 &= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j} \\
 D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] + D_t(\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) \\
 &= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}) \\
 &= (2t + \cos t)\mathbf{i} + (1 - \sin t)\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

Por tanto, $D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) + D_t\mathbf{Q}(t)$. ◀

11.2.5 Teorema La derivada del producto punto de dos funciones vectoriales

Si \mathbf{R} y \mathbf{Q} son dos funciones vectoriales diferenciables en un intervalo, entonces $\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$ es diferenciable en el intervalo, y

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)]$$

Demostración Se demostrará el teorema para vectores de V_2 . La demostración para vectores de V_3 es, por supuesto, similar. Sean

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

Entonces por el teorema 11.2.2,

$$\begin{aligned}
 D_t\mathbf{R}(t) &= f_1'(t)\mathbf{i} + g_1'(t)\mathbf{j} & D_t\mathbf{Q}(t) &= f_2'(t)\mathbf{i} + g_2'(t)\mathbf{j} \\
 \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) &= [f_1(t)][f_2(t)] + [g_1(t)][g_2(t)]
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] &= [f_1'(t)][f_2(t)] + [f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)] \\
 &= \{[f_1'(t)][f_2(t)] + [g_1'(t)][g_2(t)]\} + \{[f_1(t)][f_2'(t)] + [g_1(t)][g_2'(t)]\} \\
 &= [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)] \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 2** Verifique el teorema 11.2.5 para las funciones vectoriales del ejemplo 1.

Solución Las funciones son

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Así, $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = t^2 \sin t + (t-1) \cos t$. Por tanto,

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = 2t \sin t + t^2 \cos t + \cos t + (t-1)(-\sin t) = (t+1) \sin t + (t^2+1) \cos t \quad (1)$$

Como $D_t\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $D_t\mathbf{Q}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$, se tiene

$$\begin{aligned}
 [D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{Q}(t)] &= (2t\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}) + [t^2\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] \cdot (\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}) \\
 &= (2t \sin t + \cos t) + [t^2 \cos t - (t-1) \sin t] \\
 &= (t+1) \sin t + (t^2+1) \cos t \quad (2)
 \end{aligned}$$

Al comparar (1) y (2) se observa que se cumple el teorema 11.2.5 para estas funciones. ◀

11.2.6 Teorema La derivada del producto de una función real y una función vectorial

Si \mathbf{R} es una función vectorial diferenciable en un intervalo y f es una función real diferenciable en el intervalo, entonces

$$D_t\{[f(t)]\mathbf{R}(t)\} = [D_t f(t)]\mathbf{R}(t) + f(t) D_t \mathbf{R}(t)$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 30).

El teorema siguiente que trata a la derivada del producto cruz de dos funciones vectoriales, es similar a la fórmula correspondiente para la derivada del producto de dos funciones reales; sin embargo, es importante mantener el orden correcto de las funciones vectoriales debido a que el producto cruz no es conmutativo.

11.2.7 Teorema La derivada del producto cruz de dos funciones vectoriales

Si \mathbf{R} y \mathbf{Q} son dos funciones vectoriales diferenciables, entonces

$$D_t[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t)$$

para todos los valores de t para los cuales $\mathbf{R}'(t)$ y $\mathbf{Q}'(t)$ existen.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 31).

11.2.8 Teorema La regla de la cadena para funciones vectoriales

Suponga que \mathbf{F} es una función vectorial, h es una función real y \mathbf{G} es la función vectorial definida por $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$. Si $\phi = h(t)$ y $\frac{d\phi}{dt}$ y $D_\phi \mathbf{G}(t)$ existen, entonces $D_t \mathbf{G}(t)$ existe y está dada por

$$D_t \mathbf{G}(t) = [D_\phi \mathbf{G}(t)] \frac{d\phi}{dt}$$

La demostración, dejada como ejercicio (vea el ejercicio 32), se basa en el teorema 11.2.2 y la regla de la cadena para funciones reales.

EJEMPLO 3 Verifique el teorema 11.2.8 si las funciones \mathbf{F} y h están definidas por

$$\mathbf{F}(\phi) = \phi^2 \mathbf{i} + e^\phi \mathbf{j} + \ln \phi \mathbf{k} \quad \text{y} \quad h(t) = \sin t$$

Solución Con $\phi = h(t)$ y $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$

$$\phi = \sin t \quad \text{y} \quad \mathbf{G}(t) = \sin^2 t \mathbf{i} + e^{\sin t} \mathbf{j} + \ln \sin t \mathbf{k}$$

Al calcular $D_t \mathbf{G}(t)$ mediante el teorema 11.2.2, se obtiene

$$D_t \mathbf{G}(t) = 2 \sin t \cos t \mathbf{i} + e^{\sin t} \cos t \mathbf{j} + \cot t \mathbf{k} \quad (3)$$

Ahora se calcula el miembro derecho de la ecuación del teorema 11.2.8. Puesto que $\mathbf{G}(t)$ también puede expresarse como $\phi^2\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} + \ln \phi\mathbf{k}$, se tiene

$$D_{\phi}[\mathbf{G}(t)] \frac{d\phi}{dt} = \left(2\phi\mathbf{i} + e^{\phi}\mathbf{j} + \frac{1}{\phi}\mathbf{k} \right) \frac{d\phi}{dt}$$

Pero $\phi = \sin t$; de modo que

$$\begin{aligned} D_{\phi}[\mathbf{G}(t)] \frac{d\phi}{dt} &= \left(2 \sin t \mathbf{i} + e^{\sin t} \mathbf{j} + \frac{1}{\sin t} \mathbf{k} \right) \cos t \\ &= 2 \sin t \cos t \mathbf{i} + e^{\sin t} \cos t \mathbf{j} + \cot t \mathbf{k} \end{aligned}$$

De (3), el miembro derecho de esta ecuación es $D_t \mathbf{G}(t)$. Por tanto,

$$D_{\phi}[\mathbf{G}(t)] \frac{d\phi}{dt} = D_t \mathbf{G}(t)$$

lo cual verifica el teorema 11.2.8 para estas funciones. \blacktriangleleft

El teorema siguiente será empleado posteriormente.

11.2.9 Teorema

Si \mathbf{R} es una función vectorial diferenciable en un intervalo y $\|\mathbf{R}(t)\|$ es constante para toda t del intervalo, entonces los vectores $\mathbf{R}(t)$ y $D_t \mathbf{R}(t)$ son ortogonales.

Demostración Sea $\|\mathbf{R}(t)\| = k$. Entonces por el teorema 10.3.3 (iii)

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = k^2$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t y al aplicar el teorema 11.2.5 se obtiene

$$\begin{aligned} [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{R}(t)] &= 0 \\ 2\mathbf{R}(t) \cdot D_t \mathbf{R}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Como el producto punto de $\mathbf{R}(t)$ y $D_t \mathbf{R}(t)$ es cero, se concluye, de la definición 10.3.7, que $\mathbf{R}(t)$ y $D_t \mathbf{R}(t)$ son ortogonales. \blacksquare

Observe la figura 2 para la interpretación geométrica del teorema 11.2.9. Debido a que el vector $\mathbf{R}(t)$ tiene módulo constante k , la representación de posición \vec{OP} de $\mathbf{R}(t)$ tiene su punto terminal P en la circunferencia con centro en el origen y radio k . Por esta razón la gráfica de \mathbf{R} es esta circunferencia, un cuarto de la cual se muestra en la figura 2 junto con \vec{OP} y la representación \vec{PB} de $D_t \mathbf{R}(t)$. Como $D_t \mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$ son ortogonales, entonces \vec{OP} es perpendicular a \vec{PB} .

A continuación se definirá la integral indefinida (o antiderivada) de una función vectorial.

11.2.10 Definición de la integral indefinida de una función vectorial

Si \mathbf{Q} es la función vectorial determinada por

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

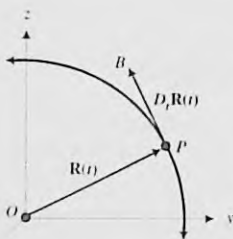


FIGURA 2

entonces la integral indefinida de $Q(t)$ está definida por

$$\int Q(t) dt = i \int f(t) dt + j \int g(t) dt + k \int h(t) dt \quad (4)$$

Esta definición es consistente con la definición de la integral indefinida de una función real debido a que si se obtiene la derivada en los dos miembros de (4) con respecto a t , resulta

$$\begin{aligned} D_t \int Q(t) dt &= i D_t \int f(t) dt + j D_t \int g(t) dt + k D_t \int h(t) dt \\ &= i f(t) + j g(t) + k h(t) \end{aligned}$$

De cada una de las integrales indefinidas del miembro derecho de (4) se obtiene una constante escalar arbitraria. Cuando cada uno de estos escalares se multiplica por i , j o k , resulta de la suma un vector constante arbitrario. Así,

$$\int Q(t) dt = R(t) + C$$

donde $D_t R(t) = Q(t)$ y C es un vector constante arbitrario.

► **EJEMPLO 4** Determine la función vectorial más general cuya derivada sea

$$Q(t) = \sin t \mathbf{i} - 3 \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

Solución Si $D_t R(t) = Q(t)$, entonces $R(t) = \int Q(t) dt$; esto es,

$$\begin{aligned} R(t) &= i \int \sin t dt - 3j \int \cos t dt + k \int 2t dt \\ &= i(-\cos t + C_1) - 3j(\sin t + C_2) + k(t^2 + C_3) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + (C_1 \mathbf{i} - 3C_2 \mathbf{j} + C_3 \mathbf{k}) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + C \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 5** Obtenga el vector $R(t)$ para el cual

$$D_t R(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad R(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Solución

$$\begin{aligned} R(t) &= i \int e^{-t} dt + j \int e^t dt + k \int 3 dt \\ &= i(-e^{-t} + C_1) + j(e^t + C_2) + k(3t + C_3) \end{aligned}$$

Como $R(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k} = i(-1 + C_1) + j(1 + C_2) + k(C_3)$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} C_1 - 1 = 1 & C_2 + 1 = 1 & C_3 = 5 \\ C_1 = 2 & C_2 = 0 & \end{array}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + (3t + 5)\mathbf{k}$$

En la sección 9.2 se estudió el teorema 9.2.3 el cual establece que si C es una curva plana cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si L unidades es la longitud de arco de C desde el punto $(f(a), g(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b))$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Puesto que una ecuación vectorial de C es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, esta ecuación puede escribirse como

$$L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\| dt \quad (5)$$

► **EJEMPLO 6** Calcule la longitud de arco descrito por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ conforme t se incrementa de 1 a 4 si

$$\mathbf{R}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}$$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{j} \\ \|\mathbf{R}'(t)\| &= \sqrt{(e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \sin t)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t} \\ &= e^t \sqrt{2} \end{aligned}$$

De la fórmula (5),

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{2} e^t dt \\ &= \sqrt{2} e^t \Big|_1^4 \\ &= \sqrt{2}(e^4 - e) \end{aligned}$$

La longitud de arco de una curva en el espacio tridimensional puede definirse exactamente como se definió la longitud de arco de una curva plana en la definición 9.2.1. Además, si C es la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ o, equivalentemente, tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces se puede demostrar, en la misma forma en que se probó el teorema 9.2.3, el teorema siguiente.

11.2.11 Teorema

Sea C la curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, y suponga que f' , g' y h' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces si L es la longitud de arco de C desde el punto $(f(a), g(a), h(a))$ hasta el punto $(f(b), g(b), h(b))$,

$$L = \int_a^b \|\mathbf{R}'(t)\| dt$$

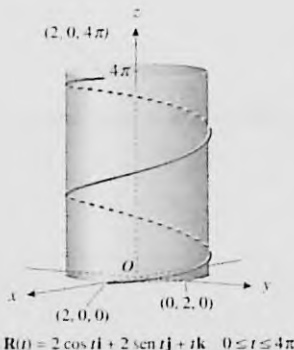


FIGURA 3

► **EJEMPLO 7** Calcule la longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 1 de la sección 11.1:

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 4\pi$.

Solución En la sección 11.1 se dibujó la hélice, la cual se muestra en la figura 3. De la ecuación vectorial dada,

$$\mathbf{R}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

De modo que, del teorema 11.2.11,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{5} dt \\ &= 4\pi\sqrt{5} \\ &= 28.10 \end{aligned}$$

La integral definida del ejemplo anterior fue evaluada fácilmente, pero como se dijo en las discusiones sobre la longitud de arco, la mayoría de las veces sólo se puede aproximar el valor. Esta situación se presenta en los ejercicios 53 a 56, donde se le pedirá que emplee el procedimiento NINT en la graficadora a fin de obtener una aproximación de la longitud de un arco.

EJERCICIOS 11.2

En los ejercicios 1 a 10, calcule $\mathbf{R}'(t)$ y $\mathbf{R}''(t)$.

- $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{t-1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t-2}{t}\mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1-5t}\mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

- $\mathbf{R}(t) = \tan^{-1} t\mathbf{i} + \sin^{-1} t\mathbf{j} + \cos^{-1} t\mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = (e^{3t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{3t}\mathbf{j} + 3 \cdot 2^t\mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = 5 \sin 2t\mathbf{i} - \sec 4t\mathbf{j} + 4 \cos 2t\mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \tan 3t\mathbf{i} + \ln \sin t\mathbf{j} - \frac{1}{t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 11 a 14, obtenga $D_t \|\mathbf{R}(t)\|$.

- $\mathbf{R}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}$
- $\mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{R}(t) = \sin 3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + 2e^{3t}\mathbf{k}$

14. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2 + 1}\mathbf{i} + \sqrt{t^2 - 1}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 18, verifique el teorema 11.2.4 para las funciones vectoriales indicadas.

15. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + e^t)\mathbf{i} + (t - e^{2t})\mathbf{j}$;

$\mathbf{Q}(t) = (t^3 + 2e^t)\mathbf{i} - (3t + e^{2t})\mathbf{j}$

16. $\mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} - \sin 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{Q}(t) = \sin^2 t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j}$

17. $\mathbf{R}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \sin 2t\mathbf{k}$;

$\mathbf{Q}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{R}(t) = e^{3t}\mathbf{i} - 4e^{3t}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{Q}(t) = e^t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - 2e^{4t}\mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 22, verifique el teorema 11.2.5 para las funciones vectoriales del ejercicio indicado.

19. Ejercicio 15

20. Ejercicio 16

21. Ejercicio 17

22. Ejercicio 18

En los ejercicios 23 y 24, verifique el teorema 11.2.6 para las funciones dadas.

23. $f(t) = \cos 2t$; \mathbf{R} es la función del ejercicio 9.

24. $f(t) = e^t$; \mathbf{R} es la función del ejercicio 8.

En los ejercicios 25 y 26, verifique el teorema 11.2.7 para las funciones vectoriales dadas del ejercicio indicado.

25. Ejercicio 17

26. Ejercicio 18

En los ejercicios 27 y 28, verifique el teorema 11.2.8 para las funciones indicadas.

27. $\mathbf{F}(\phi) = \phi\mathbf{i} + \phi^2\mathbf{j} + \ln \phi\mathbf{k}$ y $h(t) = e^t$

28. $\mathbf{F}(\phi) = \sin \phi\mathbf{i} + \cos \phi\mathbf{j} + \phi\mathbf{k}$ y $h(t) = \sin^{-1} t$

29. Demuestre el teorema 11.2.4.

30. Demuestre el teorema 11.2.6.

31. Demuestre el teorema 11.2.7.

32. Demuestre el teorema 11.2.8.

En los ejercicios 33 a 40, obtenga la función vectorial más general cuya derivada tenga el valor de función indicado.

33. $\tan t\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j}$

34. $(t^2 - 9)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$

35. $\ln t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

36. $\frac{1}{4 + t^2}\mathbf{i} - \frac{4}{1 - t^2}\mathbf{j}$

37. $e^{3t}\mathbf{i} + e^{-3t}\mathbf{j} - te^{3t}\mathbf{k}$

38. $3^t\mathbf{i} - 2^t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

39. $\tan t\mathbf{i} + \sec t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$

40. $t \sin t\mathbf{i} - t \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

41. Si $\mathbf{R}'(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t-2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(3) = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

42. Si $\mathbf{R}(t) = \sin^2 t\mathbf{i} + 2 \cos^2 t\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(\pi) = \mathbf{0}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

43. Si $\mathbf{R}'(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

44. Si $\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t+1}\mathbf{i} - \tan t\mathbf{j} + \frac{t}{t^2-1}\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, calcule $\mathbf{R}(t)$.

En los ejercicios 45 y 46 haga lo siguiente: (a) obtenga una ecuación cartesiana de la curva descrita por el punto terminal de la representación de posición de $\mathbf{R}'(t)$, (b) calcule $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t)$ e interprete el resultado geoméricamente.

45. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$

46. $\mathbf{R}(t) = \cosh t\mathbf{i} - \sinh t\mathbf{j}$

En los ejercicios 47 y 48, si $\alpha(t)$ es la medida en radianes del ángulo entre $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{Q}(t)$, calcule $D_t \alpha(t)$.

47. $\mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q}(t) = 6e^{3t}\mathbf{j}$

48. $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q}(t) = 3t\mathbf{i}$

En los ejercicios 49 a 52, calcule la longitud exacta del arco desde t_1 hasta t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.

49. $\mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$; $t_1 = -1$; $t_2 = 2$

50. $\mathbf{R}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$

51. $\mathbf{R}(t) = 4t^{3/2}\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 2$

52. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 1$

En los ejercicios 53 a 56, utilice el procedimiento NINT de la graficadora para obtener un valor aproximado, con cuatro dígitos significativos, de la longitud de arco de t_1 a t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial indicada.

53. La cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 2$

54. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2$

55. $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t_1 = -1$; $t_2 = 1$

56. $\mathbf{R}(t) = \sin 2t\mathbf{i} + \cos 2t\mathbf{j} + t^{1/2}\mathbf{k}$; $t_1 = 0$; $t_2 = 4$

57. Suponga que \mathbf{R} y \mathbf{R}' son funciones vectoriales definidas en un intervalo y que \mathbf{R}' es diferenciable en el intervalo. Demuestre que

$$D_t \|\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}'(t)\| = \|\mathbf{R}'(t)\|^2 + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$$

58. Si $\|\mathbf{R}(t)\| = h(t)$, demuestre que

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = [h(t)]h'(t)$$

59. Si la función vectorial \mathbf{R} y la función real f son diferenciables en un intervalo y $f(t) \neq 0$ en el intervalo, demuestre que \mathbf{R}/f es también diferenciable en el intervalo y

$$D_t \left[\frac{\mathbf{R}(t)}{f(t)} \right] = \frac{f(t)\mathbf{R}'(t) - f'(t)\mathbf{R}(t)}{[f(t)]^2}$$

60. Demuestre que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son vectores constantes y f y g son funciones integrables, entonces

$$\int [\mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t)] dt = \mathbf{A} \int f(t) dt + \mathbf{B} \int g(t) dt$$

Sugerencia: exprese \mathbf{A} y \mathbf{B} en términos de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

61. Utilice el teorema 4.1.2 para funciones reales a fin de probar el teorema siguiente que corresponde a funciones vectoriales: si \mathbf{R} y \mathbf{Q} son dos funciones vectoriales ta-

les que $\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}'(t)$ para toda t en un intervalo I , entonces existe un vector constante \mathbf{K} tal que $\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}$ para toda t en I .

62. Emplee el teorema del ejercicio 61 para demostrar el siguiente teorema que corresponde al teorema 4.1.3 para funciones reales: si $F(t)$ es una antiderivada particular de \mathbf{R} en el intervalo I , entonces cada antiderivada de \mathbf{R} en I está dada por $F(t) + \mathbf{C}$, donde \mathbf{C} es un vector constante arbitrario.
63. Dé una definición de la *integral definida de una función vectorial* de manera semejante a la de integral indefinida. Después utilice el primer teorema fundamental del cálculo (4.7.1) para demostrar el siguiente teorema que corresponde a funciones vectoriales: si la función \mathbf{R} es continua en

el intervalo cerrado $[a, b]$ y t es cualquier número de $[a, b]$, entonces

$$D_t \int_a^t \mathbf{R}(u) du = \mathbf{R}(t)$$

64. Utilice los teoremas de los ejercicios 62 y 63 para demostrar el teorema siguiente que corresponde al segundo teorema fundamental del cálculo (4.7.2): si la función \mathbf{R} es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $F(t)$ es cualquier antiderivada de \mathbf{R} en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b \mathbf{R}(t) dt = F(b) - F(a)$$

11.3 VECTORES TANGENTE UNITARIO Y NORMAL UNITARIO, Y LONGITUD DE ARCO COMO PARÁMETRO

Ahora se asociarán a cada punto de una curva dos vectores, el *vector tangente unitario* y el *vector normal unitario*. Estos vectores aparecen en muchas aplicaciones de las funciones vectoriales, algunas de las cuales se tratarán en las dos secciones próximas. En esta sección y en las secciones siguientes de este capítulo, se supondrá que una curva tiene dirección (u orientación) determinada por los valores crecientes del parámetro.

11.3.1 Definición de vector tangente unitario

Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de una curva C en un punto P de C el **vector tangente unitario** de C en P , denotado por $\mathbf{T}(t)$, es el vector unitario en la dirección de $D_t \mathbf{R}(t)$ si $D_t \mathbf{R}(t) \neq \mathbf{0}$.

Como el vector unitario en la dirección de $D_t \mathbf{R}(t)$ está dado por $D_t \mathbf{R}(t) / \|D_t \mathbf{R}(t)\|$, entonces

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \quad (1)$$

Del teorema 11.2.9, puesto que $\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario, $D_t \mathbf{T}(t)$ debe ser ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Mientras que $D_t \mathbf{T}(t)$ no necesariamente es un vector unitario, el vector $D_t \mathbf{T}(t) / \|D_t \mathbf{T}(t)\|$ es unitario y tiene la misma dirección de $D_t \mathbf{T}(t)$. Por tanto, $D_t \mathbf{T}(t) / \|D_t \mathbf{T}(t)\|$ es un vector ortogonal a $\mathbf{T}(t)$, y se denomina **vector normal unitario**.

11.3.2 Definición de vector normal unitario

Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario de la curva C en el punto P de C , el **vector normal unitario**, denotado por $\mathbf{N}(t)$, es el vector unitario en la dirección de $D_t \mathbf{T}(t)$.

De esta definición y de la discusión anterior,

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{T}(t)\|} \quad (2)$$

► **EJEMPLO 1** Calcule $T(t)$ y $N(t)$ para la curva que tiene la ecuación vectorial

$$R(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

Dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde $t = 2$ y las representaciones de $T(2)$ y $N(2)$ cuyo punto inicial es el punto para el cual $t = 2$.

Solución

$$\begin{aligned} D_t R(t) &= (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} & \|D_t R(t)\| &= \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} \\ & & &= \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)} \\ & & &= 3(t^2 + 1) \end{aligned}$$

De (1),

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{D_t R(t)}{\|D_t R(t)\|} \\ &= \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Al diferenciar $T(t)$ con respecto a t se obtiene

$$D_t T(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} \mathbf{j}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|D_t T(t)\| &= \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \frac{4(t^2 + 1)^2}{\sqrt{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \frac{2}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

De (2),

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{D_t T(t)}{\|D_t T(t)\|} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Ahora se calcularán $R(t)$, $T(t)$ y $N(t)$ para $t = 2$.

$$R(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \quad T(2) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \quad N(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

La curva y los vectores requeridos se muestran en la figura 1. ◀

Debido a que los vectores tangente y normal unitarios son ortogonales, el ángulo entre ellos es $\frac{1}{2}\pi$. Por lo que del teorema 10.5.8, se tiene

$$\begin{aligned} \|T(t) \times N(t)\| &= \|T(t)\| \|N(t)\| \sin \frac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

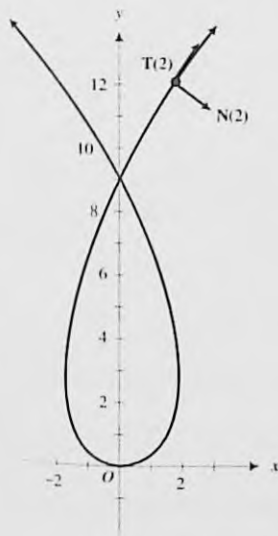


FIGURA 1

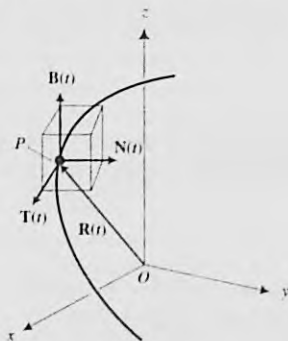


FIGURA 2

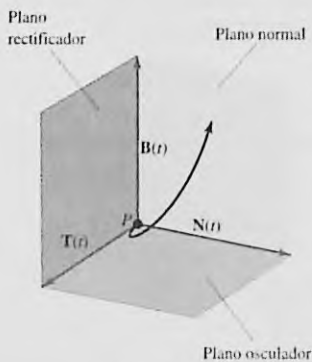


FIGURA 3

Por tanto, el producto cruz de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ es un vector unitario y, por el teorema 10.5.10 es ortogonal tanto a $\mathbf{T}(t)$ como a $\mathbf{N}(t)$. Este vector, llamado **vector binormal unitario** y denotado por $\mathbf{B}(t)$, está definido por

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \quad (3)$$

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de una curva C reciben el nombre de **triedro móvil (local, intrínseco o de Frenet)** de C , el cual es importante en el estudio de desplazamientos en el espacio. Vea la figura 2. El triedro móvil también se conoce como **sistema de referencia de Frenet**, en honor al matemático francés Jean-Frederic Frenet (1816-1900). Los planos determinados por las representaciones de los tres vectores en un punto del espacio tienen nombres específicos. Como se indica en la figura 3, las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ en el punto P forman el **plano osculador**, las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ forman el **plano rectificador**, y las representaciones de $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ forman el **plano normal**.

► **EJEMPLO 2** Obtenga el triedro móvil en cualquier punto de la hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad a > 0$$

Solución Con

$$D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = \sqrt{a^2 + 1}$$

se obtiene de (1)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Con

$$D_t \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j}) \quad \text{y} \quad \|D_t \mathbf{T}(t)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

se obtiene de (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j})}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}} \\ &= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \end{aligned}$$

Al aplicar (3) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + a \mathbf{k}) \end{aligned}$$

De la ecuación (1), el vector $D_t \mathbf{R}(t)$ puede expresarse como un escalar por el vector tangente unitario como sigue:

$$D_t \mathbf{R}(t) = \|D_t \mathbf{R}(t)\| \mathbf{T}(t) \quad (4)$$

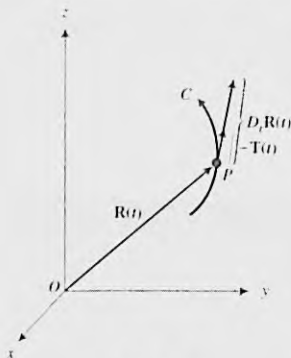


FIGURA 4

La figura 4 muestra una porción de la curva C junto con la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y las representaciones de $\mathbf{T}(t)$ y $D_t \mathbf{R}(t)$ cuyos puntos iniciales están en el punto P de C .

Ahora se usará (4) para calcular $D_t^2 \mathbf{R}(t)$. Al aplicar el teorema 11.2.6, se tiene

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = (D_t \|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) + \|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\| (D_t \mathbf{T}(t)) \quad (5)$$

De (2),

$$D_t \mathbf{T}(t) = \|\mathbf{D}_t \mathbf{T}(t)\| \mathbf{N}(t)$$

Si se sustituye de esta ecuación en (5) resulta

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = (D_t \|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) + (\|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\| \|\mathbf{D}_t \mathbf{T}(t)\|) \mathbf{N}(t) \quad (6)$$

Esta ecuación expresa el vector $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ como un escalar por el vector tangente unitario más un escalar por el vector normal unitario. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ del miembro derecho de (6) es la componente del vector $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ en la dirección del vector tangente unitario, mientras que el coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ es la componente de $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ en la dirección del vector normal unitario.

La figura 5 muestra la representación de posición de $\mathbf{R}(t)$ y la misma porción de la curva C que se muestra en la figura 4. También se muestran en la figura 5 las representaciones de los siguientes vectores, cuyos puntos iniciales están todos en el punto P de C :

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) \quad \mathbf{T}(t) \quad (D_t \|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\|) \mathbf{T}(t) \quad \mathbf{N}(t) \quad (\|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\| \|\mathbf{D}_t \mathbf{T}(t)\|) \mathbf{N}(t)$$

Observe que la representación del vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ está en el lado cóncavo de la curva.

En ocasiones, como en la siguiente sección donde se calcula la *curvatura*, es conveniente que el parámetro de una ecuación vectorial represente la longitud de arco. Por ejemplo, si una ecuación vectorial de la curva C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

entonces en lugar de t , puede emplearse como parámetro el número de unidades de la longitud de arco s desde un punto $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ de C , elegido arbitrariamente, al punto $P(f(t), g(t), h(t))$ de C . Considere que s aumenta conforme t crece, de modo que s es positivo si la longitud de arco se mide en la dirección de crecimiento de t y es negativa si se mide en la dirección opuesta. Por tanto, s es una distancia dirigida. A cada valor de s corresponde un solo punto P de C . En consecuencia, las coordenadas de P son funciones de s y s , a su vez, es una función de t , la cual, del teorema 11.2.11, está determinada por

$$s = \int_{t_0}^t \|\mathbf{D}_u \mathbf{R}(u)\| du$$

Del primer teorema fundamental del Cálculo

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{D}_t \mathbf{R}(t)\| \quad (7)$$

Al sustituir de (7) en (4) se obtiene

$$D_t \mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t) \quad (8)$$

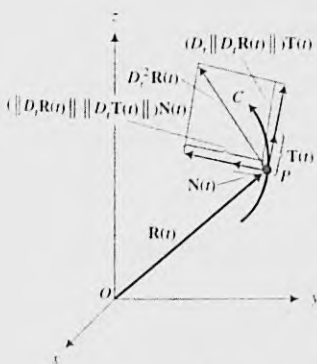


FIGURA 5

Si el parámetro de la ecuación vectorial de C es s en lugar de t , se obtiene de esta ecuación, al considerar $t = s$ y observando que $ds/ds = 1$

$$D_s \mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$$

Este resultado se establece como teorema.

11.3.3 Teorema

Si la ecuación vectorial de una curva C es

$$\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$$

donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto particular P_0 de C hasta el punto P , entonces el vector tangente unitario de C en P está dado por

$$\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$$

si existe.

Como se indicó en las secciones 9.2 y 11.2, la mayoría de las veces la fórmula para calcular la longitud de arco conduce a una integral definida para la que la integral indefinida correspondiente no puede evaluarse en forma cerrada, lo cual significa que sólo puede aproximarse la longitud de arco mediante técnicas numéricas o empleando el procedimiento NINT en la graficadora. Problemas semejantes se presentan cuando se tiene una ecuación vectorial de una curva que contiene un parámetro t y se desea obtener una ecuación vectorial de la curva que tenga como parámetro la longitud de arco s . Esto es, generalmente no puede expresarse s en términos de t . Sin embargo, con frecuencia se puede calcular ds/dt a partir de la ecuación (7), la cual regularmente satisface los propósitos.

► **EJEMPLO 3** Dada la curva C cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

calcule ds/dt .

Solución De (7),

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \|D_t \mathbf{R}(t)\| \\ &= \|3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}\| \\ &= \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1} \end{aligned}$$

Observe que para la curva del ejemplo anterior, si se desea expresar s en términos de t a partir de la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}$$

se necesita evaluar la integral $\int \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1} dt$.

En ocasiones puede expresarse s en términos de t en un tiempo más o menos grande, como en el ejemplo siguiente, donde las componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} son las mismas que en el ejemplo 3 pero la componente \mathbf{k} es 2 en lugar de t .

► **EJEMPLO 4** Dado que una ecuación vectorial de la curva L es

$$\mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad t \geq 0$$

determine una ecuación vectorial de L que tenga a s como parámetro, donde s unidades es la longitud de arco a partir del punto donde $t = 0$.

Solución Al derivar $\mathbf{R}(t)$ y calcular el módulo de $D_t\mathbf{R}(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} D_t\mathbf{R}(t) &= 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \|D_t\mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{9t^4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 4} \\ &= t\sqrt{9t^2 + 4} \quad (\text{porque } t \geq 0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= t\sqrt{9t^2 + 4} \\ s &= \int t\sqrt{9t^2 + 4} dt \\ &= \frac{1}{18} \int \sqrt{9t^2 + 4} (18t dt) \\ &= \frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Como $s = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene $C = -\frac{8}{27}$. De modo que

$$s = \frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} - \frac{8}{27}$$

Al resolver esta ecuación para t en términos de s se tiene

$$\begin{aligned} (9t^2 + 4)^{3/2} &= 27s + 8 \\ 9t^2 + 4 &= (27s + 8)^{2/3} \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$,

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}$$

Si se sustituye este valor de t en la ecuación vectorial de L se obtiene

$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{27} [(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2} \mathbf{i} + \frac{1}{9} [(27s + 8)^{2/3} - 4] \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Debido a que $D_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$, y si $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$,

$$\mathbf{T}(s) = f'(s)\mathbf{i} + g'(s)\mathbf{j} + h'(s)\mathbf{k}$$

Así, como $\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario,

$$[f'(s)]^2 + [g'(s)]^2 + [h'(s)]^2 = 1 \quad (9)$$

En el ejercicio 30 se le pedirá que utilice esta ecuación para verificar la respuesta del ejemplo 4.

EJERCICIOS 11.3

En los ejercicios 1 a 6, obtenga $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, y en $t = t_1$, dibuje una porción de la curva y las representaciones de $\mathbf{T}(t_1)$ y $\mathbf{N}(t_1)$ que tienen punto inicial en $t = t_1$.

- $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}\pi$
- $\mathbf{R}(t) = \cos 3t \mathbf{i} + \sin 3t \mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{3}\pi$
- $\mathbf{R}(t) = \ln \sin t \mathbf{i} + t \mathbf{j}, 0 < t < \pi; t_1 = \frac{1}{2}\pi$
- $\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} - \ln \cos t \mathbf{j}, -\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi; t_1 = 0$
- $\mathbf{R}(t) = (\frac{1}{3}t^3 - t) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}; t_1 = 2$
- $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3 \mathbf{j}; t_1 = 1$

En los ejercicios 7 a 10, calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

- $\mathbf{R}(t) = (\sin t - t \cos t) \mathbf{i} + (\cos t + t \sin t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \sin 3t \mathbf{i} - \cos 3t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$
- $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3 \mathbf{k}, t > 0$
- $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$

En los ejercicios 11 a 14, determine el triedro móvil de la curva en $t = t_1$.

- La curva del ejercicio 7; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.
- La curva del ejercicio 8; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$.
- La curva del ejercicio 9; $t_1 = 1$.
- La curva del ejercicio 10; $t_1 = 0$.

En los ejercicios 15 y 16, obtenga el triedro móvil en cualquier punto de la curva.

- $\mathbf{R}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$
- $\mathbf{R}(t) = \cosh t \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

En los ejercicios 17 a 22, obtenga ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal para la curva en $t = t_1$.

- La curva de los ejercicios 7 y 11; $t_1 = \frac{1}{2}\pi$.
- La curva de los ejercicios 10 y 14; $t_1 = 0$.
- La curva de los ejercicios 9 y 13; $t_1 = 1$.
- La curva de los ejercicios 8 y 12; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$.
- La curva del ejercicio 15; $t_1 = \frac{1}{4}\pi$.
- La curva del ejercicio 16; $t_1 = 0$.
- Utilice el resultado del ejemplo 2 para determinar el triedro móvil de la hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

en el punto donde $t = \frac{1}{2}\pi$. Después obtenga las ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal en ese punto.

- Calcule el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{R}(2)$ y $\mathbf{T}(2)$ para la curva $\mathbf{R}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + (t^3 - 3t) \mathbf{j}$.
- Obtenga el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{R}(\frac{1}{6}\pi)$ y $\mathbf{T}(\frac{1}{6}\pi)$ para la curva

$$\mathbf{R}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j} + \cos 3t \mathbf{k}.$$

- Determine el coseno del ángulo entre el vector \mathbf{j} y el vector tangente unitario en el punto donde $t = \pi$ de la curva $\mathbf{R}(t) = \cos 2t \mathbf{i} - 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}$.
- Calcule la medida en radianes del ángulo entre los vectores $\mathbf{N}(1)$ y $D_t^2 \mathbf{R}(1)$ para la curva $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t^2) \mathbf{i} + (t^3 - 3t) \mathbf{j}$.

En los ejercicios 28 y 29, para la curva dada, exprese la longitud de arco s como una función de t , donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$.

- La cicloide $\mathbf{R}(t) = 2(t - \sin t) \mathbf{i} + 2(1 - \cos t) \mathbf{j}$.

$$29. \mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^{3/2} \mathbf{j}$$

- Verifique la respuesta del ejemplo 4 empleando la ecuación (9).

En los ejercicios 31 a 36, obtenga una ecuación vectorial de la curva que tiene la longitud de arco s como parámetro, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$. Verifique la respuesta utilizando la ecuación (9).

- La curva del ejercicio 7.

- La curva del ejercicio 8.

- La curva del ejercicio 9.

- La curva del ejercicio 10.

- La curva del ejercicio 15.

- La curva del ejercicio 16.

- Demuestre que el vector tangente unitario de la hélice circular del ejemplo 2 forma un ángulo de medida constante, en radianes, con el vector unitario \mathbf{k} .

- Demuestre que si una partícula se mueve sobre una recta, el vector normal unitario no está definido.

11.4 CURVATURA

La *curvatura* es un concepto importante en el estudio de la geometría diferencial y del movimiento curvilíneo. Dicho concepto proporciona la tasa de variación (o cambio) de la dirección de una curva con respecto a la variación en su longitud.

El estudio de la curvatura se inicia con una curva plana C , y se considera que ϕ radianes es la medida del ángulo, medido en el sentido contrario al giro

de las manecillas del reloj, desde la dirección del eje x positivo hasta la dirección del vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ en el punto P de C . Refiérase a la figura 1 la cual muestra el ángulo ϕ y $\mathbf{T}(t)$, donde s unidades es la longitud de arco a partir de un punto P_0 de C hasta P . En el punto Q de C , la medida en radianes del ángulo que determina la dirección de $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ es $\phi + \Delta\phi$, y $s + \Delta s$ unidades es la longitud de arco de P_0 a Q . En la figura 1, tanto $\Delta\phi$ como Δs son números positivos. Las figuras 2, 3 y 4 muestran la situación cuando al menos uno de estos números es negativo. En las cuatro figuras, la longitud de arco de P a Q es $|\Delta s|$ unidades, y la razón $|\Delta\phi/\Delta s|$ parece ser la *curvatura promedio* a lo largo del arco PQ . De este modo, una definición adecuada para la curvatura de una curva plana sería el número $|d\phi/ds|$, el cual es el valor absoluto de la tasa de variación de ϕ con respecto a la medida de la longitud de arco a lo largo de la curva. Mientras que este número es consistente con la noción intuitiva de curvatura para una curva plana, tal definición no sería adecuada para la curvatura de una curva en el espacio tridimensional debido a que no se asocia un solo ángulo ϕ con el vector tangente unitario. A fin de llegar a una definición que se aplique tanto a curvas de R^2 como de R^3 , se procederá a obtener una expresión para $|d\phi/ds|$ en R^2 que también tenga significado para R^3 .

Refiérase a la figura 5 donde C es una curva en R^2 . Primero se expresa $\mathbf{T}(t)$ en términos de ϕ . Como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$, de la ecuación (5) de la sección 10.1 se tiene

$$\mathbf{T}(t) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$$

Al diferenciar esta ecuación con respecto a ϕ se obtiene

$$D_\phi \mathbf{T}(t) = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \quad (1)$$

Así,

$$\|D_\phi \mathbf{T}(t)\| = 1 \quad (2)$$

de modo que $D_\phi \mathbf{T}(t)$ es un vector unitario.

Ahora se obtendrá una expresión para $D_s \mathbf{T}(t)$, donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto de C elegido arbitrariamente hasta el punto P , y s se incrementa conforme t crece. De la regla de la cadena (teorema 11.2.8),

$$\begin{aligned} D_s \mathbf{T}(t) &= D_\phi \mathbf{T}(t) \frac{d\phi}{ds} \\ \|D_s \mathbf{T}(t)\| &= \left\| D_\phi \mathbf{T}(t) \frac{d\phi}{ds} \right\| \\ &= \|D_\phi \mathbf{T}(t)\| \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \end{aligned}$$

Si en la ecuación anterior se reemplaza $\|D_\phi \mathbf{T}(t)\|$ por 1, de acuerdo con (2), se obtiene

$$\|D_s \mathbf{T}(t)\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| \quad (3)$$

Como $\|D_s \mathbf{T}(t)\|$ tiene significado para curvas en R^3 así como en R^2 , se definirá lo que es la *curvatura* de una curva en un punto, y se definirá también el vector correspondiente o *vector curvatura*.

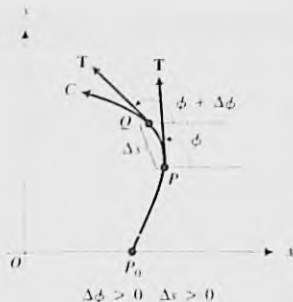


FIGURA 1

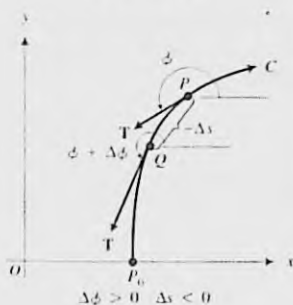


FIGURA 2

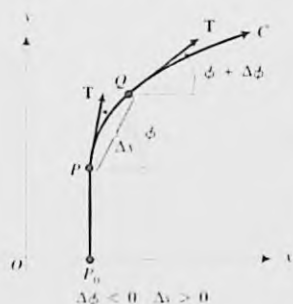


FIGURA 3



FIGURA 4

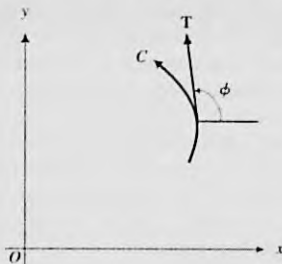


FIGURA 5

11.4.1 Definición de vector curvatura y curvatura

Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario a una curva C en un punto P , s es la longitud de arco medida desde un punto P de C elegido arbitrariamente, y s crece conforme t se incrementa, entonces el vector curvatura de C en P , denotado por $\mathbf{K}(t)$, se define como

$$\mathbf{K}(t) = D_s \mathbf{T}(t)$$

La curvatura de C en P , denotada por $K(t)$, es el módulo del vector curvatura; esto es

$$K(t) = \|D_s \mathbf{T}(t)\|$$

Con el fin de obtener el vector curvatura para una curva particular conviene tener una fórmula que exprese el vector curvatura en términos de las derivadas con respecto a t . De la regla de la cadena,

$$D_t \mathbf{T}(t) = D_s \mathbf{T}(t) \frac{ds}{dt}$$

De la ecuación (7) de la sección 11.3, $\frac{ds}{dt} = \|D_t \mathbf{R}(t)\|$. Así,

$$D_t \mathbf{T}(t) = [D_s \mathbf{T}(t)] \|D_t \mathbf{R}(t)\|$$

$$D_s \mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|}$$

Al sustituir de esta ecuación en la fórmula para $\mathbf{K}(t)$ de la definición 11.4.1, se obtiene

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \quad (4)$$

Como $K(t) = \|\mathbf{K}(t)\|$, la curvatura está dada por

$$K(t) = \frac{\|D_t \mathbf{T}(t)\|}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \quad (5)$$

► **EJEMPLO 1** Dada la circunferencia de radio a :

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} \quad a > 0$$

determine el vector curvatura y la curvatura para cualquier valor de t .

Solución

$$D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = a$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} & D_t \mathbf{T}(t) &= -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} \\ &= -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} = -\frac{\cos t}{a} \mathbf{i} - \frac{\sin t}{a} \mathbf{j}$$

En consecuencia, el vector curvatura y la curvatura están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= -\frac{1}{a} \cos t \mathbf{i} - \frac{1}{a} \sin t \mathbf{j} & K(t) &= \|\mathbf{K}(t)\| \\ & & &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

El resultado del ejemplo 1 afirma que la curvatura de una circunferencia es constante, lo cual es algo que se esperaba. Además, es el recíproco del radio.

► **EJEMPLO 2** Calcule la curvatura de la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = t^{-1} \mathbf{i} + 2 \ln t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

Solución

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{R}(t) &= -t^{-2} \mathbf{i} + 2t^{-1} \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} & \|D_t \mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{(-t^{-2})^2 + (2t^{-1})^2 + 2^2} \\ & & &= \sqrt{t^{-4} + 4t^{-2} + 4} \\ & & &= t^{-2} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= \frac{-t^{-2} \mathbf{i} + 2t^{-1} \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}}{t^{-2} + 2} \\ &= \frac{-\mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 2t^2 \mathbf{k}}{1 + 2t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{T}(t) &= \frac{(1 + 2t^2)(2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) - 4t(-\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k})}{(1 + 2t^2)^2} \\ &= \frac{4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D_t \mathbf{T}(t)\| &= \frac{\sqrt{(4t)^2 + (2 - 4t^2)^2 + (4t)^2}}{(1 + 2t^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{4 + 16t^2 + 16t^4}}{(1 + 2t^2)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{(1 + 2t^2)^2}}{(1 + 2t^2)^2} \\ &= \frac{2}{1 + 2t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\|D_t \mathbf{T}(t)\|}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= \frac{2}{t^{-2} + 2} \\ &= \frac{2t^2}{(1 + 2t^2)^2} \end{aligned}$$

Como puede verse en el ejemplo anterior, la determinación de la curvatura a partir de las fórmulas (4) y (5) puede ser larga y tediosa. El teorema

siguiente proporciona una fórmula más práctica para calcular la curvatura, la cual es más fácil aplicar que el procedimiento del ejemplo 2.

11.4.2 Teorema

Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de la curva C , entonces la curvatura $K(t)$ de C está determinada por

$$K(t) = \frac{\|D_t \mathbf{R}(t) \times D_t^2 \mathbf{R}(t)\|}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|^3}$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 56). Aunque el producto cruz no está definido para vectores bidimensionales, la fórmula del teorema también puede aplicarse a curvas en R^2 considerando la componente \mathbf{k} como 0.

► **EJEMPLO 3** Aplique la fórmula del teorema 11.4.2 a fin de obtener la curvatura de la curva del ejemplo 2.

Solución Una ecuación vectorial de la curva es

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= t^{-1}\mathbf{i} + 2 \ln t \mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \\ D_t \mathbf{R}(t) &= -t^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-1}\mathbf{j} + 2\mathbf{k} & \|D_t \mathbf{R}(t)\| &= t^{-2} + 2 \\ D_t^2 \mathbf{R}(t) &= 2t^{-3}\mathbf{i} - 2t^{-2}\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{R}(t) \times D_t^2 \mathbf{R}(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t^{-2} & 2t^{-1} & 2 \\ 2t^{-3} & -2t^{-2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4t^{-3}\mathbf{j} + 2t^{-4}\mathbf{k} - 4t^{-4}\mathbf{k} + 4t^{-2}\mathbf{i} \\ &= 4t^{-2}\mathbf{i} + 4t^{-3}\mathbf{j} - 2t^{-4}\mathbf{k} \\ \|D_t \mathbf{R}(t) \times D_t^2 \mathbf{R}(t)\| &= \sqrt{16t^{-4} + 16t^{-6} + 4t^{-8}} \\ &= 2t^{-2}\sqrt{4 + 4t^{-2} + t^{-4}} \\ &= 2t^{-2}(2 + t^{-2}) \end{aligned}$$

De la fórmula del teorema 11.4.2,

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{2t^{-2}(2 + t^{-2})}{(t^{-2} + 2)^3} \\ &= \frac{2t^{-2}}{(t^{-2} + 2)^2} \\ &= \frac{2t^2}{(1 + 2t^2)^2} \end{aligned}$$

Compare la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 2, lo cual debe convencerle de la ventaja obtenida al emplear el teorema 11.4.2.

Ahora suponga que la curva plana C tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ y que en un punto particular $P_0(f(t_0), g(t_0))$ la curvatura es $K(t_0) \neq 0$. Considere la circunferencia que tiene la curvatura constante $K(t_0)$, cuyo centro está en el lado cóncavo de C , y que es tangente a la curva C en P_0 . Del ejemplo 1, el radio de esta circunferencia es $1/K(t_0)$. Esta circunferencia se denomina **circunferencia osculatriz** (o **circunferencia de curvatura**) de C en P_0 , y su radio es el **radio de curvatura**, el cual se define formalmente a continuación.

11.4.3 Definición de radio de curvatura

Si $K(t_0)$ es la curvatura de la curva plana C en el punto P_0 , donde $t = t_0$, y $K(t_0) \neq 0$, entonces el **radio de curvatura** de C en P_0 , denotado por $\rho(t_0)$, se define como

$$\rho(t_0) = \frac{1}{K(t_0)}$$

EJEMPLO 4 Para la curva C que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

determine lo siguiente en el punto donde $t = 1$: (a) el vector tangente unitario; (b) la curvatura; (c) el radio de curvatura. Dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia osculatriz para $t = 1$.

Solución

$$D_t \mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \|D_t \mathbf{R}(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$D_t \mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) &= \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{\|D_t \mathbf{R}(t)\|} \\ &= -\frac{t}{2(1+t^2)^2} \mathbf{i} + \frac{1}{2(1+t^2)^2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t) &= \|\mathbf{K}(t)\| \\ &= \sqrt{\frac{t^2}{4(1+t^2)^4} + \frac{1}{4(1+t^2)^4}} \\ &= \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$(a) \mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \quad (b) K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad (c) \rho(1) = 4\sqrt{2}$$

La figura 6 muestra una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia osculatriz en $t = 1$. Para dibujar la curva se localizaron algunos puntos a partir de los valores de x y y proporcionados en la tabla 1 cuando t toma los valores $-2, -1, 0, 1$ y 2 . También observe que la curva tiene una recta tangente horizontal en $t = 0$.

Ahora se obtendrá una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana a partir de las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

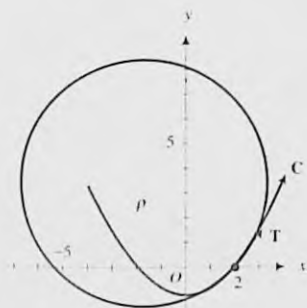


FIGURA 6

Tabla 1

t	x	y
-2	-4	3
-1	-2	0
0	0	-1
1	2	0
2	4	3

Como $K(t) = |d\phi/ds|$, primero se calcula $d\phi/ds$.

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Con la suposición de que s se incrementa cuando t crece, $\frac{ds}{dt} > 0$. De modo que,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \quad (6)$$

Para calcular $\frac{d\phi}{dt}$, se observa que como ϕ es la medida en radianes del ángulo que indica la dirección del vector tangente unitario,

$$\tan \phi = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Al diferenciar implícitamente con respecto a t los dos miembros de esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\sec^2 \phi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Debido a que $\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi$, se tiene

$$\sec^2 \phi = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Si se sustituye esta expresión para $\sec^2 \phi$ en (7) resulta

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Al reemplazar de esta ecuación en (6), y como $K(t) = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$, se tiene

$$K(t) = \frac{\left| \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{3/2}} \quad (8)$$

► **EJEMPLO 5** Calcule la curvatura de la curva C del ejemplo 4 empleando la fórmula (8).

Solución Las ecuaciones paramétricas para C son $x = 2t$ y $y = t^2 - 1$. En consecuencia,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Por tanto, de (8),

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{|2(2) - 2t(0)|}{[(2)^2 + (2t)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Suponga que la ecuación cartesiana de una curva se expresa en una de las formas $y = F(x)$ o $x = G(y)$. Se pueden emplear casos especiales de (8) para calcular la curvatura en tales situaciones.

Si $y = F(x)$ es una ecuación de la curva C , un conjunto de ecuaciones paramétricas de C es $x = t$ y $y = F(t)$. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Al sustituir en (8) se obtiene

$$K = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (9)$$

De manera semejante, si una ecuación de la curva C es $x = G(y)$,

$$K = \frac{\left| \frac{d^2x}{dy^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

► **EJEMPLO 6** Si la ecuación de la curva C es

$$y = \frac{1}{x}$$

calcule el radio de curvatura de C en el punto $(1, 1)$ y dibuje la curva y la circunferencia de osculatriz en $(1, 1)$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

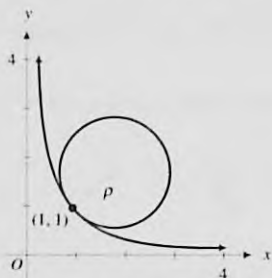


FIGURA 7

Se calcula K a partir de (9) y después se obtiene $\rho = 1/K$.

$$K = \frac{\left| \frac{2}{x^3} \right|}{\left[1 + \frac{1}{x^4} \right]^{3/2}} \quad \rho = \frac{(x^4 + 1)^{3/2}}{2|x^3|}$$

$$= \frac{2|x^3|}{(x^4 + 1)^{3/2}}$$

Por tanto, en $(1, 1)$, $\rho = \sqrt{2}$. La curva y la circunferencia oscultriz se muestran en la figura 7.

EJERCICIOS 11.4

En los ejercicios 1 a 6, para la curva y t_1 del ejercicio indicado de la sección 11.3, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto donde $t = t_1$. Utilice la fórmula (5) para obtener K . Dibuje una porción de la curva, el vector unitario tangente y la circunferencia oscultriz en $t = t_1$.

1. Ejercicio 1 2. Ejercicio 2 3. Ejercicio 3
4. Ejercicio 4 5. Ejercicio 5 6. Ejercicio 6

En los ejercicios 7 a 10, para los ejercicios indicados de la sección 11.3, calcule la curvatura K aplicando la fórmula (5).

7. Ejercicio 7 8. Ejercicio 8 9. Ejercicio 9
10. Ejercicio 10

En los ejercicios 11 a 14, utilice la fórmula del teorema 11.4.2 para obtener la curvatura de la curva del ejercicio indicado de esta sección.

11. Ejercicio 7 12. Ejercicio 8 13. Ejercicio 9
14. Ejercicio 10

En los ejercicios 15 y 16, aplique la fórmula del teorema 11.4.2 para calcular la curvatura de la curva en el punto indicado.

15. La cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; el origen
16. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = 0$

En los ejercicios 17 y 18, obtenga la curvatura K empleando la fórmula (8). Después calcule K y ρ en el punto donde $t = t_1$, y dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia oscultriz en $t = t_1$.

17. $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \frac{1}{1-t}$; $t_1 = 0$
18. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$; $t_1 = 0$

En los ejercicios 19 a 26, determine la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto indicado. Dibuje una porción de la curva, una parte de la recta tangente y la circunferencia oscultriz en el punto dado.

19. $y = 2\sqrt{x}$; $(0, 0)$ 20. $y^2 = x^3$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$
21. $y = e^x$; $(0, 1)$ 22. $y = \ln x$; $(e, 1)$
23. $x = \sin y$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$ 24. $4x^2 + 9y^2 = 36$; $(0, 2)$
25. $x = \sqrt{y-1}$; $(2, 5)$ 26. $x = \tan y$; $(1, \frac{1}{4}\pi)$

En los ejercicios 27 a 34, calcule el radio de curvatura en cualquier punto de la curva dada.

27. $y = \sin^{-1} x$ 28. $y = \ln \sec x$
29. $4x^2 - 9y^2 = 16$ 30. $x = \tan^{-1} y$
31. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$
32. $\mathbf{R}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}$
33. La cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$
34. La tractriz $x = t - a \tanh \frac{t}{a}$, $y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$

En los ejercicios 35 a 38, obtenga un punto de la curva dada en el que la curvatura es un máximo absoluto.

35. $y = e^x$ 36. $y = x^2 - 2x + 3$
37. $\mathbf{R}(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ 38. $y = \sin x$

39. El centro de la circunferencia oscultriz de la curva C en un punto P se denomina **centro de curvatura** en P . Demuestre que las coordenadas del centro de curvatura de C en $P(x, y)$ están dadas por

$$x_c = x - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$y_c = y + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

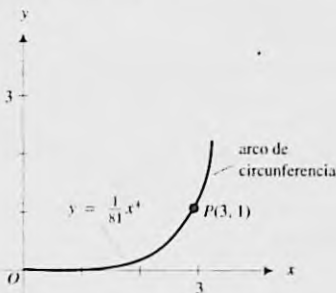
En los ejercicios 40 a 42, calcule la curvatura K , el radio de curvatura ρ y el centro de curvatura en el punto indicado. Dibuje la curva y la circunferencia oscultriz.

40. $y = \ln x$; $(1, 0)$ 41. $y = x^4 - x^2$; $(0, 0)$
42. $y = \cos x$; $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$

En los ejercicios 43 a 46, determine las coordenadas del centro de curvatura en cualquier punto.

43. $y^2 = 4px$ 44. $y^3 = a^2x$
45. $\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$
46. $\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$

47. La figura adjunta muestra una rampa de salida curvada desde un camino recto y un sistema coordenado cartesiano rectangular dispuesto de modo que la rampa comienza en el origen y el camino está sobre el eje x . La rampa coincide con la gráfica de $y = \frac{1}{81}x^4$ desde el origen hasta el punto $P(3, 1)$, y después con la circunferencia oscultriz de esta gráfica en P . Determine el centro y radio de curvatura de la circunferencia.



48. Demuestre que la curvatura de una recta es cero en cada uno de sus puntos.
49. Obtenga una ecuación de la circunferencia oscultriz de la curva $y = e^x$ en el punto $(0, 1)$.
50. Si una ecuación polar de una curva es $r = F(\theta)$, demuestre que la curvatura K está dada por la fórmula

$$K = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

En los ejercicios 51 a 54, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto indicado. Utilice la fórmula del ejercicio 50 para determinar K .

51. $r = 4 \cos 2\theta$; $\theta = \frac{1}{12}\pi$ 52. $r = 1 - \sin \theta$; $\theta = 0$
 53. $r = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$; $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 54. $r = a\theta$; $\theta = 1$
55. Demuestre que si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de la curva C , $K(t)$ es la curvatura de C en un punto P , y s unidades es la longitud de arco medida desde un punto P de C elegido arbitrariamente, entonces

$$D_s \mathbf{R}(t) \cdot D_s^3 \mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2$$

56. Demuestre el teorema 11.4.2.
57. Demuestre que la curvatura de la catenaria

$$y = a \cosh(x/a)$$

en cualquier punto (x, y) de la curva es a/y^2 . Dibuje la circunferencia oscultriz en el punto $(0, a)$. Explique por qué la curvatura K es un máximo absoluto en $(0, a)$ sin referirse a $K'(x)$.

58. Demuestre que la curvatura de la hélice circular

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} \quad a > 0, b > 0$$

es $a/(a^2 + b^2)$. Sugerencia: utilice la fórmula del teorema 11.4.2.

59. A partir del resultado del ejercicio 58, determine la curvatura máxima para la hélice de ese ejercicio para un valor fijo de b .
60. A partir del resultado del ejercicio 58, explique el efecto en la curvatura de la hélice si (i) b se incrementa para un valor fijo de a , y (ii) si a se disminuye para un valor fijo de b .

11.5 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En las discusiones anteriores acerca del movimiento de una partícula, éste se restringió al movimiento rectilíneo. Ahora se considerará el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, denominado **movimiento curvilíneo**.

Suponga que C es la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

donde t denota el tiempo. Conforme t varía, el punto terminal P de \vec{OP} describe la curva C , de modo que la posición de una partícula, que se mueve a lo largo de C , en el tiempo t unidades es el punto $P(f(t), g(t), h(t))$. A continuación se definirán el **vector velocidad** y el **vector aceleración**.

11.5.1 Definición de velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo

Sea C la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Si una partícula se mueve a lo largo de C de modo que su posición en cualquier tiempo t unidades es el punto $P(f(t), g(t), h(t))$, entonces el vector velocidad $\mathbf{V}(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{A}(t)$ en el punto P se definen como

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \Leftrightarrow \mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{R}''(t) \Leftrightarrow \mathbf{A}(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

donde $\mathbf{R}''(t)$ existe.

Puesto que la dirección de $\mathbf{R}'(t)$ en el punto P es la misma que la de la recta tangente a la curva en P , entonces el vector velocidad $\mathbf{V}(t)$ tiene esta dirección en P .

El módulo o intensidad (o también magnitud) del vector velocidad, $\|\mathbf{V}(t)\|$, es una medida de la **rapidez** de la partícula.

La figura 1 muestra las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto P de C .

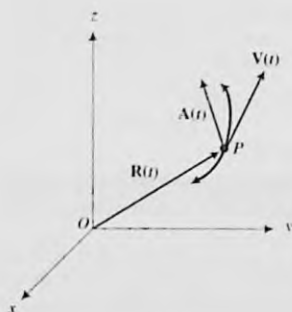


FIGURA 1

► **EJEMPLO 1** Una partícula se mueve a lo largo de la curva plana que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 4 \cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} + 4 \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j}$$

Calcule la rapidez de la partícula y el módulo del vector aceleración de la partícula a los t segundos si la distancia se mide en centímetros. Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto donde $t = \frac{1}{3}\pi$.

Solución Al calcular $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) & \mathbf{A}(t) &= \mathbf{V}'(t) \\ &= -2 \sin \frac{1}{2}t \mathbf{i} + 2 \cos \frac{1}{2}t \mathbf{j} & &= -\cos \frac{1}{2}t \mathbf{i} - \sin \frac{1}{2}t \mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{(-2 \sin \frac{1}{2}t)^2 + (2 \cos \frac{1}{2}t)^2} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{(-\cos \frac{1}{2}t)^2 + (-\sin \frac{1}{2}t)^2} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{1}{2}t + 4 \cos^2 \frac{1}{2}t} & &= 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la rapidez de la partícula es constante e igual a 2 cm/s. El módulo del vector aceleración también es constante e igual a 1 cm/s².

Las ecuaciones paramétricas de C son

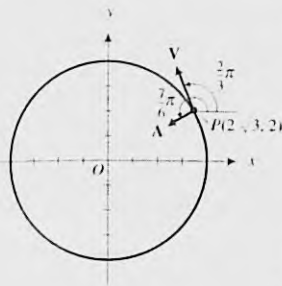
$$x = 4 \cos \frac{1}{2}t \quad y = 4 \sin \frac{1}{2}t \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

Al eliminar el parámetro t de estas ecuaciones se obtiene la ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 = 16$$

la cual es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4. Ahora se determinarán los vectores velocidad y aceleración en $t = \frac{1}{3}\pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\pi\right) &= -2 \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + 2 \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{j} & \mathbf{A}\left(\frac{1}{3}\pi\right) &= -\cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} - \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j} \\ &= -\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} & &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} \end{aligned}$$



$$x^2 + y^2 = 16$$

FIGURA 2

La dirección de $V(\frac{1}{3}\pi)$ está determinada por

$$\tan \theta_1 = -\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}\pi < \theta_1 < \pi$$

y la dirección de $A(\frac{1}{3}\pi)$ está dada por

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \pi < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi$$

Así, $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ y $\theta_2 = \frac{7}{6}\pi$. La figura 2 muestra la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración que tienen punto inicial para el cual $t = \frac{1}{3}\pi$.

De manera semejante en que se simuló el movimiento rectilíneo, se puede simular el movimiento curvilíneo en el plano en la graficadora como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Para observar el movimiento de la partícula sobre la circunferencia del ejemplo 1, active la graficadora en modo paramétrico e introduzca las ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Para el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$, considere $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 4\pi$ y $t_{\text{step}} = 0.1$. Oprima la tecla **TRACE**, después presione la tecla de *avance a la izquierda* y manténgala presionada hasta que el cursor esté en $t = 0$. Ahora presione la tecla de *avance a la derecha* y manténgala oprimida. El cursor representa la partícula que se desplaza a lo largo de la circunferencia.

EJEMPLO 2 La posición de una partícula que se mueve en el plano, en el tiempo t unidades, está dada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

(a) Calcule $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ y $\|\mathbf{A}(t)\|$. (b) Determine los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. (c) Dibuje la trayectoria de la partícula e ilustre las representaciones de los vectores de velocidad y aceleración en $t = 1$. (d) Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. (e) Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora activada en el modo punto.

Solución

- (a) $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) = (2t + 2)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$
- $$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{(2t + 2)^2 + (3t^2)^2} \quad \|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{4 + 36t^2}$$
- $$= \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 8t + 4}$$
- (b) $\|\mathbf{V}(1)\| = 5$ $\|\mathbf{A}(1)\| = \sqrt{40} \approx 6.32$

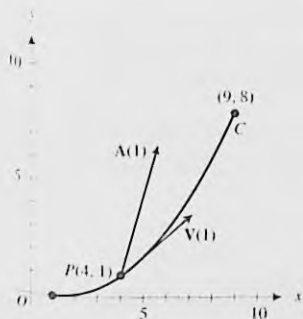
(c) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula son

$$x = t^2 + 2t + 1 \quad y = t^3$$

Se localizan algunos puntos (x, y) de la trayectoria a partir de los valores de la tabla 1. Al considerar estos puntos y la continuidad de las componentes de $\mathbf{R}(t)$ se dibuja la trayectoria mostrada en la figura 3. Esta figura también muestra las representaciones de $\mathbf{V}(1)$ y $\mathbf{A}(1)$.

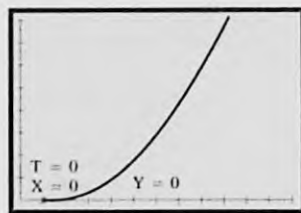
Tabla 1

t	x	y
0	1	0
0.5	2.25	0.125
1	4	1
1.5	6.25	3.375
2	9	8



$$\mathbf{R}(t) = (t^2 + 2t + 1)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2$$

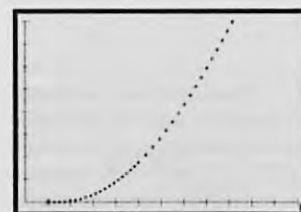
FIGURA 3



[0, 12] por [0, 8]

$$x = t^2 + 2t + 1 \quad y = t^3$$

FIGURA 4



[0, 12] por [0, 8]

$$x = t^2 + 2t + 1 \quad y = t^3$$

FIGURA 5

- (d) A fin de simular el movimiento en la graficadora, ésta se activa en modo paramétrico y se introducen las ecuaciones paramétricas del inciso (c). Para el rectángulo de inspección de [0, 12] por [0, 8] se consideran los valores $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 2$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Oprima la tecla $\overline{\text{TRACE}}$, después presione la tecla *avance a la izquierda* y manténgala presionada hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 4 muestra la pantalla de la graficadora como debe verse hasta este momento. Ahora presione la tecla *avance a la derecha* y observe la partícula, representada por el cursor, que se mueve a lo largo de la curva.
- (e) La figura 5 muestra la pantalla de la graficadora activada en el modo punto con la misma ventana y los mismos valores de t y t_{step} del inciso (c). Observe que la distancia entre dos puntos sucesivos trazados se hace más grande a medida que t se incrementa, lo cual indica que la rapidez de la partícula se incrementa conforme t crece.

► **EJEMPLO 3** Una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k} \quad t \geq 0$$

Obtenga los vectores velocidad y aceleración así como la rapidez de la partícula en $t = 1$. Dibuje una porción de la curva que contenga al punto para el cual $t = 1$, y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en ese punto.

Solución Al calcular $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t \mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t \mathbf{V}(t) \\ &= 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k} & &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4}$$

Así,

$$\mathbf{V}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \mathbf{A}(1) = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad \|\mathbf{V}(1)\| = \sqrt{17}$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva dada son

$$x = 3t \quad y = t^2 \quad z = \frac{2}{3}t^3$$

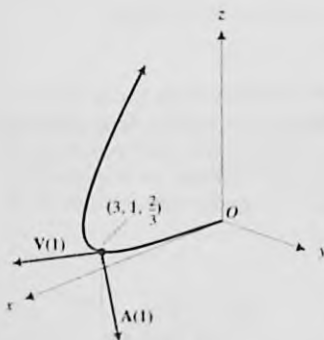
Puesto que $t \geq 0$, la partícula se desplaza del origen hacia arriba en el primer octante conforme t se incrementa. La porción de la curva en $t = 1$ y las representaciones de $\mathbf{V}(1)$ y $\mathbf{A}(1)$ se muestran en la figura 6.

De la ecuación (8) de la sección 11.3, si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario en P , s es la longitud de arco de C , que parte de un punto fijo P_0 y s se incrementa conforme t crece, entonces

$$D_t \mathbf{R}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t)$$

Como el miembro izquierdo de esta ecuación es el vector velocidad, se tiene

$$\mathbf{V}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}(t) \quad (1)$$



$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k} \quad t \geq 0$$

FIGURA 6

y por tanto,

$$\|\mathbf{V}(t)\| = \frac{ds}{dt} \quad (2)$$

esto es, la rapidez de una partícula es la tasa de variación de s con respecto a t . De (1) y (2),

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{\|\mathbf{V}(t)\|}$$

La ecuación (1) expresa el vector velocidad como un escalar por el vector tangente unitario. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$, ds/dt , se denomina **componente tangencial del vector velocidad**. Ahora se expresará el vector aceleración en términos de un vector tangente a la dirección de movimiento y a un vector normal a esta dirección.

Si se sustituye $D_t^2\mathbf{R}(t)$ por $\mathbf{A}(t)$ en la ecuación (6) de la sección 11.3, se obtiene

$$\mathbf{A}(t) = (D_t\|\mathbf{D}_t\mathbf{R}(t)\|)\mathbf{T}(t) + (\|\mathbf{D}_t\mathbf{R}(t)\|\|D_t\mathbf{T}(t)\|)\mathbf{N}(t)$$

De la ecuación (5) de la sección 11.4, $\|D_t\mathbf{T}(t)\| = \|\mathbf{D}_t\mathbf{R}(t)\|K(t)$. Al efectuar la sustitución de este valor, y reemplazar $\|\mathbf{D}_t\mathbf{R}(t)\|$ por ds/dt en la ecuación anterior, se tiene

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(t) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t)\mathbf{N}(t) \quad (3)$$

La ecuación (3) expresa el vector aceleración como la suma de un escalar por el vector tangente unitario y un escalar por el vector normal unitario; esto es, $\mathbf{A}(t)$ se transforma en la suma de un vector tangente a la dirección de movimiento y un vector normal a esta dirección. El coeficiente de $\mathbf{T}(t)$ se llama **componente tangencial del vector aceleración** y se denota por $A_T(t)$, mientras que el coeficiente de $\mathbf{N}(t)$ se denomina **componente normal del vector aceleración** y se representa por $A_N(t)$. De esta manera,

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t) \quad (4)$$

donde

$$A_T(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (5)$$

y

$$A_N(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K(t) \Leftrightarrow A_N(t) = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho(t)} \quad (6)$$

Puede ocasionarse un cambio en el vector velocidad, $\mathbf{V}(t)$, mediante un cambio en su intensidad (módulo) o en su dirección. Como $\mathbf{A}(t) = D_t\mathbf{V}(t)$, la tasa de variación de $\mathbf{V}(t)$ con respecto a t es $\mathbf{A}(t)$. Observe en la ecuación (5) que $A_T(t)$ es la tasa de variación de la rapidez de la partícula; esto es, $A_T(t)$ está relacionado con la variación de la intensidad (módulo) de $\mathbf{V}(t)$. Debido a

que $A_N(t)$ involucra a la curvatura $K(t)$, $A_N(t)$ está relacionado con la variación de la dirección de $\mathbf{V}(t)$. Estos resultados son importantes en mecánica.

La segunda ley de Newton sobre el movimiento es

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A} \quad (7)$$

donde \mathbf{F} es el vector fuerza aplicado a un objeto que se mueve, m es la medida constante de la masa del objeto, y \mathbf{A} es el vector aceleración del objeto. Al sustituir de (3) en (7) y considerando $v = ds/dt$, se tiene

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{dv}{dt} \mathbf{T}(t) + mv^2 K(t) \mathbf{N}(t)$$

Así, en el movimiento curvilíneo, la componente normal de \mathbf{F} es

$$mv^2 K(t) \Leftrightarrow \frac{mv^2}{\rho(t)}$$

la cual es la intensidad (módulo) de la fuerza normal a la curva necesaria para mantener al objeto sobre la curva. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza sobre una curva con una rapidez grande («alta velocidad»), entonces la fuerza normal ejercida por la carretera debe tener una intensidad grande para mantener al carro sobre la carretera. También, si la curva es muy cerrada, entonces el radio de curvatura es un número pequeño; por lo que otra vez la intensidad de la fuerza normal debe ser un número grande. En la construcción de una pista de carreras para automóviles, por ejemplo, la pista se inclina a fin de incrementar la intensidad de la fuerza normal.

De la ecuación (4),

$$\|\mathbf{A}(t)\| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}$$

Si se resuelve esta ecuación para $A_N(t)$, y observando en (6) que $A_N(t)$ es no negativa, se tiene

$$A_N(t) = \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2}$$

la cual es una fórmula conveniente para calcular $A_N(t)$.

► **EJEMPLO 4** Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{j} \quad t \geq 0$$

Determine cada uno de los siguientes vectores: $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, y $\mathbf{N}(t)$. También obtenga los escalares: $\|\mathbf{V}(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ y $K(t)$. Calcule los valores particulares cuando $t = 2$. Dibuje una porción de la curva que contenga al punto para el cual $t = 2$, y las representaciones de $\mathbf{V}(2)$, $\mathbf{A}(2)$, $A_T(2)\mathbf{T}(2)$ y $A_N(2)\mathbf{N}(2)$, cuyo inicial es el punto donde $t = 2$.

Solución Como $\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} & \mathbf{A}(t) &= 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2} & \|\mathbf{A}(t)\| &= \sqrt{4 + 4t^2} \\ &= \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} & &= 2\sqrt{1 + t^2} \\ &= t^2 + 1 & & \end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{ds}{dt} = t^2 + 1$. En consecuencia

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \frac{d^2s}{dt^2} & A_N(t) &= \sqrt{\|A(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} \\ &= 2t & &= \sqrt{4 + 4t^2 - 4t^2} \\ & & &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{V(t)}{\|V(t)\|} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Con el fin de calcular $N(t)$ se emplea la fórmula siguiente, la cual se obtiene de (3):

$$N(t) = \frac{1}{(D_t s)^2 K(t)} [A(t) - (D_t^2 s)T(t)] \quad (8)$$

$$A(t) - (D_t^2 s)T(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t \left(\frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \mathbf{j} \right)$$

$$A(t) - (D_t^2 s)T(t) = \frac{2}{t^2 + 1} [(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}] \quad (9)$$

De (8), $N(t)$ es igual a un escalar por el vector de (9). Como $N(t)$ es un vector unitario, $N(t)$ puede obtenerse al dividir el vector de (9) entre su módulo. Así,

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1 - t^2)^2 + (2t)^2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \mathbf{i} + \frac{2t}{1 + t^2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Ahora se calculará la curvatura $K(t)$ a partir de la primera ecuación de (6). Con $A_N(t) = 2$ y $D_t s = t^2 + 1$, se tiene

$$K(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$$

Los vectores y escalares solicitados para $t = 2$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} V(2) &= 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} & A(2) &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \\ \|V(2)\| &= 5 & A_T(2) &= 4 \\ T(2) &= \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} & N(2) &= -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \\ A_N(2) &= 2 & K(2) &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

La curva requerida y las representaciones de los vectores se muestran en la figura 7. ◀

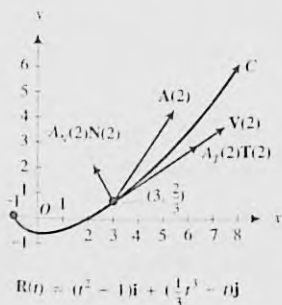


FIGURA 7

► **EJEMPLO 5** Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial

$$R(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Determine las componentes tangencial y normal del vector aceleración.

Solución Al calcular los vectores y escalares necesarios se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= D_t \mathbf{R}(t) & \mathbf{A}(t) &= D_t \mathbf{V}(t) \\ &= \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + \mathbf{k} & &= e^t \mathbf{j} \\ \|\mathbf{V}(t)\| &= \sqrt{2 + e^{2t}} & \|\mathbf{A}(t)\| &= e^t \\ \frac{ds}{dt} &= \sqrt{2 + e^{2t}} & \frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2 + e^{2t}}} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A_T(t) &= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2 + e^{2t}}} & A_N(t) &= \sqrt{\|\mathbf{A}(t)\|^2 - [A_T(t)]^2} \\ & & &= \sqrt{e^{2t} - \frac{e^{4t}}{2 + e^{2t}}} \\ & & &= \frac{\sqrt{2} e^t}{\sqrt{2 + e^{2t}}} \end{aligned}$$

El estudio del movimiento curvilíneo se concluye con la discusión del movimiento de un proyectil. Suponga que el proyectil se desplaza en un plano vertical y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, dirigido hacia abajo con una intensidad de mg libras, donde m slugs es su masa y g pie por segundo cuadrado es la aceleración constante debida a la gravedad. No se considerará la fuerza ocasionada por la resistencia del aire, la cual, para cuerpos densos que se desplazan con rapidez pequeña, no ejerce un afecto notable.

Suponga que un proyectil se dispara desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de α radianes. Sea v_0 el número de pies por segundo la velocidad inicial o *velocidad de salida*. Los ejes coordenados se colocan de modo que el cañón esté ubicado en el origen. Refiérase a la figura 8. El vector de velocidad inicial, \mathbf{V}_0 , del proyectil está determinado por

$$\mathbf{V}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j} \quad (10)$$

Sean t segundos el tiempo que transcurre desde que el arma se disparó, x pies la distancia horizontal del proyectil desde el punto de partida a los t segundos, y y pies la distancia vertical del proyectil también desde su punto de partida a los t segundos. $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición, $\mathbf{V}(t)$ es el vector velocidad y $\mathbf{A}(t)$ es el vector aceleración del proyectil a los t segundos.

Como x y y son funciones de t , se escriben las componentes horizontal y vertical de $\mathbf{R}(t)$ como $x(t)$ y $y(t)$; así,

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Si \mathbf{F} representa la fuerza que actúa sobre el proyectil, entonces

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$$

De esta ecuación y la ecuación (7) (la segunda ley de Newton para el movimiento),

$$\begin{aligned} m\mathbf{A}(t) &= -mg\mathbf{j} \\ \mathbf{A}(t) &= -g\mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j} \end{aligned}$$

Al integrar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t , se obtiene

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$

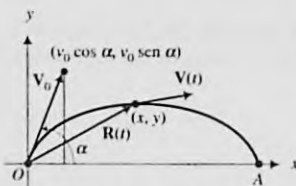


FIGURA 8

Como $\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0$, entonces $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 \Leftrightarrow \mathbf{R}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t$$

Si se integra otra vez, resulta

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{C}_2$$

Puesto que el proyectil parte del origen, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$; por lo que $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$. De este modo,

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0 t$$

Con el valor de \mathbf{V}_0 de (10), esta ecuación se transforma en

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos \alpha \mathbf{i} + (tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} \quad (11)$$

La ecuación (11) proporciona el vector de posición del proyectil a los t segundos. A partir de esta ecuación se puede estudiar el movimiento del proyectil. Generalmente, las cuestiones de interés son las siguientes:

1. ¿Cuál es el alcance del proyectil? El alcance es la distancia $|\overline{OA}|$ a lo largo del eje x (consulte la figura 8).
2. ¿Cuál es el tiempo total de recorrido, esto es, el tiempo que tarda el proyectil en ir de O a A ?
3. ¿Cuál es la altura máxima del proyectil?
4. ¿Cuál es la ecuación cartesiana de la curva recorrida por el proyectil?
5. ¿Cuál es el vector velocidad del proyectil en el momento del impacto?

Estas cuestiones serán respondidas en el ejemplo siguiente.

► **EJEMPLO 6** Se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de $\frac{1}{6}\pi$ rad, y su velocidad de salida es de 480 pie/s. Obtenga: (a) el vector de velocidad inicial; (b) el vector de posición $\mathbf{R}(t)$ y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil; (c) el tiempo de recorrido del proyectil; (d) el alcance del proyectil; (e) la altura máxima alcanzada por el proyectil; (f) el vector velocidad y la rapidez en el momento del impacto; (g) el vector de posición, el vector velocidad y la rapidez a los 2 s; y (h) una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil.

Solución

(a) De 10 con $v_0 = 480$ y $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, el vector de velocidad inicial es

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= 480 \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + 480 \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j} \\ &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j} \end{aligned}$$

(b) El vector de posición a los t segundos se puede obtener al aplicar (11); así,

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{j}$$

Si se considera $g = 32$ se tiene

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (240t - 16t^2)\mathbf{j} \quad (12)$$

Si $(x(t), y(t))$ es la posición del proyectil a los t segundos, entonces

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \quad \text{y} \quad y(t) = 240t - 16t^2 \quad (13)$$

- (c) Con el propósito de calcular el tiempo de recorrido del proyectil, se debe obtener t cuando $y(t) = 0$. De esta manera, se considera $y(t) = 0$ en la segunda ecuación de (13):

$$\begin{aligned} 240t - 16t^2 &= 0 \\ t(240 - 16t) &= 0 \\ t = 0 \quad t &= 15 \end{aligned}$$

El valor 0 para t se presenta cuando el proyectil se dispara. Como $y(15) = 0$, el tiempo de recorrido es de 15 s.

- (d) Con el fin de obtener el alcance del proyectil se calcula $x(15)$. De la primera ecuación de (13), $x(15) = 3600\sqrt{3}$. En consecuencia, el alcance es de $3600\sqrt{3} = 6200$ pie.
- (e) El proyectil alcanza su máxima altura cuando la componente vertical del vector velocidad es cero, esto es cuando $y'(t) = 0$. Al calcular $y'(t)$ de la segunda ecuación de (13) se tiene

$$y'(t) = 240 - 32t$$

Si se considera $y'(t) = 0$, se obtiene $t = 7.5$, el cual es la mitad del tiempo total de recorrido.

- (f) Puesto que el tiempo total de recorrido es de 15 s, el vector velocidad en el momento del impacto es $V(15)$. Con $V(t) = R'(t)$, se obtiene de (12)

$$V(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - 32t)\mathbf{j} \quad (14)$$

Así,

$$V(15) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240\mathbf{j}$$

Como $\|V(15)\| = 480$, la rapidez en el momento del impacto es de 480 pie/s.

- (g) De (12) y (14),

$$\begin{aligned} R(2) &= 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 416\mathbf{j} & V(2) &= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 176\mathbf{j} \\ \|V(2)\| &= \sqrt{(240\sqrt{3})^2 + (176)^2} \\ &= 32\sqrt{199} \end{aligned}$$

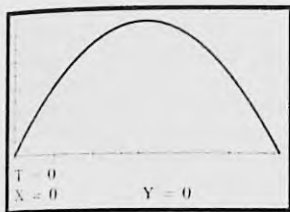
Por tanto, a los 2 s la rapidez es de $32\sqrt{199}$ pie/s ≈ 450 pie/s.

- (h) A fin de obtener una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil, se elimina el parámetro t de las ecuaciones paramétricas (13). Al sustituir el valor de t de la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} y &= 240\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right) - 16\left(\frac{x}{240\sqrt{3}}\right)^2 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{10800}x^2 \end{aligned}$$

la cual es una ecuación de una parábola.

EJEMPLO 7 (a) A partir de las respuestas de los incisos (b)–(e) del ejemplo 6, trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil. (b) Trace la trayectoria del proyectil en el modo punto.



[0, 6300] por [-300, 1000]

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \quad y \quad y(t) = 240t - 16t^2$$

FIGURA 9



[0, 6300] por [-300, 1000]

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \quad y \quad y(t) = 240t - 16t^2$$

FIGURA 10

Solución

(a) Con la graficadora en modo paramétrico, se introducen las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = 240\sqrt{3}t \quad y \quad y(t) = 240t - 16t^2$$

En el rectángulo de inspección de [0, 6300] por [-300, 1000], considere los parámetros $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 15$ y $t_{\text{step}} = 0.5$. Oprima la tecla **TRACE**. Después presione la tecla de *avance a la izquierda* y manténgala oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 9 muestra la pantalla de la graficadora como debe verse hasta este momento. Ahora presione la tecla *avance a la derecha* y observe que la partícula, representada por el cursor, se mueve a lo largo de la curva.

(b) La figura 10 muestra la pantalla de la graficadora en modo paramétrico y en modo punto, con los mismos valores de t y t_{step} como en el inciso (a). Observe que la distancia entre dos puntos sucesivos trazados es más pequeña conforme t crece hasta 7.5, cuando el proyectil alcanza su altura máxima. Después, conforme t crece de 7.5 a 15, la distancia entre dos puntos sucesivos trazados se hace más grande. Estas observaciones indican que la rapidez del proyectil disminuye conforme se eleva desde su posición inicial hasta su altura máxima, esto es, cuando su rapidez es cero; después, cuando el proyectil desciende su rapidez crece hasta hacer contacto con el suelo. ◀

EJERCICIOS 11.5

En los ejercicios 1 a 10, la posición de una partícula, que se mueve en el plano xy , a las t unidades de tiempo está determinada por la ecuación vectorial. (a) Obtenga $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ y $\|\mathbf{A}(t)\|$. (b) Determine los vectores velocidad y aceleración en $t = t_1$. (c) Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en $t = t_1$. (d) Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. (e) Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora en el modo punto.

1. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j}; t_1 = 3$

2. $\mathbf{R}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; t_1 = 1$

3. $\mathbf{R}(t) = 5 \cos 2t\mathbf{i} + 3 \sin 2t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{4}\pi$

4. $\mathbf{R}(t) = \frac{2}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{4}t\mathbf{j}; t_1 = 4$

5. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

6. $\mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j}; t_1 = 0$

7. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \ln \sec t\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{4}\pi$

8. $\mathbf{R}(t) = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2(1 - \sin t)\mathbf{j}; t_1 = \frac{5}{6}\pi$

9. $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 3t)\mathbf{i} + (1 - 3t^2)\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2}$

10. $\mathbf{R}(t) = \ln(t + 2)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}; t_1 = 1$

En los ejercicios 11 a 16, la posición de una partícula, que se mueve en el espacio tridimensional, a las t unidades de tiempo está determinada por la ecuación vectorial. Obtenga los vectores velocidad y aceleración así como la rapidez de la partícula en $t = t_1$. Dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde $t = t_1$, y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en ese punto.

11. $\mathbf{R}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + tk; t_1 = \frac{1}{2}\pi$

12. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}; t_1 = 2$

13. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + 2(t - 1)\mathbf{k}; t_1 = 2$

14. $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + 2tk; t_1 = \frac{1}{2}\pi$

15. $\mathbf{R}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}; t_1 = 0$

16. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)^{-1}\mathbf{i} + \ln(1 + t^2)\mathbf{j} + \tan^{-1}t\mathbf{k}; t_1 = 1$

En los ejercicios 17 a 20, una partícula se mueve en el plano xy de modo que se satisfacen la ecuación dada y las condiciones iniciales. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{V}(t) = \frac{1}{(t-1)^2}\mathbf{i} - (t+1)\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

18. $\mathbf{V}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

19. $\mathbf{A}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 3\mathbf{j}$

20. $\mathbf{A}(t) = 2 \cos 2t\mathbf{i} + 2 \sin 2t\mathbf{j}$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$

En los ejercicios 21 a 24, una partícula se mueve en el espacio tridimensional de modo que la ecuación dada y las condiciones iniciales se satisfacen. Determine una ecuación de la trayectoria de la partícula.

21. $\mathbf{V}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 32t\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

22. $\mathbf{V}(t) = (t^2 + 2t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

23. $\mathbf{A}(t) = 6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{V}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 4\mathbf{k}$

24. $\mathbf{A}(t) = -32\mathbf{k}$, $\mathbf{V}(0) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 60\mathbf{k}$

En los ejercicios 25 a 30, una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial dada. En cada

ejercicio determine los vectores $V(t)$, $A(t)$, $T(t)$ y $N(t)$, y los escalares siguientes para un valor arbitrario de t : $\|V(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ y $K(t)$. También obtenga los valores particulares cuando $t = t_1$. En $t = t_1$, dibuje una porción de la curva y representaciones de los vectores $V(t_1)$, $A(t_1)$, $A_T(t_1)$, $T(t_1)$ y $A_N(t_1)N(t_1)$.

25. $R(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$; $t_1 = 2$

26. $R(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t_1 = 1$

27. $R(t) = 5 \cos 3t\mathbf{i} + 5 \sin 3t\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{3}\pi$

28. $R(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}$; $t_1 = 1$

29. $R(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$; $t_1 = 0$

30. $R(t) = \cos t^2\mathbf{i} + \sin t^2\mathbf{j}$; $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

En los ejercicios 31 a 36, una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial dada. Calcule las componentes tangencial y normal del vector aceleración y utilícelas para expresar $A(t) = A_T(t)T(t) + A_N(t)N(t)$ sin calcular $T(t)$ ni $N(t)$.

31. $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

32. $R(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$

33. $R(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $t \geq 0$

34. $R(t) = 2t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

35. $R(t) = t^2\mathbf{i} + (\frac{1}{3}t^3 + t)\mathbf{j} + (\frac{1}{3}t^3 - t)\mathbf{k}$

36. $R(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

37. Demuestre que si la rapidez de una partícula que está en movimiento es constante, entonces su vector aceleración siempre es ortogonal a su vector velocidad.

38. Una partícula se mueve a lo largo de una curva que tiene la ecuación vectorial $R(t) = \tan t\mathbf{i} + \sinh 2t\mathbf{j} + \operatorname{sech} t\mathbf{k}$. Demuestre que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en $t = 0$.

39. Una partícula se mueve a lo largo de la cúbica alabeada

$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

Obtenga una ecuación del plano determinado por los vectores tangente unitario y normal unitario en el punto de la curva donde $t = 1$.

40. Demuestre que para la cúbica alabeada del ejercicio 39, si $t \neq 0$, entonces ningún par de los vectores $R(t)$, $V(t)$ y $A(t)$ son ortogonales.

En los ejercicios 41 y 42, se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de α radianes, y su velocidad de salida es v_0 pie por segundo. Obtenga: (a) el vector de velocidad inicial; (b) el vector de posición $R(t)$ y ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil; (c) el tiempo de recorrido del proyectil; (d) el alcance del proyectil; (e) la altura máxima que alcanza el proyectil; (f) el vector velocidad y la rapidez en el momento de impacto; (g) el vector de posición, el vector velocidad y la rapidez a los t_1 segundos; y (h) una ecuación cartesiana de la trayectoria del proyectil.

41. $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; $v_0 = 320$; $t_1 = 6$

42. $\alpha = \frac{1}{3}\pi$; $v_0 = 160$; $t_1 = 4$

En los ejercicios 43 y 44, haga lo siguiente: a partir de las representaciones de los incisos (b)-(e) del ejercicio indicado, trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil; (b) trace la trayectoria del proyectil en modo punto; (c) dibuje lo que muestra la pantalla de la graficadora del inciso (b); (d) describa lo que observa en la pantalla de la graficadora del inciso (b) acerca de la rapidez del proyectil.

43. Ejercicio 41.

44. Ejercicio 42.

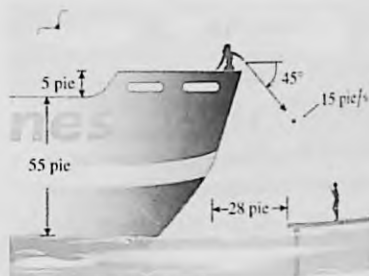
45. Se dispara un proyectil desde un cañón situado en la parte superior de un edificio de 96 pie de altura. El cañón forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si la velocidad de salida es de 1 600 pie/s, calcule el tiempo de recorrido y la distancia desde la base del edificio hasta el punto donde caerá el proyectil.

46. La velocidad de salida de un arma es de 160 pie/s. ¿Con qué ángulo de elevación debe dispararse el arma a fin de que el proyectil impacte un objeto situado al mismo nivel del arma y a una distancia de 400 pie de ésta?

47. ¿Cuál es la velocidad de salida de un cañón si un proyectil disparado desde éste tiene un alcance de 2 000 pie y alcanza una altura máxima de 1 000 pie?

48. Se lanza horizontalmente una pelota desde la parte superior de un risco de 256 pie de altura con una velocidad inicial de 50 pie/s. Calcule el tiempo de recorrido de la pelota y la distancia desde la base del risco hasta el punto donde caerá la pelota.

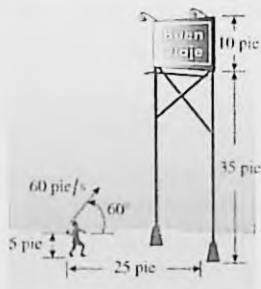
49. A medida que un barco se aleja de un muelle, una muchacha ubicada en la cubierta del barco, a 55 pie por arriba del muelle, lanzó una piedra envuelta en una nota a un amigo que está en el muelle. El barco se hallaba a 28 pie del muelle en el momento en que la joven lanzó la piedra desde su mano, a 5 pie por arriba de la cubierta, hacia el muelle con una velocidad inicial de 15 pie/s y en un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Llegará la piedra al muelle, de modo que su amigo reciba la nota, o caerá al agua y se hundirá? Justifique su respuesta.



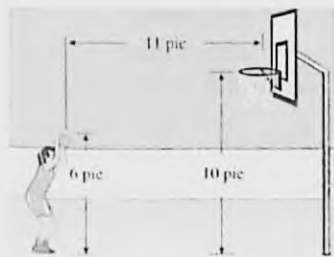
50. Responda la pregunta del ejercicio 49 suponiendo que la muchacha lanzó horizontalmente la piedra con una velocidad inicial de 15 pie/s.

51. Un niño apuesta a sus amigos que puede lanzar una pelota y pegarle a un anuncio que se encuentra a 25 pie de él. El anuncio tiene 10 pie de altura y su base está a 35 pie

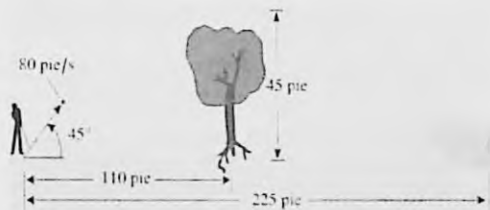
sobre el suelo. El niño lanza la pelota hacia el anuncio con una velocidad inicial de 60 pie/s y un ángulo de elevación de 60° . Si la mano del niño está a 5 pie del suelo, demuestre que el niño gana la apuesta y determine la dirección de la pelota en el momento del impacto.



52. Una basquetbolista debe efectuar un tiro libre en la canasta cuyo aro está a 10 pie del piso del gimnasio. Si la jugadora se encuentra a una distancia horizontal de 11 pie del centro de la canasta, determine el ángulo en que debe lanzar la pelota con una velocidad inicial de 25 pie/s si sus manos se encuentran a 6 pie por arriba del piso en el momento del tiro.



53. Un árbol de 45 pie de altura se encuentra entre un banderín y una pelota de golf, la cual está a 225 pie del banderín. El árbol se encuentra a 100 pie de la pelota. Un golfista golpea la pelota en dirección del banderín con una rapidez de 80 pie/s y un ángulo de 45° . Demuestre que la pelota no golpea el árbol, y determine a qué distancia del banderín cae la pelota.



54. Determine el ángulo de elevación de un cañón de modo que al dispararse se obtenga el máximo alcance para una velocidad de salida dada.
55. Una partícula se encuentra en el punto $(r, 0)$ de la circunferencia con centro en el origen y radio r , y se mueve sobre la circunferencia con una rapidez angular constante de ω radianes por segundo. Una ecuación de su trayectoria es

$$\mathbf{R}(t) = ir \cos \omega t + jr \sin \omega t$$

Esta ecuación describe el movimiento circular uniforme. (a) Demuestre que la rapidez de la partícula está determinada por $r\omega$. (b) Demuestre que si $\mathbf{A}(t)$ es el vector aceleración, entonces la dirección de $\mathbf{A}(t)$ es opuesta a la de $\mathbf{R}(t)$, además $\|\mathbf{A}(t)\| = r\omega^2$. (c) Calcule $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $A_T(t)$ y $A_N(t)$. (d) ¿Cuál es el efecto sobre $A_N(t)$ si la rapidez angular se duplica?

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 11

► SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 11

1. ¿Qué es una función vectorial y en qué difiere de una función real?
2. ¿Cómo se utilizan las propiedades de las funciones reales en el estudio de las funciones vectoriales?
3. ¿En qué consiste la dependencia de las definiciones del límite y continuidad de una función vectorial de las definiciones correspondientes para una función real?
4. ¿Cómo se obtienen ecuaciones cartesianas de una curva en el espacio tridimensional a partir de su ecuación vectorial? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
5. ¿En qué son semejantes o en qué difieren las definiciones de la derivada e integral indefinida de una función vectorial y las definiciones correspondientes para funciones reales?
6. ¿Cómo se interpreta geoméricamente la derivada de una función vectorial?
7. ¿En qué son semejantes o diferentes los teoremas de la derivada de la suma, producto punto y producto cruz de dos funciones vectoriales y los teoremas correspondientes para funciones reales? Invente ejemplos que ilustren la respuesta.
8. ¿Cuál es la regla de la cadena para funciones vectoriales? Invente un ejemplo que ilustre su aplicación.
9. ¿Qué puede concluirse acerca de una función vectorial y su derivada si el módulo de la función vectorial es constante?
10. ¿Cuál es la fórmula para la longitud de arco de una curva definida mediante una ecuación vectorial en el espacio tridimensional?

11. ¿Cuál es el **vector tangente unitario** $\mathbf{T}(t)$ de una curva C en un punto P de C si $\mathbf{R}(t)$ es el **vector de posición**? Establezca una fórmula para calcular $\mathbf{T}(t)$ a partir de $\mathbf{R}(t)$.
12. ¿Cuál es el **vector normal unitario** $\mathbf{N}(t)$ de una curva C en un punto P de C si $\mathbf{T}(t)$ es el vector tangente unitario? Establezca una fórmula para calcular $\mathbf{N}(t)$ a partir de $\mathbf{T}(t)$.
13. Exprese el **vector binormal unitario** de una curva C en un punto P de C en términos de los vectores tangente unitario y normal unitario.
14. ¿Cuáles son los planos *osculador*, *rectificador* y normal de una curva C en un punto P de C ? ¿Cómo se obtienen ecuaciones de estos planos?
15. Si $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una ecuación vectorial de la curva C , ¿cómo obtendría una ecuación que contenga a t y el número de unidades de longitud de arco s a partir de un punto arbitrario de C hasta el punto $P(f(t), g(t), h(t))$? ¿Por qué no se puede resolver, generalmente, esta ecuación para s en términos de t ? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
16. Si $\mathbf{R}(t)$ es el vector de posición de una curva C en el espacio tridimensional, defina la *curvatura* $K(t)$ de C en un punto de la curva.
17. Proporcione dos fórmulas para calcular la curvatura $K(t)$: (i) una en términos de $D_t\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{T}(t)$; (ii) la otra en términos de $D_t\mathbf{R}(t)$ y $D_t\mathbf{T}(t)$. ¿Cuál de estas fórmulas es más fácil de aplicar?
18. Defina el *radio de curvatura* y la *circunferencia osculatriz* para curvas en el plano xy .
19. Establezca una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana definida por una ecuación de la forma $y = f(x)$.
20. Si una partícula se mueve a lo largo de la curva C que tiene la ecuación vectorial $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, defina los **vectores velocidad** y **aceleración** en un punto P de C . ¿Cuál es la *rapidez* de la partícula en P ? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.
21. Establezca una fórmula que exprese el vector aceleración como la suma de un vector tangente a la dirección de movimiento y de un vector normal a esta dirección.
22. Establezca las fórmulas que proporcionan las *componentes tangencial* y *normal* de la aceleración.
23. ¿Cuál es el vector de posición de un proyectil disparado desde un cañón que tiene un ángulo de elevación α y una velocidad de salida de v_0 pies por segundo? ¿Cómo determinaría la altura máxima, el tiempo de recorrido y el alcance del proyectil a partir de este vector? Invente un ejemplo que ilustre la respuesta.

► EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 11

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio de la función vectorial.

$$1. \mathbf{R}(t) = \frac{1}{t-3}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} \quad 2. \mathbf{R}(t) = \ln(t+1)\mathbf{i} + e^{1/t}\mathbf{j}$$

$$3. \mathbf{R}(t) = \ln|\cos t|\mathbf{i} + \sqrt{4t^2-1}\mathbf{j} + \sqrt{4-t^2}\mathbf{k}$$

$$4. \mathbf{R}(t) = \sqrt{9-t^2}\mathbf{i} + \tan t\mathbf{j} + \frac{t}{t-1}\mathbf{k}$$

En los ejercicios 5 a 8, calcule el límite indicado, si existe.

$$5. \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t-1}}{t-1}\mathbf{j} \right)$$

$$6. \lim_{t \rightarrow 0} \left(\cos t\mathbf{i} + \frac{\sec t}{t}\mathbf{j} \right)$$

$$7. \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-1/t}\mathbf{i} + \frac{1-\cos t}{t}\mathbf{j} + \frac{\sec^{-1} t}{t}\mathbf{k} \right)$$

$$8. \lim_{t \rightarrow 4} \left(\frac{t^2-16}{t-4}\mathbf{i} + \frac{\tan^{-1}(t-4)}{t-4}\mathbf{j} + |t-4|\mathbf{k} \right)$$

En los ejercicios 9 a 12, determine los números en los que la función vectorial es continua.

$$9. \mathbf{R}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{4-t}}\mathbf{k}$$

$$10. \mathbf{R}(t) = \ln|\cos t|\mathbf{i} + \frac{1}{|t|-1}\mathbf{j} + \sqrt{1-t^2}\mathbf{k}$$

$$11. \mathbf{R}(t) = \begin{cases} \frac{\sec(t-1)}{t-1}\mathbf{i} + \frac{t^2-1}{2(t-1)}\mathbf{j} \\ \quad + (t-1)\ln|t-1|\mathbf{k} & \text{si } t \neq 1 \\ (\mathbf{i} + \mathbf{j}) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

$$12. \mathbf{R}(t) = \begin{cases} (1+t)^{1/t}\mathbf{i} + e^{1+t}\mathbf{j} + \frac{e^{1-t}}{1-t}\mathbf{k} & \text{si } t \neq 0 \\ e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

En los ejercicios 13 a 16, dibuje la gráfica de la función vectorial.

$$13. \mathbf{R}(t) = 2 \sec t\mathbf{i} + 2 \tan t\mathbf{j}$$

$$14. \mathbf{R}(t) = 2\sqrt{t}\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$$

$$15. \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$$

$$16. \mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

En los ejercicios 17 y 18, obtenga $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{R}'(t)$.

$$17. \mathbf{R}(t) = \frac{1}{t^2+9}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - \ln t\mathbf{k}$$

$$18. \mathbf{R}(t) = \frac{t}{t-1}\mathbf{i} - \frac{t+1}{t}\mathbf{j} + \frac{t+1}{t-1}\mathbf{k}$$

En los ejercicios 19 y 20, calcule $D_t\|\mathbf{R}(t)\|$ y $\|D_t\mathbf{R}(t)\|$.

$$19. \mathbf{R}(t) = 2(e^t-1)\mathbf{i} + 2(e^t+1)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

$$20. \mathbf{R}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \sec 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$$

21. Si $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t+2} \mathbf{i} + \frac{1}{t^2+1} \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{j}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

22. Si $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{t} \mathbf{i} + \frac{2 \ln t}{t} \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(1) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

23. Si $\mathbf{R}(t) = 2e^{t/2} \mathbf{i} - 2e^{-t/2} \mathbf{j} + 2 \cosh \frac{t}{2} \mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(2) = 2e \mathbf{i} - 2e^{-1} \mathbf{j} + \mathbf{k}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

24. Si $\mathbf{R}(t) = \cos^2 t \mathbf{i} + \cos 2t \mathbf{j} - 2 \sin 2t \mathbf{k}$ y $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i}$, obtenga $\mathbf{R}(t)$.

En los ejercicios 25 y 26, calcule la longitud de arco exacta de t_1 a t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.

25. $\mathbf{R}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}; t_1 = 0; t_2 = \frac{1}{2} \pi$

26. $\mathbf{R}(t) = (2 - 3t) \mathbf{i} + (4t - 1) \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}; t_1 = 0; t_2 = \frac{5}{2}$

En los ejercicios 27 y 28, utilice el procedimiento NINT de la graficadora para obtener un valor aproximado, con cuatro dígitos significativos, de la longitud de arco de t_1 a t_2 de la curva que tiene la ecuación vectorial dada.

27. $\mathbf{R}(t) = \ln t \mathbf{i} + \frac{1}{t} \mathbf{j} - \frac{1}{t} \mathbf{k}; t_1 = 1; t_2 = 2$

28. $\mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + e^{2t} \mathbf{k}; t_1 = 0; t_2 = \frac{1}{2} \pi$

En los ejercicios 29 y 30, calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, y dibuje una porción de la curva que contenga al punto donde $t = t_1$, y las representaciones de $\mathbf{T}(t_1)$ y $\mathbf{N}(t_1)$ cuyo punto inicial es ese punto.

29. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2} e^{2t} \mathbf{i} + t \mathbf{j}; t_1 = \ln 2$

30. $\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{j}; t_1 = 1$

En los ejercicios 31 a 34, calcule $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

31. $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{3} t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$

32. $\mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + 2e^{-t} \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$

33. $\mathbf{R}(t) = 3 \sin 2t \mathbf{i} + 4t \mathbf{j} + 3 \cos 2t \mathbf{k}$

34. $\mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + 3(\sin t - t \cos t) \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$

En los ejercicios 35 a 38, determine el triedro móvil y ecuaciones de los planos osculador, rectificador y normal para la curva en $t = t_1$.

35. La curva del ejercicio 31; $t_1 = 1$

36. La curva del ejercicio 32; $t_1 = 0$

37. La curva del ejercicio 33; $t_1 = 0$

38. La curva del ejercicio 34; $t_1 = \frac{1}{2} \pi$

En los ejercicios 39 y 40, para la curva dada, exprese la longitud de arco s como una función de t , donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$.

39. La curva del ejercicio 31

40. La curva del ejercicio 32

En los ejercicios 41 a 44, obtenga una ecuación vectorial de la curva que tiene a la longitud de arco s como parámetro, donde s se mide a partir del punto donde $t = 0$. Verifique la respuesta utilizando la ecuación (9) de la sección 11.3.

41. $\mathbf{R}(t) = 4t \mathbf{i} + \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2} \mathbf{j}$

42. La curva del ejercicio 30

43. La curva del ejercicio 33

44. La curva del ejercicio 34

En los ejercicios 45 y 46, para la curva y t_1 del ejercicio indicado, calcule la curvatura K y el radio de curvatura ρ en el punto donde $t = t_1$. Dibuje una porción de la curva, el vector tangente unitario y la circunferencia de osculatriz en $t = t_1$.

45. Ejercicio 29

46. Ejercicio 30

En los ejercicios 47 a 50, para la curva del ejercicio indicado, calcule la curvatura K .

47. Ejercicio 31

48. Ejercicio 32

49. Ejercicio 33

50. Ejercicio 34

51. Demuestre que la curvatura de la curva $y = \ln x$ en cualquier punto (x, y) es $x/(x^2 + 1)^{3/2}$. También demuestre que la curvatura máxima absoluta es $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, la cual ocurre en el punto $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \ln 2)$.

52. Calcule la curvatura en cualquier punto de la rama de la hipérbola definida por las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh t$ y $y = b \sinh t$.

53. Determine la curvatura y el radio de curvatura de la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$ y $y = t^3 - 3t$ en el punto donde $t = 2$.

54. Calcule la curvatura y el radio de curvatura de la curva $y = e^{-x}$ en el punto $(0, 1)$.

55. Determine el centro de curvatura para la curva del ejercicio 53 en el punto donde $t = 2$, y dibuje una porción de la curva y la circunferencia osculatriz en ese punto.

56. Determine el centro de curvatura para la curva del ejercicio 54 en el punto $(0, 1)$, y dibuje una porción de la curva y la circunferencia osculatriz en ese punto.

En los ejercicios 57 y 58, la posición de una partícula que se mueve en el plano xy , a las t unidades de tiempo, está determinada por la ecuación vectorial dada. (a) Determine $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\|\mathbf{V}(t)\|$ y $\|\mathbf{A}(t)\|$. (b) Determine los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. (c) Dibuje la trayectoria de la partícula y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. (d) Simule el movimiento de la partícula en la graficadora. (e) Trace la trayectoria de la partícula en la graficadora en modo punto.

57. $\mathbf{R}(t) = 3t \mathbf{i} + (4t - t^2) \mathbf{j}$

58. $\mathbf{R}(t) = 2e^t \mathbf{i} + 3e^{-t} \mathbf{j}$

En los ejercicios 59 y 60, una partícula se mueve a lo largo de la curva dada. Obtenga los vectores velocidad y aceleración, y así como la rapidez en el punto indicado. Dibuje una porción de la curva que contenga a ese punto, y las representaciones de los vectores velocidad y aceleración en el punto mencionado.

59. La curva del ejercicio 25 en $t = \frac{1}{2} \pi$.

60. La curva del ejercicio 26 en $t = \frac{1}{2}$.

En los ejercicios 61 y 62, una partícula se mueve en el plano xy de modo que la ecuación y las condiciones iniciales se satisfacen. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

61. $\mathbf{V}(t) = e^{2t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

62. $\mathbf{A}(t) = t^2 \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j}$, $\mathbf{V}(1) = \mathbf{j}$, y $\mathbf{R}(1) = \frac{1}{4} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$

En los ejercicios 63 a 66, una partícula se mueve en el espacio tridimensional de modo que la ecuación y las condiciones iniciales se satisfacen. Obtenga una ecuación vectorial de la trayectoria de la partícula.

63. $V(t) = -2 \operatorname{sen} t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $R(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

64. $V(t) = e^t \mathbf{i} - e^t \mathbf{j} - 8e^{4t} \mathbf{k}$, $R(0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

65. $A(t) = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $V(1) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $R(1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

66. $A(t) = 4\mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j}$, $V(\frac{1}{2}) = 2\mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
 $R(\frac{1}{2}) = \mathbf{i} + \frac{1}{10} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 67 y 68, una partícula se mueve a lo largo de la curva del ejercicio indicado. En cada ejercicio, obtenga los vectores $V(t)$, $A(t)$, $T(t)$ y $N(t)$, y los escalares siguientes para un valor arbitrario: $\|V(t)\|$, $A_T(t)$, $A_N(t)$ y $K(t)$. También calcule los valores particulares cuando $t = 1$. En $t = 1$, dibuje una porción de la curva y las representaciones de los vectores $V(1)$, $A(1)$, $A_T(1)T(1)$ y $A_N(1)N(1)$.

67. Ejercicio 57

68. Ejercicio 58

En los ejercicios 69 y 70, una partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene la ecuación vectorial dada. Calcule las componentes tangencial y normal del vector aceleración y utilícelas para escribir $A(t) = A_T(t)T(t) + A_N(t)N(t)$ sin calcular $T(t)$ y $N(t)$.

69. $R(t) = 2t\mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$

70. $R(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 71 y 72, obtenga (a) los vectores velocidad y aceleración, (b) la rapidez, y (c) las componentes tangencial y normal del vector aceleración.

71. $R(t) = \cosh 2t \mathbf{i} + \sinh 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}$

72. $R(t) = (2 \tan^{-1} t - t) \mathbf{i} + \ln(1 + t^2) \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

73. Se dispara un proyectil desde un arma con un ángulo de elevación de 30° y una velocidad de salida de 150 pie/s. Calcule: (a) el vector de posición $R(t)$; (b) el alcance del proyectil; (c) la altura máxima; (d) la rapidez en el momento de impacto.

74. Para el proyectil del ejercicio 73, (a) trace la trayectoria del proyectil en la graficadora y simule el movimiento del proyectil; (b) trace la trayectoria del proyectil en el modo punto; (c) con relación al inciso (b), dibuje lo que observa en la graficadora; (d) con relación inciso (b), describa lo que muestra la pantalla de la graficadora acerca de la rapidez del proyectil.

75. Si se dispara un proyectil con un ángulo de elevación de 40° , determine la velocidad de salida mínima para que el proyectil tenga un alcance de 300 pie por lo menos.

76. Obtenga una fórmula para calcular la altura máxima alcanzada por un proyectil disparado desde un arma con una velocidad de salida de v_0 pies por segundo y un ángulo de elevación de α radianes.

77. En un juego de béisbol un espectador, sentado en una grada a 20 pie sobre el campo, atrapó una pelota que cayó en su lugar. Después lanzó la pelota desde su asiento hacia el campo con un ángulo de depresión de 25° y con una velocidad inicial de 24 pie/s. (a) ¿Cuánto tardará la pelota en golpear el piso? (b) ¿Cuál es la distancia del punto del suelo, directamente debajo de su asiento, hasta el punto del campo donde caerá la pelota?

78. Responda las preguntas del ejercicio 77 suponiendo que el espectador lanza horizontalmente la pelota con una rapidez de 24 pie/s.

79. Si una partícula se mueve en el plano xy de modo que su vector velocidad siempre es ortogonal a su vector de posición, demuestre que la trayectoria de la partícula es una circunferencia con su centro en el origen.

80. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva, ¿bajo qué condiciones el vector aceleración y el vector tangente unitario tendrán la misma dirección o direcciones opuestas?

81. Los vectores V , A y N son, respectivamente, los vectores velocidad, aceleración y normal unitario para el movimiento curvilíneo de una partícula. Demuestre que si $\|(V \cdot V)A - (V \cdot A)V\| \neq 0$, entonces

$$N = \frac{(V \cdot V)A - (V \cdot A)V}{\|(V \cdot V)A - (V \cdot A)V\|}$$

82. Si R , Q y W son tres funciones vectoriales cuyas derivadas con respecto a t existen, demuestre que

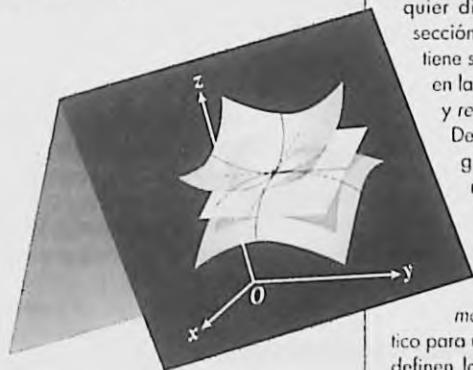
$$D_t[R(t) \cdot Q(t) \times W(t)] = D_t R(t) \cdot Q(t) \times W(t) + R(t) \cdot D_t Q(t) \times W(t) + R(t) \cdot Q(t) \times D_t W(t)$$

Cálculo diferencial de funciones de más de una variable

Capítulo 12

VISIÓN PRELIMINAR

- 12.1 Funciones de más de una variable
- 12.2 Límites y continuidad de funciones de más de una variable
- 12.3 Derivadas parciales
- 12.4 Diferenciabilidad y diferencial total
- 12.5 Regla de la cadena para funciones de más de una variable
- 12.6 Derivadas direccionales y gradientes
- 12.7 Planos tangentes y rectas normales a superficies
- 12.8 Extremos de funciones de dos variables
- 12.9 Multiplicadores de Lagrange



En la sección 12.1 se extiende el concepto de función de una variable real al de *función de varias variables*, y en la siguiente sección se amplían los conceptos de *límite* y *continuidad* para funciones de varias variables. La mayor parte de las discusiones de estas dos secciones se refieren a funciones de dos y tres variables; no obstante, se presentan las definiciones para funciones de n variables y después se presentan las aplicaciones de estas definiciones para funciones de dos y tres variables. También se muestra que cuando cada una de estas definiciones se aplica a una función de una variable, se obtiene la definición dada anteriormente.

El estudio de la diferenciación de funciones de varias variables se inicia en la sección 12.3, donde se definen las *derivadas parciales* de dichas funciones. Luego, en la sección 12.4, se trata la *diferenciabilidad* de estas funciones así como la *diferencial total*. La versión para varias variables de la regla de la cadena se presenta en la sección 12.5. Las aplicaciones de la diferenciación de las secciones 12.3 a 12.5 tratan acerca de la obtención de tasas de variación y sobre el cálculo de aproximaciones.

Mientras que las derivadas parciales de una función con respecto a x y y miden las tasas de variación de la función en las direcciones de los ejes x y y , respectivamente, las *derivadas direccionales*, definidas en la sección 12.6, proporcionan las tasas de variación de estas funciones en cualquier dirección. El *gradiente*, también definido en la sección 12.6, indica la dirección en la que la función tiene su mayor tasa de variación. Este concepto se aplica en la sección 12.7 en el estudio de los *planos tangentes* y *rectas normales a las superficies*.

De la misma forma en que las derivadas primera y segunda se utilizan para determinar los máximos y mínimos de funciones de una variable, en la sección 12.8 se muestra cómo las derivadas parciales permiten obtener los valores extremos de funciones de dos variables. Las aplicaciones de esta sección incluyen el método de *mínimos cuadrados* que proporciona un modelo matemático para un conjunto de datos dados. En la sección 12.9, se definen los *multiplicadores de Lagrange* para calcular los *extremos de una función sujeta a una restricción*.

12.1 FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Ahora se generalizará la noción de función a funciones de más de una variable independiente. Estas funciones se presentan con frecuencia en situaciones prácticas. Por ejemplo, el área de la superficie del cuerpo de una persona depende del peso y de la estatura de la persona. El volumen de un cilindro circular recto depende de su radio y de su altura. De acuerdo con la ley de los gases ideales, el volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a su temperatura e inversamente proporcional a su presión. El precio de venta de un artículo particular puede depender de su costo de producción, del costo de materiales y de los gastos generales.

Con el fin de extender el concepto de función a funciones de cualquier número de variables, primero se considerará el espacio numérico n -dimensional. Del mismo modo en que se denotó un punto de R mediante un número real x , un punto de R^2 por medio de un par ordenado de números reales (x, y) , y un punto de R^3 mediante una terna ordenada de números reales (x, y, z) , un punto del espacio n -dimensional R^n se representa por medio de una n -ada (léase "eneada") o n -upla ordenada de números reales denotada por $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. En particular, si $n = 1$, $P = x$; si $n = 2$, $P = (x, y)$; si $n = 3$, $P = (x, y, z)$; si $n = 6$, $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

12.1.1 Definición del espacio numérico n -dimensional

El conjunto de todas las n -adas ordenadas de números reales se denomina **espacio numérico n -dimensional** y se denota por R^n . Cada n -ada ordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) se llama **punto** del espacio numérico n -dimensional.

12.1.2 Definición de función de n variables

Una **función de n variables** es un conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) en el que dos pares ordenados distintos cualesquiera no tienen el mismo primer elemento. P es un punto del espacio numérico n -dimensional y w es un número real. El conjunto de todos los puntos P admisibles recibe el nombre de **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de w se denomina **contradominio** de la función.

De esta definición, el dominio de una función de n variables es un conjunto de puntos de R^n y su contradominio es un conjunto de números de R . Cuando $n = 1$, se tiene una función de una variable; de modo que el dominio es un conjunto de puntos de R o, equivalentemente, un conjunto de números reales. En consecuencia, la definición 1.1.1 es un caso especial de la definición 12.1.2. Si $n = 2$, se tiene una función de dos variables, y el dominio es un conjunto de puntos de R^2 o, equivalentemente, un conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) .

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Sea la función f , de las dos variables x y y , el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

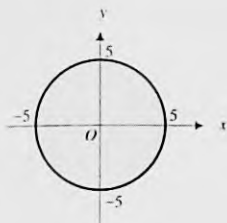


FIGURA 1

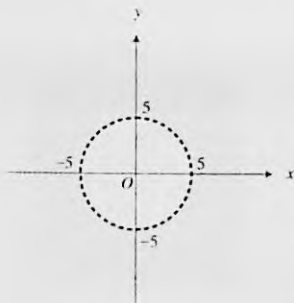


FIGURA 2

El dominio de f es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$. Este es el conjunto de puntos del plano xy sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la región interior limitada por esta circunferencia. La figura 1 muestra el dominio de f como una región sombreada de R^2 .

Debido a que $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, entonces $0 \leq z \leq 5$; por tanto el contradominio de f es el conjunto de números reales del intervalo cerrado $[0, 5]$. ◀

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La función g de las variables x y y es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

El dominio de g es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 25\}$. Éste es el conjunto de puntos de la región exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. La figura 2 muestra el dominio como una región sombreada de R^2 . ◀

Si f es una función de n variables, entonces de acuerdo con la definición 12.1.2, f es un conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) , donde $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un punto de R^n y w es un número real. El valor particular de w que corresponde a un punto P se denota mediante el símbolo $f(P)$ o $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. En particular, si $n = 2$ y $P = (x, y)$, se puede representar el valor de función como $f(P)$ o como $f(x, y)$. De manera semejante, si $n = 3$ y $P = (x, y, z)$, el valor de función se representa como $f(P)$ o como $f(x, y, z)$. Observe que si $n = 1$, $P = x$; en consecuencia, si f es una función de una variable, $f(P) = f(x)$. Por tanto, esta notación es consistente con la notación para valores de función de una variable.

Una función f de n variables puede definirse por la ecuación

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Las variables x_1, x_2, \dots, x_n se denominan **variables independientes** y w se llama **variable dependiente**.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea f la función del ejemplo ilustrativo 1; es decir,

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(3, -4) &= \sqrt{25 - 3^2 - (-4)^2} & f(-2, 1) &= \sqrt{25 - (-2)^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{25 - 9 - 16} & &= \sqrt{25 - 4 - 1} \\ &= 0 & &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u, 3v) &= \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} \\ &= \sqrt{25 - u^2 - 9v^2} \end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 1** Sea g la función definida por

$$g(x, y, z) = x^3 - 4yz^2$$

Obtenga: (a) $g(1, 3, -2)$; (b) $g(2a, -4b, 3c)$; (c) $g(x^2, y^2, z^2)$; (d) $g(y, z, -x)$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(1, 3, -2) &= 1^3 - 4(3)(-2)^2 \\ &= 1 - 48 \\ &= -47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad g(2a, -4b, 3c) &= (2a)^3 - 4(-4b)(3c)^2 \\ &= 8a^3 + 144bc^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad g(x^2, y^2, z^2) &= (x^2)^3 - 4y^2(z^2)^2 \\ &= x^6 - 4y^2z^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad g(y, z, -x) &= y^3 - 4z(-x)^2 \\ &= y^3 - 4x^2z \end{aligned}$$

12.1.3 Definición de función compuesta de dos variables

Si f es una función de una variable y g es una función de dos variables, entonces la **función compuesta** $f \circ g$ es la función de dos variables definida por

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) del dominio de g tales que $g(x, y)$ pertenece al dominio de f .

► **EJEMPLO 2** Dadas $f(t) = \ln t$ y $g(x, y) = x^2 + y$, calcule $h(x, y)$ si $h = f \circ g$, y determine el dominio de h .

Solución

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y) \end{aligned}$$

El dominio de g es el conjunto de todos los puntos de R^2 , y el dominio de f es el intervalo $(0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de h es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y > 0\}$.

La definición 12.1.3 puede extenderse a una función compuesta de n variables como se muestra a continuación.

12.1.4 Definición de función compuesta de n variables

Si f es una función de una variable y g es una función de n variables, entonces la **función compuesta** $f \circ g$ es la función de n variables definida por

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) del dominio de g tales que $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertenece al dominio de f .

► **EJEMPLO 3** Dadas

$$F(x) = \sin^{-1}x \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$$

obtenga la función $F \circ G$ y su dominio.

Solución

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\ &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\ &= \sin^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}\end{aligned}$$

El dominio de G es el conjunto $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geq 0\}$, y el dominio de F es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el dominio de $F \circ G$ es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tales que $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leq 1$, o, equivalentemente, $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$. ◀

Una **función polinomial** de las variables x y y es una función f tal que $f(x, y)$ es la suma de términos de la forma $cx^n y^m$, donde c es un número real y n y m son números enteros no negativos. El **grado** de una función polinomial está determinado por la mayor suma de los exponentes de x y y que se tiene en los términos de la función.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4**

(a) La función f definida por

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 - y^3$$

es una función polinomial de grado 4 debido a que el término de mayor grado es $2x^2y^2$.

(b) Si

$$g(x, y) = 6x^3y^2 - 5xy^3 + 7x^2y - 2x^2 + y + 4$$

entonces g es una función polinomial de grado 5. ◀

La gráfica de una función f de una variable consiste del conjunto de puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 para los cuales $y = f(x)$. De manera similar, la gráfica de una función de dos variables es un conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 .

12.1.5 Definición de la gráfica de una función de dos variables

Si f es una función de dos variables, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 para los cuales (x, y) es un punto del dominio de f y $z = f(x, y)$.

En consecuencia, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie que consta de todos los puntos del espacio tridimensional cuyas coordenadas cartesianas están determinadas por las ternas ordenadas de números reales (x, y, z) . Como el dominio de f es un conjunto de puntos del plano xy , y puesto que cada par ordenado (x, y) del dominio de f corresponde a sólo un valor de z , ninguna recta perpendicular al plano xy puede intersectar a la gráfica de f en más de un punto.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** La función f del ejemplo ilustrativo 1 es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Por tanto, la gráfica de f es la semiesfera en el plano xy y por arriba de éste cuyo centro es el origen y tiene radio 5. Esta semiesfera se muestra en la figura 3.

► **EJEMPLO 4** Dibuje la gráfica de la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Solución La gráfica de f es la superficie que tiene la ecuación $z = x^2 + y^2$. La traza de la superficie en el plano xy se obtiene al utilizar la ecuación $z = 0$ simultáneamente con la ecuación de la superficie. Al hacerlo resulta $x^2 + y^2 = 0$, la cual representa al origen. Las trazas en los planos xz y yz se obtienen al emplear las ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente, junto con la ecuación $z = x^2 + y^2$. Estas trazas son las parábolas $z = x^2$ y $z = y^2$. La sección transversal en el plano $z = k$, paralelo al plano xy , es una circunferencia con su centro en el eje z y radio \sqrt{k} . Con esta información se obtiene la gráfica requerida, la cual se muestra en la figura 4 y que es un paraboloides circular.

Otro método útil para representar geoméricamente una función de dos variables es semejante al de representación de un relieve tridimensional por medio de un mapa topográfico bidimensional. Suponga que la superficie $z = f(x, y)$ se interseca con el plano $z = k$, y que la curva de intersección se proyecta sobre el plano xy . Esta curva proyectada tiene a $f(x, y) = k$ como una ecuación, y la curva se denomina **curva de nivel** (o **de contorno**) de la función f en k . Cada punto de la curva de nivel corresponde a sólo un punto de la superficie que se encuentra a k unidades sobre ella si k es positivo, o a k unidades debajo de ella si k es negativo. Al considerar diferentes valores para la constante k se obtiene un conjunto de curvas de nivel llamado **mapa de contornos**. El conjunto de todos los valores posibles de k es el **contradominio** de la función f , y cada curva de nivel, $f(x, y) = k$, del mapa de contornos consiste de los puntos (x, y) del dominio de f que tienen un valor de función igual a k .

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** La figura 5 muestra la gráfica de la función del ejemplo 4 definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

junto con las curvas de intersección de esta superficie con los planos $z = k$, donde k es igual a 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Estas curvas son circunferencias con centros en el eje z y radio \sqrt{k} . La figura 6 presenta las curvas proyectadas sobre el plano xy . Las circunferencias proyectadas, las cuales son curvas de nivel de la función f , representan una vista de las circunferencias de la figura 5 que se obtiene al mirar la superficie hacia abajo desde un punto del eje z .

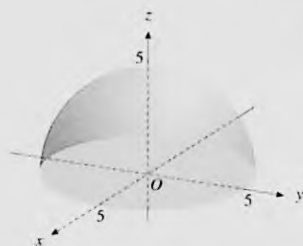


FIGURA 3

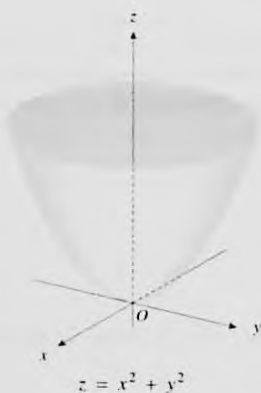


FIGURA 4

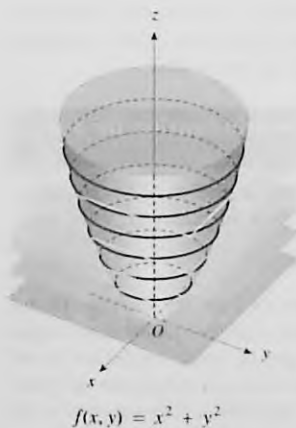


FIGURA 5

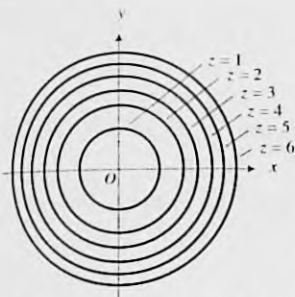
Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

FIGURA 6

 $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$

FIGURA 7

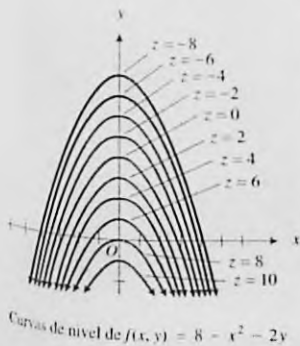
Curvas de nivel de $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$

FIGURA 8

Un mapa de contornos de $z = f(x, y)$ muestra la variación de z con respecto a x y y en el plano xy al considerar las curvas de nivel. Los valores de z cambian más rápidamente cuando las curvas de nivel se encuentran más cercanas entre sí que cuando están más apartadas; esto es, cuando las curvas de nivel se hallan muy próximas entre sí la superficie es escarpada, y cuando las curvas de nivel están separadas la elevación de la superficie, relativa al plano xy , cambia gradualmente. Observe esta situación en la figura 6 para las curvas de nivel de la superficie de la figura 5.

En un mapa topográfico bidimensional de un relieve, se obtiene una noción general de su inclinación al considerar el espacio entre sus curvas de nivel. También en uno de estos mapas, si se sigue la trayectoria de una curva de nivel, la elevación o altura permanece constante.

▶ EJEMPLO 5 Sea f la función definida por

$$f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$$

Dibuje la gráfica de f y un mapa de contornos de f que muestre las curvas en intervalos constantes de 2 unidades a partir de 8 y descendiendo hasta -8 .

Solución La gráfica de f , mostrada en la figura 7, es la superficie

$$z = 8 - x^2 - 2y$$

Al considerar $z = 0$ se obtiene la traza en el plano xy , la cual es la parábola $x^2 = -2(y - 4)$. Si se considera $y = 0$ y $x = 0$, se obtienen las trazas en los planos xz y yz , las cuales son, respectivamente, la parábola $x^2 = -(z - 8)$ y la recta $2y + z = 8$. La sección transversal de la superficie obtenida en el plano $z = k$ es una parábola que tiene su vértice en la recta $2y + z = 8$ del plano yz y abre a la izquierda. Las secciones transversales para z igual a 8, 6, 4, 2, 0, -2 , -4 , -6 y -8 se muestran en la figura.

Las curvas de contornos de f son las parábolas $x^2 = -2(y - 4 + \frac{1}{2}k)$. El mapa de contornos de f junto con las curvas de nivel requeridas se presentan en la figura 8. ◀

A fin de ilustrar la aplicación de las curvas de nivel, suponga que la temperatura en cualquier punto de una placa metálica plana está dada por la función f ; es decir, si T grados es la temperatura, entonces en el punto (x, y) , $T = f(x, y)$. Por tanto, las curvas de nivel que tienen ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante, son curvas sobre las que la temperatura es constante. Estas curvas de nivel se denominan **isotermas**. Además, si V volts proporcionan el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y) del plano xy , y $V = f(x, y)$, entonces las curvas de nivel reciben el nombre de **curvas equipotenciales** debido a que el potencial eléctrico en cada punto de una de estas curvas es el mismo.

Como aplicación de las curvas de nivel en economía, considere la productividad (o salida) que depende de varios insumos (o entradas) en una empresa. Entre los insumos pueden considerarse el número de máquinas empleadas en la producción, el número de horas-persona disponibles, el monto de capital de trabajo, la cantidad de material empleado así como el área de terreno disponible. Suponga que las cantidades de las entradas están dadas por x y y , y que la cantidad de salida está representada por z , donde $z = f(x, y)$. Esta función se denomina **función de producción**, y las curvas de nivel de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante, se llaman **curvas de producción constante**.

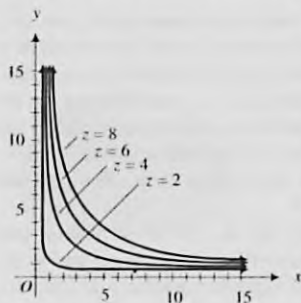

 Curvas de nivel de $f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$

FIGURA 9

► **EJEMPLO 6** Sea f la función de producción para la cual

$$f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$$

Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante en 8, 6, 4 y 2.

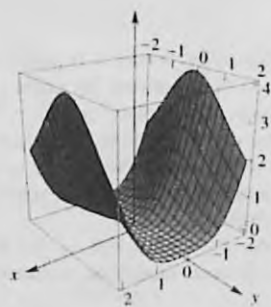
Solución El mapa de contornos consiste de las curvas de intersección de la superficie

$$z = 2x^{1/2}y^{1/2} \quad (1)$$

con los planos $z = k$, donde k es igual a 8, 6, 4 y 2. Al sustituir $z = 8$ en (1) se obtiene $4 = x^{1/2}y^{1/2}$ o, equivalentemente,

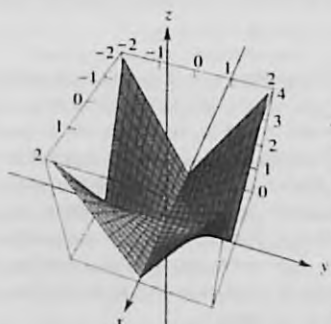
$$xy = 16 \quad x > 0 \quad y > 0 \quad (2)$$

La curva del plano xy representada por (2) es una rama de una hipérbola contenida en el primer cuadrante. También se obtiene una rama de una hipérbola en el primer cuadrante con cada uno de los números 6, 4 y 2. Estas son las curvas de producción constante y se muestran en la figura 9. ◀


 $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[0, 4]$

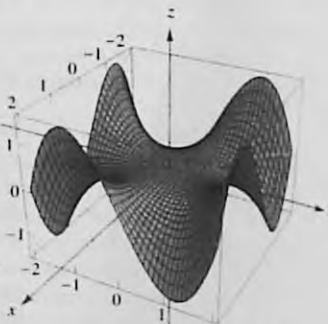
$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 10a


 $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[0, 4]$

$$f(x, y) = |xy|$$

FIGURA 11a


 $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-1.5, 1.5]$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}xy(y^2 - x^2)$$

FIGURA 12a

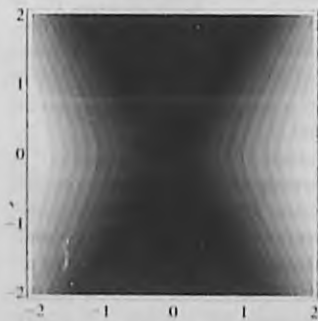

 Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

FIGURA 10b

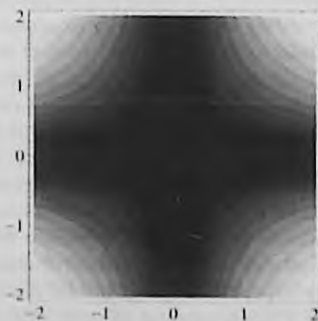

 Curvas de nivel de $f(x, y) = |xy|$

FIGURA 11b

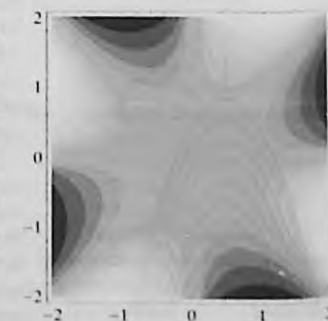
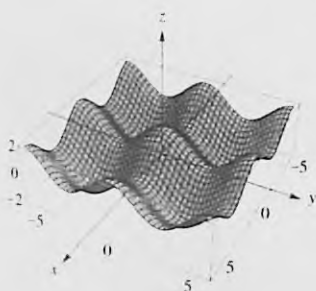

 Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{1}{4}xy(y^2 - x^2)$

FIGURA 12b

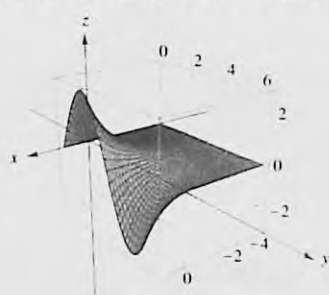
En los ejemplos y ejemplos ilustrativos anteriores se emplearon funciones cuyas gráficas y curvas de nivel se dibujaron con relativa facilidad. Los programas de **gráficos por computadora** pueden emplearse para trazar superficies más complicadas. Estos programas muestran generalmente trazas de la superficie en planos paralelos a los planos coordenados y permiten, con frecuencia, elegir la ubicación de quien las ve de modo que la superficie se puede observar con diferentes perspectivas. Por lo regular, los programas requieren que se estipule una **caja de inspección**. Dicha caja corresponde al **rectángulo** (o *ventana*) de *inspección* que se elige al trazar curvas bidimensionales en una graficadora. La caja de inspección, denotada como $[x_{\min}, x_{\max}]$ por $[y_{\min}, y_{\max}]$ por $[z_{\min}, z_{\max}]$, es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 para los cuales $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$, $y z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$.

Las gráficas por computadora de este texto fueron generadas por el software *Mathematica*. Las figuras que representan estas gráficas muestran la superficie en la caja de inspección indicada debajo de la figura. La mayoría de las gráficas ubican a quien las mira en el primer octante de un sistema coordenado derecho. Se han considerado diferentes tonalidades para resaltar la apariencia tridimensional de las figuras. Las partes (a) de las figuras 10 a 15 muestran las gráficas trazadas en una computadora de las superficies definidas por algunas funciones de dos variables particulares; las partes (b) de las figuras mencionadas muestran las gráficas por computadora de algunas de las curvas de nivel correspondientes. En los ejercicios 51 a 54 se muestran otras gráficas realizadas en una computadora, y se le pedirá que relacione una función con una superficie y un conjunto de curvas de nivel.



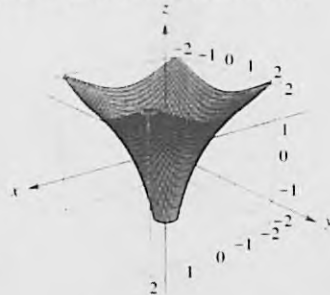
$[-6, 6]$ por $[-6, 6]$ por $[-2, 2]$
 $f(x, y) = \cos x + \cos y$

FIGURA 13a



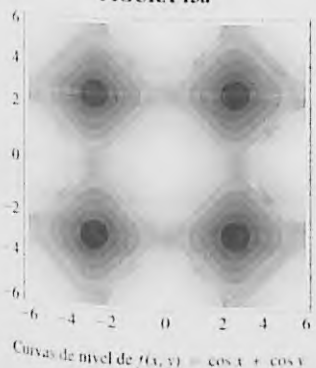
$[-4, 6]$ por $[0, 6.5]$ por $[-3, 3]$
 $f(x, y) = e^x \text{sen } y$

FIGURA 14a



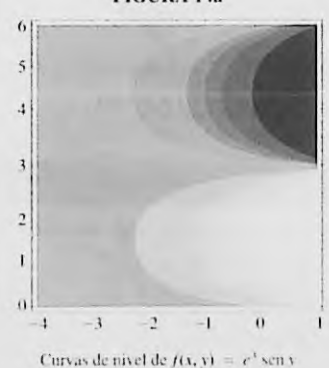
$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

FIGURA 15a



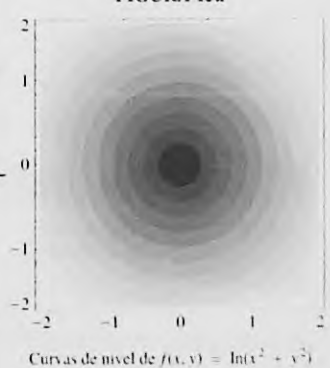
Curvas de nivel de $f(x, y) = \cos x + \cos y$

FIGURA 13b



Curvas de nivel de $f(x, y) = e^x \text{sen } y$

FIGURA 14b



Curvas de nivel de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

FIGURA 15b

La definición siguiente extiende la noción de gráfica de una función a la de gráfica de una función de n variables.

12.1.6 Definición de la gráfica de una función de n variables

Si f es una función de n variables, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n, w)$ de \mathbb{R}^{n+1} para los cuales (x_1, x_2, \dots, x_n) es un punto del dominio de f y $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Las funciones de tres variables tienen *superficies de nivel*, concepto análogo al de curvas de nivel para funciones de dos variables. Si f es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 , entonces si k es un número del contradominio de f , la gráfica de la ecuación

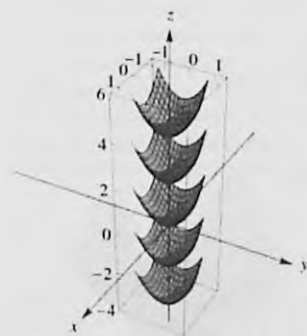
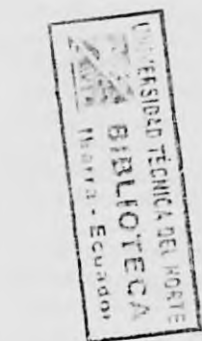
$$f(x, y, z) = k$$

es una **superficie de nivel** de f en k . Cada superficie en el espacio tridimensional puede considerarse como una superficie de nivel de alguna función de tres variables.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Si la función g está definida por

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

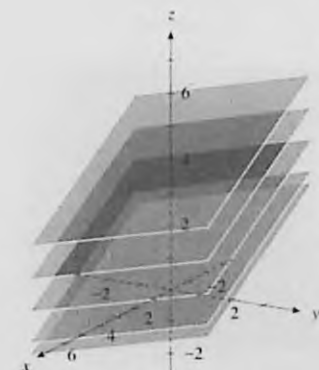
entonces el paraboloide circular $z = x^2 + y^2$, mostrado en la figura 4, es la superficie de nivel de g en 0. La superficie de nivel de g en el número k tiene la ecuación $z + k = x^2 + y^2$, un paraboloide circular cuyo vértice es el punto $(0, 0, -k)$ sobre el eje z . La figura 16 muestra las superficies de nivel para k igual a $-4, -2, 0, 2$ y 4 .



$[-1.5, 1.5]$ por $[-1.5, 1.5]$ por $[-4, 6]$

Superficie del nivel de
 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

FIGURA 16



Curvas de nivel de $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$

FIGURA 17

EJEMPLO 7 La función f está definida por

$$f(x, y, z) = x + 2y + 4z$$

Dibuje las superficies de nivel de f para los siguientes valores de k : 16, 12, 8, 4 y 2.

Solución Una ecuación de la superficie de nivel de f en k es

$$x + 2y + 4z = k$$

cuya gráfica es un plano. Para los valores dados de k se tienen los planos paralelos siguientes:

$$x + 2y + 4z = 16$$

$$x + 2y + 4z = 12$$

$$x + 2y + 4z = 8$$

$$x + 2y + 4z = 4$$

$$x + 2y + 4z = 2$$

Estos planos se muestran en la figura 17.

EJEMPLO 8 La función f está definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Describe las superficies de nivel de f para (a) $k = 4$, (b) $k = -4$, y (c) $k = 0$.

Solución

(a) La superficie de nivel para $k = 4$ tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$

Esta superficie, un hiperboloide de una hoja cuyo eje es el eje z , se muestra en la figura 18.

(b) La superficie de nivel para $k = -4$ tiene la ecuación

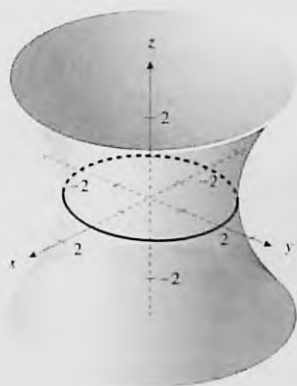
$$x^2 + y^2 - z^2 = -4 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

Esta superficie es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje z , y se presenta en la figura 19.

(c) La superficie de nivel para $k = 0$ tiene la ecuación

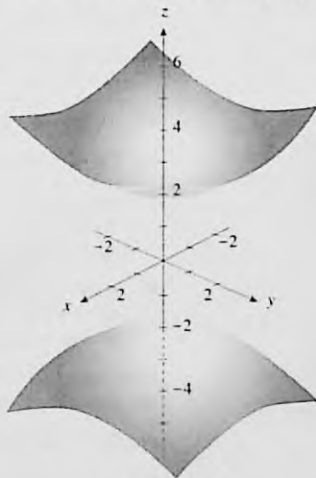
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Esta superficie, un cono cuyo eje es el eje z , se muestra en la figura 20. ◀



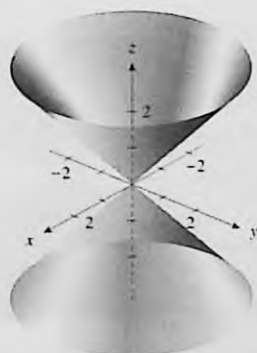
$$x^2 + y^2 - z^2 = 4$$

FIGURA 18



$$z^2 - x^2 - y^2 = 4$$

FIGURA 19



$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

FIGURA 20

EJERCICIOS 12.1

1. Sea f la función de las dos variables x y y y el conjunto de pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Obtenga: (a) $f(-3, 4)$; (b) $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; (c) $f(x+1, y-1)$; (d) $f(-x, y) - f(x, -y)$.

2. Sea g la función de las dos variables x y y y el conjunto de pares ordenados de la forma (P, z) tales que

$$z = \sqrt{x^2 - y} \Leftrightarrow g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$$

Calcule: (a) $g(3, 5)$; (b) $g(-4, -9)$; (c) $g(x+2, 4x+4)$;

(d) $g\left(\frac{1}{x}, \frac{-3}{x^2}\right)$

3. Sea g la función de las tres variables x , y y z el conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) tales que

$$w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$\Leftrightarrow g(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Obtenga: (a) $g(1, -1, -1)$; (b) $g(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (c) $g(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$;
 (d) $[g(x, y, z)]^2 - [g(x + 2, y + 2, z)]^2$.

4. Sea f la función de las tres variables x , y y z el conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) tales que

$$w = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

$$\Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Calcule: (a) $f(1, 2, 3)$; (b) $f(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (c) $f(-\frac{2}{x}, \frac{2}{x}, -\frac{1}{x})$;
 (d) $f(x + 2, 1, x - 2)$.

En los ejercicios 5 a 20, determine el dominio de f y dibújelo como una región de \mathbb{R}^2 . Utilice curvas punteadas para indicar cualquier parte de la frontera que no pertenezca al dominio y curvas continuas para indicar las partes de la frontera que pertenezcan al dominio.

5. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 6. $f(x, y) = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$

7. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

8. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$

9. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

10. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y^2 + 16}$

11. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 16}$

13. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

14. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$

15. $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ 16. $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

17. $f(x, y) = \cos^{-1}(x - y)$ 18. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

19. $f(x, y) = \ln(xy - 1)$ 20. $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$

En los ejercicios 21 a 28, determine el dominio de f y representelo como una región de \mathbb{R}^3 .

21. $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x - y - z}$ 22. $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 - y}$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2 - z^2}$

24. $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

25. $f(x, y, z) = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z$

26. $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$

27. $f(x, y, z) = \ln(4 - x^2 - y^2) + |z|$

28. $f(x, y, z) = xz \cos^{-1}(y^2 - 1)$

En los ejercicios 29 a 36, determine el dominio de f y dibuje su gráfica.

29. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

30. $f(x, y) = 6 - 2x + 2y$

31. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

32. $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$

33. $f(x, y) = x^2 - y^2$ 34. $f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2$

35. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ 36. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

En los ejercicios 37 a 46, dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de nivel para los números indicados.

37. La función del ejercicio 29 para 0, 1, 2, 3 y 4.

38. La función del ejercicio 30 para 10, 6, 2, 0, -2, -6 y -10.

39. La función del ejercicio 31 para 16, 12, 7, 0, -9 y -20.

40. La función del ejercicio 32 para 0, 2, 4, 6, 8 y 10.

41. La función del ejercicio 33 para 16, 9, 4, 0, -4, -9 y -16.

42. La función del ejercicio 36 para 10, 8, 6, 5 y 0.

43. $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ para 8, 6, 4, 2, y 0

44. $f(x, y) = (x - 3)/(y + 2)$ para 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1, -2 y -4.

45. $f(x, y) = e^{13}$ para 1, 2, e , 4, $\frac{1}{2}$, e^{-1} y $\frac{1}{4}$.

46. $f(x, y) = \ln xy$ para 0, 1, 2, 4, -1, -2 y -4.

47. Sean $f(x, y) = x - y$, $g(t) = \sqrt{t}$, $h(s) = s^2$. Calcule (a) $(g \circ f)(5, 1)$; (b) $f(h(3), g(9))$; (c) $f(g(x), h(y))$; (d) $g(h \circ f(x, y))$; (e) $(g \circ h)(f(x, y))$.

48. Sean $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$. Calcule (a) $(h \circ f)(2, 1)$; (b) $f(g(2), h(4))$; (c) $f(g(\sqrt{x}), h(x^2))$; (d) $h(g \circ f(x, y))$; (e) $(h \circ g)(f(x, y))$.

En los ejercicios 49 y 50, calcule $h(x, y)$ si $h = f \circ g$; también determine el dominio de h .

49. $f(t) = \sin^{-1}t$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

50. $f(t) = e^t$; $g(x, y) = y \ln x$

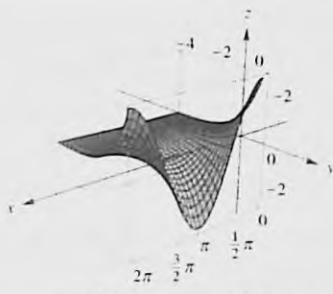
En los ejercicios 51 a 54, relacione la función con una de las superficies (a)–(d) y con uno de los mapas de contorno (i)–(iv). En los mapas de contorno, el eje x es horizontal, el eje y es vertical, el color negro representa los valores de función más pequeños, y el blanco representa los valores de función más grandes.

51. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

52. $f(x, y) = \ln|x + y|$

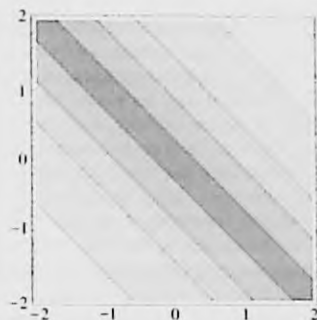
53. $f(x, y) = e^y \cos x$

54. $f(x, y) = \sin x + \cos y$

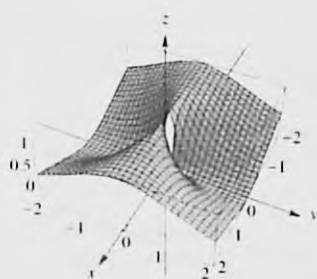


$[0, 2\pi]$ por $[-4, 11]$ por $[-3, 3]$

(a)

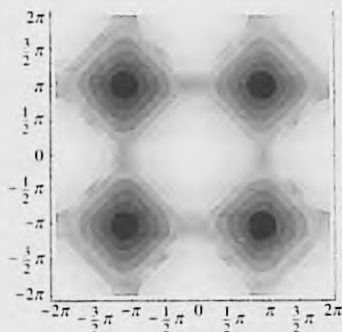


(i)

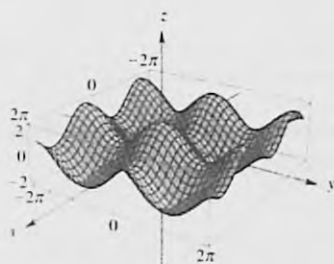


$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[0, 1]$

(b)

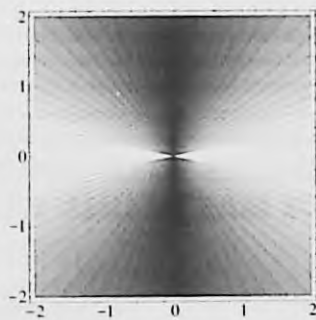


(ii)



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

(c)

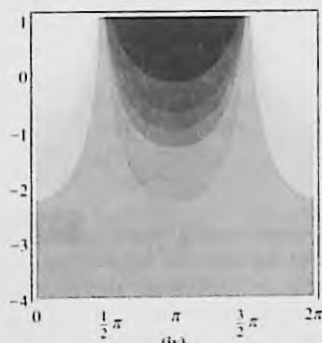


(iii)



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2, 1.5]$

(d)



(iv)

55. Se elabora una caja rectangular cerrada con tres tipos de materiales de modo que contenga un volumen 16 pie³. El material para la tapa y el fondo cuesta \$0.18 por pie cuadrado, el material para las partes delantera y trasera cuesta \$0.16 por pie cuadrado, y el material para las otras dos caras cuesta \$0.12 por pie cuadrado. (a) Obtenga un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función de las dimensiones las partes delantera y trasera. Determine el dominio de la función. (b) ¿Cuál es el costo del material si las dimensiones de las partes delantera y trasera son 2 pie y 4 pie, donde 4 pie es la altura de la caja?
56. Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. El material para el fondo cuesta \$0.15 por pie cuadrado y el material para los lados cuesta \$0.30 por pie cuadrado. (a) Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de las dimensiones del fondo. Determine el dominio de la función. (b) ¿Cuál es el volumen de la caja si el fondo es un cuadrado cuyo lado mide 3 pie?
57. Un sólido rectangular del primer octante, con tres caras en los ejes planos coordenados, tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto en el punto (x, y, z) en el plano $x + 3y + 2z = 6$. (a) Obtenga un modelo matemático que exprese el volumen del sólido como una función de las dimensiones de la base. Determine el dominio de la función. (b) ¿Cuál es el volumen si la base es un cuadrado de lado 1.25 unidades?
58. (a) Obtenga un modelo matemático que exprese el área total de la superficie del sólido del ejercicio 57 como una función de las dimensiones de la base. Determine el dominio de la función. (b) ¿Cuál es el área total de la superficie si la base es un cuadrado de lado 1.25 unidades?
59. El potencial eléctrico en un punto (x, y) es $V(x, y)$ volts y $V(x, y) = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Dibuje las curvas equipotenciales de V para 16, 12, 8 y 4.
60. La función de producción f para cierto artículo está definida por $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$, donde x y y son las cantidades de dos insumos. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constantes para 16, 12, 8, 4 y 2.
61. Suponga que f es la función de producción de cierto artículo, donde $f(x, y)$ unidades se producen cuando se emplean x máquinas y y horas-persona están disponibles. Si $f(x, y) = 6xy$, dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante para 30, 24, 18, 12 y 6.
62. $T(x, y)$ grados es la temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica plana, donde $T(x, y) = 4x^2 + 2y^2$. Dibuje un mapa de contornos de T que muestre las isotermias para 12, 18, 4, 1 y 0.
63. La presión de un gas en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional es $P(x, y, z)$ atmósferas, donde
- $$P(x, y, z) = 4e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$$
- Describa las superficies de nivel, denominadas superficies isobáricas, de P para 4, 2, 1 y $\frac{1}{2}$.
64. El potencial eléctrico en un punto (x, y, z) del espacio tridimensional es $V(x, y, z)$ volts, donde
- $$V(x, y, z) = \frac{8}{\sqrt{16x^2 + 4y^2 + z^2}}$$
- Las superficies de nivel de V se llaman superficies equipotenciales. Describa estas superficies para 4, 2, 1 y $\frac{1}{2}$.

12.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

La definición del límite de una función de una variable involucra la distancia entre dos puntos de la recta numérica real. El límite de una función de más de una variable también implica la distancia entre dos puntos; por lo que se inicia el estudio de estos límites con la definición de distancia entre dos puntos de R^n .

En R la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de dos números reales. Esto es, $|x - a|$ es la distancia entre los puntos x y a de la recta numérica real. En R^2 la distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $P_0(x_0, y_0)$ está dada por la expresión $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. En R^3 la distancia entre los puntos $P(x, y, z)$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ está determinada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. En R^n la distancia entre dos puntos se define de manera análoga.

12.2.1 Definición de la distancia entre dos puntos de R^n

Si $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ son dos puntos de R^n , entonces la distancia entre P y A , denotada por $\|P - A\|$, está determinada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

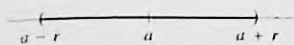

 Bola abierta $B(a, r)$ en R

FIGURA 1


 Bola cerrada $B[a, r]$ en R

FIGURA 2


 Bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ en R^2

FIGURA 3


 Bola cerrada $B[(x_0, y_0); r]$ en R^2

FIGURA 4


 Bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ en R^3

FIGURA 5

El símbolo $\|P - A\|$ representa un número no negativo y se lee como "la distancia entre P y A ".

En R , R^2 y R^3 , la fórmula de la definición 12.2.1 se transforma, respectivamente, en

$$\begin{aligned}\|x - a\| &= |x - a| \\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\end{aligned}$$

12.2.2 Definición de bola abierta en R^n

Si A es un punto de R^n y r es un número positivo, entonces la **bola abierta** $B(A; r)$ es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que $\|P - A\| < r$.

12.2.3 Definición de bola cerrada en R^n

Si A es un punto de R^n y r es un número positivo, entonces la **bola cerrada** $B[A; r]$ es el conjunto de todos los puntos P de R^n tales que $\|P - A\| \leq r$.

Con el fin de ilustrar estas definiciones, se muestra lo que ellas significan en R , R^2 y R^3 . En primer lugar, si a es un punto de R , entonces la bola abierta $B(a; r)$ es el conjunto de todos los puntos x de R tales que

$$|x - a| < r$$

El conjunto de puntos que satisface esta ecuación es el conjunto de todos los puntos del intervalo abierto $(a - r, a + r)$; de modo que la bola abierta $B(a; r)$ en R (refiérase a la figura 1) es simplemente el intervalo abierto cuyo punto medio es a y cuyos extremos son $a - r$ y $a + r$. La bola cerrada $B[a; r]$ en R (figura 2) es el intervalo cerrado $[a - r, a + r]$.

Si (x_0, y_0) es un punto de R^2 , entonces la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) de R^2 tales que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

Por lo que la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ en R^2 (figura 3) consta de todos los puntos de la región interior limitada por la circunferencia que tiene su centro en (x_0, y_0) y radio r . En ocasiones se llama *disco abierto* a una bola abierta de R^2 . La bola cerrada, o *disco cerrado*, $B[(x_0, y_0); r]$ de R^2 (figura 4) es el conjunto de todos los puntos de la bola abierta $B((x_0, y_0); r)$ y la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r .

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de R^3 , entonces la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) de R^3 tales que

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r$$

Por tanto, la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ en R^3 (figura 5) consiste de todos los puntos de la región interior limitada por la esfera que tiene centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r . Similarmente, la bola cerrada $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ de R^3 (figura 6) consiste de todos los puntos de la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ así como de los puntos de la esfera que tiene centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r .

Bola cerrada $B((x_0, y_0, z_0); r)$ en R^3

FIGURA 6

12.2.4 Definición del límite de una función de n variables

Sea f una función de n variables definida en alguna bola abierta $B(A; r)$, excepto posiblemente en el punto A . Entonces, el **límite de $f(P)$ conforme P tiende a A es L** , lo cual se denota por

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|P - A\| < \delta \text{ entonces } |f(P) - L| < \epsilon$$

Si en la definición anterior f es una función de una variable, $A = a$ pertenece a R y $P = x$, entonces la definición establece lo siguiente: si f está definida en algún intervalo abierto centrado en a , excepto posiblemente en a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Por lo que la definición de límite de una función de una variable (1.5.1) es un caso especial de la definición 12.2.4.

La definición del límite de una función de dos variables es el caso especial de la definición 12.2.4 en donde A es el punto (x_0, y_0) y P es el punto (x, y) .

12.2.5 Definición del límite de una función de dos variables

Sea f la función de dos variables definida en algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$, excepto posiblemente en (x_0, y_0) . Entonces el **límite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L** , lo que se denota por

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \text{ entonces } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x, y)$ se aproximan al límite L conforme el punto (x, y) tiende al punto (x_0, y_0) si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x, y)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña al considerar el punto (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0) pero sin llegar a ser (x_0, y_0) . En la definición nada se dice acerca del valor de la función en el punto (x_0, y_0) , es decir, no es necesario que la función esté definida en (x_0, y_0) para que $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ exista.

En la figura 7 se presenta una interpretación geométrica de la definición 12.2.5. En esta figura se muestra la porción de la superficie que tiene

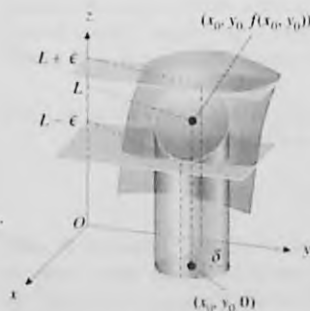


FIGURA 7

ecuación $z = f(x, y)$ y que se encuentra por arriba del disco $B((x_0, y_0); \delta)$. Se observa que $f(x, y)$, en el eje z , estará entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$ siempre que el punto (x, y) del plano xy esté en el disco abierto $B((x_0, y_0); \delta)$. Otra forma de establecer esto consiste en que $f(x, y)$ en el eje z puede forzarse a que esté entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$ al restringir el punto (x, y) del plano xy al disco abierto $B((x_0, y_0); \delta)$.

► **EJEMPLO 1** Utilice la definición 12.2.5 para demostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$$

Solución El primer requisito de la definición es que $2x + 3y$ debe estar definido en algún disco abierto que tenga su centro en el punto $(1, 3)$, excepto posiblemente en $(1, 3)$. Como $2x + 3y$ está definida en cada punto (x, y) , entonces cualquier disco abierto centrado en $(1, 3)$ satisfará este requisito. Ahora, debe demostrarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \text{ entonces } |(2x + 3y) - 11| < \epsilon \quad (1)$$

De la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |2x + 3y - 11| &= |2x - 2 + 3y - 9| \\ &\leq 2|x - 1| + 3|y - 3| \end{aligned}$$

Debido a que

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} \quad \text{y} \quad |y - 3| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

se deduce que

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \text{ entonces } 2|x - 1| + 3|y - 3| < 2\delta + 3\delta$$

Esta proposición muestra que una elección adecuada para δ es $5\delta = \epsilon$, esto es, $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \\ \Rightarrow |x - 1| &< \delta \quad \text{y} \quad |y - 3| < \delta \\ \Rightarrow 2|x - 1| + 3|y - 3| &< 5\delta \\ \Rightarrow |2(x - 1) + 3(y - 3)| &< 5\left(\frac{1}{5}\epsilon\right) \\ \Rightarrow |2x + 3y - 11| &< \epsilon \end{aligned}$$

De este modo, se ha probado que para cualquier $\epsilon > 0$ se elige $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ a fin de que la proposición (1) sea verdadera. Esto demuestra que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11. \quad \blacktriangleleft$$

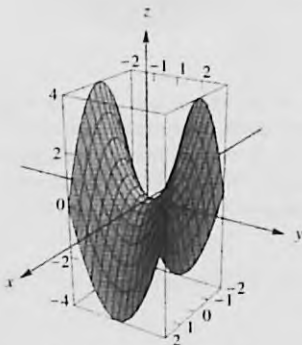
Los teoremas de límites de la sección 1.5 y sus demostraciones, con pequeñas modificaciones, se aplican a funciones de más de una variable. Por ejemplo, en correspondencia con el teorema de límites 1 de la sección 1.5 se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (mx + ny + d) = ma + nb + d$$

y la demostración es una generalización de la demostración del ejemplo 1. A partir de aquí se utilizarán los teoremas de límites sin volver a establecerlos ni demostrarlos.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Al aplicar los teoremas de límites acerca de sumas y productos se tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (x^3 + 2x^2y - y^2 + 2) = (-2)^3 + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2 = 1$$



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-4, 4]$

$$f(x, y) = \frac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2}$$

FIGURA 8

▶ **EJEMPLO 2** Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = \frac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4 - x^4}{y^2 + x^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y^2 - x^2)(y^2 + x^2)}{y^2 + x^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 - x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La gráfica de f , mostrada en la figura 8, es el paraboloides hiperbólico

$$z = y^2 - x^2$$

sin considerar el origen. La gráfica apoya la respuesta.

El teorema siguiente trata acerca del límite de una función compuesta de dos variables, el cual es análogo al teorema 1.9.1 para funciones de una variable y su demostración es semejante.

12.2.6 Teorema

Si g es una función de dos variables y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = b$, y además f es una función de una variable que es continua en b , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f \circ g)(x, y) &= f(b) \\ \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(g(x, y)) &= f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)\right) \end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 3** Utilice el teorema 12.2.6 a fin de calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \ln(xy - 1)$.

Solución Sea g la función tal que $g(x, y) = xy - 1$ y sea f la función para la cual $f(t) = \ln t$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (xy - 1) = 1$$

y como f es continua en 1, del teorema 12.2.6,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \ln(xy - 1) &= \ln\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (xy - 1)\right) \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

A continuación se presentará el concepto de *punto de acumulación* el cual se necesita para continuar el estudio de límites de funciones de dos variables.

12.2.7 Definición de punto de acumulación

Un punto P_0 es un **punto de acumulación** de un conjunto S de puntos de R^n si toda bola abierta $B(P_0; r)$ contiene un número infinito de puntos de S .

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si S es el conjunto de todos los puntos de R^2 del lado positivo del eje x , entonces el origen es un punto de acumulación de S debido a que, sin importar que tan pequeño se tome el valor de r , cada disco abierto que tenga su centro en el origen y radio r contendrá un número infinito de puntos de S . Este es un ejemplo de un conjunto que tiene un punto de acumulación para el cual el punto de acumulación no es un punto del conjunto. Cualquier punto de este conjunto S también es un punto de acumulación de S . ◀

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Si S es el conjunto de todos los puntos de R^2 para los que sus coordenadas cartesianas son números enteros positivos, entonces este conjunto no tiene puntos de acumulación. Esto se ve al considerar el punto (m, n) , donde m y n son números enteros positivos. De este modo, un disco abierto que tenga su centro en (m, n) y radio menor que 1 no contendrá ningún punto de S diferente de (m, n) ; por tanto, no se satisface la definición 12.2.7 (consulte la figura 9). ◀

Ahora se considerará el límite de una función de dos variables conforme un punto (x, y) tiende a un punto (x_0, y_0) , donde (x, y) se restringe a un conjunto específico de puntos.

12.2.8 Definición del límite de una función de dos variables a través de un conjunto específico

Sea f una función definida en un conjunto de puntos S en R^2 , y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de S . Entonces el **límite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tiende a (x_0, y_0) en S** es L , lo que se denota por

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S}} f(x, y) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar que tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \text{ entonces } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

donde (x, y) pertenece a S .

En algunos casos el límite de la definición anterior se transforma en el límite de una función de una sola variable. Por ejemplo, considere $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Entonces si S_1 es el conjunto de todos los puntos del lado positivo del eje x ,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in S_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0)$$

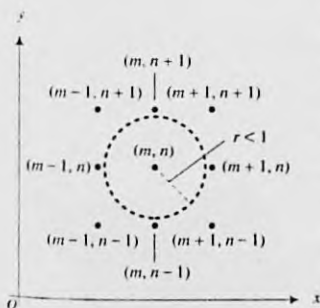


FIGURA 9

Si S_2 es el conjunto de todos los puntos del lado negativo del eje y ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \text{ en } S_2)}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0,y)$$

Si S_3 es el conjunto de todos los puntos del eje x ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \text{ en } S_3)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0)$$

Si S_4 es el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \text{ en } S_4)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2)$$

12.2.9 Teorema

Suponga que la función f está definida para todos los puntos de un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto posiblemente en (x_0, y_0) , y que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Entonces, si S es cualquier conjunto de puntos de R^2 que tiene a (x_0, y_0) como un punto de acumulación,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ ((x,y) \text{ en } S)}} f(x,y)$$

existe y siempre tiene el valor L .

Demostración Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$, entonces, por la definición 12.2.5, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \text{ entonces } |f(x,y) - L| < \epsilon$$

La proposición anterior será verdadera si además se restringe (x,y) debido al requisito de que (x,y) pertenezca a un conjunto S , donde S es cualquier conjunto de puntos que tenga a (x_0, y_0) como un punto de acumulación. Por tanto, por la definición 12.2.8,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ ((x,y) \text{ en } S)}} f(x,y) = L$$

y L no depende del conjunto S a través del cual (x,y) se aproxima a (x_0, y_0) . Esto demuestra el teorema. ■

El teorema siguiente se obtiene como consecuencia inmediata del teorema 12.2.9.

12.2.10 Teorema

Si la función f tiene límites diferentes conforme (x,y) se aproxima a (x_0, y_0) a través de dos conjuntos diferentes de puntos que tienen a (x_0, y_0) como un punto de acumulación, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

Demostración Suponga que S_1 y S_2 son dos conjuntos de puntos de R^2 diferentes que tienen a (x_0, y_0) como un punto de acumulación, y sean

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x,y) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x,y) = L_2$$

Ahora suponga que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ existe. Entonces, por el teorema 12.2.9, L_1 debe ser igual a L_2 ; pero por hipótesis $L_1 \neq L_2$, de modo que se tiene una contradicción. Por tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe. ■

► **EJEMPLO 4** Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Utilice el teorema 12.2.10 para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.

Solución La función f está definida en todos los puntos de R^2 excepto en $(0,0)$. Sean S_1 el conjunto de todos los puntos del eje x y S_2 el conjunto de todos los puntos del eje y . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x,y) &= \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} & &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 & &= \lim_{y \rightarrow 0} (-1) \\ &= 1 & &= -1 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x,y)$$

se concluye, por el teorema 12.2.10, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.

La figura 10 muestra la gráfica de f . Observe en la figura que conforme (x,y) se aproxima a $(0,0)$ a lo largo del eje x , parece que $f(x,y)$ tiende a 1, y conforme (x,y) se aproxima a $(0,0)$ a lo largo del eje y , parece que $f(x,y)$ tiende a -1 . Estas observaciones apoyan la respuesta. ◀

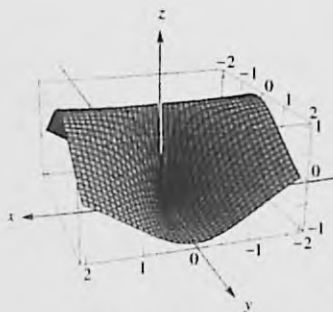
► **EJEMPLO 5** Demuestre que no existe el límite siguiente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solución La expresión $x/(x^2 + y^2)$ está definida para todos los puntos de R^2 excepto $(0,0)$. Sea S el conjunto de puntos del eje x positivo. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S)}} \frac{x}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

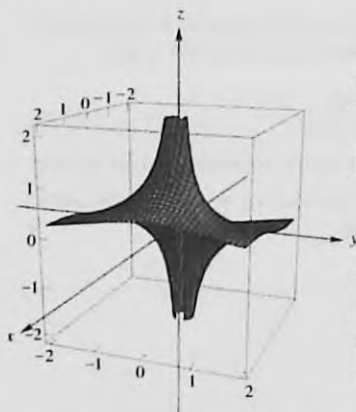
Por tanto, el límite no existe.



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 10



$[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ por $[-2.2, 2.2]$

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 11



$[-2.6, 2.6]$ por $[-2.6, 2.6]$ por $[-0.5, 0.5]$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 12

La figura 11 muestra la gráfica de la función cuyos valores son $x/(x^2 + y^2)$. Observe que conforme (x, y) se aproxima al origen a lo largo del eje x positivo, parece que los valores de función crecen sin límite, lo cual apoya la respuesta.

► **EJEMPLO 6** Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si existe.

Solución La función está definida para todos los puntos de R^2 excepto $(0, 0)$. Sean S_1 el conjunto de todos los puntos del eje x , y S_2 el conjunto de todos los puntos de la recta $y = x$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \\ &= 0 & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x, y)$$

entonces, por el teorema 12.2.10, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

La figura 12 muestra la gráfica de f , la cual apoya el hecho de que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

► **EJEMPLO 7** Dada

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si existe.

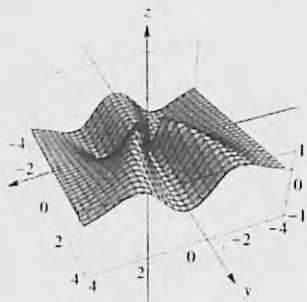
Solución La función está definida para todos los puntos de R^2 excepto $(0, 0)$. Sea S_1 el conjunto de todos los puntos de cualquier recta que pase por el origen; esto es, para cualquier punto (x, y) de S_1 , $y = mx$. Sea S_2 el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^3}{x^4 + m^2x^2} & &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} & &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 \\ &= 0 & &= 1 \end{aligned}$$

Debido a que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x, y)$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.



$[-4, 4]$ por $[-4, 4]$ por $[-1, 1]$

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 13

La figura 13, la cual muestra la gráfica de f , apoya el hecho de que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe. \blacktriangleleft

▶ EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ si existe.

Solución La función está definida en todos los puntos de R^2 excepto en $(0, 0)$. Sea S_1 el conjunto de todos los puntos de cualquier recta que pase por el origen, de modo que si $f(x, y)$ es un punto de S_1 , entonces $y = mx$. Sea S_2 el conjunto de todos los puntos de la parábola $y = x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_1)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 2m^2x^2 + m^4x^4}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(1 + m^4) + 2x^2(1 + m^2)}{x^2(1 + m^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + m^4) + 2(1 + m^2)}{1 + m^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ ((x,y) \in S_2)}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 2x^4 + x^8}{x^2 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8 + 3x^4 + 2x^2}{x^2 + x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 3x^2 + 2}{1 + x^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Aunque se obtiene el mismo límite 2 si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen así como por la parábola $y = x^2$, no se puede concluir que el límite exista y sea igual a 2, no obstante se puede esperar que este sea el caso. Cualquier disco abierto centrado en el origen satisface el primer requisito de la definición 12.2.5. Si puede probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ entonces } \left| \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} - 2 \right| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \text{si } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ entonces } \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \end{aligned} \quad (2)$$

entonces se habrá demostrado que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 2$.

Como $x^2 \leq x^2 + y^2$ y $y^2 \leq x^2 + y^2$,

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 2(x^2 + y^2)$$

De modo que se tiene una elección adecuada para δ al despejarla de $2\delta^2 = \epsilon$; así, $\delta = \sqrt{\epsilon/2}$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \\ \Rightarrow 2(x^2 + y^2) < 2\delta^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} < 2\delta^2$$

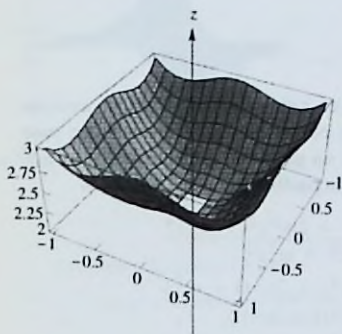
$$\Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

Así, si $\delta = \sqrt{\epsilon/2}$, entonces la proposición (2) se cumple y de este modo se ha demostrado que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 2.$$

La figura 14 muestra la gráfica de f y apoya el hecho de que el límite es 2.



$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ por $[2, 3]$

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

FIGURA 14

12.2.11 Definición de continuidad de una función de n variables

Suponga que f es una función de n variables y que A es un punto de R^n . Se dice que f es **continua** en el punto A si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- (i) $f(A)$ existe;
- (ii) $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$ existe;
- (iii) $\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumple para el punto A , entonces se dice que f es **discontinua** en A .

Si f es una función de dos variables, A es el punto (x_0, y_0) y P es el punto (x, y) , entonces la definición 12.2.11 se transforma en la definición siguiente.

12.2.12 Definición de continuidad de una función de dos variables

Se dice que la función f de dos variables x y y es **continua** en el punto (x_0, y_0) si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- (i) $f(x_0, y_0)$ existe;
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ existe;
- (iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

► **EJEMPLO 9** Determine si la función g es continua en $(0, 0)$ si

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución Se verificarán las tres condiciones de la definición 12.2.12 para el punto $(0, 0)$.

(i) $g(0, 0) = 2$. Por tanto, se cumple la condición (1).

$$(ii) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} = 2$$

Este hecho se demostró en el ejemplo 8.

$$(iii) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = g(0, 0)$$

Por tanto, g es continua en $(0, 0)$. ◀

► **EJEMPLO 10** Determine si la función h es continua en $(0, 0)$ si

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución Al verificar las condiciones de la definición 12.2.12 se tiene:

(i) $h(0, 0) = 0$. Por tanto, se cumple la condición (i).

(ii) Cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. En el ejemplo 6, se mostró que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ no existe; en consecuencia, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ no existe. Por tanto, no se cumple la condición (ii).

Así, h es discontinua en $(0, 0)$. ◀

Si una función f de dos variables es discontinua en un punto (x_0, y_0) pero $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ existe, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** (o **eliminable**) en (x_0, y_0) debido a que si se redefine f en (x_0, y_0) de modo que

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

entonces la nueva función es continua en (x_0, y_0) . Si una discontinuidad no es removible, entonces se denomina **discontinuidad esencial**.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4**

(a) Si $f(x, y) = (x^4 + 2x^2 + 2y^2 + y^4)/(x^2 + y^2)$, entonces f es discontinua en $(0, 0)$ ya que $f(0, 0)$ no está definido. Sin embargo, en el ejemplo 8, se probó que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 2$. Por tanto la discontinuidad es removible al redefinir $f(0, 0)$ como 2. Refiérase al ejemplo 9.

(b) Considere $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. Entonces f es discontinua en $(0, 0)$ debido a que $f(0, 0)$ no está definido. En el ejemplo 6, se mostró que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe. Por tanto, la discontinuidad es esencial. ◀

Los teoremas que tratan acerca de la continuidad para funciones de una variable pueden extenderse a funciones de dos variables.

12.2.13 Teorema

Si f y g son dos funciones continuas en el punto (x_0, y_0) , entonces

- (i) $f + g$ es continua en (x_0, y_0) ;
- (ii) $f - g$ es continua en (x_0, y_0) ;
- (iii) fg es continua en (x_0, y_0) ;
- (iv) f/g es continua en (x_0, y_0) , considerando que $g(x_0, y_0) \neq 0$.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema correspondiente (1.8.2) para funciones de una variable.

12.2.14 Teorema

Una función polinomial de dos variables es continua en cada punto de R^2 .

Demostración Toda función polinomial es la suma de productos de funciones definidas por $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = c$, donde c es un número real. Puesto que f , g y h son continuas en cada punto de R^2 , el teorema se deduce mediante aplicaciones repetidas de los incisos (i) y (iii) del teorema 12.2.13. ■

12.2.15 Teorema

Una función racional de dos variables es continua en cada punto de su dominio.

Demostración Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales f y g que son continuas en cada punto de R^2 , según el teorema 12.2.14. Si (x_0, y_0) es cualquier punto del dominio de f/g , entonces $g(x_0, y_0) \neq 0$; de modo que por el inciso (iv) del teorema 12.2.13, f/g es continua en ese punto. ■

▶ **EJEMPLO 11** Determine todos los puntos en los que f es continua si

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Solución La función f está definida en todos los puntos de R^2 . Por tanto, se cumple la condición (i) de la definición 12.2.12 para cada punto (x_0, y_0) .

Considere los puntos (x_0, y_0) si $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

Si $x_0^2 + y_0^2 < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x^2 + y^2) \\ &= x_0^2 + y_0^2 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Si $x_0^2 + y_0^2 > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0 \\ &= 0 \\ &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Así, f es continua en todos los puntos (x_0, y_0) para los que $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$.

Con el fin de determinar la continuidad de f en los puntos (x_0, y_0) para los cuales $x_0^2 + y_0^2 = 1$, se considera $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ para estos puntos.

Sean S_1 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \leq 1$, y S_2 el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} (x^2 + y^2) & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} 0 \\ &= x_0^2 + y_0^2 & &= 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x,y)$$

se concluye que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe. En consecuencia, f es discontinua en todos los puntos (x_0, y_0) para los cuales $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

De esta manera se ha demostrado que f es continua para todos los puntos de R^2 excepto para aquellos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ◀

12.2.16 Definición de continuidad en una bola abierta

La función f de n variables es **continua en una bola abierta** si es continua en cada punto de la bola abierta.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** A partir de los resultados del ejemplo 11, la función de ese ejemplo es continua en cada disco abierto que no contenga ningún punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ◀

El teorema siguiente, análogo al teorema 1.9.2, afirma que una función continua de una función continua es continua.

12.2.17 Teorema

Suponga que f es una función de una variable y que g es una función de dos variables tal que g es continua en (x_0, y_0) y f es continua en $g(x_0, y_0)$. Entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en (x_0, y_0) .

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema 1.9.2.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Sea h la función del ejemplo 3:

$$h(x, y) = \ln(xy - 1)$$

Si $g(x, y) = xy - 1$, g es continua en todos los puntos de R^2 . La función logarítmica natural es continua en su dominio completo, el cual es el conjunto de todos los números reales positivos. De modo que si f es la función definida por $f(t) = \ln t$, entonces f es continua para todo $t > 0$. Por tanto, la función h es la función compuesta $f \circ g$ y, por el teorema 12.2.17, es continua en todos los puntos (x, y) de R^2 para los cuales $xy - 1 > 0$. ◀

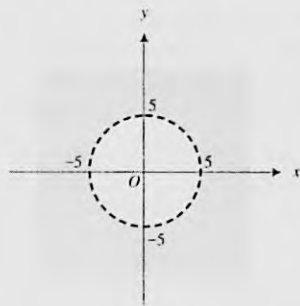


FIGURA 15

► **EJEMPLO 12** Determine todos los puntos en los que f es continua si

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$$

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 para los cuales $x^2 + y^2 - 25 > 0$. Estos son los puntos de la región exterior limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ como se muestra en la figura 15. La función f es el cociente de las funciones g y h para las que

$$g(x, y) = 1 \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

Como g es una función constante, es continua en cada punto de \mathbb{R}^2 . Del teorema 12.2.17, h es continua en todos los puntos de \mathbb{R}^2 que satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 > 25$. Por tanto, por el teorema 12.2.13(iv), f es continua en todos los puntos de su dominio. ◀

EJERCICIOS 12.2

En los ejercicios 1 a 6, evalúe el límite mediante los teoremas de límites.

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} (3x^2 + xy - 2y^2)$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,4)} (5x^2 - 2xy + y^2)$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{3x - 2y}{x + 4y}$ 4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} y^3 \sqrt{x^3 + 2y}$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^{4/3} - (y-1)^{4/3}}{(x-1)^{2/3} + (y-1)^{2/3}}$

En los ejercicios 7 a 10, establezca el límite determinando una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$ tal que se cumpla la definición 12.2.5.

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} (3x - 4y) = 1$

8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (5x + 4y) = -6$

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} (3x - 2y) = -9$

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (5x - 3y) = -2$

En los ejercicios 11 a 16, demuestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

11. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 12. $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

13. $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

14. $f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

15. $f(x, y) = \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}$ 16. $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$

En los ejercicios 17 a 20, demuestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe.

17. $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$ 18. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

19. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 20. $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

En los ejercicios 21 a 24, determine si el límite existe.

21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ 22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^4}$

23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$ 24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$

En los ejercicios 25 a 28, muestre la aplicación del teorema 12.2.6 para calcular el límite.

25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \tan^{-1} \frac{y}{x}$ 26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} e^{x-y}$

27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}}$ 28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \left[5x + \frac{1}{2}y^2 \right]$

En los ejercicios 29 a 52, determine todos los puntos en los que la función es continua.

29. $f(x, y) = \frac{x^2}{y-1}$ 30. $F(x, y) = \frac{1}{x-y}$

31. $h(x, y) = \sin \frac{y}{x}$ 32. $f(x, y) = \ln x y^2$

33. $f(x, y) = \frac{4x^2 y + 3y^2}{2x - y}$

34. $g(x, y) = \frac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2}$

35. $g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

36. $f(x, y) = \cos^{-1}(x + y)$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: consulte el ejercicio 19.

$$38. h(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Sugerencia: refiérase al ejercicio 7.

$$39. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$40. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$41. G(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$42. F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x^3| + |y^3|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$43. f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$44. f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$$

$$45. f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}$$

$$46. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$47. f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$$

$$48. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9) - \ln(1 - x^2 - y^2)$$

$$49. f(x, y) = \sec^{-1}(x + y) + \ln(xy)$$

$$50. f(x, y) = \sec^{-1}(xy)$$

$$51. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x + y)}{x + y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 1 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

$$52. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ x - y & \text{si } x = y \end{cases}$$

En los ejercicios 53 a 59, la función es discontinua en el origen debido a que $f(0, 0)$ no existe. Determine si la discontinuidad es removible o esencial. Si la discontinuidad es removible, redefina $f(0, 0)$ de modo que la nueva función sea continua en $(0, 0)$.

$$53. f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} \quad 54. f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$55. f(x, y) = (x + y) \sin \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$56. f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \quad 57. f(x, y) = \frac{x^3y^2}{x^6 + y^4}$$

$$58. f(x, y) = \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 59. f(x, y) = \frac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$$

60. (a) Dé una definición, semejante a la definición 12.2.5, del límite de una función de tres variables conforme un punto (x, y, z) tiende al punto (x_0, y_0, z_0) . (b) Proporcione una definición, similar a la definición 12.2.8, del límite de una función de tres variables conforme un punto (x, y, z) se aproxima del punto (x_0, y_0, z_0) a través de un conjunto específico S de puntos de R^3 .

61. (a) Enuncie un teorema semejante al teorema 12.2.9 para una función f de tres variables. (b) Establezca un teorema similar al teorema 12.2.10 para una función f de tres variables.

En los ejercicios 62 a 65, use las definiciones y teoremas de los ejercicios 60 y 61 para probar que $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ no existe.

$$62. f(x, y, z) = \frac{x^3 + yx^2}{x^4 + y^2 + z^4}$$

$$63. f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$64. f(x, y, z) = \frac{x^4 + yx^3 + z^2x^2}{x^4 + y^4 + z^4}$$

$$65. f(x, y, z) = \frac{x^2y^2z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$$

En los ejercicios 66 y 67, utilice la definición del ejercicio 60(a) para demostrar que $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ existe.

$$66. f(x, y, z) = \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$67. f(x, y, z) = \frac{xy + xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

68. (a) Dé una definición, semejante a la definición 12.2.12, de continuidad en un punto para una función de tres variables. (b) Establezca teoremas para las funciones de tres variables similares a los teoremas 12.2.13 y 12.2.17.

En los ejercicios 69 a 72, utilice la definición y los teoremas del ejercicio 68 para determinar todos los puntos en los que la función es continua.

$$69. f(x, y, z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1}$$

$$70. f(x, y, z) = \ln(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$$

$$71. f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$72. f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

73. La función G está definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & \text{si } x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & \text{si } x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

Demuestre que G es continua en todos los puntos (x, y) de R^2 excepto en aquellos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

74. La función F está definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & \text{si } x^2 - 3y^2 \leq 1 \\ 2 & \text{si } x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre que F es continua en todos los puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 excepto en aquellos de la hipérbola $x^2 - 3y^2 = 1$.

75. Suponga que f y g son funciones de dos variables que satisfacen las condiciones siguientes:

(i) $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$; $g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ para alguna n y para toda t ;

(ii) $g(1, 1) \neq 0$ y $g(1, 0) \neq 0$;

(iii) $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$.

Demuestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ no existe.

12.3 DERIVADAS PARCIALES

La diferenciación de funciones de valor real de n variables se reduce al caso de una dimensión al considerar una función de n variables como una función de una variable mientras que las demás se mantienen fijas. Esto conduce al concepto de *derivada parcial**. Primero se considerarán las derivadas parciales de una función de dos variables.

12.3.1 Definición de derivada parcial de una función de dos variables

Sea f una función de las variables x y y . La **derivada parcial de f con respecto a x** es la función, denotada por D_1f , tal que su valor en cualquier punto (x, y) del dominio de f está dado por

$$D_1f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

si este límite existe. De manera semejante, la **derivada parcial de f con respecto a y** es la función, denotada por D_2f , tal que su valor en cualquier punto (x, y) del dominio de f está dado por

$$D_2f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

si existe este límite.

El proceso para calcular una derivada parcial se denomina **diferenciación parcial**.

D_1f , que se lee “ D sub 1 de f ”, denota la función que es la derivada parcial de f con respecto a la primera variable. $D_1f(x, y)$, que se lee “ D sub 1 de f de x y y ”, denota el valor de la función D_1f en el punto (x, y) .

Otras notaciones para D_1f son f_1 , f_x , y $\frac{\partial f}{\partial x}$.** Además, se tienen las notaciones $f_1(x, y)$, $f_x(x, y)$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ para $D_1f(x, y)$. De manera semejante, las notaciones para D_2f son f_2 , f_y , y $\frac{\partial f}{\partial y}$; y para $D_2f(x, y)$ son $f_2(x, y)$.

* Nota. El autor utiliza la notación de Cauchy (con la letra D) para la derivada parcial empleando un subíndice numérico (1 a 2) para indicar la variable (x o y) con respecto a la cual se deriva. También se utiliza en otros libros como subíndice más específico la propia letra: x o y . Así en vez de D_1 o D_2 se escribe D_x o D_y , y el contexto indica que se trata de derivadas parciales. Para distinguir mejor podría usarse en tal caso la letra D con subíndices x o y , o bien 1 o 2.

** Nota. Esta simbología recibe el nombre de *notación de Jacobi*. La ∂ se llama “*de*” de Jacobi y se utiliza en forma análoga a la “*de*” de Leibnitz, aunque no corresponde al concepto de diferencial.

$f_x(x, y)$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Si $z = f(x, y)$, entonces se puede expresar $D_1 f(x, y)$ como $\frac{\partial z}{\partial x}$. Una derivada parcial no puede considerarse como la razón de ∂z y ∂x puesto que ninguno de estos símbolos tiene significado por separado. Anteriormente se dijo que la notación $\frac{dy}{dx}$ puede considerarse como el cociente de dos diferenciales cuando y es una función de la variable x , pero no existe una interpretación similar para $\frac{\partial z}{\partial x}$.

► **EJEMPLO 1** Aplique la definición de derivada parcial para calcular $D_1 f(x, y)$ y $D_2 f(x, y)$ si

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

Solución

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x - 2y) \\ &= 6x - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 f(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-2x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-2x + 2y + \Delta y) \\ &= -2x + 2y \end{aligned}$$

Si (x_0, y_0) es un punto particular del dominio de f , entonces

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

si este límite existe, y

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

si existe este límite.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se aplicará la fórmula (1) a fin de calcular $D_1f(3, -2)$ para la función f del ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
 D_1f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{27 + 18\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\Delta x + 4 - 43}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (18 + 3\Delta x + 4) \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

Las siguientes son fórmulas alternativas de (1) y (2) para $D_1f(x_0, y_0)$ y $D_2f(x_0, y_0)$:

$$D_1f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

si este límite existe, y

$$D_2f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (4)$$

si existe este límite.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará la fórmula (3) con el objeto de calcular $D_1f(3, -2)$ para la función f del ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
 D_1f(3, -2) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 43}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x - 39}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 13) \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** En el ejemplo 1 se probó que

$$D_1f(x, y) = 6x - 2y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 D_1f(3, -2) &= 18 + 4 \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

Este resultado concuerda con los resultados de los ejemplos ilustrativos 1 y 2.

Al comparar la definición de derivada parcial (12.3.1) con la definición de derivada común (2.1.3), se observa que $D_1f(x, y)$ es la derivada ordinaria de f si se supone que f es una función sólo de la variable x (esto es, y se toma como una constante), y $D_2f(x, y)$ es la derivada ordinaria de f si f se piensa como una función sólo de la variable y (mientras que x se considera constante). De modo que los resultados del ejemplo 1 pueden obtenerse más fácilmente al aplicar los teoremas de diferenciación ordinaria si y se toma como constante cuando se calcula $D_1f(x, y)$, y si x se considera constante cuando se obtiene $D_2f(x, y)$. El ejemplo siguiente ilustra esto.

► **EJEMPLO 2** Calcule $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ si

$$f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + \sin xy^2$$

Solución Si se considera f como una función de x y se toma como constante a y , entonces se obtiene

$$f_x(x, y) = 9x^2 - 8xy + 3y^2 + y^2 \cos xy^2$$

Al considerar f como una función sólo de y y se tiene a x como constante resulta

$$f_y(x, y) = -4x^2 + 6xy + 2xy \cos xy^2 \quad \blacktriangleleft$$

Las interpretaciones geométricas de las derivadas parciales de una función de dos variables son semejantes a la de una función de una variable. La gráfica de una función f de dos variables es una superficie que tiene ecuación $z = f(x, y)$. Si y se considera como constante (digamos, $y = y_0$), entonces $z = f(x, y_0)$ es una ecuación de la traza de esta superficie en el plano $y = y_0$. La curva puede representarse mediante las dos ecuaciones

$$y = y_0 \quad y \quad z = f(x, y) \quad (5)$$

debido a que la curva es la intersección de estas dos superficies.

Entonces, $D_1f(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por las ecuaciones (5) en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del plano $y = y_0$. De manera análoga, $D_2f(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva que tiene ecuaciones

$$x = x_0 \quad y \quad z = f(x, y)$$

en el punto P_0 del plano $x = x_0$. Las figuras 1 y 2 muestran una porción de la curva y de la recta tangente.

► **EJEMPLO 3** Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$$

con el plano $y = 2$ en el punto $(2, 2, \sqrt{3})$.



FIGURA 1



FIGURA 2



FIGURA 3

Solución La figura 3 muestra la curva de intersección de la superficie y del plano, así como la recta tangente. La pendiente requerida es el valor de

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ en el punto } (2, 2, \sqrt{3}). \text{ Así,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

De modo que en $(2, 2, \sqrt{3})$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Cuando se calcula una derivada parcial en un punto particular, en ocasiones es necesario aplicar las fórmulas (1) a (4) como se muestra en el ejemplo siguiente.

► **EJEMPLO 4** Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que $f_1(0, 0) = 0$ y que $f_2(0, 0) = 0$.

Solución Se calculará $f_1(0, 0)$ a partir de (3) con $y_0 = 0$, y $f_2(0, 0)$ a partir de (4) con $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} f_1(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} & f_2(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} & &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 & &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 \\ &= 0 & &= 0 \end{aligned}$$

La figura 4, que muestra la superficie definida por la función del ejemplo 4, apoya el hecho de que $f_1(0, 0)$ y $f_2(0, 0)$ son iguales a cero. La intersección del plano $y = 0$ y la superficie es el eje x , y $f_1(0, 0)$ es la pendiente del eje x en el plano xz , la cual, por supuesto, es cero. De manera similar, $f_2(0, 0)$ es la pendiente del eje y en el plano yz , la cual también es cero.

► **EJEMPLO 5** Para la función del ejemplo 4, demuestre que: (a) $f_1(0, y) = -y$ para toda y ; (b) $f_2(x, 0) = x$ para toda x .

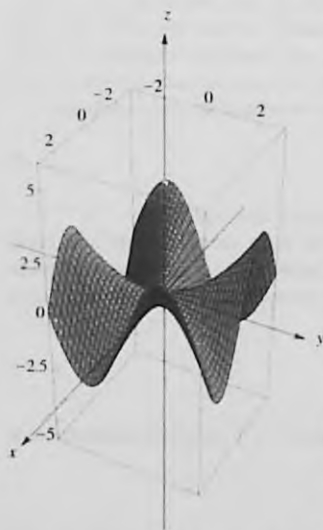
Solución

(a) Si $y \neq 0$, de (3),

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \end{aligned}$$

(b) Si $x \neq 0$, de (4),

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} \end{aligned}$$



$[-2.5, 2.5]$ por $[-2.5, 2.5]$ por $[-6, 6]$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 4

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \\
 &= -\frac{y^3}{y^2} &= \frac{x^3}{x^2} \\
 &= -y &= x
 \end{aligned}$$

- (a) Como $f_1(0, y) = -y$ si $y \neq 0$, del ejemplo 4, $f_1(0, 0) = 0$, se concluye que $f_1(0, y) = -y$ para toda y .
- (b) Puesto que $f_2(x, 0) = x$ si $x \neq 0$, del ejemplo 4, $f_2(0, 0) = 0$, se infiere que $f_2(x, 0) = x$ para toda x . \blacktriangleleft

Debido a que toda derivada es una medida de una tasa de variación, una derivada parcial se puede interpretar de la misma manera. Si f es una función de las dos variables x y y , la derivada parcial de f con respecto a x en el punto $P_0(x_0, y_0)$ proporciona la tasa de variación instantánea, en P_0 , de $f(x, y)$ por unidad de variación de x (x varía y y se mantiene fija en y_0). De manera semejante, la derivada parcial de f con respecto a y en P_0 proporciona la tasa de variación instantánea, en P_0 , de $f(x, y)$ por unidad de variación de y .

EJEMPLO 6 De acuerdo con la ley del gas ideal para un gas confinado, si P atmósferas es la presión, V litros es el volumen y T grados es la temperatura absoluta en la escala Kelvin, se tiene la fórmula

$$PV = kT \quad (6)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Suponga que el volumen de un gas de cierto recipiente es de 12 litros y que la temperatura es de 290°K , con $k = 0.6$. (a) Calcule la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T si V permanece fijo en 12. (b) Utilice el resultado del inciso (a) para aproximar la variación de la presión si la temperatura se incrementa a 295°K . (c) Calcule la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P si T permanece fija en 290°K . (d) Suponga que la temperatura se mantiene constante. Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada del volumen necesario para producir la misma variación en la presión que se obtuvo en el inciso (b).

Solución Al sustituir V por 12, T por 290 y k por 0.6, se obtiene $P = 14.5$.

(a) Si se resuelve (6) para P cuando $k = 0.6$ resulta

$$P = \frac{0.6T}{V}$$

La tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T , si V se mantiene constante, es $\frac{\partial P}{\partial T}$, esto es

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{0.6}{V}$$

Cuando $T = 290$ y $V = 12$, $\frac{\partial P}{\partial T} = 0.05$, lo cual es la respuesta requerida.

(b) Del resultado del inciso (a), cuando T se incrementa en 5 unidades (de 290 a 295) y V permanece fijo, un incremento aproximado de P es $5(0.05) = 0.25$.

Conclusión: Si la temperatura se incrementa de 290°K a 295°K , entonces el incremento de la presión es aproximadamente 0.25 atm.

- (c) Al resolver (6) para V cuando $k = 0.6$, se obtiene

$$V = \frac{0.6T}{P}$$

La tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P , si T permanece fijo, es $\frac{\partial V}{\partial P}$ de modo que

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{0.6T}{P^2}$$

Cuando $T = 290$ y $P = 14.5$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial P} &= -\frac{0.6(290)}{(14.5)^2} \\ &= -0.83\end{aligned}$$

la cual es la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P cuando $T = 290$ y $P = 14.5$ si T permanece fija en 290.

- (d) Si P se incrementa en 0.25 y T permanece fija, entonces del resultado del inciso (c) la variación de V debe ser aproximadamente.

$$(0.25)(-0.83) = -0.21$$

Conclusión: El volumen debe disminuirse aproximadamente en 0.21 litros para que la presión aumente de 14.5 atm a 14.75 atm.

A continuación se extenderá el concepto de derivada parcial a funciones de n variables.

12.3.2 Definición de derivada parcial de una función de n variables

Sea $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punto de R^n , y sea f una función de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces la derivada parcial de f con respecto a x_k es la función, denotada por $D_k f$, tal que su valor de función en cualquier punto P del dominio de f está dado por

$$\begin{aligned}D_k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}\end{aligned}$$

si este límite existe.

En particular, si f es una función de las tres variables x, y y z , entonces las derivadas parciales de f están determinadas por

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$D_3 f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

si estos límites existen.

► **EJEMPLO 7** Dada $f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + z^3$, verifique que

$$xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) = 3f(x, y, z)$$

Solución Si se mantienen y y z constantes resulta

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

Al considerar x y z constantes se obtiene

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

Cuando x y y se consideran constantes se tiene

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} xf_1(x, y, z) + yf_2(x, y, z) + zf_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2y + x^2y + yz^2 + 2yz^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2y + yz^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z) \end{aligned}$$

Si f es una función de dos variables, entonces, en general, D_1f y D_2f también son funciones de dos variables, y si las derivadas parciales de estas funciones existen, se denominan **segundas derivadas parciales** de f . En contraste, D_1f y D_2f reciben el nombre de **primeras derivadas parciales** de f . Existen cuatro segundas derivadas parciales de una función de dos variables. Si f es una función de las dos variables x y y , las notaciones

$$D_2(D_1f) \quad D_{12}f \quad f_{12} \quad f_{yx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

expresan la segunda derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente f con respecto a x y después derivar parcialmente el resultado con respecto a y . Esta segunda derivada parcial está definida por

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \quad (7)$$

si este límite existe. Las notaciones

$$D_1(D_1f) \quad D_{11}f \quad f_{11} \quad f_{xx} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

representan la segunda derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente dos veces con respecto a x , y se define como

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \quad (8)$$

si existe este límite. Las otras segundas derivadas parciales están definidas de manera análoga.

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \quad (9)$$

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \quad (10)$$

si estos límites existen.

Las definiciones de las derivadas parciales de orden superior son similares. Existen diferentes notaciones para una derivada parcial específica. Por ejemplo,

$$D_{112}f \quad f_{112} \quad f_{xxy} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

representan la tercera derivada parcial de f que se obtiene al derivar parcialmente dos veces con respecto a x y después una vez con respecto a y . En la notación de subíndice, el orden de la derivación parcial es de izquierda a derecha; en cambio, en la notación $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}$, el orden se considera de derecha a izquierda.

► EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = e^x \sin y + \ln xy$$

Calcule: (a) $D_{11}f(x, y)$; (b) $D_{12}f(x, y)$; (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

Solución

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= e^x \sin y + \frac{1}{xy}(y) \\ &= e^x \sin y + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$(a) D_{11}f(x, y) = e^x \sin y - \frac{1}{x^2} \quad (b) D_{12}f(x, y) = e^x \cos y$$

(c) A fin de calcular $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, se deriva parcialmente dos veces con respecto a y y después una vez con respecto a x . Así, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y - \frac{1}{y^2} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y \quad \blacktriangleleft$$

Las derivadas parciales de orden superior de una función de n variables se definen de manera análoga a las definiciones de las derivadas parciales de orden superior para una función de dos variables. Si f es una función de n variables, entonces pueden tenerse n^2 segundas derivadas parciales de f en un punto particular. Esto es, para una función de tres variables, si todas las segundas derivadas parciales existen, entonces se tienen nueve de estas derivadas: f_{11} , f_{12} , f_{13} , f_{21} , f_{22} , f_{23} , f_{31} , f_{32} , y f_{33} .

► EJEMPLO 9 Calcule $D_{132}f(x, y, z)$ si

$$f(x, y, z) = \sin(xy + 2z)$$

Solución

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) &= y \cos(xy + 2z) \\ D_{13} f(x, y, z) &= -2y \sin(xy + 2z) \\ D_{132} f(x, y, z) &= -2 \sin(xy + 2z) - 2xy \cos(xy + 2z) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 10** Sea

$$f(x, y) = x^3y - y \cosh xy$$

Calcule: (a) $f_{xy}(x, y)$; (b) $f_{yx}(x, y)$.

Solución

(a) $f_x(x, y) = 3x^2y - y^2 \sinh xy$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 - 2y \sinh xy - xy^2 \cosh xy$$

(b) $f_y(x, y) = x^3 - \cosh xy - xy \sinh xy$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= 3x^2 - y \sinh xy - y \sinh xy - xy^2 \cosh xy \\ &= 3x^2 - 2y \sinh xy - xy^2 \cosh xy \end{aligned}$$

Observe en el ejemplo 10 que las derivadas parciales "mixtas" $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son iguales. De modo que para esta función particular, cuando se calcula la segunda derivada parcial con respecto a x y después con respecto a y , el orden de derivación no importa. Esta condición se cumple para muchas otras funciones. Sin embargo, el ejemplo siguiente muestra que esto no siempre es verdad.

► **EJEMPLO 11** Calcule $f_{12}(0, 0)$ y $f_{21}(0, 0)$ si

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución En el ejemplo 5, se demostró que para esta función

$$f_1(0, y) = -y \quad \text{para toda } y \tag{11}$$

y

$$f_2(x, 0) = x \quad \text{para toda } x \tag{12}$$

De (7),

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}$$

y de (11), $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ y $f_1(0, 0) = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} f_{12}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

De (9),

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}$$

Sin embargo, de (12), $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ y $f_2(0, 0) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f_{21}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para la función del ejemplo 11 las derivadas parciales mixtas $f_{12}(x, y)$ y $f_{21}(x, y)$ no son iguales en $(0, 0)$. Un conjunto de condiciones para que $f_{12}(x_0, y_0)$ y $f_{21}(x_0, y_0)$ sean iguales se da en el teorema 12.3.3, el cual se presenta a continuación. La función del ejemplo 11 no satisface las hipótesis de este teorema ya que f_{12} y f_{21} son discontinuas en $(0, 0)$. Se deja como ejercicio demostrar esto (refiérase al ejercicio 64).

12.3.3 Teorema

Suponga que f es una función de las variables x y y , que está definida en el disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y que f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en B . Además, suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B . Entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección.

Como un resultado del teorema 12.3.3 se tiene que si la función f de dos variables tiene derivadas parciales continuas en algún disco abierto, entonces el orden de derivación parcial puede cambiarse sin afectar el resultado; esto es,

$$\begin{aligned} D_{112}f &= D_{121}f = D_{211}f \\ D_{1122}f &= D_{1212}f = D_{1221}f = D_{2112}f = D_{2121}f = D_{2211}f \end{aligned}$$

etcétera. En particular, suponiendo que todas las derivadas parciales son continuas en algún disco abierto, se puede demostrar que $D_{211}f = D_{112}f$ al aplicar el teorema 12.3.3 de manera repetida. Al hacer esto se obtiene

$$\begin{aligned} D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\ &= D_2(D_{11}f) = D_{112}f \end{aligned}$$

EJERCICIOS 12.3

En los ejercicios 1 a 6, aplique la definición 12.3.1 a fin de calcular la derivada parcial.

- $f(x, y) = 6x + 3y - 7$; $D_1f(x, y)$
- $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$; $D_1f(x, y)$
- $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2$; $D_2f(x, y)$
- $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$; $D_2f(x, y)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(x, y)$
- $f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y}$; $f_x(x, y)$

En los ejercicios 7 a 10, aplique la definición 12.3.2 para determinar la derivada parcial.

- $f(x, y, z) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$; $D_2f(x, y, z)$
- $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$; $D_1f(x, y, z)$
- $f(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$; $f_x(x, y, z, r, t)$
- $f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2st + st^2v - 2tvv^2 - tvw + 3uw^2$; $f_x(r, s, t, u, v, w)$
- Sea $f(x, y) = x^2 - 9y^2$. Calcule $D_1f(2, 1)$ al aplicar (a) la fórmula (1); (b) la fórmula (3); (c) la definición 12.3.1 y después sustituir x y y por 2 y 1, respectivamente.
- Para la función del ejercicio 11, calcule $D_2f(2, 1)$ mediante la aplicación de (a) la fórmula (2); (b) la fórmula (4); (c) la definición 12.3.1 y después reemplazando x y y por 2 y 1, respectivamente.

En los ejercicios 13 a 24, calcule la derivada parcial considerando todas las variables, excepto una, como constantes y aplicando los teoremas para la derivación ordinaria.

13. $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$; $D_1 f(x, y)$

14. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $D_2 f(x, y)$

15. $f(\theta, \phi) = \sin 3\theta \cos 2\phi$; $f_\theta(\theta, \phi)$

16. $f(r, \theta) = r^2 \cos \theta - 2r \tan \theta$; $f_\theta(r, \theta)$

17. $z = e^{xy} \ln \frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$

18. $r = e^{-\theta} \cos(\theta + \phi)$; $\frac{\partial r}{\partial \theta}$

19. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$

20. $u = \tan^{-1}(xyzw)$; $\frac{\partial u}{\partial w}$

21. $f(x, y, z) = 4xyz + \ln(2xyz)$; $f_3(x, y, z)$

22. $f(x, y, z) = e^{13} \sinh 2z - e^{13} \cosh 2z$; $f_z(x, y, z)$

23. $f(x, y, z) = e^{13z} + \tan^{-1} z$; $f_y(x, y, z)$

24. $f(r, \theta, \phi) = 4r^2 \sin \theta + 5e^r \cos \theta \sin \phi - 2 \cos \phi$; $f_2(r, \theta, \phi)$

25. Si $f(r, \theta) = r \tan \theta - r^2 \sin \theta$, calcule (a) $f_1(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $f_2(3, \pi)$.

26. Si $f(x, y, z) = e^{13z} + \ln(y+z)$, calcule (a) $f_1(3, 0, 17)$; (b) $f_2(1, 0, 2)$; (c) $f_3(0, 0, 1)$.

En los ejercicios 27 y 28, calcule $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

27. $f(x, y) = \int_x^y \ln \sin t \, dt$ 28. $f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t} \, dt$

En los ejercicios 29 a 38 haga lo siguiente: (a) calcule $D_{11} f(x, y)$, (b) obtenga $D_{22} f(x, y)$; (c) pruebe que $D_{12} f(x, y)$ y $D_{21} f(x, y)$ son iguales.

29. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$

30. $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2$

31. $f(x, y) = e^{2x} \sin y$

32. $f(x, y) = e^{-x/y} + \ln \frac{y}{x}$

33. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x}$

34. $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{3y}{x^2}$

35. $f(x, y) = 4x \sinh y + 3y \cosh x$

36. $f(x, y) = x \cos y - ye^x$

37. $f(x, y) = e^x \cos y + \tan^{-1} x \cdot \ln y$

38. $f(x, y) = 3x \cosh y - \sin^{-1} e^x$

En los ejercicios 39 a 46, calcule las derivadas parciales indicadas.

39. $f(x, y) = 2x^3y + 5x^2y^2 - 3xy^2$; (a) $f_{12}(x, y)$; (b) $f_{21}(x, y)$

40. $G(x, y) = 3x^3y^2 + 5x^2y^3 + 2x$; (a) $G_{y^2}(x, y)$; (b) $G_{y^3}(x, y)$

41. $f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^z$; (a) $f_{12}(x, y, z)$; (b) $f_{1z}(x, y, z)$

42. $g(x, y, z) = \sin(xyz)$; (a) $g_{23}(x, y, z)$; (b) $g_{12}(x, y, z)$

43. $f(w, z) = w^2 \cos e^z$; (a) $f_{12}(w, z)$; (b) $f_{212}(w, z)$

44. $f(u, v) = \ln \cos u - v$; (a) $f_{uv}(u, v)$; (b) $f_{vu}(u, v)$

45. $g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2)$; (a) $g_{132}(r, s, t)$; (b) $g_{122}(r, s, t)$

46. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(3xyz)$; (a) $f_{113}(x, y, z)$; (b) $f_{123}(x, y, z)$

47. Sea $u = \sin \frac{r}{t} + \ln \frac{t}{r}$. Verifique que $t \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$.

48. Sea $w = x^2y + yz^2 + z^2x$. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

En los ejercicios 49 a 52, demuestre que $u(x, y)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, la cual se conoce como **ecuación de Laplace en R^2** .

49. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

50. $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

51. $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2}$

52. $u(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$

53. La ecuación de Laplace en R^3 es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Pruebe que la función $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisface esta ecuación.

54. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie

$$36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$$

con el plano $x = 1$ en el punto $(1, \sqrt{12}, -3)$. Interprete esta pendiente como una derivada parcial.



55. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 1$ en el punto $(2, 1, 5)$. Dibuje la curva e interprete esta pendiente como una derivada parcial.
56. Determine ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $y = 2$ en el punto $(1, 2, 2)$.



57. La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa delgada es T grados, donde $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Si la distancia se mide en centímetros, calcule la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones positivas de los ejes x y y , respectivamente, en el punto $(3, 1)$.
58. Emplee la ley del gas ideal para una gas confinado (consulte el ejemplo 6) a fin de demostrar que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

59. Si V dólares es el valor actual de una anualidad ordinaria de pagos iguales de \$100 por año para t años a una tasa de interés de $100i$ por ciento anual, entonces

$$V = 100 \left[\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right]$$

- (a) Calcule la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de i si t permanece fija en 8. (b) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular la variación aproximada del valor actual si la tasa de interés varía de 6 a 7 por ciento y el tiempo permanece fijo en 8 años. (c) Determine la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de t si i permanece fija en 0.06. (d) Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada del valor actual si el tiempo se disminuye de 8 a 7 años y la tasa de interés permanece fija en 6 por ciento.
60. Suponga que $10\,000x$ dólares es el inventario de un almacén que tiene y empleados, P dólares es la utilidad semanal del almacén, y

$$P = 3000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

donde $15 \leq x \leq 25$ y $5 \leq y \leq 12$. Actualmente, el inventario es de \$180\,000 y hay 8 empleados. (a) Calcule la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de x si y permanece fija en 8. (b) Utilice el resultado del inciso (a) para obtener la variación aproximada de la utilidad semanal si el inventario varía de \$180\,000 a \$200\,000 y el número de empleados permanece fijo en 8. (c) Determine la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de y si x permanece fija en 18. (d) Utilice el resultado del inciso (c) para calcular la variación aproximada de la utilidad semanal si el número de empleados se incrementa de 8 a 10 y el inventario permanece fijo en \$180\,000.

$$61. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule (a) $f_1(0, 0)$, (b) $f_2(0, 0)$.

$$62. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule (a) $f_1(0, y)$ si $y \neq 0$; (b) $f_1(0, 0)$.

63. Para la función del ejercicio 62 calcule (a) $f_2(x, 0)$ si $x \neq 0$; (b) $f_2(0, 0)$.
64. Para la función del ejemplo 11, demuestre que f_{12} es discontinua en $(0, 0)$, y en consecuencia, que la hipótesis del teorema 12.3.3 no se satisface si $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

En los ejercicios 65 a 67, calcule $f_{12}(0, 0)$ y $f_{21}(0, 0)$, si existen.

$$65. f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$66. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$67. f(x, y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

68. Demuestre que si f es una función de dos variables y todas las derivadas parciales de f , incluso las de cuarto orden, son continuas en algún disco abierto, entonces

$$D_{1122}f = D_{2121}f$$

69. Si S metros cuadrados es el área de la superficie del cuerpo de una persona, entonces una fórmula que proporciona el valor aproximado de S es

$$S = 2W^{0.4}H^{0.7}$$

donde W kilogramos es el peso de una persona y H metros es la altura de la persona. Calcule $\frac{\partial S}{\partial W}$ y $\frac{\partial S}{\partial H}$ cuando $W = 70$ y $H = 1.8$, e interprete los resultados.

12.4 DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

Se definirá la *diferenciabilidad* de funciones de más de una variable por medio de una ecuación que involucre el incremento de una función. A fin de motivar esta definición, primero se obtiene una representación del incremento de una función de una variable que es semejante al presentado en la definición (12.4.2) de diferenciabilidad.

Recuerde de la sección 2.1 que si f es una función diferenciable de x y $y = f(x)$, entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde Δx y Δy son los incrementos de x y y ,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Cuando $|\Delta x|$ es pequeño y $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x$ difiere de $f'(x)$ por un número pequeño que depende de Δx , el cual se denota por ϵ . Así,

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \quad \text{si } \Delta x \neq 0$$

donde ϵ es una función de Δx . De esta ecuación se obtiene

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \epsilon \Delta x$$

donde ϵ es una función de Δx y $\epsilon \rightarrow 0$ conforme $\Delta x \rightarrow 0$.

De lo anterior se deduce que si la función f es diferenciable en x_0 , entonces el incremento de f en x_0 , denotado por $\Delta f(x_0)$, está determinado por

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \epsilon \Delta x \quad \text{donde } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = 0$$

En el caso de las funciones de dos o más variables, se utiliza una ecuación semejante a la anterior a fin de definir la diferenciabilidad de una función, y de la definición se establecen criterios con el propósito de determinar la diferenciabilidad de una función en un punto. A continuación se presentan los detalles para una función de dos variables y se inicia con la definición de *incremento* de una función de este tipo.

12.4.1 Definición de incremento de una función de dos variables

Si f es una función de las variables x y y , entonces el *incremento de f* en el punto (x_0, y_0) , denotado por $\Delta f(x_0, y_0)$, está dado por

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

La figura 1 ilustra esta definición para una función continua en un disco abierto que contiene los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. También la figura muestra una porción de la superficie $z = f(x, y)$. Se observa que $\Delta f(x_0, y_0) = \overline{QR}$, donde Q es el punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$ y R es el punto que tiene coordenadas $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0, y_0 + \Delta y))$.

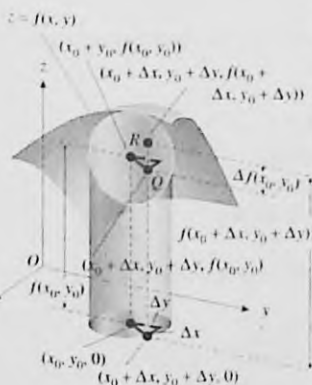


FIGURA 1

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Para la función f definida por

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

se calculará el incremento de f en cualquier punto (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0y_0^2) \\ &= 3x_0 + 3\Delta x - x_0y_0^2 - y_0^2\Delta x - 2x_0y_0\Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0y_0^2 \\ &= 3\Delta x - y_0^2\Delta x - 2x_0y_0\Delta y - 2y_0\Delta x\Delta y - x_0(\Delta y)^2 - \Delta x(\Delta y)^2\end{aligned}$$

12.4.2 Definición de función diferenciable de dos variables

Si f es una función de las variables x y y , y el incremento de f en (x_0, y_0) puede escribirse como

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0)\Delta x + D_2f(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy , tales que $\epsilon_1 \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se utilizará la definición 12.4.2 para demostrar que la función del ejemplo ilustrativo 1 es diferenciable en todos los puntos de R^2 . Se debe probar que para todo punto (x_0, y_0) de R^2 se pueden determinar ϵ_1 y ϵ_2 , tales que

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\Delta y = \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

y $\epsilon_1 \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Como $f(x, y) = 3x - xy^2$, entonces

$$D_1f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad y \quad D_2f(x_0, y_0) = -2x_0y_0$$

Con estos valores y el valor de $\Delta f(x_0, y_0)$ del ejemplo ilustrativo 1, se obtiene

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1f(x_0, y_0)\Delta x - D_2f(x_0, y_0)\Delta y = -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

El miembro derecho de la ecuación anterior puede expresarse en las siguientes formas:

- (a) $[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$
- (b) $(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$
- (c) $[-(\Delta y)^2]\Delta x + (-2y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$
- (d) $0 \cdot \Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$

Por lo que existen al menos cuatro pares posibles de valores de ϵ_1 y ϵ_2 :

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1 = -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2 & y \quad \epsilon_2 = -x_0\Delta y \\ \epsilon_1 = -2y_0\Delta y & y \quad \epsilon_2 = -\Delta x\Delta y - x_0\Delta y \\ \epsilon_1 = -(\Delta y)^2 & y \quad \epsilon_2 = -2y_0\Delta x - x_0\Delta y \\ \epsilon_1 = 0 & y \quad \epsilon_2 = -2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y \end{array}$$

Para cada par,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2 = 0$$

Observe que sólo es necesario determinar un par de valores de ϵ_1 y ϵ_2 . ◀

El teorema siguiente afirma que para una función de dos variables, la diferenciabilidad implica la continuidad, de igual manera que para una función de una variable.

12.4.3 Teorema

Si una función f de dos variables es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto.

Demostración Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , entonces, de la definición 12.4.2, se tiene

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

donde $\epsilon_1 \rightarrow 0$ y $\epsilon_2 \rightarrow 0$ conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

Al tomar el límite en los dos miembros de la ecuación anterior conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ se obtiene

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

Si se considera $x_0 + \Delta x = x$ y $y_0 + \Delta y = y$, entonces " $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ " equivale a que " $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ". Así, de (1),

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual demuestra que f es continua en (x_0, y_0) . ■

Se dijo que para una función f de una variable, la existencia de la derivada de f en un número implica la diferenciabilidad y, por tanto, continuidad en ese número. Sin embargo, como lo muestran los ejemplos siguientes, para una función de dos variables la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica la diferenciabilidad en ese punto.

▶ **EJEMPLO 1** Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

demuestre que $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen y que, sin embargo, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución

$$\begin{aligned}
 D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} & D_2 f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} & &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 & &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 \\
 &= 0 & &= 0
 \end{aligned}$$

Por tanto $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen.

En el ejemplo 6 de la sección 12.2 se demostró que para esta función $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe; en consecuencia, f no es continua en $(0, 0)$. Como f no es continua en $(0, 0)$, entonces, por el teorema 12.4.3, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

En la figura 2 se muestra una porción de la gráfica de esta función. Las derivadas parciales en el origen existen aunque la función no es continua en el origen, esto se debe a que $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ dependen sólo del comportamiento de $f(x, y)$ a lo largo de los ejes x y y , mientras que la continuidad de f en $(0, 0)$ depende del comportamiento de f en un disco abierto que tenga su centro en el origen.

Aunque la existencia de las derivadas parciales de una función de dos variables en un punto no garantiza la diferenciabilidad en ese punto, existen condiciones adicionales que se le piden a la función que proporcionan tal garantía. Estas condiciones se enuncian en el teorema siguiente, cuya demostración se presenta en el suplemento de esta sección.

12.4.4 Teorema

Sea f una función de x y y tal que $D_1 f$ y $D_2 f$ existen en un disco abierto $B(P_0, r)$, donde P_0 es el punto (x_0, y_0) . Si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en P_0 , entonces f es diferenciable en P_0 .

Este teorema es mucho más fácil de aplicar que la definición 12.4.2 para demostrar la diferenciabilidad de una función de dos variables. Por ejemplo, debido a que las derivadas parciales de cualquier función polinomial son también funciones polinomiales, y como estas funciones son continuas en cualquier punto de su dominio, el teorema 12.4.4 establece que las funciones polinomiales son diferenciables en cualquier punto de su dominio.

► **EJEMPLO 2** Utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que la función definida por

$$f(x, y) = xe^y - y \ln x$$

es diferenciable en su dominio.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los puntos de R^2 para los cuales $x > 0$. Al calcular las derivadas parciales se obtiene

$$D_1 f(x, y) = e^y - \frac{y}{x} \quad D_2 f(x, y) = xe^y - \ln x$$



$[-2.6, 2.6]$ por $[-2.6, 2.6]$ por $[-0.5, 0.5]$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 2

Como D_1f y D_2f son continuas en todos los puntos de R^2 para los cuales $x > 0$, entonces, por el teorema 12.4.4, f es diferenciable en todos los puntos de su dominio. ◀

En el ejemplo 5 al final de esta sección, se muestra cómo el teorema 12.4.4 puede aplicarse para probar que una función particular definida a trozos es diferenciable.

Si una función satisface las hipótesis del teorema 12.4.4 en un punto, entonces se dice que es **continuamente diferenciable** en el punto. Aunque la diferenciable continua en un punto es una condición suficiente para demostrar que una función es diferenciable en un punto, no es una condición necesaria. Esto es, es posible que una función sea diferenciable en un punto aunque sus derivadas parciales no sean continuas en ese punto. En los ejemplos 42 a 45 se presentan ejemplos de este tipo de funciones.

La ecuación de la definición 12.4.2 es

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1f(x_0, y_0) \Delta x + D_2f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (2)$$

La expresión formada por los dos primeros términos del miembro derecho de esta ecuación se denomina *parte principal* de $\Delta f(x_0, y_0)$ o *diferencial total* de f en (x_0, y_0) .

12.4.5 Definición de la diferencial total de una función de dos variables

Si f es una función de las variables x y y , y si f es diferenciable en (x, y) , entonces la **diferencial total** de f es la función df que tiene valores de función determinados por

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1f(x, y) \Delta x + D_2f(x, y) \Delta y$$

Observe que df es una función de las cuatro variables $x, y, \Delta x$ y Δy . Si $z = f(x, y)$, en ocasiones se emplea dz en lugar de $df(x, y, \Delta x, \Delta y)$, y se escribe

$$dz = D_1f(x, y) \Delta x + D_2f(x, y) \Delta y \quad (3)$$

Si en (3), $f(x, y) = x$, entonces $z = x$, $D_1f(x, y) = 1$ y $D_2f(x, y) = 0$; de modo que (3) proporciona $dz = \Delta x$. Puesto que $z = x$, para esta función $dx = \Delta x$. De manera semejante, si se considera $f(x, y) = y$, entonces $z = y$, $D_1f(x, y) = 0$ y $D_2f(x, y) = 1$; por lo que de (3) se obtiene $dz = \Delta y$. Como $z = y$, entonces para esta función $dy = \Delta y$. En consecuencia se definen las diferenciales de las variables independientes como $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Entonces (3) se puede expresar como

$$dz = D_1f(x, y) dx + D_2f(x, y) dy \quad (4)$$

y en el punto (x_0, y_0) ,

$$dz = D_1f(x_0, y_0) dx + D_2f(x_0, y_0) dy \quad (5)$$

En (2), sea $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$, $dx = \Delta x$, y $dy = \Delta y$. Entonces

$$\Delta z = D_1f(x_0, y_0) dx + D_2f(x_0, y_0) dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy$$

Al comparar esta ecuación y (5), se observa que cuando dx (es decir, Δx) y dy (esto es, Δy) están cercanos a cero, y como ϵ_1 y ϵ_2 también estarán cerca de cero, entonces dz es una aproximación para Δz .

La ecuación (4) con la notación $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se transforma en

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (6)$$

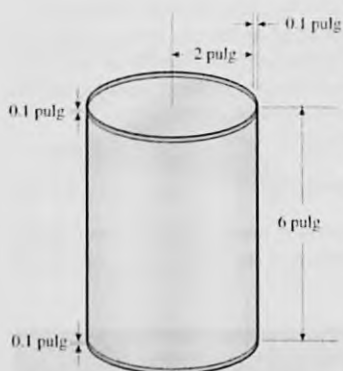


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Un envase metálico cerrado tiene la forma de cilindro circular recto 6 pulg. de altura interior, de 2 pulg de radio interior y de 0.1 pulg de grosor. Si el costo del metal es de 40 centavos por pulgada cúbica, aproxime mediante diferenciales el costo total del metal empleado en la elaboración del envase.

Solución La figura 3 muestra el envase. Si V pulgadas cúbicas es el volumen de un cilindro circular recto que tiene un radio de r pulgadas y una altura de h pulgadas, entonces

$$V = \pi r^2 h$$

El volumen exacto del metal empleado en el envase es la diferencia entre los volúmenes de dos cilindros circulares rectos para los cuales $r = 2.1$, $h = 6.2$ y $r = 2$ y $h = 6$, respectivamente. El incremento ΔV proporciona el volumen exacto del metal, pero como únicamente se desea un valor aproximado, se calcula dV . De (6),

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh \\ &= 2\pi r h dr + \pi r^2 dh \end{aligned}$$

Con $r = 2$, $h = 6$, $dr = 0.1$ y $dh = 0.2$,

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2)(6)(0.1) + \pi(2)^2(0.2) \\ &= 3.2\pi \end{aligned}$$

De este modo, $\Delta V \approx 3.2\pi$, por lo que el metal empleado en el envase es aproximadamente 3.2π pulg³. Puesto que el costo del metal es de 40 centavos por pulgada cúbica, entonces el número aproximado de centavos del costo aproximado es $128\pi \approx 402$.

Conclusión: El costo aproximado del metal empleado en el envase es \$4.02.

Ahora se extenderán los conceptos de diferenciabilidad y de diferencial total para funciones de n variables.

12.4.6 Definición de incremento de una función de n variables

Si f es una función de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , y \bar{P} es el punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, entonces el **incremento de f** en \bar{P} está determinado por

$$\Delta f(\bar{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{P})$$

12.4.7 Definición de función diferenciable de n variables

Si f es una función de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , y el incremento de f en el punto \bar{P} puede escribirse como

$$\Delta f(\bar{P}) = D_1 f(\bar{P}) \Delta x_1 + D_2 f(\bar{P}) \Delta x_2 + \dots + D_n f(\bar{P}) \Delta x_n + \epsilon_1 \Delta x_1 + \epsilon_2 \Delta x_2 + \dots + \epsilon_n \Delta x_n$$

donde $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0, \dots, \epsilon_n \rightarrow 0$, conforme

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0),$$

entonces se dice que f es diferenciable en \bar{P} .

De igual manera que con el teorema 12.4.4, se puede demostrar que las condiciones suficientes para que una función de n variables sea diferenciable en un punto \bar{P} son que las derivadas parciales $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ existan en una bola abierta $B(\bar{P}, r)$ y que sean continuas en \bar{P} . Como en el caso de las funciones de dos variables, para las funciones de n variables la diferenciable implica la continuidad. Sin embargo, la existencia de las derivadas parciales $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ en un punto no implica la diferenciable de la función en ese punto.

12.4.8 Definición de la diferencial total de una función de n variables

Si f es una función de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , y f es diferenciable en P , entonces la **diferencial total** de f es la función df que tiene valores de función determinados por

$$\begin{aligned} df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \\ = D_1 f(P) \Delta x_1 + D_2 f(P) \Delta x_2 + \dots + D_n f(P) \Delta x_n \end{aligned}$$

Si se considera $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se definen $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots, dx_n = \Delta x_n$, y además se usa la notación $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ en lugar de $D_i f(P)$,

se puede expresar la ecuación de la definición 12.4.8 como

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n \quad (7)$$

EJEMPLO 4 Las dimensiones de una caja son 10 cm, 12 cm y 15 cm, con un posible error de 0.02 en cada medición. (a) Aproxime mediante diferenciales el máximo error si el volumen de la caja se calcula a partir de estas medidas. (b) Aproxime también el error relativo.

Solución La figura 4 muestra la caja.

(a) Si V centímetros cúbicos es el volumen de la caja cuyas dimensiones son x , y y z centímetros, entonces su volumen es

$$V = xyz$$

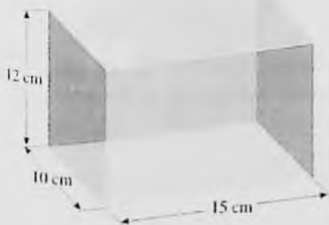


FIGURA 4

El valor exacto del error se de ΔV ; sin embargo, se empleará dV como una aproximación de ΔV . De (7), para tres variables independientes

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz\end{aligned}$$

De la información dada $|\Delta x| \leq 0.02$, $|\Delta y| \leq 0.02$ y $|\Delta z| \leq 0.02$. Para determinar el máximo error del volumen se consideran los errores máximos de las tres mediciones. Por lo que tomando $dx = 0.02$, $dy = 0.02$, $dz = 0.02$, $x = 10$, $y = 12$ y $z = 15$, se obtiene

$$\begin{aligned}dV &= (12)(15)(0.02) + (10)(15)(0.02) + (10)(12)(0.02) \\ &= 9\end{aligned}$$

Así, $\Delta V \approx 9$.

Conclusión: El mayor error posible al calcular el volumen de la caja a partir de las medidas dadas es aproximadamente 9 cm^3 .

- (b) El error relativo se obtiene al dividir el error entre el valor real. Por tanto, el error relativo al calcular el volumen de la caja a partir de las mediciones dadas es $\Delta V/V \approx dV/V$. Como $dV/V = 9/1800$, entonces

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 0.005$$

Conclusión: El error aproximado en porcentaje es de 0.5%. \blacktriangleleft

► EJEMPLO 5 Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

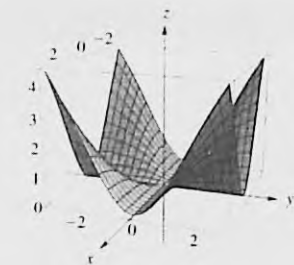
utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que f es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución Para calcular $D_1 f$, se considerarán dos casos: $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) \neq (0, 0)$. Si $(x, y) = (0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned}D_1 f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces $f(x, y) = x^2 y^2 / (x^2 + y^2)$. A fin de calcular $D_1 f(x, y)$ se utiliza el teorema para la derivada ordinaria de un cociente y se considera y como constante.

$$\begin{aligned}D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$



[-3, 3] por [-3, 3] por [0, 4.3]

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 5

Por tanto, la función D_1f está definida por

$$D_1f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

De la misma forma se obtiene la función D_2f , definida por

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tanto D_1f como D_2f existen en todo disco abierto que tenga su centro en el origen. Queda por demostrar que D_1f y D_2f son continuas en $(0, 0)$.

Como $D_1f(0, 0) = 0$, entonces D_1f será continua en $(0, 0)$ si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} D_1f(x, y) = 0$$

Por tanto, debe probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ entonces } \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \epsilon \quad (8)$$

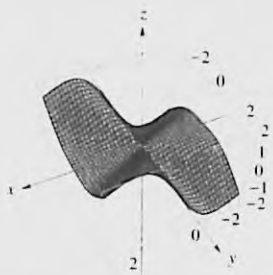
$$\begin{aligned} \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| &= \left| \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \\ &\leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

De modo que una elección adecuada para δ es $2\delta = \epsilon$, esto es, $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$. Con esta δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{y} \quad \delta &= \frac{1}{2}\epsilon \\ \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\left(\frac{1}{2}\epsilon\right) \\ \Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \frac{2|x|y^4}{(x^2 + y^2)^2} < \epsilon \\ \Rightarrow \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado que se cumple (8). En consecuencia, D_1f es continua en $(0, 0)$. En la misma forma puede probarse que D_2f es continua en $(0, 0)$. Por lo que se concluye, por el teorema 12.4.4, que f es diferenciable en $(0, 0)$.

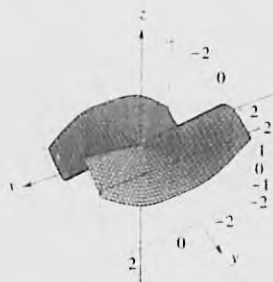
Las figuras 5, 6 y 7 muestran gráficas generadas en computadora de f , D_1f y D_2f , las cuales apoyan los resultados de este ejemplo. ◀



[-3, 3] por [-3, 3] por [-2, 2]

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 6



[-3, 3] por [-3, 3] por [-2, 2]

$$D_2f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

FIGURA 7

EJERCICIOS 12.4

1. Si $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, calcule:
 (a) $\Delta f(1, 4)$, el incremento de f en $(1, 4)$; (b) $df(1, 4)$ cuando $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = -0.02$; (c) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de f en $(1, 4)$; (d) $df(1, 4, 0.03, -0.02)$.
2. Si $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, calcule:
 (a) $\Delta f(2, -1)$, el incremento de f en $(2, -1)$; (b) $df(2, -1)$ cuando $\Delta x = -0.01$ y $\Delta y = 0.02$; (c) $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de f en $(2, -1)$; (d) $df(2, -1, -0.01, 0.02)$.
3. Si $g(x, y) = xye^{xy}$, calcule:
 (a) $\Delta g(2, -4)$, el incremento de g en $(2, -4)$; (b) $\Delta g(2, -4)$ cuando $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.2$; (c) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de g en $(2, -4)$; (d) $dg(2, -4, -0.1, 0.2)$.
4. Si $h(x, y) = (x + y)/(x - y)$, calcule:
 (a) $\Delta h(3, 0)$, el incremento de h en $(3, 0)$; (b) $\Delta h(3, 0)$ cuando $\Delta x = 0.04$ y $\Delta y = 0.03$; (c) $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de h en $(3, 0)$; (d) $dh(3, 0, 0.04, 0.03)$.
5. Si $F(x, y, z) = xy + \ln(yz)$, calcule:
 (a) $\Delta F(4, 1, 5)$, el incremento de F en $(4, 1, 5)$; (b) $\Delta F(4, 1, 5)$ cuando $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = 0.04$, y $\Delta z = -0.03$; (c) $dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, la diferencial total de F en $(4, 1, 5)$; (d) $dF(4, 1, 5, 0.02, 0.04, -0.03)$.
6. Si $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^3$, calcule:
 (a) $\Delta G(-3, 0, 2)$ el incremento de G en $(-3, 0, 2)$; (b) $\Delta G(-3, 0, 2)$ cuando $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.03$ y $\Delta z = -0.01$; (c) $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, la diferencial total de G en $(-3, 0, 2)$; (d) $dG(-3, 0, 2, 0.01, 0.03, -0.01)$.

En los ejercicios 7 a 14, calcule la diferencial total dw .

7. $w = 4x^3 - xy^2 + 3y - 7$
 8. $w = y \tan x^2 - 2xy$
 9. $w = x \cos y - y \sin x$ 10. $w = xe^{2y} + e^{-y}$
 11. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 12. $w = \frac{xyz}{x + y + z}$
 13. $w = x \tan^{-1} z - \frac{y^2}{z}$ 14. $w = e^{yz} - \cos xz$

En los ejercicios 15 a 18, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio realizando lo siguiente: (a) calcule $\Delta f(x_0, y_0)$; (b) determine ϵ_1 y ϵ_2 de modo que se cumpla la ecuación (2); (c) demuestre que las ϵ_1 y ϵ_2 determinadas en el inciso (b) tienden a cero conforme $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

15. $f(x, y) = x^2y - 2xy$ 16. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$
 17. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ 18. $f(x, y) = \frac{y}{x}$

En los ejercicios 19 a 26, utilice el teorema 12.4.4 para demostrar que la función es diferenciable en todos los puntos de su dominio.

19. $g(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^2y^{-2}$
 20. $f(x, y) = \frac{3x - 4y}{x^2 + 8y}$
 21. $f(x, y) = 3 \ln xy + 5 \sin x$
 22. $f(x, y) = \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{x}{y}$

23. $h(x, y) = \tan^{-1}(x + y) + \frac{1}{x - y}$

24. $g(x, y) = y \ln x - \frac{x}{y}$

25. $f(x, y) = ye^{3x} - xe^{-3y}$

26. $f(x, y) = e^{2x} \sin y + e^{-2x} \cos y$

27. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & \text{si } x = 1 \text{ o } y = 1 \\ 2 & \text{si } x \neq 1 \text{ y } y \neq 1 \end{cases}$

Demuestre que $D_1f(1, 1)$ y $D_2f(1, 1)$ existen y que f no es diferenciable en $(1, 1)$.

28. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y que D_1f y D_2f no son continuas en $(0, 0)$.

En los ejercicios 29 y 30, demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

29. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

30. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

En los ejercicios 31 y 32, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de \mathbb{R}^3 haciendo lo siguiente: (a) calcule $\Delta f(x_0, y_0, z_0)$; (b) determine ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 tales que se cumpla la ecuación de la definición 12.4.7; (c) demuestre que las ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 determinadas en el inciso (b) tienden a cero conforme $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ se aproxima a $(0, 0, 0)$.

31. $f(x, y, z) = xy - xz + z^2$

32. $f(x, y, z) = 2xz^2 - 3yz^2$

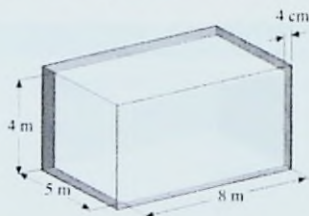
En los ejercicios 33 y 34, demuestre que $D_1f(0, 0, 0)$, $D_2f(0, 0, 0)$ y $D_3f(0, 0, 0)$ existen y que f no es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

33. $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

34. $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3yz}{x^4 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

35. Un contenedor tiene la forma de un sólido rectangular y tiene una longitud interior de 8 m, un ancho interior de 5 m, una altura interior de 4 m y un espesor de 4 cm. Em-

plee la diferencial total para aproximar la cantidad de material necesario para construir el contenedor.



36. Utilice la diferencial total para calcular aproximadamente el mayor error al determinar el área de un triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los catetos si ellos miden 6 cm y 8 cm, respectivamente, con un error posible de 0.1 cm para cada medición. También obtenga aproximadamente el error relativo.
37. Determine aproximadamente, utilizando la diferencial total, el mayor error al calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo del ejercicio 36 a partir de las mediciones dadas. También obtenga aproximadamente el error relativo.
38. Si la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) se emplea para calcular P cuando se proporcionan T y V , pero existe un error de 0.3% en la medición de T y un error de 0.8% en la medición de V , calcule aproximadamente el mayor error relativo al calcular P .
39. La gravedad específica s de un objeto está determinada por la fórmula

$$s = \frac{A}{A - W}$$

donde A libras es el peso del objeto en el aire y W libras es el peso del objeto en el agua. Si el peso de un objeto en el aire es de 20 lb con un error posible de 0.01 lb y su peso en el agua es de 12 lb, con un error posible de 0.02 lb, calcule aproximadamente el mayor error posible al determinar s a partir de estas medidas. También calcule el mayor error relativo posible.

40. Se elabora una caja sin tapa de un trozo de madera de $\frac{2}{3}$ pulg de espesor. La longitud interior será de 6 pie, el ancho

interior será de 3 pie, la profundidad interior será de 4 pie. Utilice la diferencial total para calcular la cantidad aproximada de madera que se empleará en la caja.

41. Una compañía tiene un contrato para la elaboración de 10 000 cajas de madera cerradas cuyas dimensiones serán de 3 m, 4 m y 5 m. El costo de la madera que se empleará es de \$3 por metro cuadrado. Si las máquinas que se emplearán para cortar las piezas de madera tienen un error posible de 0.5 cm en cada dimensión, calcule aproximadamente, utilizando la diferencial total, el mayor error posible en la estimación del costo de la madera.

En los ejercicios 42 a 45, demuestre que la función puede ser diferenciable en un punto aunque no sea continuamente diferenciable en ese punto. En consecuencia, las condiciones del teorema 12.4.4 son suficientes pero no necesarias. La función f de este ejercicio está definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

42. Determine $\Delta f(0, 0)$.
43. Calcule $D_1 f(x, y)$ y $D_2 f(x, y)$.
44. Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ utilizando la definición 12.4.2 y el resultado de los ejercicios 42 y 43.
45. Demuestre que $D_1 f$ y $D_2 f$ no son continuas en $(0, 0)$.
46. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 4 de la sección 12.3. Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ empleando el teorema 12.4.4.

47. Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

12.5 REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DE MÁS DE UNA VARIABLE

Recuerde que con la notación de Leibniz la regla de la cadena para una función de una variable se expresa como sigue: Si y es una función de u y $\frac{dy}{du}$ existe, y si u es una función de x y $\frac{du}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\frac{dy}{dx}$ existe y está determinada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ahora se considerará la regla de la cadena para una función de dos variables, donde cada una de estas variables es también una función de dos variables.

12.5.1 Teorema La regla de la cadena

Si u es una función diferenciable de x y y , definida por $u = f(x, y)$, donde $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$, y $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ y $\frac{\partial y}{\partial s}$ existen, entonces u es una función de r y s , y además

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

La demostración de este teorema se deja para el final de la sección, de modo que primero se verán algunos ejemplos y ejemplos ilustrativos con el fin de que se familiarice con el enunciado de la regla de la cadena.

La regla de la cadena para funciones de una variable se recuerda fácilmente al considerar una derivada ordinaria como el cociente de dos diferenciales, pero no se tiene una interpretación similar para derivadas parciales. Sin embargo, un recurso nemotécnico conveniente para recordar la regla de la cadena consiste en un diagrama de árbol con ramas que parten de una variable a otra, como se muestra en la figura 1. Puesto que u es una función de x y y , coloque u en la cima del árbol y dibuje ramas para x y y . Después, como x es una función de r y s , dibuje ramas desde x hacia r y s . De manera semejante, dibuje ramas a partir de y hacia r y s . Observe que cada variable depende de las variables que se encuentran debajo de ella. A lo largo de estas ramas escriba la derivada parcial que corresponde a las variables específicas.

Con el fin de obtener la ecuación para $\frac{\partial u}{\partial r}$, se consideran los caminos a lo largo de las ramas de u a r . Se tienen dos de tales caminos, cada uno con un par de ramas. Sume los productos de las derivadas parciales asociadas con las ramas de cada camino, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

la cual es la primera ecuación del teorema 12.5.1. La segunda ecuación del teorema puede obtenerse en la misma forma considerando los dos caminos a lo largo de las ramas de u a s .

▶ EJEMPLO 1 Sean

$$u = x^2 + y^3 \quad x = re^s \quad y = re^{-s}$$

Aplice la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2x(e^s) + 3y^2(e^{-s}) & &= 2x(re^s) + 3y^2(-re^{-s}) \\ &= 2(re^s)(e^s) + 3(re^{-s})^2(e^{-s}) & &= 2(re^s)(re^s) + 3(re^{-s})^2(-re^{-s}) \\ &= 2r^2e^{2s} + 3r^2e^{-3s} & &= 2r^2e^{2s} - 3r^3e^{-3s} \end{aligned}$$

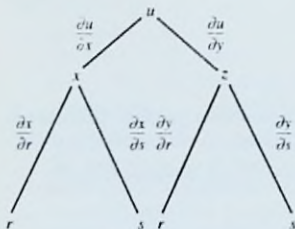


FIGURA 1

Un problema particular de notación surge cuando se considera u como una función de x y y , y después como función de r y s . Si $u = f(x, y)$, $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$, entonces $u = f(F(r, s), G(r, s))$. Observe que $u \neq f(r, s)$.

▶ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 En el ejemplo 1

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) & x &= F(r, s) & y &= G(r, s) \\ &= x^2 + y^3 & &= re^s & &= re^{-s} \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} u &= f(F(r, s), G(r, s)) & y & f(r, s) = r^2 + s^3 \\ &= r^2e^{2s} + r^3e^{-3s} \end{aligned}$$

Esto es, $u \neq f(r, s)$. ◀

El propósito del ejemplo 1 es mostrar la aplicación de la regla de la cadena. Se pudieron haber obtenido las derivadas parciales de manera más simple al sustituir las expresiones para x y y en la expresión para u antes de haber diferenciado, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Del ejemplo 1, como se mostró en el ejemplo ilustrativo 1, $u = r^2e^{2s} + r^3e^{-3s}$. Al calcular las derivadas parciales de esta expresión se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 2re^{2s} + 3r^2e^{-3s} & \frac{\partial u}{\partial s} &= r^2(2e^{2s})' + r^3(-3e^{-3s}) \\ & & &= 2r^2e^{2s} - 3r^3e^{-3s} \end{aligned}$$

lo cual es acorde con los resultados del ejemplo 1. ◀

Ahora suponga que u es una función diferenciable de las variables x y y , y que también x y y son funciones diferenciables de la variable t . Entonces u también es una función de la variable t . En consecuencia, la fórmula de la regla de la cadena, con derivadas ordinarias en lugar de derivadas parciales, se transforma en

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

La derivada ordinaria du/dt dada por esta fórmula se denomina **derivada total** de u con respecto a t .

▶ EJEMPLO 2 Sean

$$y = 2wz + z^2 \quad w = e^x \quad z = \cos x$$

Calcule la derivada total $\frac{dy}{dx}$ aplicando la regla de la cadena.

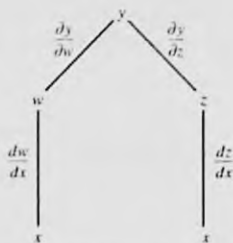


FIGURA 2

Solución De la regla de la cadena, empleando el diagrama de árbol de la figura 2, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{dz}{dx} \\ &= 2z(e^x) + (2w + 2z)(-\sin x) \\ &= 2(\cos x)(e^x) + (2e^x + 2 \cos x)(-\sin x) \\ &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

En el enunciado del teorema 12.5.1, u es la variable dependiente, r y s son las variables independientes, y x y y reciben el nombre de **variables intermedias**. A continuación se extenderá la regla de la cadena a n variables intermedias y m variables independientes.

12.5.2 Teorema La regla de la cadena general

Suponga que u es una función diferenciable de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , y que cada una de estas variables es a su vez una función de las m variables y_1, y_2, \dots, y_m . Suponga además que cada una de las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) existe.

Entonces u es una función de y_1, y_2, \dots, y_m , y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_m} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{aligned}$$

La demostración de este teorema es una extensión de la demostración del teorema 12.5.1.

Observe que en la regla de la cadena general existen tantos términos en el miembro derecho de cada ecuación como el número de variables intermedias.

Si u es una función diferenciable de las n variables x_1, x_2, \dots, x_n y cada x_i es una función de la variable t , entonces u es una función de t y la derivada total de u con respecto a t está determinada por

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

▶ EJEMPLO 3 Sean

$$u = x^2 + yz \quad x = r \sin t \quad y = r \cos t \quad z = r \sin^2 t$$

Calcule $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ aplicando la regla de la cadena.

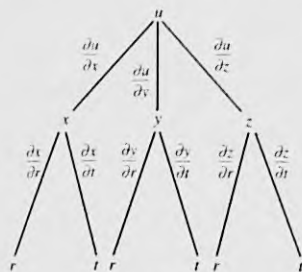


FIGURA 3



FIGURA 4

Solución De la regla de la cadena, empleando el diagrama de árbol de la figura 3, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= 2x(\text{sen } t) + z(\cos t) + y(\text{sen}^2 t) \\ &= 2(r \text{ sen } t) + (\text{sen } t) + (r \text{ sen}^2 t)(\cos t) + (r \cos t)(\text{sen}^2 t) \\ &= 2r \text{ sen}^2 t + r \text{ sen}^2 t \cos t + r \text{ sen}^2 t \cos t \\ &= 2r \text{ sen}^2 t + 2r \text{ sen}^2 t \cos t \\ &= 2r \text{ sen}^2 t(1 + \cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 2x(r \cos t) + z(-r \text{ sen } t) + y(2r \text{ sen } t \cos t) \\ &= 2(r \text{ sen } t)(r \cos t) + (r \text{ sen}^2 t)(-r \text{ sen } t) + (r \cos t)(2r \text{ sen } t \cos t) \\ &= 2r^2 \text{ sen } t \cos t - r^2 \text{ sen}^3 t + 2r^2 \text{ sen } t \cos^2 t \\ &= r^2 \text{ sen } t(2 \cos t + 2 \cos^2 t - \text{sen}^2 t)\end{aligned}$$

► **EJEMPLO 4** Si f es una función diferenciable y a y b son constantes, demuestre que $z = f(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución Sea $u = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3$. Se desea probar que $z = f(u)$ satisface la ecuación dada. De la regla de la cadena, utilizando el diagrama de árbol de la figura 4, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= f'(u)(bx) & &= f'(u)(-ay^2)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} &= ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)] \\ &= 0\end{aligned}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ◀

En el ejemplo siguiente se emplea la regla de la cadena en una aplicación que trata sobre tasas relacionadas.

► **EJEMPLO 5** Utilice la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 0.8$ para obtener la tasa a la que la temperatura varía en el instante en que el volumen del gas es de 15 litros y el gas está bajo una presión de 12 atm si el volumen se incrementa a la tasa de 0.1 litro/min y la presión disminuye a la tasa de 0.2 atm/min.

Solución Sean t minutos el tiempo que han transcurrido desde que el volumen del gas comenzó a incrementarse. Sean T grados Kelvin la temperatura, P atmósferas la presión y V litros el volumen a los t minutos. De la ley del gas ideal,

$$PV = 0.8T$$

$$T = 1.25PV$$

En el instante dado, $P = 12$, $V = 15$, $\frac{dP}{dt} = -0.2$, y $\frac{dV}{dt} = 0.1$. Al aplicar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V} \frac{dV}{dt} \\ &= 1.25 V \frac{dP}{dt} + 1.25 P \frac{dV}{dt} \\ &= 1.25(15)(-0.2) + 1.25(12)(0.1) \\ &= -2.25\end{aligned}$$

Conclusión: La temperatura disminuye a la tasa de $2.25^\circ\text{K}/\text{min}$ en el instante indicado. ◀

Ahora se aplicará la regla de la cadena para demostrar un teorema que proporciona una fórmula para calcular la derivada de una función definida implícitamente.

12.5.3 Teorema

Si f es una función diferenciable de la variable x tal que $y = f(x)$ y f está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$, y si F es diferenciable y $F_y(x, y) \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

Demostración Sea

$$w = F(x, y) \quad \text{donde} \quad y = f(x)$$

De la regla de la cadena,

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

Debido a que $w = F(x, f(x))$ para toda x del dominio de f y por hipótesis $F(x, f(x)) = 0$, entonces $dw/dx = 0$. Además, $dx/dx = 1$. Por tanto, de (1)

$$0 = F_x(x, y)(1) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx}$$

Puesto que $F_y(x, y) \neq 0$, al resolver esta ecuación para dy/dx se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

▶ **EJEMPLO 6** Calcule dy/dx si

$$x \cos y + y \cos x - 1 = 0$$

Solución Sea $F(x, y) = x \cos y + y \cos x - 1$. Entonces

$$F_x(x, y) = \cos y - y \sin x \quad F_y(x, y) = -x \sin y + \cos x$$

Del teorema 12.5.3,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\cos y - y \operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} y + \cos x} \\ &= -\frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}\end{aligned}$$

Compare la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 4 de la sección 2.9, donde se obtuvo la misma expresión para dy/dx mediante diferenciación implícita.

Ahora considere una ecuación en las tres variables x , y y z , y suponga que la ecuación define implícitamente a z como una o más funciones diferenciables de x y y . Por medio del teorema siguiente, análogo al teorema 12.5.3, se pueden calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ sin resolver la ecuación para z .

12.5.4 Teorema

Si f es una función diferenciable de x y y tal que $z = f(x, y)$ y f está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y si F es diferenciable y $F_z(x, y, z) \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

Demostración Sea

$$w = F(x, y, z) \quad \text{donde} \quad z = f(x, y)$$

De la regla de la cadena,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z) \frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2)$$

Debido a que $w = F(x, y, f(x, y))$ para todos los puntos (x, y) del dominio de f , y por hipótesis $F(x, y, f(x, y)) = 0$, entonces $\partial w/\partial x = 0$. Como y es constante cuando se calcula la derivada parcial con respecto a x , entonces $\partial y/\partial x = 0$. Además, $\partial x/\partial x = 1$. Por tanto, de (2),

$$0 = F_x(x, y, z)(1) + F_y(x, y, z)(0) + F_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

Puesto que $F_z(x, y, z) \neq 0$, al resolver esta ecuación para $\partial z/\partial x$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene en la misma forma al calcular $\partial w/\partial y$ mediante la regla de la cadena. ■

► **EJEMPLO 7** Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si

$$4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$$

Solución Sea $F(x, y, z) = 4z^3 + 3xz^2 - xyz - 2xy^2 + 7 = 0$. Entonces

$$F_x(x, y, z) = 3z^2 - yz - 2y^2 \quad F_y(x, y, z) = -xz - 4xy$$

$$F_z(x, y, z) = 12z^2 + 6xz - xy$$

Del teorema 12.5.4,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3z^2 - yz - 2y}{12z^2 + 6xz - xy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz - 4xy}{12z^2 + 6xz - xy} \quad \blacktriangleleft$$

Se concluye esta sección con la demostración de la regla de la cadena enunciada en el teorema 12.5.1.

Demostración del teorema 12.5.1 Se probará el teorema para $\partial u/\partial r$. La demostración para $\partial u/\partial s$ es similar.

Si se mantiene s fija y r varía por una cantidad Δr , entonces x varía por una cantidad Δx y y varía por una cantidad Δy . De este modo,

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \quad (3)$$

y

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s) \quad (4)$$

Como f es diferenciable, entonces

$$\Delta f(x, y) = D_1 f(x, y) \Delta x + D_2 f(x, y) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \quad (5)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero conforme $(\Delta x, \Delta y)$ se aproxima a $(0, 0)$. Además, se requiere que $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$. Se pide este requisito a fin de que ϵ_1 y ϵ_2 , los cuales son funciones de Δx y Δy , sean continuas en $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$.

Si en (5) se sustituyen $\Delta f(x, y)$ por Δu , $D_1 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $D_2 f(x, y)$ por $\frac{\partial u}{\partial y}$ y si se dividen los dos miembros entre Δr ($\Delta r \neq 0$), se obtiene

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}$$

Al tomar el límite en ambos miembros de la ecuación anterior cuando Δr tiende a cero se tiene

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_1 \right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_2 \right) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (6)$$

Puesto que u es una función de x y y , y tanto x como y son funciones de r y s , entonces u es una función de r y s . Como s se mantuvo fija y r varía por una cantidad Δr , resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned} \quad (7)$$

Así mismo,

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r} \quad (8)$$

Debido a que $\frac{\partial x}{\partial r}$ y $\frac{\partial y}{\partial r}$ existen, F y G son continuas con respecto a la variable r . (Nota: la existencia de las derivadas parciales de una función no implican la continuidad con respecto a todas las variables simultáneamente, como se dijo en la sección anterior, pero con funciones de una sola variable sí implica la continuidad con respecto a cada una de las variables por separado.) En consecuencia, de (3),

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta x &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)] \\ &= F(r, s) - F(r, s) \\ &= 0\end{aligned}$$

y de (4),

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)] \\ &= G(r, s) - G(r, s) \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, conforme Δr tiende a cero, Δx y Δy también tienden a cero, y como ϵ_1 y ϵ_2 se aproximan a cero cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$, se puede concluir que

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0 \quad (9)$$

Ahora bien, es posible que para ciertos valores de Δr , $\Delta x = 0$ y $\Delta y = 0$. Como en tal caso se pidió que $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 0$, los límites de (9) también son cero. Al sustituir de (7), (8) y (9) en (6) se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ■

EJERCICIOS 12.5

En los ejercicios 1 a 6, calcule la derivada parcial indicada por medio de dos métodos: (a) utilice la regla de la cadena; (b) realice las sustituciones para x y y antes de derivar.

1. $u = x^2 - y^2; x = 3r - s; y = r + 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

2. $u = 3x - 4y^2; x = 5pq; y = 3p^2 - 2q; \frac{\partial u}{\partial p}; \frac{\partial u}{\partial q}$

3. $u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y; x = 2r - 3s; y = r + s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

4. $u = x^2 + y^2; x = \cosh r \cos t; y = \sinh r \sin t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$

5. $u = e^{st}; x = 2r \cos t; y = 4r \sin t; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial t}$

6. $V = \pi x^2 y; x = \cos z \sin t; y = z^2 e^t; \frac{\partial V}{\partial z}; \frac{\partial V}{\partial t}$

En los ejercicios 7 a 14, obtenga la derivada parcial indicada utilizando la regla de la cadena.

7. $u = x^2 + xy; x = r^2 + s^2; y = 3r - 2s; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

8. $u = xy + xz + yz; x = rs; y = r^2 - s^2; z = (r - s)^2; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

9. $u = \sin^{-1}(3x + y); x = r^2 e^t; y = \sin rs; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

10. $u = \sin(xy); x = 2ze^t; y = t^2 e^{-t}; \frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial u}{\partial z}$

11. $u = \cosh \frac{y}{x}; x = 3r^2 s; y = 6se^r; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

12. $u = xe^{-y}; x = \tan^{-1}(rst); y = \ln(3rs + 5st); \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}; \frac{\partial u}{\partial t}$

13. $u = x^2 + y^2 + z^2; x = r \sin \phi \cos \theta; y = r \sin \phi \sin \theta; z = r \cos \phi; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial \phi}; \frac{\partial u}{\partial \theta}$

14. $u = x^2 yz; x = \frac{r}{s}; y = re^t; z = re^{-t}; \frac{\partial u}{\partial r}; \frac{\partial u}{\partial s}$

En los ejercicios 15 a 18, determine la derivada total $\frac{du}{dt}$ mediante dos métodos: (a) emplee la regla de la cadena; (b) efectúe las sustituciones para x , y y z antes de derivar.

15. $u = ye^x + xe^y; x = \cos t; y = \sin t$

16. $u = \ln xy + y^2; x = e^t; y = e^{-t}$

17. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = \tan t; y = \cos t; z = \sin t; 0 < t < \frac{1}{2}\pi$

18. $u = \frac{t + e^x}{y - e^t}; x = 3 \sin t; y = \ln t$

En los ejercicios 19 a 22, calcule la derivada total $\frac{du}{dt}$ por medio de la regla de la cadena; no exprese u como una función de t antes de derivar.

19. $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); x = \ln t; y = e^t$

20. $u = xy + xz + yz; x = t \cos t; y = t \sin t; z = t$

21. $u = \frac{x+t}{y+t}; x = \ln t; y = \ln \frac{1}{t}$

22. $u = \ln(x^2 + y^2 + t^2); x = t \sin t; y = \cos t$

En los ejercicios 23 a 26, obtenga $\frac{dy}{dx}$ mediante el teorema

12.5.3. Compare la solución con la del ejercicio indicado de la sección 2.9.

23. $x^3 + y^3 = 8xy$; ejercicio 19.

24. $2x^3y + 3xy^3 = 5$; ejercicio 24.

25. $x \sin y + y \cos x = 1$; ejercicio 31.

26. $\cos(x + y) = y \sin x$; ejercicio 32.

En los ejercicios 27 a 30, suponga que la ecuación define z como una función diferenciable de x y y . Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ mediante dos métodos: (a) Use el teorema 12.5.4; (b) derive implícitamente.

27. $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

28. $z = (x^2 + y^2) \sin xz$

29. $ye^{3z} \cos 3xz = 5$

30. $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

31. Si f es una función diferenciable de la variable u , considere $u = bx - ay$ y demuestre que $z = f(bx - ay)$ satisface la ecuación $a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, donde a y b son constantes.

32. Si f es una función diferenciable de las variables u y v , considere $u = x - y$ y $v = y - x$; demuestre que $z = f(x - y, y - x)$ satisface la ecuación $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

33. Suponga que f es una función diferenciable de x y y , y que $u = f(x, y)$. Entonces si $x = \cosh w$ y $y = \sinh w$ en w , exprese $\frac{\partial u}{\partial v}$ y $\frac{\partial u}{\partial w}$ en términos de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$.

34. Sean $u = e^x \cos x$, $x = 2t$, $y = t^2$. Calcule $\frac{d^2u}{dt^2}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de t ; (b) utilice la regla de la cadena.

35. Sean $u = 3xy - 4y^2$, $x = 2ye^t$, $y = re^{-t}$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de r y s ; (b) emplee la regla de la cadena.

36. Para u , x y y dadas como en el ejercicio 35, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de r y s ; (b) utilice la regla de la cadena.

37. Sean $u = 9x^2 + 4y^2$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de r y θ ; (b) emplee la regla de la cadena.

38. Para u , x y y dadas como en el ejercicio 37, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de r y θ ; (b) use la regla de la cadena.

39. Para u , x y y dadas como en el ejercicio 37, calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$ en dos formas: (a) primero exprese u en términos de r y θ ; (b) utilice la regla de la cadena.

40. Suponga que f es una función diferenciable de x , y y z ; que $u = f(x, y, z)$. Entonces si $x = r \sin \phi \cos \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \phi$, exprese $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \phi}$, y $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ en términos de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

41. Si $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, entonces las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

se denominan ecuaciones de Cauchy-Riemann. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son satisfecidas si

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad \text{y} \quad v = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

42. Suponga que f y g son funciones diferenciables de x y y , y que $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$. Demuestre que si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (vea ejercicio 41) y si $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

43. En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 10 cm y crece a la tasa de 1 cm/min, y la longitud del otro cateto es de 12 cm y decrece a una tasa de 2 cm/min. Calcule la tasa de variación de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de 12 cm en ese instante.

44. Se introduce agua en un tanque que tiene forma de cilindro circular recto a una tasa de $\frac{1}{2} \pi \text{ m}^3/\text{min}$. El tanque se ensancha de modo que, aun cuando conserva su forma cilíndrica, su radio se incrementa a una tasa de 0.2 cm/min. ¿Qué tan rápido sube la superficie del agua cuando el radio es de 2 m y el volumen del agua en el tanque es de $20\pi \text{ m}^3$?

45. La altura de un cilindro circular recto disminuye a la tasa de 10 cm/min y el radio se incrementa a la tasa de 4 cm/min. Obtenga la tasa de variación del volumen en el instante en que la altura es de 50 cm y el radio de 16 cm.

46. La altura de un cono circular recto se incrementa a la tasa de 40 cm/min y el radio disminuye a la tasa de 15 cm/min. Calcule la tasa de variación del volumen en el instante en que la altura es de 200 cm y el radio es de 60 cm.

47. Una cantidad de gas obedece la ley del gas ideal (vea el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 1.2$, y el gas está encerrado en un recipiente que se calienta a una tasa de $3^\circ \text{K}/\text{min}$. Si

en el instante en que la temperatura es de 300°K, la presión es de 6 atm y decrece a la tasa de 0.1 atm/min, calcule la tasa de variación del volumen en ese instante

48. Una pared de retención forma un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ rad con el suelo. Una escalera de 20 pie de longitud está recargada contra la pared y su parte superior se desliza hacia abajo sobre la pared a una tasa de 3 pie/s. ¿Qué tan rápido varía el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el piso cuando la escalera forma un ángulo de $\frac{1}{6}\pi$ rad con el suelo?
49. Un kilomol de un gas real obedece la ecuación de *Van der Waals*: si P , V y T son, respectivamente, las medidas de la presión, el volumen y la temperatura absoluta, entonces

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

donde R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes que dependen del gas particular. Si β es el coeficiente de la expansión del volumen y κ es el coeficiente de compresibilidad, entonces

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right) \quad \text{y} \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)$$

$$\text{Demuestre que } \frac{\partial \beta}{\partial P} = -\frac{\partial \kappa}{\partial T}.$$

50. De la ecuación de Van der Waals y β y κ dadas como en el ejercicio 49, demuestre que

$$\beta = \frac{RV^2(V - b)}{RTV^3 - 2a(V - b)^2} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{V^2(V - b)^2}{RTV^3 - 2a(V - b)^2}$$

Para un gas ideal, $a = 0$ y $b = 0$. ¿Cuáles son las expresiones de β y κ para un gas ideal?

51. Si f es una función diferenciable de x y y , y $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

52. Suponga que $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y que f , g y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas. Demuestre que si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (vea el ejercicio 41), entonces también satisfacen la ecuación de Laplace (refiérase a los ejercicios 49 a 52 de la sección 12.3).

12.6 DERIVADAS DIRECCIONALES Y GRADIENTES

Se ha visto cómo las derivadas parciales de una función caracterizan la tasa de variación de la función a lo largo de rectas paralelas a los ejes coordenados. Esto es, si f es una función de las variables x y y , la derivada parcial $f_x(x, y)$ describe la tasa de variación de f en la dirección del eje x , y $f_y(x, y)$ describe la tasa de variación de f en la dirección del eje y . A continuación se generalizará la definición de derivada parcial para obtener la tasa de variación de una función con respecto a cualquier dirección. Esto conduce a la noción de *derivada direccional*.

Para indicar una dirección, se utiliza el concepto de vector unitario \mathbf{U} que forma un ángulo de medida θ radianes con la parte positiva del eje x , de modo que

$$\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

La figura 1 muestra la representación de \mathbf{U} cuyo punto inicial es $P(x, y)$ en el plano xy . Si f es una función de x y y , entonces la tasa de variación de los valores de función $f(x, y)$ con respecto a la dirección del vector unitario \mathbf{U} está determinada por la *derivada direccional*.

12.6.1 Definición de derivada direccional de una función de dos variables

Sea f una función de las dos variables x y y . Si \mathbf{U} es el vector unitario $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, entonces la *derivada direccional* de f en la dirección de \mathbf{U} , denotada por $D_{\mathbf{U}}f$, está determinada por

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

si este límite existe.

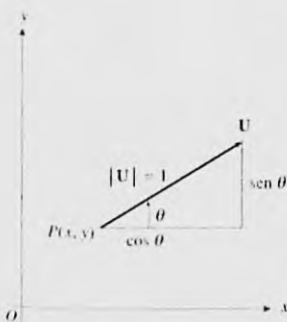


FIGURA 1

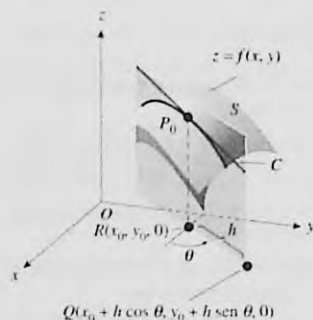


FIGURA 2

La interpretación geométrica de la derivada direccional se ilustra en la figura 2. Una ecuación de la superficie S de la figura es $z = f(x, y)$. El punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se encuentra sobre la superficie y los puntos $R(x_0, y_0, 0)$ y $Q(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta, 0)$ están en el plano xy . El plano que pasa por R y Q , paralelo al eje z , forma un ángulo de θ radianes con la dirección positiva del eje x . Este plano intersecta la superficie S en la curva C . La derivada direccional $D_U f$, evaluada en el punto P_0 , es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P_0 en el plano que pasa por R , Q y P_0 .

Si $U = i$, entonces $\cos \theta = 1$ y $\sin \theta = 0$, y de la definición 12.6.1,

$$D_1 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

la cual es la derivada parcial de f con respecto a x .

Si $U = j$, entonces $\cos \theta = 0$ y $\sin \theta = 1$, y

$$D_2 f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

la cual es la derivada parcial de f con respecto a y .

De este modo, f_x y f_y son casos especiales de la derivada direccional en las direcciones de los vectores unitarios i y j , respectivamente.

► **EJEMPLO 1** Aplique la definición 12.6.1 para calcular $D_U f(x, y)$ si $f(x, y) = 12 - x^2 - 4y^2$ y U es el vector unitario en la dirección $\frac{1}{6}\pi$.

Solución Como $U = \cos \frac{1}{6}\pi i + \sin \frac{1}{6}\pi j$, $U = \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}j$, entonces

$$\begin{aligned} D_U f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 - (x + \frac{1}{2}\sqrt{3}h)^2 - 4(y + \frac{1}{2}h)^2 - (12 - x^2 - 4y^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 - x^2 - \sqrt{3}hx - \frac{3}{4}h^2 - 4y^2 - 4hy - h^2 - 12 + x^2 + 4y^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{3}hx - \frac{7}{4}h^2 - 4hy}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-\sqrt{3}x - \frac{7}{4}h - 4y) \\ &= -\sqrt{3}x - 4y \end{aligned}$$

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Para la función f y el vector unitario U del ejemplo 1,

$$\begin{aligned} D_U f(2, 1) &= -2\sqrt{3} - 4 \\ &= -7.464 \end{aligned}$$

La figura 3 muestra la interpretación geométrica de esta derivada direccional. La curva C es la intersección de la superficie

$$z = 12 - x^2 - 4y^2$$

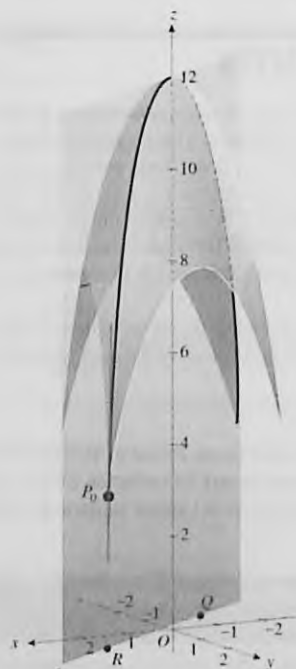


FIGURA 3

con el plano que pasa por $R(2, 1, 0)$, $Q(2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}h, 1 + \frac{1}{2}h, 0)$ y $P_0(2, 1, 4)$. El valor -7.464 de la derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P_0 en el plano definido por R , Q y P_0 . ◀

Ahora se obtendrá una fórmula que permite calcular una derivada direccional de manera más breve que empleando la definición. Sea g la función de la variable t , con x , y y θ fijos, de modo que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \quad (1)$$

y sea $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$. Entonces, por la definición de derivada ordinaria, se tiene

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + (0+h) \cos \theta, y + (0+h) \sin \theta) - f(x + 0 \cos \theta, y + 0 \sin \theta)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

Como el miembro derecho de la ecuación anterior es $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$, entonces

$$g'(0) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) \quad (2)$$

Ahora se obtendrá $g'(t)$ aplicando la regla de la cadena al miembro derecho de (1), obteniéndose

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(x + t \cos \theta)}{\partial t} + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(y + t \sin \theta)}{\partial t} \\ &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \cos \theta + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g'(0) = f_1(x, y) \cos \theta + f_2(x, y) \sin \theta$$

De esta ecuación y de (2) se tiene el teorema siguiente.

12.6.2 Teorema

Si f es una función diferenciable de x y y , y $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, entonces

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará el teorema 12.6.2 para calcular $D_{\mathbf{U}}f$ para la función y el vector unitario del ejemplo 1.

$$f(x, y) = 12 - x^2 - 4y^2 \quad \mathbf{U} = \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$$

Entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{1}{6}\pi + f_y(x, y) \sin \frac{1}{6}\pi \\ &= -2x(\frac{1}{2}\sqrt{3}) - 8y(\frac{1}{2}) \\ &= -\sqrt{3}x - 4y \end{aligned}$$

lo cual es acorde con el resultado del ejemplo 1. ◀

La derivada direccional puede expresarse como el producto punto de dos vectores. Como

$$f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}]$$

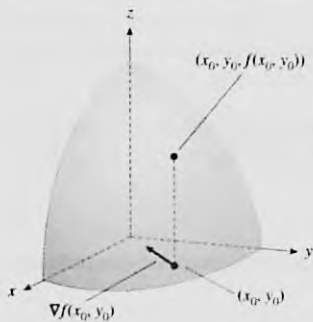


FIGURA 4

entonces, por el teorema 12.6.2

$$D_U f(x, y) = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \quad (3)$$

La función vectorial del miembro derecho de (3) es una función importante, y se denomina *gradiente* de la función f de las dos variables x y y . El símbolo para el gradiente de f es ∇f , donde ∇ es la letra griega delta mayúscula invertida y se lee “del”. En ocasiones se emplea la abreviación *grad f*.

12.6.3 Definición del gradiente de una función de dos variables

Si f es una función de las dos variables x y y , y f_x y f_y existen, entonces el **gradiente** de f , denotado por ∇f (léase “del f ”), está definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

A fin de representar el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ en el plano xy , se toma el punto inicial en (x_0, y_0) . Refiérase la figura 4.

De la definición 12.6.3, la ecuación (3) puede escribirse como

$$D_U f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y) \quad (4)$$

Por tanto, cualquier derivada direccional de una función diferenciable puede obtenerse mediante el producto punto del gradiente y un vector unitario de la dirección deseada. Esta fórmula es la que más conviene emplear al calcular una derivada direccional.

▶ EJEMPLO 2 Si

$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

(a) Determine el gradiente de f en $R(4, 3)$. (b) Utilice el gradiente para calcular la derivada direccional de f en R en la dirección de R a $Q(5, 6)$. (c) Dibuje las representaciones de los vectores $\nabla f(4, 3)$ y $\mathbf{V}(\overline{RQ})$ que tienen su punto inicial en R .

Solución

(a) Como $f_x(x, y) = x/8$ y $f_y(x, y) = 2y/9$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \frac{x}{8}\mathbf{i} + \frac{2y}{9}\mathbf{j} \quad \nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$$

(b) El vector en la dirección de $R(4, 3)$ a $Q(5, 6)$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{RQ}) &= (5 - 4)\mathbf{i} + (6 - 3)\mathbf{j} \\ &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \end{aligned}$$

El vector unitario \mathbf{U} en la dirección de \mathbf{V} es $\mathbf{V}(\overline{RQ}) / \|\mathbf{V}(\overline{RQ})\|$:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$$

Se calculará $D_U f(4, 3)$ mediante el producto punto de \mathbf{U} por $\nabla f(4, 3)$:

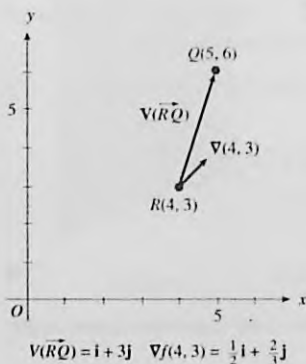


FIGURA 5



FIGURA 6

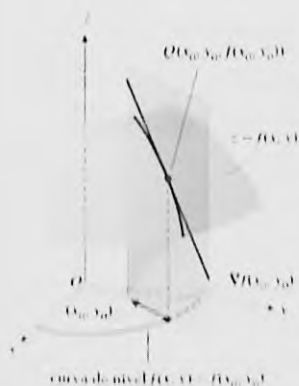


FIGURA 7



FIGURA 8

$$\begin{aligned} D_U f(4, 3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{10}} = 0.79 \end{aligned}$$

(c) Las representaciones de $\nabla f(4, 3)$ y $\mathbf{V}(R\hat{Q})$ se muestran en la figura 5. ◀

La gráfica de la función f del ejemplo 2 es un paraboloides elíptico. La figura 6 muestra esta superficie, el gradiente de f en R , el vector unitario \mathbf{U} en la dirección de $\mathbf{V}(R\hat{Q})$, y el plano que pasa por R , Q y el punto $P(4, 3, 2)$ del paraboloides. $D_U f(4, 3)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P de la curva de intersección del plano con el paraboloides.

De (4), se puede concluir que si $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, entonces $D_U f(x_0, y_0) = 0$ para cualquier \mathbf{U} . Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces de (4) y del teorema 10.3.5 y si α es la medida en radianes del ángulo entre los dos vectores \mathbf{U} y $\nabla f(x_0, y_0)$, entonces

$$\begin{aligned} D_U f(x_0, y_0) &= \mathbf{U} \cdot \nabla f(x_0, y_0) \\ &= \|\mathbf{U}\| \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha \\ &= \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \alpha \end{aligned}$$

De esta ecuación, el valor máximo de $D_U f(x_0, y_0)$ ocurre cuando $\cos \alpha = 1$, es decir, cuando $\alpha = 0$ o, equivalentemente, cuando \mathbf{U} está en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$. El valor máximo de $D_U f(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. De manera similar, el valor mínimo de $D_U f(x_0, y_0)$ se presenta cuando $\cos \alpha = -1$, esto es, cuando $\alpha = \pi$ o, equivalentemente, cuando la dirección de \mathbf{U} es opuesta a la de $\nabla f(x_0, y_0)$. El valor mínimo de $D_U f(x_0, y_0)$ es $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. El teorema siguiente resume estos resultados.

12.6.4 Teorema

Sea f una función de dos variables y diferenciable en (x_0, y_0) , donde $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Sea \mathbf{U} cualquier vector unitario tal que $\langle \mathbf{U}, \nabla f(x_0, y_0) \rangle$ es una función de \mathbf{U} .

- El valor máximo de $D_U f(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Este valor máximo se obtiene cuando la dirección de \mathbf{U} es la de $\nabla f(x_0, y_0)$.
- El valor mínimo de $D_U f(x_0, y_0)$ es $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$. Este valor mínimo se alcanza cuando la dirección de \mathbf{U} es la opuesta de la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$.

El inciso (i) de este teorema afirma que si $\mathbf{U} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$, entonces la tasa máxima de crecimiento de f en (x_0, y_0) ocurre en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$, como se muestra en la figura 7. De este modo, $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección de máxima inclinación. Este hecho sugiere el nombre de *gradiente*; esto es, el grado de mayor inclinación es en la dirección del gradiente.

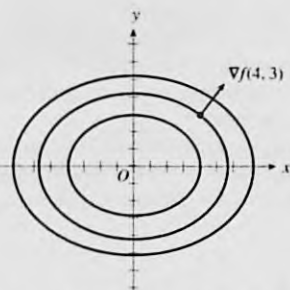
En el ejemplo ilustrativo siguiente se interpreta el teorema 12.6.4 en términos geométricos para una función particular.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Retornemos a la figura 8 que muestra el paraboloides elíptico definido por la función f del ejemplo 2. En este modo,

$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

La figura también muestra el punto $R(4, 3)$ del plano xy , el punto $P(4, 3, 2)$ del paraboloide y el vector gradiente $\nabla f(4, 3)$ en el plano xy . La máxima tasa de crecimiento de z en el punto P ocurre en la dirección de $\nabla f(4, 3)$. De manera similar, la tasa mínima de crecimiento o, equivalentemente, la tasa máxima de decrecimiento, de z en P ocurre en la dirección de $-\nabla f(4, 3)$.



Curvas de nivel de $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$

FIGURA 9

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En la figura 9 se muestra un mapa de contornos que presenta las curvas de nivel de la función del ejemplo 2 y del ejemplo ilustrativo 3 para 1, 2 y 3. Estas curvas de nivel son elipses. La figura también muestra la representación de $\nabla f(4, 3)$ cuyo punto inicial es $(4, 3)$ y apunta en la dirección de máxima inclinación.

► **EJEMPLO 3** Dada

$$f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$$

calcule el valor máximo de $D_U f$ en el punto donde $x = 1$ y $y = -2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 4x + 3$ y $f_y(x, y) = -2y - 1$, entonces

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Por lo que el valor máximo de $D_U f$ en $(1, -2)$ es

$$\begin{aligned} \|\nabla f(1, -2)\| &= \sqrt{49 + 9} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Este resultado indica que la gráfica de f está muy inclinada en el punto $(1, -2, 3)$ de la superficie.

► **EJEMPLO 4** La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa rectangular situada en el plano xy está determinada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2$$

- (a) Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto $(3, 4)$ en la dirección que forma un ángulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad con la parte positiva del eje x .
 (b) Determine el ángulo de la dirección en la que la tasa de variación de la temperatura en el punto $(-3, 1)$ es un máximo.

Solución

(a) Se desea calcular $D_U T(x, y)$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \cos \frac{1}{3}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{3}\pi \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla T(x, y) = T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j} \quad \quad \quad = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_U T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}\right) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}y \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} D_U T(3, 4) &= 3 + 4\sqrt{3} \\ &\approx 9.93 \end{aligned}$$

Conclusión: En el punto (3, 4) la temperatura crece aproximadamente a la tasa de 9.93 unidades por unidad de variación en la distancia medida en la dirección de U .

- (b) $D_U T(-3, 1)$ es un máximo cuando U está en la dirección de $\nabla T(-3, 1)$. Como $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces la medida en radianes del ángulo que indica la dirección de $\nabla T(-3, 1)$ es θ , donde $\tan \theta = -\frac{1}{3}$. De esta manera, $\theta = \pi - \tan^{-1} \frac{1}{3} = 2.82$.

Conclusión: La tasa de variación de la temperatura en el punto $(-3, 1)$ es un máximo en la dirección que forma aproximadamente un ángulo de 2.82 rad con la parte positiva del eje x . ◀

La definición siguiente extiende el concepto de derivada direccional para funciones de tres variables, de modo que proporcione la tasa de variación de los valores de función $f(x, y, z)$ con respecto a la distancia medida en la dirección de un vector unitario $U = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ del espacio tridimensional.

12.6.5 Definición de derivada direccional de una función de tres variables

Suponga que f es una función de las tres variables x, y y z . Si U es el vector unitario $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, entonces la **derivada direccional** de f en la dirección de U , denotada por $D_U f$, está dada por

$$D_U f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

si este límite existe.

El teorema siguiente, el cual proporciona un método para calcular una derivada direccional de una función de tres variables, se prueba de manera semejante a la demostración del teorema 12.6.2, el cual es el teorema correspondiente para funciones de dos variables.

12.6.6 Teorema

Si f es una función diferenciable de x, y y z , y

$$U = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

entonces

$$D_U f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma$$

▶ EJEMPLO 5 Dada

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^3$$

calcule la tasa de variación de $f(x, y, z)$ en $(1, -2, -1)$ en la dirección del vector $U = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

Solución El vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{U} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

Del teorema 12.6.6,

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \frac{2}{3}(6x + y) - \frac{2}{3}(x - 4y - z) - \frac{1}{3}(-y + 2z)$$

Por tanto, la tasa de variación de $f(x, y, z)$ en $(1, -2, -1)$ en la dirección de \mathbf{U} está determinada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(1, -2, -1) &= \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) \\ &= -4 \end{aligned}$$

12.6.7 Definición del gradiente de una función de tres variables

Si f es una función de las tres variables x , y y z , y las primeras derivadas parciales f_x , f_y y f_z existen, entonces el **gradiente** de f , denotado por ∇f , está definido por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Al igual que para las funciones de dos variables, si \mathbf{U} es un vector unitario, entonces de la definición anterior y del teorema 12.6.6 se tiene

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z)$$

El teorema 12.6.4(i) puede extenderse para funciones de tres variables, de modo que la derivada direccional es un máximo cuando \mathbf{U} está en la dirección del gradiente, y es igual al módulo del gradiente. Se tiene un comentario similar para el inciso (ii) del teorema 12.6.4.

En física se puede aplicar el gradiente en algunos problemas relacionados con la conducción de calor y electricidad. Suponga, por ejemplo, que la función f está definida por la ecuación $w = f(x, y, z)$. La superficie de nivel de f para la constante k está determinada por la ecuación

$$f(x, y, z) = k$$

Si w grados es la temperatura en el punto (x, y, z) , entonces todos los puntos de esta curva de nivel tienen la misma temperatura de k grados, por lo que esta superficie se denomina **superficie isoterma**. Si w volts es el potencial eléctrico en un punto (x, y, z) , entonces todos los puntos de la superficie están al mismo potencial, por lo que la superficie recibe el nombre de **superficie equipotencial**. En el caso de una superficie isoterma, el gradiente proporciona la dirección de la máxima tasa de variación de la temperatura, y para una superficie equipotencial, el gradiente indica la dirección de la máxima tasa de variación del potencial.

► **EJEMPLO 6** Suponga que $V(x, y, z)$ volts es el potencial eléctrico en cualquier punto (x, y, z) del espacio tridimensional y que

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(a) Calcule la tasa de variación de V en el punto $(2, 2, -1)$ en la dirección del vector $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. (b) Determine la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$.

Solución

(a) Un vector unitario en la dirección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ es

$$\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Se desea calcular $D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1)$.

$$\begin{aligned}\nabla V(x, y, z) &= V_x(x, y, z)\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{U}}V(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla V(2, 2, -1) \\ &= \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) \cdot \left(-\frac{2}{27}\mathbf{i} - \frac{2}{27}\mathbf{j} + \frac{1}{27}\mathbf{k}\right) \\ &= -\frac{4}{189} + \frac{6}{189} + \frac{6}{189} \\ &= \frac{8}{189} \\ &\approx 0.042\end{aligned}$$

Conclusión: En $(2, 2, -1)$, el potencial crece aproximadamente a la tasa de 0.042 volt por unidad de variación en la distancia medida en la dirección de \mathbf{U} .

(b) $\nabla V(2, 2, -1) = \left(-\frac{2}{27}\mathbf{i} - \frac{2}{27}\mathbf{j} + \frac{1}{27}\mathbf{k}\right)$. Un vector unitario en la dirección de $\nabla V(2, 2, -1)$ es

$$\begin{aligned}\frac{\nabla V(2, 2, -1)}{\|\nabla V(2, 2, -1)\|} &= \frac{-\frac{2}{27}\mathbf{i} - \frac{2}{27}\mathbf{j} + \frac{1}{27}\mathbf{k}}{\frac{3}{27}} \\ &= -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Los cosenos directores de este vector son $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$, los cuales proporcionan la dirección de la máxima tasa de variación de V en $(2, 2, -1)$. \blacktriangleleft

EJERCICIOS 12.6

En los ejercicios 1 a 6, calcule la derivada direccional de la función en la dirección del vector unitario \mathbf{U} empleando la definición 12.6.1 o la definición 12.6.5, y después verifique el resultado aplicando el teorema 12.6.2 o el teorema 12.6.6, según corresponda.

1. $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{4}\pi\mathbf{j}$

2. $g(x, y) = 3x^2 + 4y^2$; $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{3}\pi\mathbf{i} + \sin \frac{1}{3}\pi\mathbf{j}$

3. $g(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2$;
 $\mathbf{U} = \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{i} + \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{j} + \cos \frac{1}{4}\pi\mathbf{k}$

4. $f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz$; $\mathbf{U} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$

5. $g(x, y) = \frac{1}{x-y}$; $\mathbf{U} = -\frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$

6. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $\mathbf{U} = \frac{1}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

En los ejercicios 7 a 14, calcule el gradiente de la función.

7. $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$

8. $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

9. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

10. $f(x, y) = e^y \tan 2x$

11. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{x+z}$

12. $f(x, y, z) = 3z \ln(x+y)$

13. $g(x, y, z) = xe^{-2y} \sec z$

14. $g(x, y, z) = e^{2z} (\sin x - \cos y)$

En los ejercicios 15 a 22 calcule el valor de la derivada direccional en el punto P_0 para la función en la dirección de U .

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$; $U = \cos \pi i + \sin \pi j$; $P_0 = (1, -2)$

16. $g(x, y) = 3x^3y + 4y^2 - xy$; $U = \cos \frac{1}{4}\pi i + \sin \frac{1}{4}\pi j$; $P_0 = (0, 3)$

17. $g(x, y) = y^2 \tan^2 x$; $U = -\frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}j$; $P_0 = (\frac{1}{3}\pi, 2)$

18. $f(x, y) = xe^{2y}$; $U = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$; $P_0 = (2, 0)$

19. $h(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz)$; $U = -\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$; $P_0 = (2, 0, -3)$

20. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $U = \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k$; $P_0 = (1, 3, 2)$

21. $f(x, y) = e^{-3x} \cos 3y$; $U = \cos(-\frac{1}{12}\pi)i + \sin(-\frac{1}{12}\pi)j$; $P_0 = (-\frac{1}{12}\pi, 0)$

22. $g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \sinh 4z$; $U = \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$; $P_0 = (\frac{1}{12}\pi, 0, 0)$

En los ejercicios 23 a 26, calcule (a) el gradiente de f en P , y (b) la tasa de variación del valor de la función en la dirección de U en P .

23. $f(x, y) = x^2 - 4y$; $P = (-2, 2)$; $U = \cos \frac{1}{3}\pi i + \sin \frac{1}{3}\pi j$

24. $f(x, y) = e^{2xy}$; $P = (2, 1)$; $U = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j$

25. $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz$; $P = (-2, 1, 3)$; $U = \frac{2}{7}i - \frac{6}{7}j + \frac{3}{7}k$

26. $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P = (1, 1, 1)$; $U = \frac{1}{7}\sqrt{21}i - \frac{2}{7}\sqrt{7}k$

27. Dibuje un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función del ejercicio 23, para 8, 4, 0, -4 y -8. También muestre la representación de $\nabla f(-2, 2)$ cuyo punto inicial es $(-2, 2)$.

28. Dibuje un mapa de contornos que muestre las curvas de nivel de la función del ejercicio 24, para e^8 , e^4 , 1, e^{-4} y e^{-8} . También muestre la representación de $\nabla f(2, 1)$ que tiene su punto inicial en $(2, 1)$.

En los ejercicios 29 a 32, calcule $D_U f$ en el punto P para el cual U es un vector unitario en la dirección de PQ . También en P , calcule $D_U f$, si U es un vector unitario para el cual $D_U f$ es un máximo.

29. $f(x, y) = e^x \tan^{-1} y$; $P(0, 1)$, $Q(3, 5)$

30. $f(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$; $P = (1, 0)$, $Q(-3, 3)$

31. $f(x, y, z) = x - 2y + z^2$; $P = (3, 1, -2)$, $Q(10, 7, 4)$

32. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4xz$; $P = (3, 1, -2)$, $Q(-6, 3, 4)$

33. Determine la dirección a partir del punto $(1, 3)$ para la cual el valor de f no cambia si $f(x, y) = e^{2y} \tan^{-1} \frac{y}{3x}$.

34. La densidad en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $\rho(x, y)$ kilogramos por metro cuadrado, donde

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 3}}$$

(a) Calcule la tasa de variación de la densidad en el punto $(3, 2)$ en la dirección del vector unitario $\cos \frac{2}{3}\pi i + \sin \frac{2}{3}\pi j$. (b) Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de ρ en $(3, 2)$.

35. La temperatura en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy es $T(x, y)$, donde $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$. La distancia se mide en metros. (a) Calcule la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto $(3, -6)$ de la placa. (b) Determine la dirección para la cual ocurre esta tasa de variación máxima en $(3, -6)$.

36. En cualquier punto de un sólido del espacio tridimensional la temperatura es $T(x, y, z)$ grados, donde

$$T(x, y, z) = \frac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$$

La distancia se mide en pulgadas. (a) Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto $(3, -2, 2)$ en la dirección del vector $-2i + 3j - 6k$. (b) Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de T en $(3, -2, 2)$.

37. En cualquier punto del plano xy el potencial eléctrico es $V(x, y)$ volts, y $V(x, y) = e^{-2x} \cos 2y$. La distancia se mide en pies. (a) Calcule la tasa de variación del potencial en el punto $(0, \frac{1}{4}\pi)$ en la dirección del vector unitario $\cos \frac{1}{6}\pi i + \sin \frac{1}{6}\pi j$. (b) Determine la dirección y la intensidad (o módulo) de la máxima tasa de variación de V en $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

38. Una ecuación de la superficie de una montaña es

$$z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$$

donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Una alpinista se encuentra en el punto que corresponde a $(-10, 5, 850)$. (a) ¿Cuál es la dirección de máxima inclinación? (b) Si la alpinista se desplaza en la dirección este, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa? (c) Si la alpinista se desplaza en la dirección suroeste, ¿ella asciende o desciende, y a qué tasa? (d) ¿En qué dirección recorre la alpinista una curva de nivel?

12.7 PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A SUPERFICIES

Ahora se mostrará cómo el vector gradiente se emplea para estudiar planos tangentes y rectas normales a superficies en el espacio tridimensional. Considere la ecuación

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

donde F es diferenciable y F_x , F_y y F_z no son simultáneamente cero. Un teorema de Cálculo avanzado, conocido como el *teorema de la función implícita*, garantiza que una de las tres variables x , y o z es función de las otras dos. Por tanto, puede considerarse la gráfica de la ecuación (1) como una superficie S .

Suponga que P_0 es un punto (x_0, y_0, z_0) de S , de modo que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Además suponga que C es una curva en S que pasa por P_0 y que un conjunto de ecuaciones paramétricas de C es

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \quad (2)$$

donde el valor del parámetro t en P_0 es t_0 . Una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como la curva C está sobre la superficie S , se tiene, al sustituir de (2) en (1),

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0 \quad (3)$$

Sea $G(t) = F(f(t), g(t), h(t))$. Si F es diferenciable y F_x , F_y y F_z no son todas cero en P_0 y si $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ y $h'(t_0)$ existen, entonces la derivada total de F con respecto a t en P_0 está dada por

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)h'(t_0)$$

El miembro derecho de esta ecuación se puede escribir como

$$[F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}] \cdot [f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}]$$

Así,

$$G'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0)$$

Puesto que $G'(t) = 0$ para toda t (debido a (3)), $G'(t_0) = 0$; por tanto, se deduce que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0) = 0 \quad (4)$$

De la sección 11.3 se sabe que $D_t \mathbf{R}(t_0)$ tiene la misma dirección que un vector tangente a la curva C en P_0 . Por tanto, de (4) se puede concluir que el vector gradiente de F en P_0 es ortogonal a un vector tangente de cada curva C de S que pase por el punto P_0 . Así, se ha demostrado el teorema siguiente en el que se emplea el término *vector normal*, el cual se definirá antes de enunciar el teorema.

12.7.1 Definición de vector normal

Un vector ortogonal a un vector tangente de toda curva C que pase por un punto P_0 de una superficie S se denomina **vector normal** a S en P_0 .

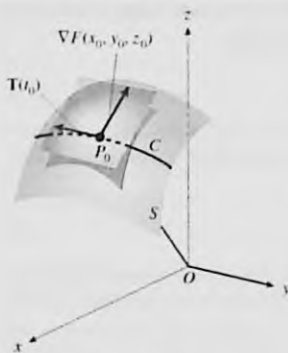


FIGURA 1

12.7.2 Teorema

Si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, y si F es diferenciable y F_x , F_y y F_z no son todas cero en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de S , entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a S en P_0 .

El concepto de vector normal se emplea para definir el *plano tangente* a una superficie en un punto.

12.7.3 Definición de plano tangente

Si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, y F satisface la hipótesis del teorema 12.7.2, entonces el **plano tangente** de S en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que pasa por P_0 y tiene a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como un vector normal.

Una ecuación del plano tangente de la ecuación anterior es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (5)$$

Refiérase a la figura 1, la cual muestra el plano tangente a la superficie S en P_0 y la representación del vector gradiente que tiene su punto inicial en P_0 .

Una ecuación vectorial del plano tangente dado en (5) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0 \quad (6)$$

► **EJEMPLO 1** Obtenga una ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico

$$4x^2 + y^2 - 16z = 0$$

en el punto $(2, 4, 2)$.

Solución Sea $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$. Entonces

$$\nabla F(x, y, z) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

De (6) se infiere que una ecuación del plano tangente es

$$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$$

$$2x + y - 2z - 4 = 0$$

La figura 2 muestra el paraboloide elíptico junto con el plano tangente y la representación del vector normal en $(2, 4, 2)$.

La definición siguiente de *recta normal* a una superficie en un punto está motivada por el requisito de que la representación del vector normal en un punto debe estar sobre la recta normal.

12.7.4 Definición de recta normal a una superficie

La **recta normal** a una superficie S en un punto P_0 de S es la recta que pasa por P_0 y tiene como un conjunto de números directores a las componentes de cualquier vector normal a S en P_0 .



$$4x^2 + y^2 - 16z = 0$$

FIGURA 2

De esta definición, si una ecuación de una superficie S es $F(x, y, z) = 0$, entonces las ecuaciones simétricas de la recta normal de S en (x_0, y_0, z_0) son

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

debido a que los denominadores son las componentes de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ el cual es un vector normal a S en (x_0, y_0, z_0) .

► **EJEMPLO 2** Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie del ejemplo 1 en el punto $(2, 4, 2)$.

Solución Como $\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, las ecuaciones simétricas de la recta normal son

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

12.7.5 Definición de recta tangente a una curva en el espacio

La **recta tangente** a una curva C en el punto P_0 es la recta que pasa por P_0 y tiene como números directores las componentes del vector tangente unitario a C en P_0 .

De esta definición y la definición 12.7.3, todas las rectas tangentes en el punto P_0 a las curvas contenidas en una superficie dada están en el plano tangente a la superficie en P_0 . Refiérase a la figura 3, la cual muestra dibujos de algunas curvas que pasan por P_0 y sus rectas tangentes.

Considere ahora la curva C de intersección de dos superficies que tienen ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = 0$$

respectivamente. Se mostrará cómo se obtienen las ecuaciones de la recta tangente a C en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Puesto que esta recta tangente está contenida en cada uno de los planos tangentes a las superficies dadas en P_0 , dicha recta es la recta de intersección de los dos planos tangentes. Sea \mathbf{N}_1 un vector normal en P_0 a la superficie que tiene la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y sea \mathbf{N}_2 un vector normal en P_0 a la superficie que tiene la ecuación $G(x, y, z) = 0$. Entonces

$$\mathbf{N}_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad \mathbf{N}_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

Los vectores \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 son ortogonales al vector tangente unitario a C en P_0 . De modo que si \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 no son paralelos, entonces, del teorema 10.5.10, el vector tangente unitario tiene la misma dirección, o la opuesta, que el vector $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$. Por tanto, las componentes de $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ sirven como los números directores de la recta tangente. A partir de este conjunto de números directores y de las coordenadas de P_0 se pueden obtener las ecuaciones simétricas de la recta tangente requeridas, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

► **EJEMPLO 3** Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 49 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 2z^2 = 10$$

en el punto $(3, -3, 2)$.

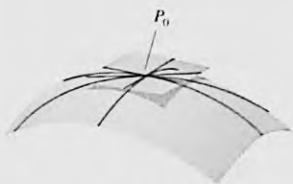


FIGURA 3

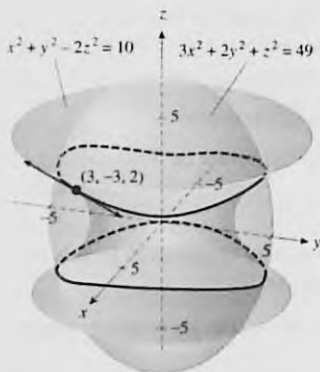


FIGURA 4



FIGURA 5

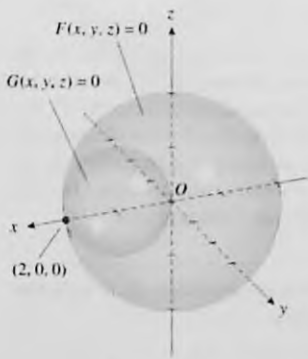


FIGURA 5

Solución Sean

$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10$
entonces

$$\nabla F(x, y, z) = 6xi + 4yj + 2zk \quad \text{y} \quad \nabla G(x, y, z) = 2xi + 2yj - 4k$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} N_1 &= \nabla F(3, -3, 2) & N_2 &= \nabla G(3, -3, 2) \\ &= 18i - 12j + 4k & &= 6i - 6j - 8k \\ &= 2(9i - 6j + 2k) & &= 2(3i - 3j + 4k) \\ N_1 \times N_2 &= 4(9i - 6j + 2k) \times (3i - 3j + 4k) \\ &= 4(30i + 42j - 9k) \\ &= 12(10i + 14j - 3k) \end{aligned}$$

En consecuencia, un conjunto de números directores de la recta tangente es $[10, 14, -3]$. Así, las ecuaciones simétricas de la recta tangente son

$$\frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}$$

La figura 4 muestra dibujos de las dos superficies, la curva de intersección y la recta tangente en $(3, -3, 2)$.

Si dos superficies tienen un plano tangente común en un punto, se dice que las dos superficies son **tangentes** en ese punto. Vea la figura 5. De la definición 12.7.3, dos superficies cuyas ecuaciones son $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, son tangentes en el punto (x_0, y_0, z_0) si para alguna constante k

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = k \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

► **EJEMPLO 4** Demuestre que las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

son tangentes en el punto $(2, 0, 0)$.

Solución Sean

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Entonces

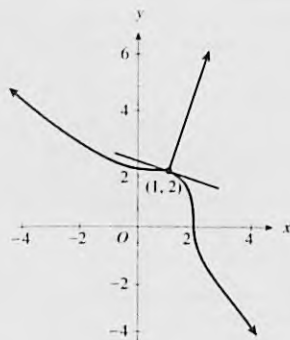
$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= 2xi + 2yj + 2zk & \nabla G(x, y, z) &= 2(x-1)i + 2yj + 2k \\ N_1 &= \nabla F(2, 0, 0) & N_2 &= \nabla G(2, 0, 0) \\ &= 4i & &= 2i \end{aligned}$$

Como $N_1 = 2N_2$ o, equivalentemente, $\nabla F(2, 0, 0) = 2 \nabla G(2, 0, 0)$, las esferas son tangentes en $(2, 0, 0)$. Consulte la figura 6.

El teorema siguiente para funciones de dos variables es análogo al teorema 12.7.2 y su demostración es semejante.

12.7.6 Teorema

Si una ecuación de una curva C es $F(x, y) = 0$ y si F es diferenciable y F_x y F_y no son cero simultáneamente en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de C , entonces $\nabla F(x_0, y_0)$ es un vector normal a C en P_0 .



$$x^3 + y^3 = 9$$

FIGURA 7

Análogas a las ecuaciones (5) y (6) de un plano tangente, se tienen las siguientes ecuaciones para una recta tangente en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de la curva contenida en el plano xy si $F(x, y) = 0$:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j}] = 0$$

► **EJEMPLO 5** Utilice el gradiente para determinar una ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto $(1, 2)$.

Solución Sea $F(x, y) = x^3 + y^3 - 9$. El gradiente de F es

$$\nabla F(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$$

En el punto $(1, 2)$ de la curva, un vector normal es

$$\nabla F(1, 2) = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

Por tanto, una ecuación de la recta tangente en $(1, 2)$ es

$$\begin{aligned} \nabla F(1, 2) \cdot [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j}] &= 0 \\ (3\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j}] &= 0 \\ 3(x - 1) + 12(y - 2) &= 0 \\ x + 4y - 9 &= 0 \end{aligned}$$

La figura 7 muestra dibujos de la curva, del vector normal y de la recta tangente en $(1, 2)$. ◀

Compare la solución del ejemplo 5 con la solución del ejemplo 3 de la sección 2.9 para el mismo problema.

EJERCICIOS 12.7

En los ejercicios 1 a 12, obtenga una ecuación de la recta normal a la superficie en el punto indicado.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 17$; $(2, -2, 3)$
- $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$; $(1, -2, 3)$
- $x^2 + y^2 - 3z = 2$; $(-2, -4, 6)$
- $x^2 + y^2 - z^2 = 6$; $(3, -1, 2)$
- $y = e^x \cos z$; $(1, e, 0)$
- $z = e^{3x} \sin 3y$; $(0, \frac{1}{6}\pi, 1)$
- $x^2 = 12y$; $(6, 3, 3)$
- $z = x^{1/2} + y^{1/2}$; $(1, 1, 2)$
- $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$; $(4, 1, 1)$
- $z^2 - xy^2 - yz^2 = 18$; $(0, -2, 3)$

$$11. x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14; (-8, 27, 1)$$

$$12. x^{1/2} + z^{1/2} = 8; (25, 2, 9)$$

En los ejercicios 13 a 20, si las dos superficies se intersectan en una curva, determine ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección en el punto indicado; si las dos superficies son tangentes en el punto dado, demuéstrelo.

$$13. x^2 + y^2 - z = 8, x - y^2 + z^2 = -2; (2, -2, 0)$$

$$14. x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0; (0, 1, 1)$$

$$15. y = x^2, y = 16 - z^2; (4, 16, 0)$$

$$16. x = 2 + \cos \pi v z, y = 1 + \sin \pi v z; (3, 1, 2)$$

$$17. y = e^x \sin 2\pi z + 2, z = y^2 - \ln(x + 1) - 3; (0, 2, 1)$$

$$18. x^2 - 3xy + y^2 = z, 2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0; (1, -2, 11)$$

19. $x^2 + z^2 + 4y = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0;$
(0, -1, 2)

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 8, yz = 4; (0, 2, 2)$

En los ejercicios 21 a 24, utilice el gradiente para obtener una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

21. $9x^3 - y^3 = 1; (1, 2)$

22. $16x^4 + y^4 = 32; (1, 2)$

23. $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0; (1, 2)$

24. $x^4 + 2xy - y^2 = 4; (2, -2)$

25. Pruebe que las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - h)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$ son tangentes en el punto $(a, 0, 0)$.

26. Demuestre que las superficies $4x^2 + y^2 - 9z^2 = 108$ y $xyz = 36$ son tangentes en el punto $(3, 6, 2)$.

27. Se dice que dos superficies son **perpendiculares** en un punto de intersección P_0 si los vectores normales a las superficies en P_0 son ortogonales. Demuestre que en el punto $(1, -1, 2)$ la superficie $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ es perpendicular a cada miembro de la familia de superficies

$$x^2 + (4c - 2)y^2 - cz^2 + 1 = 0$$

28. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el centro de la esfera.

12.8 EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

En el capítulo 3 se dijo que una aplicación importante de la derivada de una función de una sola variable está relacionada con los valores extremos de una función, lo cual condujo a una gran variedad de aplicaciones. En ese capítulo se demostraron teoremas que involucran la primera y segunda derivadas, a partir de los cuales se determinaron los valores máximos y mínimos relativos de la función. Después se incluyeron los valores extremos relativos como posibles extremos absolutos. Al extender la teoría a funciones de dos variables, se verá que el procedimiento es similar al caso de una variable; sin embargo, se presentan ciertas complicaciones.

Este estudio se inicia con la definición de *extremos relativos y absolutos* de funciones de dos variables.

12.8.1 Definición de extremos absolutos de funciones de dos variables

- (i) Se dice que la función f de dos variables tiene un **valor máximo absoluto** en su dominio D del plano xy si existe algún punto (x_0, y_0) en D tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de D . En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor máximo absoluto de f en D .
- (ii) Se dice que la función f de dos variables tiene un **valor mínimo absoluto** en su dominio D del plano xy si existe algún punto (x_0, y_0) en D tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de D . En tal caso, $f(x_0, y_0)$ es el valor mínimo absoluto de f en D .

12.8.2 Definición de extremos relativos de funciones de dos variables

- (i) Se dice que una función f de dos variables tiene un **valor máximo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de B .
- (ii) Se dice que una función f de dos variables tiene un **valor mínimo relativo** en el punto (x_0, y_0) si existe un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) de B .



FIGURA 1

Refiérase a la figura 1, la cual muestra la gráfica de una función f cuyo dominio es el plano xy . La función tiene cuatro extremos relativos, uno de los cuales es un máximo absoluto y otro es un mínimo absoluto. Si el dominio de una función es un disco abierto o el plano xy completo, como en la figura 1, un extremo absoluto debe ser un extremo relativo.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La figura 2 muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Sea B cualquier disco abierto $((0, 0); r)$ para el cual $r < 5$. De la definición 12.8.2(i), f tiene un valor máximo relativo de 5 en el punto donde $x = 0$ y $y = 0$. De la definición 12.8.1(i), 5 es también el valor máximo absoluto de f . ◀

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La figura 3 muestra la gráfica de la función definida por

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

El dominio de g es el plano xy completo. Sea B cualquier disco abierto $((0, 0); r)$. De la definición 12.8.2(ii), g tiene un valor mínimo relativo de 0 en el origen. De la definición 12.8.1(ii), 0 es también el valor mínimo absoluto de g . ◀

El teorema 3.1.3 establece: Si $f(x)$ existe para todos los valores de x del intervalo abierto (a, b) , y si f tiene un extremo relativo en c , donde $a < c < b$, y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$. El teorema siguiente para funciones de dos variables es análogo.



$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

FIGURA 2

12.8.3 Teorema

Si $f(x, y)$ existe en todos los puntos de algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) , entonces si $f'_x(x_0, y_0)$ y $f'_y(x_0, y_0)$ existen,

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Antes de probar este teorema, se presentará un argumento geométrico informal. Sea f una función que satisfice la hipótesis del teorema y suponga que f tiene un valor máximo relativo en (x_0, y_0) . Considere la curva de intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, como se muestra en la figura 4. Esta curva está representada por las ecuaciones

$$y = y_0 \quad \text{y} \quad z = f(x, y)$$

Como f tiene un valor máximo relativo en el punto donde $x = x_0$ y $y = y_0$, la curva tiene una recta tangente horizontal en el plano $y = y_0$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La pendiente de esta recta tangente es $f'_x(x_0, y_0)$; de modo que $f'_x(x_0, y_0) = 0$. De manera semejante, puede considerarse la curva de intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$ y obtenerse $f'_y(x_0, y_0) = 0$. También puede darse una discusión similar si f tiene un valor mínimo relativo en (x_0, y_0) . A continuación se presenta la demostración formal, en la cual se emplea el teorema 3.1.3.



$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

FIGURA 3

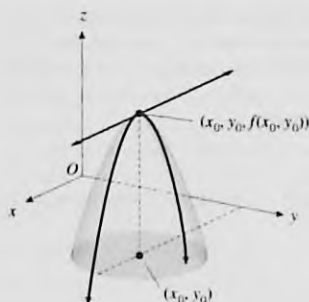


FIGURA 4

Demostración del teorema 12.8.3 Considere las dos funciones g y h de una sola variable definidas por

$$g(x) = f(x, y_0) \quad \text{y} \quad h(y) = f(x_0, y)$$

Entonces,

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Como $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen, $g'(x_0)$ y $h'(y_0)$ existen. Puesto que f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) , g tiene un extremo relativo en x_0 y h tiene un extremo relativo en y_0 . En consecuencia, por el teorema 3.1.3,

$$g'(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad h'(y_0) = 0$$

Por tanto,

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Observe que la condición de que tanto $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ sean cero equivale a la condición de que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es el vector cero. Además, esta condición implica que la gráfica de f tiene un plano tangente horizontal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 51.

Del teorema 12.8.3, una condición necesaria para que una función de dos variables tenga un extremo relativo en un punto es que sus primeras derivadas parciales sean cero en el punto, o bien, que al menos una de las derivadas parciales no exista en el punto. A tal punto se le denomina **punto crítico** de la función.

12.8.4 Definición de punto crítico

Si $f(x, y)$ existe en todos los puntos de algún disco abierto $B((x_0, y_0); r)$, el punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si una de las siguientes condiciones se cumple:

- (i) $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$;
- (ii) $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existen.

Cuando se estudian los extremos relativos de una función, primero se localizan los puntos críticos, si existen. Después se debe aplicar otro criterio para determinar si se tiene un extremo relativo en un punto crítico particular.

► **EJEMPLO 1** Determine los extremos relativos de la función definida por

$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$

Solución Se comienza por determinar los puntos críticos de f . Al diferenciar parcialmente se obtiene

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

Las dos derivadas parciales existen para cualquier punto. Si se consideran $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ iguales a cero y se resuelven las ecuaciones para x y y , resulta $x = 3$ y $y = -1$. Por tanto, el único punto crítico es $(3, -1)$. $f(3, -1) = 11$. Para determinar si se tiene un extremo relativo en $(3, -1)$ se completan los cuadrados en la expresión para $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -(x^2 - 6x + 9) - 2(y^2 + 2y + 1) + 9 + 2 \\ &= -(x - 3)^2 - 2(y + 1)^2 + 11 \end{aligned}$$



FIGURA 5

Así, si $(x, y) \neq (3, -1)$, $f(x, y) < 11$. En consecuencia, de la definición 12.8.2(i), $f(3, -1) = 11$ es un valor máximo relativo. Por la definición 12.8.1(i), este valor también es un valor máximo absoluto.

Vea la figura 5 que muestra la gráfica de f , la cual es un paraboloides que abre hacia abajo con su vértice en $(3, -1, 11)$. La gráfica apoya la respuesta. ◀

► **EJEMPLO 2** Determine los extremos relativos de la función definida por

$$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución Al calcular las derivadas parciales de g se tiene

$$g_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad g_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

El dominio de g es el conjunto de todos los puntos de \mathbb{R}^2 y g_x y g_y existen en todos los puntos diferentes de $(0, 0)$. Además, $g_x(x, y) = 0$ sólo cuando $x = 0$, pero $g_x(x, y) \neq 0$; y $g_y(x, y) = 0$ sólo cuando $y = 0$; pero $g_y(x, y) \neq 0$. Por tanto, el único punto crítico de g es $(0, 0)$. Como $g(0, 0) = 4$ y si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces

$$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} < 4$$

de modo que g tiene un valor máximo relativo de 4 en $(0, 0)$, el cual también es un valor máximo absoluto. La figura 6 muestra la gráfica de g , cuyo punto más alto se encuentra en $(0, 0, 4)$, lo cual apoya la respuesta. ◀

Un punto crítico de una función no necesariamente proporciona un extremo relativo de la función, como se muestra en el siguiente ejemplo ilustrativo.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Sea f la función definida por

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

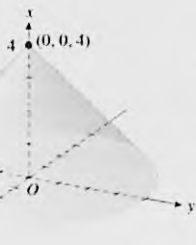
entonces

$$f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = 2y$$

Tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$ son iguales a cero. La gráfica de f que se muestra en la figura 7, tiene la forma de una silla de montar en los puntos cercanos al origen. En los puntos del plano xz , donde $y = 0$ y $x \neq 0$, los valores de la función son negativos, y en los puntos del plano yz , donde $x = 0$ y $y \neq 0$, los valores de la función son positivos. Por tanto, la función f no satisface la definición 12.8.1 cuando $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ◀

Un punto crítico de una función f donde no se tiene un extremo relativo, tal como el punto $(0, 0, 0)$ del ejemplo ilustrativo 3, se denomina **punto silla** de la función f .

El criterio básico para determinar extremos relativos para funciones de dos variables es el siguiente *criterio de la segunda derivada*, el cual proporciona condiciones que garantizan el hecho de que una función tiene un extremo relativo en un punto donde las primeras derivadas parciales son cero.



$$g(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

FIGURA 6



$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

FIGURA 7

12.8.5 Teorema Criterio de la segunda derivada

Sea f una función de dos variables tal que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en un disco abierto $B((a, b); r)$. Suponga además que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(i) f tiene un valor mínimo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tiene un valor máximo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ no es un extremo relativo, pero f tiene un punto silla en $(a, b, f(a, b))$ si

$$D(a, b) < 0$$

(iv) No se tiene ninguna conclusión acerca de los extremos relativos si

$$D(a, b) = 0$$

La demostración del inciso (i) del criterio de la segunda derivada se realiza en el suplemento de esta sección, mientras que las pruebas de los incisos (ii) y (iii) se dejan como ejercicios, consulte los ejercicios suplementarios 1 y 2. El inciso (iv) se incluye de modo que se revisen todos los casos posibles.

Si $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$, entonces la expresión para $D(a, b)$ del enunciado del criterio de la segunda derivada es el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

Este determinante, denominado **hessiano** (o **discriminante**) de la función f , proporciona un método conveniente para recordar la fórmula de $D(a, b)$.

► **EJEMPLO 3** Dada

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

determine los extremos relativos de f si es que existen.

Solución A fin de aplicar el criterio de la segunda derivada, se calculan las primeras y segundas derivadas parciales de f .

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 8x^3 - 2x & f_y(x, y) &= 2y - 2 \\ f_{xx}(x, y) &= 24x^2 - 2 & f_{yy}(x, y) &= 2 & f_{xy}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Al considerar $f_x(x, y) = 0$ se tiene $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$. Si se considera $f_y(x, y) = 0$ se obtiene $y = 1$. Por tanto, f_x y f_y son 0 en los puntos $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(0, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, de modo que son los puntos críticos de f . Los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la segunda derivada en estos puntos se resumen en la tabla 1.

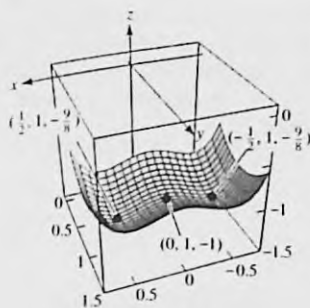


FIGURA 8

Tabla 1

Punto crítico (a, b)	$f_{xx}(a, b)$	$f_{yy}(a, b)$	$f_{xy}(a, b)$	$D(a, b)$	Conclusión
$(-\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tiene un valor mínimo relativo
$(0, 1)$	-2	2	0	-4	f no tiene extremo relativo
$(\frac{1}{2}, 1)$	4	2	0	8	f tiene un valor mínimo relativo

Por el inciso (i) del criterio de la segunda derivada, f tiene en los puntos críticos $(-\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ un valor mínimo relativo. Del inciso (iii) del criterio, f no tiene extremo relativo en el punto crítico $(0, 1)$.

Como $f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$ y $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{9}{8}$, se concluye que f tiene un valor mínimo relativo de $-\frac{9}{8}$ en los dos puntos críticos $(-\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

La figura 8, la cual muestra la gráfica de f con los puntos mínimos en $(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$ y $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{9}{8})$ y el punto silla en $(0, 1, -1)$, apoya los resultados. ◀

► **EJEMPLO 4** Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular, sin tapa que tiene un volumen específico, si se desea emplear la mínima cantidad de material en su elaboración.

Solución La figura 9 muestra la caja, donde la longitud de la base es x unidades, el ancho de la base es y unidades y su profundidad es z unidades. Sean S unidades cuadradas el área de la superficie de la caja. Si V unidades es el volumen de la caja, V es una constante puesto que la caja tiene un volumen específico.

Cada una de las variables x , y y z está en el intervalo $(0, +\infty)$. De las fórmulas para el área de la superficie y el volumen,

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad y \quad V = xyz$$

Al resolver la segunda ecuación para z en términos de x , y y de la constante V , se tiene $z = \frac{V}{xy}$, y al sustituir esto en la primera ecuación resulta

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \quad (1)$$

Al diferenciar parcialmente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= y - \frac{2V}{x^2} & \frac{\partial S}{\partial y} &= x - \frac{2V}{y^2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{4V}{x^3} & \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} &= 1 & \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{4V}{y^3} \end{aligned}$$

Si se considera $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ se tiene

$$x^2y - 2V = 0$$

$$xy^2 - 2V = 0$$

Al resolver estas dos ecuaciones simultáneamente, se obtiene $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$. Para estos valores de x y y ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} & \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right)^2 &= \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \cdot \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1 \\ &= 2 > 0 & &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Por el inciso (i) del criterio de la segunda derivada, S tiene un valor mínimo relativo cuando $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$. Recuerde que x y y están en el intervalo $(0, +\infty)$, y observe en la ecuación (1) que S es muy grande cuando x y y están cerca de cero o cuando son muy grandes. Por tanto, se concluye que el valor mínimo relativo de S es un valor mínimo absoluto de S .

Como $z = V/(xy)$, entonces cuando $x = \sqrt[3]{2V}$ y $y = \sqrt[3]{2V}$,

$$\begin{aligned} z &= \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} \end{aligned}$$

Conclusión: La caja debe tener una base cuadrada y una profundidad de un medio de la longitud de uno de los lados de la base. ◀

Recuerde el teorema del valor extremo para funciones de una variable: Si la función f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo cerrado. Se dijo que un valor extremo de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de la función en uno de los extremos del intervalo. Se tiene una situación análoga para funciones de dos variables en la que se involucra el teorema del valor extremo.

En el enunciado del teorema del valor extremo para funciones de dos variables se emplea el término *región acotada y cerrada*. Una *región R* se dice *acotada* si es una subregión de un disco cerrado. La *frontera* de una región R es el conjunto de todos los puntos P para los cuales todo disco abierto que tiene su centro en P contiene al menos un punto de R y al menos un punto que no pertenece a R . Una *región cerrada* es aquella que contiene a su frontera.

La figura 10 muestra una región acotada y cerrada R , la frontera de R y un punto P de la frontera. El ejemplo ilustrativo siguiente presenta algunas regiones acotadas y cerradas, en las que se identifica la frontera de cada región.

▶ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

- Un disco cerrado es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región es la circunferencia del disco. Consulte la figura 11.
- Los lados de un triángulo junto con la región limitada por él es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región consta de los lados del triángulo. Observe la figura 12.
- Los lados de un rectángulo junto con la región acotada por el rectángulo es una región acotada y cerrada. La frontera de esta región consiste de los lados del rectángulo. Refiérase a la figura 13. ◀

12.8.6 Teorema del valor extremo para funciones de dos variables

Sea R una región acotada y cerrada del plano xy , y sea f una función continua en R . Entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en R .

La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro, por lo que se omite.

Si f es función de dos variables que satisface el teorema del valor extremo, entonces un extremo absoluto de f es un extremo relativo o un valor de la

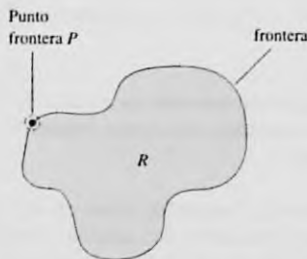


FIGURA 10

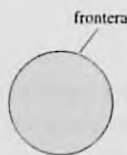


FIGURA 11

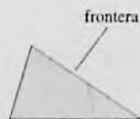


FIGURA 12



FIGURA 13

función en un punto de la frontera de la región R . El valor extremo en tal situación puede determinarse mediante el procedimiento siguiente:

1. Calcule los valores de la función en los puntos críticos de f del interior de la región R .
2. Determine los valores extremos posibles de f de la frontera de la región R .
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

► **EJEMPLO 5** Calcule los extremos absolutos de la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7$$

si el dominio de f es la región triangular cerrada cuyos lados están sobre el eje x , el eje y y la recta $x + y = 5$.

Solución La figura 14 muestra la región triangular cerrada R indicada. La función polinomial f es continua en R , de modo que se puede aplicar el teorema del valor extremo. A fin de determinar los puntos críticos de f se calculan las primeras derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = 2x - 4 \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

Estas derivadas parciales existen en cualquier punto de R^2 . Al considerar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ iguales a 0 se obtiene $x = 2$ y $y = 1$. Por tanto, el único punto crítico de f es $(2, 1)$.

Ahora se considerarán los valores de f en los puntos de la frontera de R . Se examinará cada lado del triángulo por separado.

Sobre el eje x , cuando $y = 0$ y $0 \leq x \leq 5$, se tiene $f(x, 0) = x^2 - 4x + 7$, una función cuadrática de una sola variable. Sea $\alpha(x) = f(x, 0)$, entonces

$$\alpha(x) = x^2 - 4x + 7 \quad 0 \leq x \leq 5$$

La función α tendrá valores extremos cuando $\alpha'(x) = 0$ o en los extremos del intervalo $[0, 5]$. Al diferenciar α , se tiene

$$\alpha'(x) = 2x - 4$$

Si se considera $\alpha'(x) = 0$ se obtiene $x = 2$, de modo que en el eje x se deben tomar en cuenta los valores de la función en $(2, 0)$, $(0, 0)$ y $(5, 0)$.

Sobre el eje y , cuando $x = 0$ y $0 \leq y \leq 5$, se tiene $f(0, y) = y^2 - 2y + 7$. Sea $\beta(y) = f(0, y)$, de modo que

$$\begin{aligned} \beta(y) &= y^2 - 2y + 7 \quad 0 \leq y \leq 5 \\ \beta'(y) &= 2y - 2 \end{aligned}$$

Al considerar $\beta'(y) = 0$, se obtiene $y = 1$. Por tanto, sobre el eje y , deben tenerse en cuenta los valores de la función en $(0, 1)$, $(0, 0)$ y $(0, 5)$.

Sobre la recta $x + y = 5$; $y = 5 - x$; $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$. De modo que

$$\begin{aligned} f(x, 5-x) &= x^2 + (5-x)^2 - 4x - 2(5-x) + 7 \\ &= 2x^2 - 12x + 22 \quad 0 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

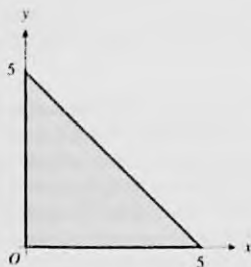


FIGURA 14

Tabla 2

(x, y)	$f(x, y)$
(2, 1)	2
(2, 0)	3
(0, 1)	6
(3, 2)	4
(0, 0)	7
(5, 0)	12
(0, 5)	22

Sea $\gamma(x) = f(x, 5 - x)$, por lo que

$$\gamma(x) = 2x^2 - 12x + 22 \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$\gamma'(x) = 4x - 12$$

Al considerar $\gamma'(x) = 0$, se obtiene $x = 3$. De este modo, sobre la recta $x + y = 5$, se deben tomar en cuenta los valores de la función en $(3, 2)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$.

En resumen, los puntos posibles (x, y) para un extremo absoluto son $(2, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$. Los valores de la función en estos puntos se muestran en la tabla 2. El valor máximo absoluto es $f(0, 5) = 22$ y el valor mínimo absoluto es $f(2, 1) = 2$.

La figura 15 muestra la gráfica de f , la porción de un paraboloides sobre la región triangular del plano xy dada. La gráfica apoya los resultados.

La figura 16 presenta la región triangular R y tres curvas de nivel de f , circunferencias del plano xy con sus centros en $(2, 1)$. Observe que los puntos frontera de la tabla 2 son los vértices del triángulo, el centro de las circunferencias y los puntos sobre los lados del triángulo donde el lado es tangente a la curva de nivel.



FIGURA 15

A lo largo de este libro se ha visto cómo los modelos matemáticos se emplean en muchas aplicaciones. Con frecuencia, estos modelos fueron ecuaciones que contenían a las variables de la situación. Se emplearon varios métodos a fin de obtener dichos modelos, uno de los cuales trató acerca de la *recta de regresión* que proporciona la *recta de mejor ajuste* para un conjunto de puntos. El procedimiento para determinar una recta de regresión requiere la localización de un valor mínimo absoluto de una función de dos variables.

Suponga, por ejemplo, que se desea obtener un modelo matemático para algunos datos dados mediante el conjunto de puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) . En particular, y_i puede representar el número de dólares de la utilidad semanal de un fabricante cuando x_i es el número de unidades vendidas en la semana, o y_i podría representar el total de las ventas anuales de una compañía cuando x_i años han transcurrido desde que inició la compañía. El número de casos nuevos de cierta enfermedad podría representarse por y_i cuando x_i es el número de días desde el brote de una epidemia de la enfermedad. El modelo deseado es una relación que involucra a x y y , y que puede emplearse para hacer predicciones. Dicha relación está dada por una recta que "ajusta" los datos.

Con el propósito de obtener una definición adecuada de la recta de mejor ajuste de los datos, primero se indica qué tan bien se ajusta una recta particular a un conjunto de puntos al medir las distancias verticales desde los puntos a la recta. Por ejemplo, la figura 17 muestra n puntos y la recta $y = mx + b$. El punto (x_i, y_i) es el i -ésimo punto y le corresponde el punto $(x_i, mx_i + b)$ de la recta. La *desviación* (o *error*) entre el i -ésimo punto y la recta está definiéndose por d_i , donde

$$d_i = y_i - (mx_i + b)$$

La suma de los cuadrados de las desviaciones es

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

la cual nunca es negativa y es cero solo si cada d_i es cero, en este caso todos los puntos están sobre la recta. Se considerará como la recta de mejor ajuste aquella para la cual $\sum_{i=1}^n d_i^2$ es un mínimo absoluto. Esta recta se denomina *recta de regresión* de y sobre x , y el proceso para determinarla se llama *método de mínimos cuadrados*.

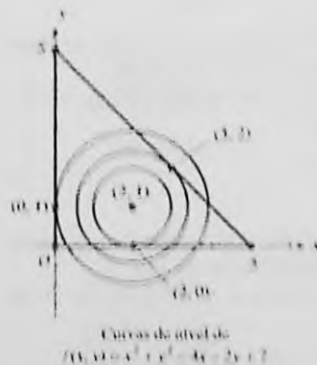


FIGURA 16

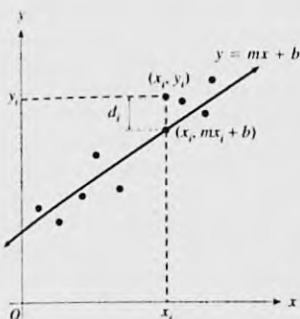


FIGURA 17

A continuación se presentará el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión $y = mx + b$ de un conjunto de n puntos. Como x_i y y_i son constantes, y m y b son variables, entonces $\sum_{i=1}^n d_i^2$ es una función de m y b . Denote esta función por f , de modo que

$$f(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$$

Con el fin de obtener los valores de m y b que hacen de $f(m, b)$ un mínimo absoluto, primero se calculan las derivadas parciales $f_m(m, b)$ y $f_b(m, b)$.

$$\begin{aligned} f_m(m, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial m} [(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - mx_i - b)(-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + mx_i^2 + bx_i) \\ &= 2 \left[-\sum_{i=1}^n x_i y_i + m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_b(m, b) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [(y_i - mx_i - b)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - mx_i - b)(-1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (-y_i + mx_i + b) \\ &= 2 \left(-\sum_{i=1}^n y_i + m \sum_{i=1}^n x_i + nb \right) \end{aligned}$$

Al considerar $f_m(m, b) = 0$ y $f_b(m, b) = 0$ se obtienen dos ecuaciones simultáneas en m y b :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) m + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2)$$

y

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) m + nb = \sum_{i=1}^n y_i$$

Si se resuelve la segunda ecuación para b , se tiene

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (3)$$

Al sustituir este valor de b en (2) se obtiene

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4)$$

En el ejercicio 52 se le pedirá que proporcione los detalles de la obtención de la ecuación (4) a partir de (2) y (3), y en el ejercicio 53 se le pedirá que utilice el criterio de la segunda derivada para demostrar que f tiene un valor mínimo relativo para los valores de m y b determinados por (3) y (4). En este ejercicio verá que existe sólo un extremo relativo para f , que m y b están en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y que $f(m, b)$ es grande cuando el valor absoluto de m o el valor absoluto de b es grande. De este modo, se concluye que el valor mínimo relativo de f es un valor mínimo absoluto.

Observe que en las fórmulas (3) y (4) aparecen cuatro sumas diferentes. Estas fórmulas pueden evaluarse en una computadora o en muchas calculadoras. En el ejemplo siguiente, se muestra una manera conveniente para calcular las sumas cuando se tiene una cantidad pequeña de datos.

EJEMPLO 6 En 1975 se compró un objeto antiguo y raro por \$1 200. Su valor en 1980 fue de \$1 800, en 1985 su precio fue de \$2 500 y en 1990 su valor fue de \$3 100. Si el valor del objeto fuese determinado para el año 2000 de acuerdo con el mismo patrón, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar el valor del objeto para este año.

Solución A fin de obtener la recta de regresión $y = mx + b$, sea x el número de lustros (o periodos de 5 años) desde 1975 y sea y dólares el valor del objeto $5x$ años a partir de 1975. Así, se tienen los puntos de datos mostrados en la tabla 3.

La tabla 4 muestra el cálculo para las cuatro sumas que aparecen en las ecuaciones (3) y (4). De esta tabla,

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 6 \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 8600 \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 14 \quad \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 16100$$

Con estos valores y $n = 4$ se obtiene, de (4) y (3),

$$m = \frac{4(16100) - 6(8600)}{4(14) - 6(6)} \quad b = \frac{1}{4} [8600 - 640(6)]$$

$$= 640 \quad = 1190$$

Por tanto, una ecuación de la recta de regresión es

$$y = 640x + 1190$$

De donde, para el año 2000, $x = 5$; y para este valor de x

$$y = 640(5) + 1190$$

$$= 4390$$

Conclusión: Se estima que el valor del objeto para el año 2000 será de \$4 390.

EJEMPLO 7 En la tabla 5, x días han transcurrido desde el brote de una enfermedad particular, y y es el número de casos nuevos de la enfermedad en el día número x . (a) Determine la recta de regresión para los puntos de datos (x_i, y_i) . (b) Utilice la recta de regresión para estimar el número de nuevos casos de la enfermedad en el sexto día.

Tabla 3

x	0	1	2	3
y	1200	1800	2500	3100

Tabla 4

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	1200	0	0
1	1800	1	1800
2	2500	4	5000
3	3100	9	9300
$\Sigma 6$	8600	14	16100

Tabla 5

x	1	2	3	4	5
y	20	24	30	35	42

Tabla 6

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	20	1	20
2	24	4	48
3	30	9	90
4	35	16	140
5	42	25	210
$\Sigma 15$	151	55	508

Solución

- (a) La recta pedida tiene la ecuación $y = mx + b$. Para determinar m y b , primero se obtienen las sumas de las ecuaciones (3) y (4) a partir de los datos de la tabla 6. De esta tabla,

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 15 \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 151 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55 \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 508$$

Con estos valores y $n = 5$ se obtiene a partir de (4) y (3),

$$\begin{aligned} m &= \frac{5(508) - (15)(151)}{5(55) - (15)(15)} & b &= \frac{1}{5} [151 - 5.5(15)] \\ &= 5.5 & &= 13.7 \end{aligned}$$

Por tanto, la recta de regresión tiene la ecuación

$$y = 5.5x + 13.7$$

- (b) Con $x = 6$ en la ecuación de la recta de regresión,

$$\begin{aligned} y &= 5.5(6) + 13.7 \\ &= 46.7 \end{aligned}$$

Conclusión: En el sexto día de la epidemia, se estima que habrá 47 casos nuevos de la enfermedad. ◀

Muchas calculadoras poseen programas que proporcionan un modelo de regresión lineal mediante un ajuste de mínimos cuadrados. Si su calculadora es capaz de esto, utilícela con el objeto de apoyar los resultados de los ejemplos 6 y 7. Otros programas pueden determinar modelos de regresión cuadráticos, cúbicos, logarítmicos y exponenciales. Refiérase al manual del usuario de su calculadora para conocer los procedimientos a fin de obtener estos modelos.

EJERCICIOS 12.8

En los ejercicios 1 a 6, encuentre los extremos relativos de la función obteniendo primero los puntos críticos y después aplicando la definición 12.8.2. Determine si los extremos relativos son extremos absolutos.

1. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 9$

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16$

4. $f(x, y) = 2 + 2x + 6y - x^2 - y^2$

5. $f(x, y) = 9 - \sqrt{x^2 + y^2} - 2x + 1$

6. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

En los ejercicios 7 a 18, determine los extremos relativos de f y localice los puntos silla, si los tiene.

7. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

8. $f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$

9. $f(x, y) = y^2 - x^2 + 2x - 4y + 3$

10. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6x - 8y + 25$

11. $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$

12. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

13. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$

14. $f(x, y) = y^4 - 4y^3 + 2x^2 + 8xy$

15. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$

16. $f(x, y) = e^x \sin y$

17. $f(x, y) = e^{xy}$

18. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$

En los ejercicios 19 a 24, obtenga los extremos absolutos de la función cuyo dominio es la región acotada y cerrada R del plano xy .

19. La función del ejercicio 3; R es la región triangular que tiene vértices en $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 8)$.

20. La función del ejercicio 4; R es la región triangular cuyos lados son el eje x , el eje y y la recta $x + y = 5$.
21. $f(x, y) = 3x^2 + xy$; R es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$; R es la región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x .
23. $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$; R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.
24. $f(x, y) = \sin x + \sin y$; R es la región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, π) .
25. Determine los tres números positivos cuya suma sea 24 de modo que su producto sea el mayor posible.
26. Obtenga tres números positivos cuyo producto sea 24 de manera que su suma sea lo más pequeña posible.
27. Encuentre el punto del plano $3x + 2y - z = 5$ que esté más cerca al punto $(1, -2, 3)$, y calcule la distancia mínima.
28. Determine los puntos de la superficie $y^2 - xz = 4$ que estén más cerca al origen, y calcule la distancia mínima.
29. Obtenga los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ y el plano $x - 4y - z = 0$ que estén más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.
30. En una fábrica, los trabajadores se han clasificado en dos maneras: A y B . Los trabajadores tipo A ganan \$14 por jornada, mientras que los del tipo B ganan \$13. Para alcanzar cierta producción en una jornada, se ha determinado aumentar los salarios de los trabajadores, si se emplean x trabajadores del tipo A y del tipo B , entonces el número de dólares del costo de la jornada es $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. ¿Cuántos trabajadores de cada tipo deben emplearse a fin de que el costo de la jornada sea un mínimo si se requieren por lo menos tres trabajadores de cada tipo para una jornada?
31. Una inyección de x miligramos de cierto medicamento A y y miligramos del medicamento B produce una respuesta de R unidades, y $R = x^2y^3(c - x - y)$, donde c es una constante positiva. ¿Qué dosis de cada medicamento ocasionarán la respuesta máxima?
32. Suponga que t horas después de la inyección de x miligramos de adrenalina la respuesta es de R unidades, y $R = te^{c-x}x$, donde c es una constante positiva. ¿Qué valores de x y t producirán la respuesta máxima?
33. Calcule el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que pueda inscribirse en el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ si las aristas deben ser paralelas a los ejes coordenados.
34. Se elabora una caja rectangular sin tapa con un costo de material de \$10. Si el material para el fondo de la caja cuesta \$0.15 por pie cuadrado y el material para los lados cuesta \$0.30 por pie cuadrado, determine las dimensiones de la caja de mayor volumen que pueda elaborarse.
35. Se construye una caja rectangular cerrada con un volumen de 16 pie³ empleando tres tipos de materiales. El costo del material para el fondo y la tapa es de \$0.18 por pie cuadrado, el costo del material para el frente y la parte trasera es de \$0.16 por pie cuadrado, y el costo del material para los otros dos lados es de \$0.12 por pie cuadrado. Calcule las dimensiones de la caja de modo que el costo de los materiales sea un mínimo.
36. Suponga que T grados es la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y $T = 100xy^2z$. Obtenga los puntos de la esfera donde la temperatura es la máxima y también los puntos donde es mínima. Además, calcule la temperatura en estos puntos.
37. Suponga que en la producción de cierto artículo se requieren x horas-máquina y y horas-persona, y que el costo de producción está dado por $f(x, y)$, donde
- $$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$$
- Determine los números de horas-máquina y de horas-persona necesarios para producir el artículo al costo mínimo.
38. Una tienda de ropa vende dos tipos de camisa que son similares pero que son elaboradas por diferentes fabricantes. El costo de la tienda para el primer tipo es de \$40 y el costo del segundo tipo es de \$50. Por medio de la experiencia se ha determinado que si el precio de venta del primer tipo es de x dólares y el precio de venta para el segundo tipo es de y dólares, entonces el número de camisas del primer tipo que se venden mensualmente es $3200 - 50x + 25y$, y el de las del segundo tipo es $25x - 25y$. ¿Cuál debe ser el precio de venta de cada tipo de camisa a fin de obtener la máxima utilidad?
39. En 1921, el autor de una pintura abstracta la vendió por \$100. Debido a su importancia histórica su valor se ha incrementado con el paso del tiempo. En 1941 su valor fue de \$4 600, en 1961 se vendió en \$11 000, y en 1981 su valor fue de \$20 000. Suponiendo que el valor de la pintura se establecerá de acuerdo con el mismo patrón hasta el año 2001, utilice el método de mínimos cuadrados para estimar su valor para ese año.
40. Un automóvil modelo 1991 se vendió como un carro usado en 1992 por \$6 800. Su valor fue de \$6 200 en 1993, en 1994 su valor fue de \$5 700, y en 1996 su precio fue de \$4 800. Utilice el método de mínimos cuadrados para estimar el valor del carro en 1995.
41. En el *Cinema Uno* se ha exhibido una película durante cinco semanas, y la asistencia semanal (con aproximación de cientos) para cada semana está dada en la tabla siguiente.

Semana No.	1	2	3	4	5
Asistencia	5000	4500	4100	3900	3500

Suponga que la asistencia semanal continuará reduciéndose de acuerdo con el mismo patrón hasta llegar a 1 500.

(a) Utilice la recta de regresión para los datos de la tabla a fin de determinar la asistencia esperada para la sexta semana.

(b) La película se cambiará al *Cinema Dos*, que es más pequeña, cuando la asistencia semanal esté por debajo de 2 250. ¿Cuántas semanas estará exhibiéndose la película en el *Cinema Uno*?

42. Se analiza la savia de cinco árboles a fin de determinar la cantidad de la hormona vegetal que causa la caída de las hojas. En el caso de los árboles de la tabla siguiente, cuando se

liberan x microgramos (μg) de la hormona vegetal ocurre la caída de y hojas.

	Roble	Arce	Abedul	Pino	Acacia
x	28	57	38	75	82
y	208	350	300	620	719

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Utilice la recta de regresión para estimar el número de hojas caídas de otro tipo de árbol cuando se liberan $100 \mu\text{g}$ de la hormona vegetal.

3. Se examinaron cinco corredores a fin de determinar su absorción máxima de oxígeno, medida que refleja el estado cardiovascular de una persona. Los resultados se presentan en la siguiente tabla, donde x segundos es el mejor tiempo del corredor al correr una milla y y mililitros por minuto por kilogramo de peso es la absorción máxima de oxígeno del corredor.

	Corredor A	Corredor B	Corredor C	Corredor D	Corredor E
x	300.5	350.6	407.3	326.2	512.8
y	418.5	375.6	350.2	400.2	325.8

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Emplee la recta de regresión para estimar la absorción máxima de oxígeno de un corredor si su mejor tiempo al correr una milla es de 340.4 s.

44. Se utiliza la calificación del examen de admisión de un estudiante con el objeto de predecir su promedio al final del primer año de estudios. La siguiente tabla proporciona los datos para seis estudiantes, donde x es el resultado del examen y y es el promedio de calificaciones.

	Estudiante A	Estudiante B	Estudiante C	Estudiante D	Estudiante E	Estudiante F
x	92	81	73	98	79	85
y	3.4	2.7	3.1	3.8	2.2	3.0

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Emplee la recta de regresión a fin de estimar el promedio de calificaciones de un estudiante al final del primer año de estudios si el estudiante obtuvo un resultado de 88 en el examen de admisión.

45. La siguiente tabla presenta la producción mensual de una fábrica y la utilidad para los primeros cinco meses del año, donde x miles de unidades se produjeron y y miles de dólares se obtuvieron de utilidad.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
x	65	72	82	90	100
y	30	35	42	48	60

Si la producción para junio es de $105\,000$ unidades, utilice la recta de regresión para los datos de la tabla a fin de estimar la utilidad de ese mes.

46. En la tabla siguiente, para cinco niños sanos, w kilogramos es su peso y y milímetros de mercurio expresa su presión arterial media (el promedio de la presión sanguínea de la diástole y de la sístole).

	Niño A	Niño B	Niño C	Niño D	Niño E
w	20	30	35	40	50
y	70	85	90	96	100

(a) Una ecuación que "ajusta" los datos de esta tabla es $y = m(\ln w) + b$. Para determinar esta ecuación considere $x = \ln w$ y utilice el método de mínimos cuadrados para los puntos (x_i, y_i) . (b) Use el resultado del inciso (a) a fin de estimar la presión arterial media de un niño sano cuyo peso es de 45 kg.

47. Un decorador, quien es un monopolista, hace dos tipos de marcos para pinturas. Por medio de la experiencia, el decorador ha determinado que si elabora x marcos del primer tipo y y marcos del segundo tipo y los pone a la venta en una sala de exhibición, pueden venderse por $(100 - 2x)$ dólares y $(120 - 3y)$ dólares cada uno, respectivamente. El costo total de fabricación de estos marcos es $(12x + 12y + 4xy)$ dólares. ¿Cuántos marcos de cada tipo debe producir para obtener la máxima utilidad, y cuál es esa utilidad?

48. Demuestre que la caja rectangular de mayor volumen que puede colocarse dentro de una esfera tiene la forma de un cubo.

49. Se elabora una caja sin tapa con una cantidad de material dada. Determine las dimensiones relativas de la caja que contenga el mayor volumen posible.

50. Un monopolista produce engrapadoras y grapas cuyas ecuaciones de demanda son $x = 11 - 2p - 2q$ y $y = 19 - 2p - 3q$, donde la demanda de engrapadoras es $1000x$ si el precio unitario es p dólares, y la demanda de grapas es de $1000y$ cajas si el precio unitario por caja es q dólares. El costo de producción de cada engrapadora es de $\$2$, y el de cada caja de grapas es de $\$1$. Demuestre que para obtener la máxima utilidad total, las engrapadoras deben ser gratuitas y las grapas deben ser costosas.

51. Si f es una función diferenciable para la cual $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, demuestre que la gráfica de f tiene un plano tangente horizontal en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

52. Obtenga la ecuación (4) al sustituir de (3) en (2).

53. Si $f(m, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$, utilice el criterio de la segunda derivada para demostrar que los valores de m y b en (3) y (4) proporcionan un valor mínimo relativo de f . Sugerencia: primero demuestre que $f_{mm}(m, b) > 0$.

Para probar que $D(m, b) > 0$, debe demostrar que $\sum_{i=1}^n x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. Para demostrar esto, sea $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ y aplique las propiedades de la notación sigma a la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 > 0.$$

12.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En la solución del ejemplo 4 de la sección 12.8 se minimizó la función cuyos valores de función son $xy + 2xz + 2yz$, sujeta a la condición de que x , y y z satisficieran la ecuación $xyz = V$. Compare esto con el ejemplo 3 de la sección 12.8, en el que se determinó el extremo relativo de f para el cual $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$. Estos son esencialmente dos tipos diferentes de problemas debido a que en el ejemplo 4 se tiene una condición adicional, denominada **restricción** (o **condición lateral**). Estos problemas se denominan **problemas con extremos restringidos**, mientras que el problema del ejemplo 3 se denomina **problema con extremos libres**.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** En el ejemplo ilustrativo 1 de la sección 12.8, se demostró que la función definida por

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad (1)$$

tiene un valor máximo relativo de 5 cuando $x = 0$ y $y = 0$. El número 5 es un máximo libre de f .

Suponga que, además de satisfacer la ecuación (1), se impone la condición de que x y y deben satisfacer la ecuación

$$x + y = 2 \quad (2)$$

Ahora se trata de obtener un máximo restringido. El punto que corresponde al máximo restringido estará en la semiesfera definida por la ecuación (1) y en el plano definido por la ecuación (2); esto es, estará sobre la curva de intersección de la semiesfera y el plano. Refiérase a la figura 1. Se puede determinar que el valor máximo restringido es $\sqrt{23}$ cuando $x = 1$ y $y = 1$, esto por medio de las técnicas estudiadas en el capítulo 2: sustituya el valor de y en términos de x de (2) en (1), y obtenga el valor máximo relativo de la función de una variable que resulte. ◀

Debido a que no siempre es posible resolver la restricción para una de las variables en términos de las otras, como se bosquejó en el ejemplo ilustrativo 1, se puede seguir otro enfoque para determinar los puntos críticos a fin de resolver un problema de extremos restringidos. El procedimiento empleado para tal fin se denomina **método de multiplicadores de Lagrange**, en honor a su descubridor Joseph L. Lagrange, el matemático francés que se ha mencionado varias veces en este libro. El método está basado en el teorema siguiente.

12.9.1 Teorema

Suponga que f y g son funciones de dos variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si f tiene un extremo relativo en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sujeto a la condición $g(x, y) = 0$, y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe una constante λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Demostración Si $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, entonces se cumple (3) si $\lambda = 0$. Ahora se probará (3) suponiendo que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. De las condiciones



FIGURA 1

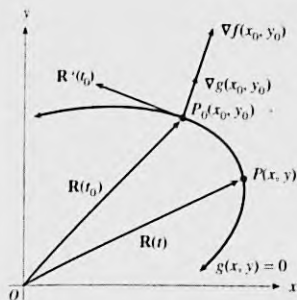


FIGURA 2

dadas, el teorema de la función implícita, el cual se demuestra en Cálculo avanzado, permite representar la curva C , cuya ecuación es $g(x, y) = 0$, mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = \alpha(t)\mathbf{i} + \beta(t)\mathbf{j}$$

para t en algún intervalo para el cual $\mathbf{R}'(t) \neq \mathbf{0}$. Refiérase a la figura 2. Sea t_0 el valor de t correspondiente al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ donde f tiene un extremo relativo. Conforme t varía a lo largo de C , se obtienen diferentes valores de la función f , de los cuales los puntos correspondientes $(x, y, f(x, y))$ se hallan sobre la superficie definida por f y están sujetos a la restricción $g(x, y) = 0$.

Sea ϕ la función de la variable t definida por

$$\phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t))$$

Como f tiene un extremo relativo en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, entonces ϕ tiene un extremo relativo en t_0 . Por tanto, $\phi'(t_0) = 0$. Ahora se calculará $\phi'(t)$ mediante la regla de la cadena:

$$\phi'(t) = f_x(x, y)\alpha'(t) + f_y(x, y)\beta'(t)$$

$$\phi'(t_0) = f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0)$$

Debido a que $\phi'(t_0) = 0$, se tiene de la ecuación anterior

$$f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{R}'(t_0) = 0$$

Puesto que $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\mathbf{R}'(t_0)$ son distintos del vector cero, se puede concluir a partir de esta ecuación que $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{R}'(t_0)$. Sin embargo, del teorema 12.7.6, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{R}'(t_0)$. La figura 2 ilustra estos resultados. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son ortogonales al mismo vector, entonces ellos son paralelos, de modo que se cumple la ecuación (3). ■

Ahora se mostrará cómo se aplica el teorema 12.9.1 para determinar los extremos relativos de una función f de las variables x y y sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

Se introduce una nueva variable, denominada **multiplicador de Lagrange**, y se forma la función auxiliar F de las tres variables x , y y λ para la cual

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

De este modo, el problema se transforma en un problema en el que se deben determinar los puntos críticos de F en los que las tres primeras derivadas parciales de F son cero:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad (4)$$

Observe que las dos primeras ecuaciones de (4) equivalen a

$$f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0$$

y estas dos ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = \mathbf{0}$$

que es la ecuación (3) del teorema 12.9.1. Además, la tercera ecuación de (4) es $g(x, y) = 0$, la cual es la restricción.

El siguiente procedimiento resume la discusión anterior.

A fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos relativos de una función f de las dos variables x y y sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$:

1. Defina la función auxiliar F de las tres variables x , y y λ para la cual

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Considere el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las tres primeras derivadas parciales de F .

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

3. Resuelva el sistema de ecuaciones del paso 2 para determinar los puntos críticos de F .
4. Entre las primeras dos coordenadas de los puntos críticos de F , obtenidos en el paso 3, se encuentran los valores de x y y que proporcionan los extremos relativos deseados.

Observe que los extremos relativos de f sujeta a la restricción pueden ocurrir en un punto donde $g_x(x, y)$ y $g_y(x, y)$ sean cero. Estos puntos tal vez no puedan obtenerse mediante el método de multiplicadores de Lagrange, por lo que deben examinarse por separado.

► EJEMPLO 1 Utilice el método de multiplicadores de Lagrange a fin de determinar los extremos de la función f para la cual

$$f(x, y) = 3x + 4y - 3$$

si el punto (x, y) está sobre la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 25$.

Solución Se escribe la ecuación de la circunferencia en la forma

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$$

Con el propósito de obtener los extremos relativos de f sujeta a esta restricción, se define la función F como sigue:

$$F(x, y, \lambda) = 3x + 4y - 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 24)$$

Al calcular las derivadas parciales F_x , F_y y F_λ , e igualar a cero los valores resultantes se tiene

$$F_x: 3 + 2\lambda(x - 1) = 0 \quad (5)$$

$$F_y: 4 + 2\lambda y = 0 \quad (6)$$

$$F_\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \quad (7)$$

Observe en las ecuaciones (5) y (6) que $x \neq 1$ y $y \neq 0$. Al resolver estas ecuaciones para λ se obtiene

$$\lambda = -\frac{3}{2(x-1)} \quad \text{y} \quad \lambda = -\frac{2}{y} \quad (8)$$

Si se igualan estos dos valores de λ resulta

$$3y = 4(x - 1) \quad (9)$$

$$y = \frac{4}{3}(x - 1)$$

Este valor de y se sustituye en la ecuación (7) y se resuelve para x :

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{16}{9}(x^2 - 2x + 1) - 2x - 24 &= 0 \\9x^2 + 16x^2 - 32x + 16 - 18x - 216 &= 0 \\25x^2 - 50x - 200 &= 0 \\x^2 - 2x - 8 &= 0 \\(x + 2)(x - 4) &= 0 \\x = -2 \quad x = 4\end{aligned}$$

De las ecuaciones (9) y (8): cuando $x = -2$, $y = -4$ y $\lambda = \frac{1}{3}$; y cuando $x = 4$, $y = 4$ y $\lambda = -\frac{1}{3}$. Por tanto, los puntos $(-2, -4, \frac{1}{3})$ y $(4, 4, -\frac{1}{3})$ son los puntos críticos de F . Así, $(-2, -4)$ y $(4, 4)$ son los únicos puntos posibles para los cuales f tiene un extremo relativo. Como

$$\begin{aligned}f(-2, -4) &= 3(-2) + 4(-4) & \text{y} & \quad f(4, 4) = (3)(4) + 4(4) - 3 \\ &= -25 & & \quad = 25\end{aligned}$$

el valor mínimo relativo de f es -25 y su valor máximo relativo es 25 . ◀

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La función f del ejemplo 1 es continua en el disco cerrado definido por

$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 25$$

Por tanto, por el teorema del valor extremo f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el disco. Como

$$f_x(x, y) = 3 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4$$

y estos valores nunca son cero, entonces f no tiene extremos relativos dentro de la circunferencia. De modo que los extremos relativos deben ocurrir sobre la circunferencia. En consecuencia, del resultado del ejemplo 1, se puede concluir que 25 es un valor máximo absoluto y que -25 es un valor mínimo absoluto en el disco cerrado.

Refiérase a la figura 3. Las rectas

$$\begin{aligned}3x + 4y - 3 &= 25 & \Leftrightarrow & \quad 3x + 4y - 28 = 0 \\3x + 4y - 3 &= -25 & \Leftrightarrow & \quad 3x + 4y + 22 = 0\end{aligned}$$

son curvas de nivel de f tangentes a la circunferencia de restricción en los puntos $(4, 4)$ y $(-2, -4)$, respectivamente. ◀

El método de multiplicadores de Lagrange puede extenderse a funciones de tres variables. El teorema siguiente es similar al teorema 12.9.1.

12.9.2 Teorema

Suponga que f y g son funciones de tres variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si f tiene un extremo relativo donde $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe una constante λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{0} \quad (10)$$

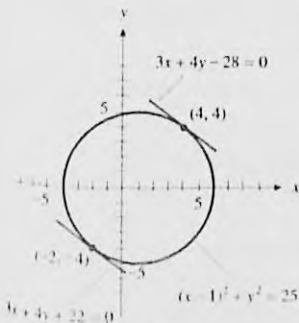


FIGURA 3

En la demostración de este teorema, semejante a la del teorema 12.9.1, es necesario probar que cuando $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ son distintos del vector cero, los dos son ortogonales a la superficie $g(x, y, z) = 0$, lo cual implica que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ son paralelos. De este hecho resulta la ecuación (10).

Al igual que del teorema 12.9.1 se obtuvo el procedimiento con el fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para funciones de dos variables, el teorema 12.9.2 proporciona el siguiente procedimiento para funciones de tres variables.

A fin de aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos relativos de una función f de las tres variables x , y y z sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$:

1. Defina la función auxiliar F de las cuatro variables x , y , z y λ para la cual

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

2. Considere el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las cuatro primeras derivadas parciales de F .

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

3. Resuelva el sistema de ecuaciones del paso 2 para determinar los puntos críticos de F .
4. Entre las primeras tres coordenadas de los puntos críticos de F , obtenidos en el paso 3, se encuentran los valores de x , y y z que proporcionan los extremos relativos deseados.

► **EJEMPLO 2** Resuelva el ejemplo 4 de la sección 12.8 mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

Solución Se definen las variables x , y y z , y la constante V como en la solución del ejemplo 12.8. Sea

$$\begin{aligned} S &= f(x, y, z) & y & \quad g(x, y, z) = xyz - V \\ &= xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Se desea minimizar la función f sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 0$$

Ahora se considera la función F para la cual

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ &= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V) \end{aligned}$$

Con el propósito de obtener los puntos críticos de F se calculan las cuatro primeras derivadas parciales F_x , F_y , F_z y F_λ y se igualan a cero los resultados:

$$F_x: \quad y + 2z + \lambda yz = 0 \quad (11)$$

$$F_y: \quad x + 2z + \lambda xz = 0 \quad (12)$$

$$F_z: \quad 2x + 2y + \lambda xy = 0 \quad (13)$$

$$F_\lambda: \quad xyz - V = 0 \quad (14)$$

Si se restan los miembros de (12) de los correspondientes de (11) resulta

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

de donde se obtiene

$$y = x \quad (15)$$

y como $z \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{1}{z}$$

Al sustituir $\lambda = -1/z$ en (12) resulta $x + 2z - x = 0$, lo que da $z = 0$, lo cual es imposible debido a que z se encuentra en el intervalo $(0, +\infty)$. Si se sustituye de (15) en (13) resulta

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0$$

$$x(4 + \lambda x) = 0$$

$$\lambda = -\frac{4}{x} \quad \text{debido a que } x \neq 0$$

Si en (12) se sustituye λ por $-4/x$, se obtiene

$$x + 2z - \frac{4}{x}(xz) = 0$$

$$x + 2z - 4z = 0$$

$$z = \frac{x}{2} \quad (16)$$

Al reemplazar de (15) y (16) en (14) se obtiene $\frac{1}{2}x^3 - V = 0$, de donde resulta $x = \sqrt[3]{2V}$. Con este valor en (15) y (16), $y = \sqrt[3]{2V}$ y $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Por tanto, el punto $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}, \lambda)$ es un punto crítico de F y, como se mostró en la sección 12.8, f tiene un valor mínimo donde $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. ◀

El ejemplo que sigue trata una situación sobre economía en la que se emplea la **función utilidad**, la cual mide la satisfacción a partir de las cantidades de ciertos artículos. Se llama **índice de utilidad** a cualquier valor de una función utilidad, el cual describe numéricamente una preferencia individual por los artículos.

▶ **EJEMPLO 3** Suponga que U es una función utilidad para la cual

$$U(x, y, z) = xyz$$

donde x , y y z representan el número de unidades de los artículos A , B y C , respectivamente, los cuales son consumidos semanalmente por una persona particular. Además suponga que los precios unitarios de A , B y C son \$2, \$3, y \$4, respectivamente, y que el gasto total semanal para estos artículos se ha presupuestado en \$90. ¿Cuántas unidades de cada artículo deben comprarse semanalmente para maximizar el índice de utilidad de la persona?

Solución Se desea determinar el valor de x , y y z , cada uno en el intervalo $[0, +\infty)$, que maximice $U(x, y, z)$ sujeta a la restricción de presupuesto $2x + 3y + 4z = 90$. Sean

$$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 90$$

y

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(2x + 3y + 4z - 90)$$

Al calcular las primeras derivadas parciales e igualar a cero los resultados, se obtiene

$$F_x: \quad yz + 2\lambda = 0 \quad (17)$$

$$F_y: \quad xz + 3\lambda = 0 \quad (18)$$

$$F_z: \quad xy + 4\lambda = 0 \quad (19)$$

$$F_\lambda: \quad 2x + 3y + 4z - 90 = 0 \quad (20)$$

De (17) y (18), y después de (17) y (19)

$$y = \frac{2}{3}x \quad y \quad z = \frac{1}{2}x \quad (21)$$

Si se sustituye de estas ecuaciones en (20) se obtiene

$$2x + 3\left(\frac{2}{3}x\right) + 4\left(\frac{1}{2}x\right) - 90 = 0$$

$$x = 15$$

Con este valor de x en la ecuación (21), $y = 10$ y $z = 7.5$. Por tanto, se calcula

$$\begin{aligned} U &= (15, 10, 7.5) = (15)(10)(7.5) \\ &= 1125 \end{aligned}$$

Como x , y y z están en el intervalo $[0, +\infty)$, es claro que este valor no puede ser un mínimo porque existen muchos valores de U sujeta a la restricción dada que son menores que 1125. Por tanto, este valor maximiza a U sujeta a la restricción dada.

Conclusión: Para maximizar el índice de utilidad del consumidor, éste debe comprar 15, 10 y 7.5 unidades de los artículos A , B y C , respectivamente, por semana. \blacktriangleleft

▶ EJEMPLO 4 Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia más corta del origen al plano $Ax + By + Cz = D$.

Solución Sean w unidades la distancia del origen al punto (x, y, z) del plano. Entonces

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Debido a que w será un mínimo cuando w^2 sea un mínimo, se define la función f para la cual

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Se desea determinar el valor mínimo de f sujeta a la restricción

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

Con la suposición de que existe tal valor mínimo, éste ocurrirá en un punto crítico de la función F tal que

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz - D)$$

A fin de obtener los puntos críticos de F se calculan las primeras derivadas parciales de F y se igualan a cero.

$$\begin{aligned} F_x: \quad 2x + \lambda A &= 0 \\ F_y: \quad 2y + \lambda B &= 0 \\ F_z: \quad 2z + \lambda C &= 0 \\ F_\lambda: \quad Ax + By + Cz - D &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

A partir de las primeras tres ecuaciones se obtiene

$$x = -\frac{1}{2}\lambda A \quad y = -\frac{1}{2}\lambda B \quad z = -\frac{1}{2}\lambda C \quad (23)$$

Si se sustituyen estos valores de x, y y z en (22) resulta

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\lambda(A^2 + B^2 + C^2) &= D \\ -\frac{1}{2}\lambda &= -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned}$$

En las ecuaciones (23) se sustituye $-\frac{1}{2}\lambda$ por su valor y se obtiene

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2} \quad (24)$$

El punto que tiene estas coordenadas es el único punto crítico de F . Por tanto, la distancia mínima del origen al plano es la distancia del origen al punto (x_0, y_0, z_0) donde x_0, y_0 y z_0 son los valores de x, y y z de la ecuación (24). En consecuencia, la distancia mínima es

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} &= \sqrt{\frac{A^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{B^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{C^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}} \\ &= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

El método de multiplicadores de Lagrange puede extenderse en el caso en que se impongan varias restricciones. En particular, si se desea determinar los puntos críticos de la función que tiene valores $f(x, y, z)$ sujeta a las dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, se determinan los puntos críticos de la función F de las cinco variables x, y, z, λ , y μ para la cual

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

El ejemplo siguiente ilustra el método.

► **EJEMPLO 5** Obtenga los extremos relativos de la función f si

$$f(x, y, z) = xz + yz$$

y si el punto (x, y, z) está en la intersección de las superficies $x^2 + z^2 = 2$ y $yz = 2$.

Solución Se define la función F para la cual

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2)$$

Al calcular las cinco primeras derivadas parciales de F e igualando los resultados a cero se tiene

$$F_x: z + 2\lambda x = 0 \quad (25)$$

$$F_y: z + \mu z = 0 \quad (26)$$

$$F_z: x + y + 2\lambda z + \mu y = 0 \quad (27)$$

$$F_\lambda: x^2 + z^2 - 2 = 0 \quad (28)$$

$$F_\mu: yz - 2 = 0 \quad (29)$$

De (26) se obtiene $\mu = -1$ y $z = 0$. Se rechaza $z = 0$ debido a que esto contradice (29). De (25) se obtiene, si $x \neq 0$,

$$\lambda = -\frac{z}{2x}$$

Al sustituir este valor de λ y $\mu = -1$ en (27) resulta

$$x + y - \frac{z^2}{x} - y = 0$$

$$x^2 = z^2 \quad (30)$$

Si de (30) se reemplaza en (28) se obtiene $2x^2 - 2 = 0$, o $x^2 = 1$. Esto proporciona dos valores para x , a saber, 1 y -1; y para cada uno de estos valores de x se obtiene, de (30), los dos valores 1 y -1 para z . Al obtener los valores correspondientes para y , a partir de (29), se tienen cuatro conjuntos de soluciones para las cinco ecuaciones (25)–(29). Estas soluciones son

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = 1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = -1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = -1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

Los conjuntos de soluciones primero y cuarto proporcionan $f(x, y, z) = 3$, y los conjuntos de soluciones segundo y tercero dan $f(x, y, z) = 1$. En consecuencia, f tiene un valor máximo relativo de 3 y un valor mínimo relativo de 1. \blacktriangleleft

EJERCICIOS 12.9

En los ejercicios 1 a 4, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los puntos críticos de la función sujeta a la restricción.

1. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ con la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

2. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ con la restricción $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$.

4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $y^2 - x^2 = 1$.

En los ejercicios 5 a 8, utilice el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos absolutos de f sujeta a la restricción. También determine los puntos en los que ocurren los extremos.

5. $f(x, y) = x^2 + y$ con la restricción $x^2 + y^2 = 9$.

6. $f(x, y) = x^2 y$ con la restricción $x^2 + 8y^2 = 24$.

7. $f(x, y, z) = xyz$ con la restricción $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.

8. $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En los ejercicios 9 a 12, calcule los valores máximo y mínimo absolutos de f en la región indicada. Utilice las respuestas de los ejercicios 5 a 8 para los extremos en la frontera.

9. La función del ejercicio 5; $x^2 + y^2 \leq 9$.

10. La función del ejercicio 6; $x^2 + 8y^2 \leq 24$.

11. La función del ejercicio 7; $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 4$.

12. La función del ejercicio 8; $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

En los ejercicios 13 y 14, calcule el valor mínimo absoluto de f sujeta a la restricción.

13. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $xyz = 1$.

14. $f(x, y, z) = xyz$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En los ejercicios 15 y 16, obtenga el valor máximo absoluto de f sujeta a la restricción.

15. $f(x, y, z) = x + y + z$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

16. $f(x, y, z) = xyz$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$ con la restricción $2xy + 3xz + yz = 72$.

17. Obtenga un valor mínimo relativo de la función f para la cual $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ con la restricción (a) $xyz = 1$; (b) $xy = 1$; (c) $x = 1$.

18. Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar la distancia más corta del punto $(1, 3, 0)$ al plano $4x + 2y - z = 5$.

19. Emplee multiplicadores de Lagrange a fin de obtener la distancia más corta del punto $(1, -1, -1)$ al plano $x + 4y + 3z = 2$.

20. Calcule las distancias menor y mayor desde el origen a un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

21. Calcule las distancias menor y mayor desde el origen a un punto del elipsoide $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

22. Si $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, utilice multiplicadores de Lagrange para determinar el punto del plano $x + y + z = 5$ en el cual $f(x, y, z)$ es mínimo.

23. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las dos restricciones $x + 2y + 3z = 6$ y $x - y - z = -1$.

24. Use multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con las dos restricciones $x + y + 2z = 1$ y $3x - 2y + z = -4$.

25. Utilice multiplicadores de Lagrange para calcular el valor máximo relativo de f si $f(x, y, z) = xyz$ con las dos restricciones $x + y + z = 4$ y $x - y - z = 3$.

26. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular el valor mínimo absoluto de f si $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ con las dos restricciones $x + y + z = 1$ y $x + y - z = 0$.

En los ejercicios 27 a 36, utilice multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado de la sección 12.8.

27. Ejercicio 25

28. Ejercicio 26

29. Ejercicio 27

30. Ejercicio 28

31. Ejercicio 29

32. Ejercicio 34

33. Ejercicio 35

34. Ejercicio 36

35. Ejercicio 49

36. Ejercicio 48

37. Resuelva el ejemplo 3 si $U(x, y, z) = e^{x^2+z^2}$.

38. Resuelva el ejemplo 3 si $U(x, y, z) = x^2y^3z$.

39. Si $T(x, y)$ grados es la temperatura en cualquier punto (x, y) del disco circular limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y

$$T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$$

determine los puntos más calientes y los más fríos del disco y la temperatura en esos puntos.

40. En el ejercicio 39 suponga que la región es la mitad superior del disco circular, por lo que la región está definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ y $y \geq 0$. Determine los puntos más calientes y los más fríos de la región si

$$T(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

y la temperatura en esos puntos.

41. En el ejemplo 3, suponga que la función utilidad involucra cinco artículos A, B, C, D y E . Además, suponga que x unidades de A , y unidades de B , z unidades de C , s unidades de D y t unidades de E se consumen semanalmente, y que los precios de A, B, C, D y E son, respectivamente, \$2, \$3, \$4, \$1 y \$5. Si

$$U(x, y, z, s, t) = xyzst$$

y el gasto semanal para los artículos es de \$150, ¿cuántas unidades de cada artículo deben comprarse por semana para maximizar el índice de utilidad del consumidor?

42. Una compañía tiene tres fábricas y todas elaboran el mismo producto. Si la fábrica A produce x unidades, la fábrica B produce y unidades y la fábrica C produce z unidades, entonces sus respectivos costos de producción son $(3x^2 + 200)$ dólares, $(y^2 + 400)$ dólares y $(2z^2 + 300)$ dólares. Si se va a surtir un pedido de 1100 unidades, emplee multiplicadores de Lagrange para determinar cómo debe distribuirse la producción entre las tres fábricas a fin de minimizar el costo total de producción.

43. (a) Demuestre que si $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, entonces el valor máximo de f sujeta a la restricción

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

es $(\frac{1}{3}R^2)^3$. (b) Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$(x^3y^2z^2)^{1/3} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

para todos los valores de x, y y z .

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 12

► SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 12

- Defina *función de dos variables* e incluya en su definición el significado de *dominio* y *contradominio*.
- Efectúe la sugerencia 1 para *función de tres variables*.
- Defina la *función compuesta* $f \circ g$, donde f es una función de una sola variable y g es una función de dos variables. Establezca cómo está relacionado el dominio de $f \circ g$ con los dominios de f y g .
- Defina la *gráfica* de una función de dos variables.
- ¿Qué es una *curva de nivel* de una función de dos variables? Invente un ejemplo.
- ¿Qué es una *superficie de nivel* de una función de tres variables? Invente un ejemplo.
- Escriba una fórmula para determinar la *distancia entre dos puntos* de R , de R^2 y de R^3 .
- Defina: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$
- Enuncie un teorema que pueda emplearse para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe. Invente un ejemplo que ilustre la aplicación del teorema.
- Enuncie la definición de *continuidad* de una función de dos variables.
- Invente un ejemplo de una función de dos variables que tenga una *discontinuidad removible* en el origen.
- Invente un ejemplo de una función de dos variables que tenga una *discontinuidad esencial* en el origen.
- Si f es una función de las dos variables x y y , defina:
 - la *derivada parcial* de f con respecto a x , y
 - la *derivada parcial* de f con respecto a y .
- Dé la interpretación geométrica de las derivadas parciales de la sugerencia 13.
- Interprete las derivadas parciales de la sugerencia 13 como tasas de variación.
- ¿Cómo se calculan las derivadas parciales de la sugerencia 13 sin emplear la definición?
- Invente un ejemplo de una función polinomial de dos variables y calcule las dos derivadas parciales.
- Efectúe la sugerencia 17 para una función que no sea polinomial.
- Calcule las cuatro *derivadas parciales de segundo orden* para la función de (a) la sugerencia 17, y (b) la sugerencia 18.
- Enuncie el teorema que garantiza que las dos derivadas parciales mixtas de una función de dos variables son iguales.
- Defina *función diferenciable* de dos variables.
- Enuncie un teorema que garantice la diferenciabilidad de una función de dos variables.
- Defina la *diferencial total* de una función de dos variables. Invente un ejemplo.
- ¿Cómo se aplica la diferencial total para aproximar un valor de función? Invente un ejemplo.
- Enuncie la *regla de la cadena* que proporciona las fórmulas de la derivada parcial de u con respecto a r y la derivada parcial de u con respecto a s si $u = f(x, y)$ donde $x = F(r, s)$ y $y = G(r, s)$.
- Invente un ejemplo en el que se apliquen las fórmulas de la sugerencia 25 donde f, F y G sean funciones polinomiales.
- Invente un ejemplo en el que se apliquen las fórmulas de la sugerencia 25 donde f sea una función polinomial, F sea una función trigonométrica y G sea una función exponencial.
- Establezca una fórmula que proporcione la derivada de una función de una sola variable definida *implícitamente*. Invente un ejemplo.
- Establezca las fórmulas que proporcionan las derivadas parciales de una función de dos variables definida implícitamente. Invente un ejemplo.
- Defina la *derivada direccional* de una función de dos variables en la dirección de un vector unitario dado. Establezca una fórmula para calcular la derivada direccional de manera rápida en la que se emplee la definición. Invente un ejemplo.
- Efectúe la sugerencia 30 para una función de tres variables.
- Defina el *gradiente* de una función de dos variables. ¿Cómo se aplica el gradiente para calcular una derivada direccional? Invente un ejemplo.
- Efectúe la sugerencia 32 para una función de tres variables.
- ¿Cómo se aplica el gradiente para determinar la dirección del valor máximo de la derivada direccional en un punto? Invente un ejemplo.
- ¿Cómo se aplica el gradiente para obtener el *vector normal* y el *plano tangente* a una superficie en un punto particular? Invente un ejemplo.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica el gradiente para obtener una ecuación de la *recta tangente* en un punto particular de una curva del plano xy y definida por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$.
- ¿Qué es un *punto crítico* de una función de dos variables? Invente un ejemplo de una función que tenga un punto crítico donde (a) ambas derivadas parciales sean cero, y (b) donde al menos una de las derivadas parciales no exista.
- ¿Cómo se utilizan los puntos críticos para determinar los *extremos relativos* de una función de dos variables? Invente un ejemplo.

39. Invente un ejemplo de una función que tenga un punto crítico donde la función no tiene extremo relativo.
40. Enuncie el *criterio de la segunda derivada* para determinar los extremos relativos de una función de dos variables.
41. Invente un ejemplo que muestre la aplicación del criterio de la segunda derivada.
42. Enuncie el *teorema del valor extremo* para funciones de dos variables.
43. Describa el procedimiento empleado para determinar los *extremos absolutos* de una función de dos variables que satisface el teorema del valor extremo. Invente un ejemplo.
44. ¿Cómo se emplea el *método de mínimos cuadrados* para obtener un modelo matemático que mejor aproxime a un conjunto de datos? Invente un ejemplo.
45. ¿Cómo se utiliza el *método de multiplicadores de Lagrange* para obtener los extremos relativos de una función de dos variables sujeta a una restricción dada? Invente un ejemplo.
46. Efectúe la sugerencia 45 para una función de tres variables.

► EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 12

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio de f y dibuje el conjunto de puntos del dominio como una región de \mathbb{R}^2 .

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} - 16$
- $f(x, y) = \frac{6}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$
- $f(x, y) = \ln(y - x^2)$
- $f(x, y) = \sec^{-1}(5 - x^2 - y^2)$

En los ejercicios 5 y 6, determine el dominio de f y describa la región en \mathbb{R}^3 que representa al dominio.

- $f(x, y, z) = \frac{x}{|y| - |z|}$
- $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

En los ejercicios 7 y 8, determine el dominio de f y dibuje su gráfica.

- $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
- $f(x, y) = 16x^2 - y^2$

9. La función de producción de cierto artículo es f , donde $f(x, y) = 4x^{1/2}y$, x y y indican las cantidades de dos insumos. Dibuje un mapa de contornos de f que muestre las curvas de producción constante para 16, 8 y 2.

10. La temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica es $t(x, y)$ grados, y $t(x, y) = x^2 + 2y$. Dibuje las isoterma cuando t toma los valores 0, 2, 4, 6 y 8.

En los ejercicios 11 a 24, obtenga las derivadas parciales indicadas.

- $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2 + 4x - 2y$:
(a) $D_1f(x, y)$; (b) $D_2f(x, y)$; (c) $D_{11}f(x, y)$; (d) $D_{22}f(x, y)$;
(e) $D_{12}f(x, y)$; (f) $D_{21}f(x, y)$
- $f(x, y) = (4x^2 - 2y)^3$:
(a) $f_1(x, y)$; (b) $f_2(x, y)$; (c) $f_{11}(x, y)$; (d) $f_{22}(x, y)$;
(e) $f_{12}(x, y)$; (f) $f_{21}(x, y)$
- $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{3y^2}$:
(a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xx}(x, y)$; (d) $f_{yy}(x, y)$
- $f(r, s) = re^{2rs}$:
(a) $D_r f(r, s)$; (b) $D_s f(r, s)$; (c) $D_{rr} f(r, s)$; (d) $D_{ss} f(r, s)$
- $g(x, t) = \sec(sr^2) + te^t$:
(a) $D_x g(x, t)$; (b) $D_t g(x, t)$; (c) $D_{xt} g(x, t)$; (d) $D_{tt} g(x, t)$
- $h(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^3}{y^2}$:
(a) $D_1 h(x, y)$; (b) $D_2 h(x, y)$; (c) $D_{11} h(x, y)$; (d) $D_{22} h(x, y)$
- $f(x, y) = e^{y/x} + \ln \frac{x}{y}$:
(a) $f_x(x, y)$; (b) $f_y(x, y)$; (c) $f_{xx}(x, y)$; (d) $f_{yy}(x, y)$
- $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$:
(a) $f_1(x, y)$; (b) $f_{11}(x, y)$; (c) $f_{12}(x, y)$; (d) $f_{21}(x, y)$
- $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$:
(a) $D_1 f(x, y, z)$; (b) $D_2 f(x, y, z)$; (c) $D_3 f(x, y, z)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 3yz - z^2}$:
(a) $f_x(x, y, z)$; (b) $f_y(x, y, z)$; (c) $f_z(x, y, z)$
- $f(u, v, w) = \ln(u^2 + 4v^2 - 5w^2)$:
(a) $f_{uu}(u, v, w)$; (b) $f_{vv}(u, v, w)$
- $f(r, s, t) = t^2 e^{4rst}$: (a) $f_r(r, s, t)$; (b) $f_s(r, s, t)$; (c) $f_{rst}(r, s, t)$
- $f(r, s, t) = \frac{\ln 4rs}{t^2}$:
(a) $D_1 f(r, s, t)$; (b) $D_{11} f(r, s, t)$; (c) $D_{131} f(r, s, t)$
- $f(u, v, w) = w \cos 2v + 3v \sin u - 2uv \tan w$:
(a) $D_2 f(u, v, w)$; (b) $D_1 f(u, v, w)$; (c) $D_{131} f(u, v, w)$
- Si $w = x^2y - y^2x + y^2z - z^2y + z^2x - x^2z$, pruebe que
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
- Si $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, demuestre que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

En los ejercicios 27 y 28, calcule $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$ mediante dos métodos.

27. $u = y \ln(x^2 + y^2)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3t - 2s$

28. $u = e^{2+xy} \cos(2y-x)$, $x = 2s^2 - t^2$, $y = s^2 + 2t^2$

29. Si $u = 3x^2y + 2xy - 3yz - 2z^2$, $x = e^{3rs}$, $y = r^3s^2$, $z = \ln 4r$, calcule $\frac{\partial u}{\partial r}$ mediante dos métodos: (a) Utilice la regla de la cadena; (b) efectúe la sustitución de x , y y z antes de diferenciar.

30. Si $u = e^{x^2+y^2} - \frac{3x}{y} + 3z$, $x = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ y $z = \tan \theta$, obtenga la derivada total $du/d\theta$ mediante dos métodos: (a) no exprese u en términos de θ antes de diferenciar; (b) exprese u en términos de θ antes de diferenciar.

31. Si $u = xy + x^2$, $x = 4 \cos t$ y $y = 3 \sin t$, calcule el valor de la derivada total du/dt en $t = \frac{1}{2}\pi$ mediante dos métodos: (a) no exprese u en términos de t antes de derivar; (b) exprese u en términos de t antes de derivar.

32. Si $f(x, y) = x^2 + ye^2$, calcule: (a) $\Delta f(0, 2)$, el incremento de f en $(0, 2)$; (b) $\Delta f(0, 2)$ cuando $\Delta x = -0.1$ y $\Delta y = 0.2$; (c) $df(0, 2, \Delta x, \Delta y)$, la diferencial total de f en $(0, 2)$; (d) $df(0, 2, -0.1, 0.2)$.

33. Si $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$, calcule: (a) $\Delta f(-1, 3, 2)$, el incremento de f en $(-1, 3, 2)$; (b) $\Delta f(-1, 3, 2)$ cuando $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.01$ y $\Delta z = -0.02$; (c) $df(-1, 3, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, la diferencial total de f en $(-1, 3, 2)$; (d) $df(-1, 3, 2, 0.02, -0.01, -0.02)$.

34. Sean $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = \frac{2x}{3y}$, y $h(x) = \frac{1}{x}$, calcule: (a) $(h \circ g)(-3, 4)$; (b) $g(f(3), h(\frac{1}{3}))$; (c) $g(f(x), h(y))$; (d) $f(h \circ g)(x, y)$.

En los ejercicios 35 a 37, evalúe el límite empleando los teoremas de límites.

35. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln\left(\frac{x^2}{y+1}\right)$

36. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \pi/2)} \frac{xy^2 + e^x}{\cos x + \sin y}$

37. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \sin^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right)$

En los ejercicios 38 a 40, verifique el límite obteniendo una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$ tal que la definición 12.2.5 se cumpla

38. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-1)} (4x - 5y) = 21$

39. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$

40. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$

En los ejercicios 41 a 44, determine si el límite existe.

41. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2}$

42. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^4}$

43. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6y}{(x^6 + y^2)^2}$

44. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 4x^2y}{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 45 a 48, determine todos los puntos en los que f es continua.

45. $f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$

46. $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x + \cos^2 \frac{1}{2}\pi y}$

47. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: Consulte el ejercicio 41.

48. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sugerencia: Consulte el ejercicio 42.

En los ejercicios 49 a 53, obtenga el valor de la derivada direccional en el punto P_0 para la función en la dirección de U .

49. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$; $U = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $P_0 = (5, 10)$

50. $g(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$; $U = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$; $P_0 = (4, -4)$

51. $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$; $U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$; $P_0 = (0, 3)$

52. $f(x, y) = x^2 - 2x^2y + \ln x$; $U = \cos \pi \mathbf{i} + \sin \pi \mathbf{j}$; $P_0 = (1, -2)$

53. $f(x, y, z) = xy^2z - 3xyz + 2xz^2$;
 $U = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, 1, 1)$

En los ejercicios 54 a 57, calcule (a) el gradiente de f en P_0 ; (b) la tasa de variación de la función en P_0 en la dirección de U .

54. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$; $U = \cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$;
 $P_0 = (-3, 1)$

55. $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$; $U = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$; $P_0 = (1, 1)$

56. $f(x, y, z) = yz - y^2 - xz$; $U = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k}$;
 $P_0 = (1, 2, 3)$

57. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 2xyz$;
 $U = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; $P_0 = (2, -1, 0)$

En los ejercicios 58 y 59, determine los extremos relativos de f , si los tiene.

58. $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 10x - 11y$

59. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

En los ejercicios 60 y 61, demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de su dominio probando que la definición 12.4.2 se cumple.

60. $f(x, y) = 3xy^2 - 4x^2 + y^2$ 61. $f(x, y) = \frac{2x + y}{y^2}$

62. Suponga que α es la medida en radianes de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y que $\operatorname{sen} \alpha$ está determinado por a/c , donde a centímetros es la longitud del cateto opuesto al ángulo α y c centímetros es la longitud de la hipotenusa. Si al medir a se obtuvo 3.52 y al medir c resultó 7.14, y se sabe que hay un posible error de 0.01 en cada medición, determine el error posible en el cálculo de $\operatorname{sen} \alpha$ de estas mediciones.

63. Un pintor cobra \$4 por metro cuadrado al pintar las cuatro paredes y el techo de una habitación. Si las dimensiones del techo son de 4 y 5 m, y la altura de la habitación es de 3 m, y si estas medidas son correctas con un margen de error de 0.5 cm, calcule aproximadamente, empleando la diferencial total, el mayor error posible al estimar el costo del trabajo a partir de estas medidas.

64. En un instante dado, la longitud de un lado de un rectángulo es de 6 cm y se incrementa a la tasa de 1 cm/s, y la longitud del otro lado del rectángulo es de 10 cm y disminuye a la tasa de 2 cm/s. Calcule la tasa de variación del área del rectángulo en el instante dado.

65. El radio de un cilindro circular recto disminuye a la tasa de 5 cm/min y su altura se incrementa a la tasa de 12 cm/min. Calcule la tasa de variación del volumen en el instante en que el radio es de 20 cm y la altura de 40 cm.

66. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $25x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4 = 0$ con el plano $x = 4$ en el punto (4, 9, 10).

67. Utilice la ley del gas ideal (consulte el ejemplo 6 de la sección 12.3) con $k = 1.4$ para calcular la tasa de variación de la presión en el instante en que la temperatura Kelvin es de 75° y el volumen del gas es de 20 litros si la temperatura se incrementa a la tasa de 0.5°K/min y el volumen crece a la tasa de 0.3 litros/min.

En los ejercicios 68 a 70, obtenga una ecuación del plano tangente y ecuaciones de la recta normal a la superficie en el punto indicado.

68. $z = x^2 + 2xy$; (1, 3, 7)

69. $x^2 + 2y + z = 8$; (2, 1, 2)

70. $3x^2 + 2xy - y^2 = 15$; (2, 3, 4)

71. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 - 3xy + y^2 - z = 0$ y $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$ en el punto (1, -2, 11).

72. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano $x = 2$ en el punto (2, -1, 14).

73. Una ecuación de la superficie de una montaña es $z = 900 - 3xy$, donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el oeste y el eje y apunta hacia el sur. Un alpinista se encuentra en el punto que corresponde a (50, 4, 300).
(a) ¿Cuál es la dirección de la mayor pendiente en ese punto?
(b) ¿Ascende o desciende el alpinista cuando se mueve en la dirección norte?
(c) En qué dirección recorrerá el alpinista una curva de nivel?

74. Si $f(x, y)$ unidades son producidas por x trabajadores y y máquinas, entonces $D_x f(x, y)$ se denomina **productividad marginal de la mano de obra** y $D_y f(x, y)$ se llama **productividad marginal de la maquinaria**. Suponga que

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 3y^2$$

donde $5 \leq x \leq 30$ y $4 \leq y \leq 12$. (a) Calcule el número de unidades producidas en un día cuando la mano de obra, para ese día, consiste de 15 trabajadores y se emplean 8 máquinas. (b) Utilice la productividad marginal de la mano de obra para determinar el número aproximado de unidades adicionales que pueden producirse en un día si la mano de obra se incrementa de 15 a 16 trabajadores y el número de máquinas permanece fijo en 8. (c) Emplee la productividad marginal de la maquinaria para determinar aproximadamente el número de unidades adicionales que se pueden producir en un día si el número de máquinas se incrementa de 8 a 9 y el número de trabajadores permanece fijo en 15.

En los ejercicios 75 a 78, utilice multiplicadores de Lagrange para obtener los puntos críticos de la función sujeta a la restricción indicada. Determine si la función tiene un valor máximo o mínimo relativo en los puntos críticos.

75. $f(x, y) = 5 + x^2 - y^2$ con la restricción $x^2 - 2y^2 = 5$.

76. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la restricción $x^2 - y^2 = 1$.

77. $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ con la restricción $z = 35 - x - y$.

78. $f(x, y, z) = xz^2 + y^3$ con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

79. Emplee multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia mínima del punto (4, 1, 2) al plano $x - y + 2z = 0$.

80. Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar el punto de la superficie $z = x^2 - y^2 + 2$ que esté más cerca del origen.

81. Determine tres números cuya suma sea 100 de modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

82. Un fabricante produce cada día x unidades del artículo A y y unidades del artículo B . Si $P(x, y)$ dólares es la utilidad diaria por la venta de los artículos, y $P(x, y) = 33x + 66y + xy - x^2 - 3y^2$, ¿cuántas unidades de cada artículo debe producir el fabricante cada día de modo que obtenga la máxima utilidad?

83. Calcule las dimensiones del paralelepípedo rectangular de mayor volumen que puede inscribirse en el elipsoide $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$. Suponga que las aristas del paralelepípedo deben ser paralelas a los ejes coordenados.

84. En cualquier punto (x, y) de la curva $4x^2 + 12y^2 = 1$ la temperatura es T grados, y

$$T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$$

Determine los puntos de la curva donde la temperatura es máxima y donde es mínima. También calcule la temperatura en esos puntos.

85. En cualquier punto (x, y) de una placa circular caliente la temperatura es T grados, y

$$T = \frac{44}{x^2 + y^2 + 9}$$

donde la distancia se mide en centímetros a partir del origen ubicado en el centro de la placa. (a) Calcule la tasa de variación de la temperatura en el punto $(3, 2)$ en la dirección del vector $\cos \frac{1}{6}\pi \mathbf{i} + \sin \frac{1}{6}\pi \mathbf{j}$. (b) Determine la dirección y la intensidad (módulo) de la mayor tasa de variación de T en el punto $(3, 2)$.

86. Una caja rectangular sin tapa debe tener un área superficial de 216 pie^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo?

87. Para la caja del ejercicio 86, suponga que, en lugar de que el área superficial es de 216 pie^2 , la suma de las longitudes de las aristas es de 216 pie . ¿Cuáles son entonces las dimensiones de la caja de volumen máximo?

88. Un trozo de alambre de L unidades de longitud se corta en tres partes. Una parte se dobla en forma de circunferencia, otra se dobla en forma de cuadrado y la tercera parte en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que (a) el área combinada de las tres figuras sea la mínima posible, y (b) el área combinada de las tres figuras sea la máxima posible?

89. Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa que tiene un área superficial específica de modo que el volumen que debe contener sea el máximo posible.

90. Calcule las distancias mayor y menor desde el origen a la curva de intersección de las superficies $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$ y $x^2 = 2yz$.

91. La tabla siguiente proporciona datos de cinco pacientes que se sometieron a una operación en cierto hospital, donde x años es la edad del paciente y y días es el tiempo de convalecencia en el hospital después de la operación.

	Paciente A	Paciente B	Paciente C	Paciente D	Paciente E
x	54	46	40	36	30
y	15	12	9	10	8

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Utilice la recta de regresión para estimar el tiempo de convalecencia para una persona que ha sido operada en ese hospital y cuya edad es de 42 años.

92. En la tabla siguiente se dan la presión sanguínea sistólica de un paciente y el ritmo cardiaco correspondiente, donde x milímetros de mercurio es la presión sanguínea sistólica y y pulsaciones por minuto es el ritmo cardiaco.

	Paciente A	Paciente B	Paciente C	Paciente D	Paciente E	Paciente F
x	110	117	133	146	115	127
y	70	74	80	85	60	77

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Utilice la recta de regresión para estimar el ritmo cardiaco de un paciente cuya presión sanguínea sistólica es de 85 mm de mercurio.

93. En el desierto, el agua es un factor que limita considerablemente la actividad vegetal. En la tabla siguiente x representa el número de milímetros de precipitación anual para seis regiones diferentes, y y denota el número de kilogramos por hectárea en la producción neta de fotosíntesis.

	Región A	Región B	Región C	Región D	Región E	Región F
x	100	200	400	500	600	650
y	1000	1900	3200	4400	5800	6400

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. (b) Utilice la recta de regresión del inciso (a) para estimar la fotosíntesis neta producida en una región que tiene una precipitación anual de 300 mm.

94. Se realizó una prueba de venta de un cereal en cuatro ciudades del mismo tamaño a diferentes precios; los resultados se muestran en la tabla adjunta, donde x centavos representa el precio por caja y y denota los miles de cajas vendidas semanalmente.

	Ciudad A	Ciudad B	Ciudad C	Ciudad D
x	130	140	150	160
y	100	85	75	63

(a) Obtenga una ecuación de la recta de regresión para los datos de la tabla. Utilice la recta de regresión del inciso (a)

como la curva de demanda para estimar las ventas semanales si el precio por caja es (b) \$1.20, y (c) \$1.70.

95. Calcule (a) $f_2(x, 0)$ si $x \neq 0$, y (b) $f_2(0, 0)$, si

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12x^2y - 3y^3}{x^2 + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

96. Verifique que $u(x, y) = (\sinh x)(\sin y)$ satisface la ecuación de Laplace en R^2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

97. Si f es una función diferenciable de u , considere $u = x^2 + y^2$ y demuestre que $z = xy + f(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

98. La ecuación de Laplace en coordenadas polares es

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Verifique que $u(r, \theta) = r^n \sin n\theta$, donde n es una constante, satisface esta ecuación.

99. Verifique que $u(x, y, z) = e^{3x+4y} \sin 5z$ satisface la ecuación de Laplace en R^3 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

100. Verifique que $u(x, t) = A \cos(kat) \sin(kx)$, donde A y k son constantes arbitrarias, satisface la ecuación diferencial parcial para una cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

101. Verifique que

$$u(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(n^2\pi^2 k^2/L^2)t}$$

satisface la ecuación diferencial parcial unidimensional de la conducción de calor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

102. Sea f la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y que, sin embargo, f no es diferenciable en $(0, 0)$. *Sugerencia:* Consulte el ejemplo 7 de la sección 12.2 y el ejercicio 38 de esa misma sección.

103. Sea f la función definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0, 0)$.

104. Sea f la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/x^2} y & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en el origen.

105. Para la función del ejercicio 104, demuestre que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen.

106. Si f es una función diferenciable de x y y , y $u = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

107. La ecuación diferencial parcial unidimensional de la conducción de calor se presentó en el ejercicio 101. Demuestre que si f es una función de x que satisface la ecuación

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$$

y g es una función de t que satisface la ecuación

$$\frac{dg}{dt} + k^2 \lambda^2 g(t) = 0,$$

si $u = f(x)g(t)$ y k y λ son constantes, entonces u satisface la ecuación diferencial parcial de la conducción de calor.

108. La ecuación diferencial parcial para una cuerda vibrante se dio en el ejercicio 100. Demuestre que si f es una función de x que satisface la ecuación $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$,

y que g es una función que satisface la ecuación $\frac{d^2 g}{dt^2} + a^2 \lambda^2 g(t) = 0$, y si $u = f(x)g(t)$ y a y λ son constantes, entonces u satisface dicha ecuación diferencial parcial de la cuerda vibrante.

109. Demuestre que si f y g son dos funciones arbitrarias de una variable real cuyas segundas derivadas son continuas y

$$u = f(x + at) + g(x - at)$$

entonces u satisface la ecuación diferencial parcial de la cuerda vibrante dada en el ejercicio 100. *Sugerencia:* considere $v = x + at$ y $w = x - at$, entonces u es una función de v y w , y v y w son funciones de x y t .

110. Una ecuación de onda electromagnética no homogénea para un potencial escalar $V(r, t)$ que asume simetría esférica de r unidades a partir del origen es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

donde μ es la permeabilidad constante en el espacio libre y ϵ es la constante permitida de espacio libre. (a) Suponga que $V(r, t) = \phi(r, t)/r$ donde las segundas derivadas parciales de ϕ con respecto a r y t existen. Demuestre que la ecuación de onda no homogénea puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

la cual es la ecuación de onda homogénea unidimensional. (b) Sea f una función de una variable cuya segunda derivada existe. Demuestre mediante sustitución directa que $\phi = f(t - r\sqrt{\mu\epsilon})$ es una solución de la ecuación de onda homogénea unidimensional.

111. La ecuación bidimensional para las ondas eléctricas transversales es

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K^2 h = 0$$

donde $K^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ y K , m , n , a y b son constantes. Demuestre que una solución de esta ecuación es

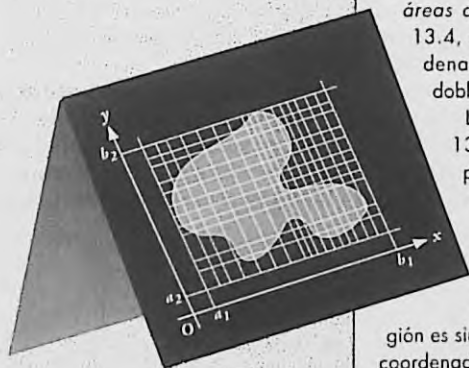
$$h = H \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

donde H es una constante.

Integración múltiple

VISIÓN PRELIMINAR

- 13.1 Coordenadas cilíndricas y esféricas
- 13.2 Integrales dobles
- 13.3 Aplicaciones de las integrales dobles
- 13.4 Integrales dobles en coordenadas polares
- 13.5 Integrales triples
- 13.6 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas



Las coordenadas cilíndricas y esféricas son generalizaciones de las coordenadas polares para el espacio tridimensional. Estos tipos de coordenadas se estudian en la primera sección, debido a que se emplearán en aplicaciones posteriores.

El propósito principal de este capítulo consiste en extender el concepto de integral definida de una función de una variable a funciones de varias variables. La sección 13.2 se inicia con la definición de *integral doble* de una función de dos variables definida en una región rectangular cerrada de R^2 . Después se amplía esta definición al considerar la integral doble de una función definida en una región de integración plana más general. También se muestra en esta sección cómo se utilizan las *integrales iteradas* para evaluar integrales dobles. En la sección 13.2 se aplican las integrales dobles al calcular volúmenes de sólidos y en la sección de 13.3 se emplean para determinar masas, centros de masas, momentos de inercia y áreas de superficies. Posteriormente, en la sección 13.4, se muestra cómo pueden utilizarse las coordenadas polares para evaluar ciertas integrales dobles.

Las *integrales triples* se estudian en la sección 13.5. Primero se definen para un paralelepípedo rectangular y después en una región de integración más general de R^3 . En la sección de 13.6 se demuestra que cuando la región de integración tiene un eje de simetría, se utilizan las coordenadas cilíndricas a fin de evaluar una integral triple, y que cuando la región es simétrica con respecto a un punto, se emplean las coordenadas esféricas.

Los conceptos de este capítulo se tratan de manera más intuitiva y menos formal debido a que la mayoría de las demostraciones de los teoremas pertenecen a un curso de Cálculo avanzado.

13.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

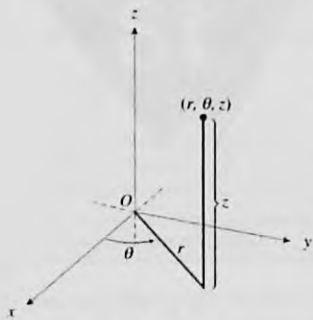


FIGURA 1

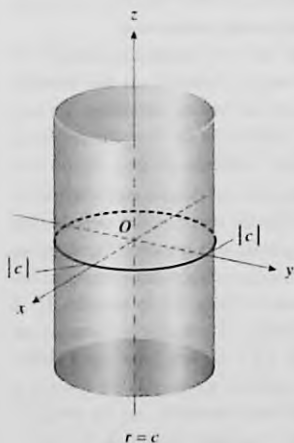


FIGURA 2

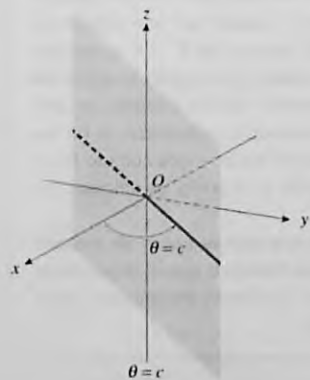


FIGURA 3

Antes de iniciar el estudio de integrales múltiples y de sus aplicaciones, se introducirán dos nuevos sistemas de coordenadas para el espacio tridimensional: *coordenadas cilíndricas* y *coordenadas esféricas*. Estos sistemas coordenados simplificarán el trabajo en varios casos del presente capítulo.

El sistema de coordenadas cilíndricas es una extensión de las coordenadas polares para tres dimensiones. La representación en **coordenadas cilíndricas** de un punto P es (r, θ, z) , donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en el plano polar y z es la distancia dirigida desde el plano polar hasta P . Consulte la figura 1.

► **EJEMPLO 1** Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, expresada en coordenadas cilíndricas, donde c es una constante: (a) $r = c$; (b) $\theta = c$; (c) $z = c$.

Solución

- (a) Para un punto $P(r, \theta, z)$ de la gráfica de $r = c$, θ y z pueden asumir cualquier valor, mientras que r es constante. La gráfica es un cilindro circular recto cuyo radio es $|c|$ unidades y su eje es el eje z . La gráfica se muestra en la figura 2.
- (b) Para todos los puntos $P(r, \theta, z)$ de la gráfica de $\theta = c$, r y z pueden tomar cualquier valor, en tanto que θ permanece constante. La gráfica es un plano que pasa por el eje z . Refiérase a la figura 3 donde $0 < c < \frac{1}{2}\pi$.
- (c) La gráfica de $z = c$ es un plano paralelo al plano polar ubicado a una distancia dirigida de c unidades a partir del plano polar. La figura 4 muestra la gráfica para $c > 0$.

El nombre “coordenadas cilíndricas” proviene del hecho de que la gráfica de $r = c$ es un cilindro circular recto como el del ejemplo 1(a). Las coordenadas cilíndricas se emplean con frecuencia en problemas físicos en los que se tiene un eje de simetría.

Suponga que un sistema de coordenadas cartesianas y otro de coordenadas cilíndricas se colocan de modo que el plano xy es el plano polar del sistema de coordenadas cilíndricas, y que la parte positiva del eje x es el eje polar, observe la figura 5. Entonces, el punto P tiene a (x, y, z) y (r, θ, z) como dos conjuntos de coordenadas que están relacionados por las ecuaciones siguientes:



FIGURA 4

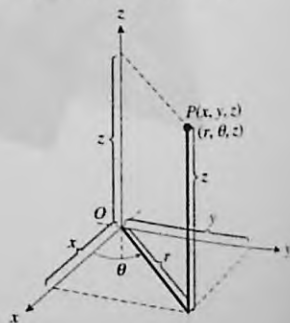


FIGURA 5

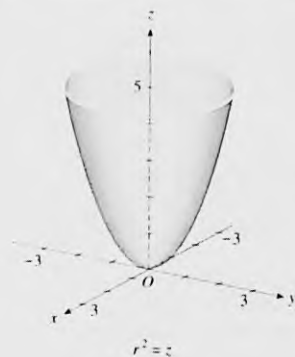


FIGURA 6



FIGURA 7

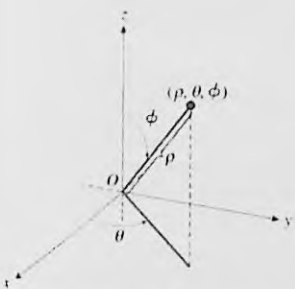


FIGURA 8

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \quad z = z \quad (2)$$

► **EJEMPLO 2** Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para cada una de las siguientes superficies cuyas ecuaciones se han expresado en coordenadas cilíndricas, e identifique la superficie: (a) $r = 6 \sin \theta$; (b) $r(3 \cos \theta + 2 \sin \theta) + 6z = 0$.

Solución

- (a) Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por r se obtiene $r^2 = 6r \sin \theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ y $r \sin \theta = y$, entonces $x^2 + y^2 = 6y$. Esta ecuación puede escribirse en la forma $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, lo cual muestra que su gráfica es un cilindro circular recto cuya sección transversal en el plano xy es la circunferencia con centro en $(0, 3)$ y radio 3.
- (b) Si se sustituye $r \cos \theta$ por x y $r \sin \theta$ por y se obtiene la ecuación $3x + 2y + 6z = 0$. En consecuencia, la gráfica es un plano que pasa por el origen y tiene al vector $\langle 3, 2, 6 \rangle$ como un vector normal. ◀

► **EJEMPLO 3** Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas para cada una de las siguientes superficies cuyas ecuaciones se han dado en coordenadas cartesianas, e identifique la superficie: (a) $x^2 + y^2 = z$; (b) $x^2 - y^2 = z$.

Solución

- (a) La ecuación es similar a la ecuación 9 de la sección 10.6, por lo que la gráfica es un paraboloides elíptico. Este paraboloides se muestra en la figura 6. Si $x^2 + y^2$ se sustituye por r^2 , entonces la ecuación se transforma en $r^2 = z$.
- (b) La ecuación es semejante a la ecuación 10 de la sección 10.6 con x y y intercambiadas. Por tanto, la gráfica es un paraboloides hiperbólico que tiene al eje z como su eje. Cuando se sustituye x por $r \cos \theta$ y y por $r \sin \theta$, se obtiene la ecuación $r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = z$; debido a que $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$, entonces se puede escribir la ecuación como $z = r^2 \cos 2\theta$. La figura 7 muestra el paraboloides hiperbólico. ◀

En un sistema de coordenadas esféricas se tiene un plano polar y un eje z perpendicular al plano polar, con el origen del eje como el polo del plano polar. Por medio de tres números se localiza un punto, y la representación en **coordenadas esféricas** de un punto P es (ρ, θ, ϕ) , donde $\rho = |\overline{OP}|$, θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de P en el plano polar, y ϕ es la medida en radianes no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z a la recta OP , consulte la figura 8. El origen tiene la representación $(0, \theta, \phi)$ en coordenadas esféricas, donde θ y ϕ pueden asumir cualquier valor. Si el punto $P(\rho, \theta, \phi)$ no es el origen, entonces $\rho > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, donde $\phi = 0$ si P está en la parte positiva del eje z y $\phi = \pi$ si P se encuentra en la parte negativa del eje z .

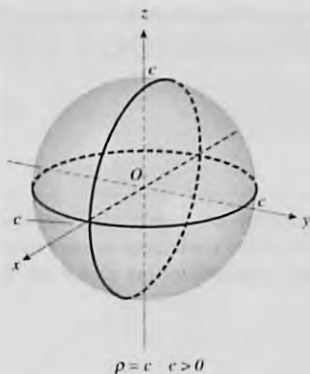


FIGURA 9

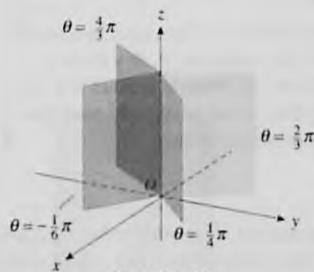


FIGURA 10

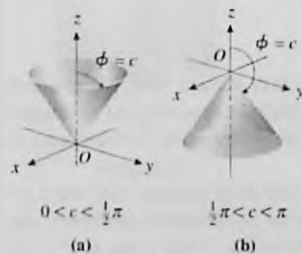


FIGURA 11

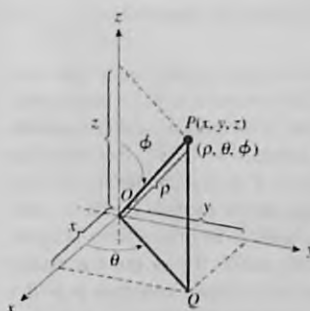


FIGURA 12

► **EJEMPLO 4** Dibuje la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes, expresadas en coordenadas esféricas, donde c es una constante: (a) $\rho = c$ y $c > 0$; (b) $\theta = c$; (c) $\phi = c$ y $0 < c < \pi$.

Solución

- (a) Todos los puntos $P(\rho, \theta, \phi)$ de la gráfica de $\rho = c$ tienen el mismo valor para ρ , θ puede ser cualquier número y $0 \leq \phi \leq \pi$. De esto se deduce que la gráfica es una esfera de radio c cuyo centro es el polo. La figura 9 muestra la esfera.
- (b) Para cualquier punto $P(\rho, \theta, \phi)$ de la gráfica de $\theta = c$, ρ puede ser cualquier número no negativo, ϕ puede ser cualquier número del intervalo cerrado $[0, \pi]$ y θ es constante. Por tanto, la gráfica es un semiplano que contiene al eje z , y se obtiene al rotar la mitad del plano xz , para el cual $x \geq 0$, alrededor del eje z mediante un ángulo de c radianes. La figura 10 muestra los semiplanos para $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$.
- (c) La gráfica de $\phi = c$ contiene todos los puntos $P(\rho, \theta, \phi)$ para los cuales ρ es cualquier número no negativo, θ es cualquier número y ϕ es la constante c . La gráfica es la mitad de un cono cuyo vértice es el origen y cuyo eje es el eje z . Las figuras 11(a) y (b) muestran cada una el semicono para $0 < c < \frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi < c < \pi$, respectivamente. ◀

Debido a que la gráfica de $\rho = c$ es una esfera, como se vio en el ejemplo 4(a), se tiene el nombre "coordenadas esféricas". Las coordenadas esféricas se utilizan frecuentemente cuando en un problema físico se tiene un punto como centro de simetría.

Si se colocan juntos un sistema de coordenadas esféricas y uno de coordenadas cartesianas, como se ilustra en la figura 12, se pueden deducir las siguientes relaciones entre las coordenadas esféricas y cartesianas de un punto P :

$$x = |\overline{OQ}| \cos \theta \quad y = |\overline{OQ}| \sin \theta \quad z = |\overline{OP}|$$

Como $|\overline{OQ}| = \rho \sin \phi$ y $|\overline{OP}| = \rho \cos \phi$, las ecuaciones anteriores se transforman en

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi \quad (3)$$

Al elevar al cuadrado cada una de las ecuaciones de (3) y sumando los miembros correspondientes se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

► **EJEMPLO 5** Obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas de las superficies siguientes, cuyas ecuaciones se han expresado en coordenadas esféricas, e identifique la superficie: (a) $\rho \cos \phi = 4$; (b) $\rho \sin \phi = 4$.

Solución

- (a) Como $z = \rho \cos \phi$, la ecuación se transforma en $z = 4$. En consecuencia, la gráfica es un plano paralelo al plano xy ubicado a 4 unidades por arriba de éste.

- (b) Para coordenadas esféricas $\rho \geq 0$ y $\sin \phi \geq 0$ (ya que $0 \leq \phi \leq \pi$); por tanto, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación dada se obtiene la ecuación equivalente $\rho^2 \sin^2 \phi = 16$, la cual equivale a

$$\rho^2(1 - \cos^2 \phi) = 16$$

$$\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi = 16$$

Si se sustituye ρ^2 por $x^2 + y^2 + z^2$ y $\rho \cos \phi$ por z se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

Por tanto, la gráfica es el cilindro circular recto que tiene al eje z como su eje y radio 4. ◀

▶ **EJEMPLO 6** Obtenga una ecuación en coordenadas esféricas para (a) el paraboloido elíptico del ejemplo 3(a); (b) el plano del ejemplo 2(b).

Solución

- (a) Una ecuación cartesiana del paraboloido elíptico del ejemplo 3(a) es $x^2 + y^2 = z$. Al sustituir x por $\rho \sin \phi \cos \theta$, y por $\rho \sin \phi \sin \theta$, y z por $\rho \cos \phi$ se obtiene

$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho \cos \phi$$

la cual equivale a las dos ecuaciones

$$\rho = 0 \quad \text{y} \quad \rho \sin^2 \phi = \cos \phi$$

El origen es el único punto cuyas coordenadas satisfacen $\rho = 0$. Como el origen $(0, \theta, \frac{1}{2}\pi)$ está en $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$, se puede descartar la ecuación $\rho = 0$. Además, $\sin \phi \neq 0$ debido a que no existe valor de ϕ para el cual $\sin \phi$ y $\cos \phi$ sean 0. Por tanto, la ecuación $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$ puede escribirse como $\rho = \csc^2 \phi \cos \phi$, o, equivalentemente, $\rho = \csc \phi \cot \phi$.

- (b) Una ecuación cartesiana para el plano del ejemplo 2(b) es $3x + 2y + 6z = 0$. Al utilizar las ecuaciones de (3), esta ecuación se transforma en

$$3\rho \sin \phi \cos \theta + 2\rho \sin \phi \sin \theta + 6\rho \cos \phi = 0 \quad \blacktriangleleft$$

EJERCICIOS 13.1

- Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas dadas:
 - $(3, \frac{1}{2}\pi, 5)$; (b) $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$; (c) $(1, 1, 1)$.
- Determine un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas:
 - $(4, 4, -2)$; (b) $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$; (c) $(1, 1, 1)$.
- Obtenga las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas:
 - $(1, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; (b) $(4, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; (c) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.
- Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cartesianas indicadas:
 - $(1, -1, -\sqrt{2})$; (b) $(-1, \sqrt{3}, 2)$; (c) $(2, 2, 2)$.
- Obtenga un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto que tiene las coordenadas esféricas dadas:
 - $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$; (b) $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$; (c) $(2\sqrt{3}, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.
- Determine un conjunto de coordenadas esféricas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas indicadas:
 - $(3, \frac{1}{6}\pi, 3)$; (b) $(3, \frac{1}{2}\pi, 2)$; (c) $(2, \frac{5}{6}\pi, -4)$.

En los ejercicios 7 a 12, obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie, e identifique la superficie.

7. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 8. $x^2 - y^2 = 9$
 9. $x^2 + y^2 = 3z$ 10. $9x^2 + 4y^2 = 36$
 11. $x^2 - y^2 = 3z^2$ 12. $x^2 + y^2 = z^2$

En los ejercicios 13 a 17, obtenga una ecuación en coordenadas esféricas de la superficie, e identifique la superficie.

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$ 14. $x^2 + y^2 = z^2$
 15. $x^2 + y^2 = 9$ 16. $x^2 + y^2 = 2z$
 17. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$

En los ejercicios 18 a 22, obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas cilíndricas. En los ejercicios 18 y 19, identifique la superficie.

18. $r = 3 \cos \theta$ 19. (a) $r = 4$; (b) $\theta = \frac{1}{4}\pi$
 20. $r = 3 + 2 \cos \theta$ 21. $r^2 \cos 2\theta = z^3$
 22. $z^2 \sin^3 \theta = r^3$

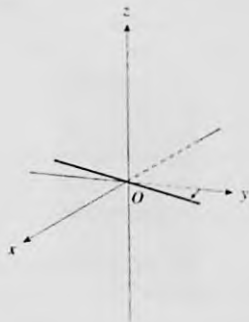
En los ejercicios 23 a 28, obtenga una ecuación en coordenadas cartesianas para la superficie cuya ecuación se da en coordenadas esféricas. En los ejercicios 23 a 25, identifique la superficie.

23. (a) $\rho = 9$; (b) $\theta = \frac{1}{4}\pi$; (c) $\phi = \frac{1}{4}\pi$
 24. $\rho = 9 \sec \phi$ 25. $\rho = 6 \csc \phi$
 26. $\rho = 3 \cos \phi$ 27. $\rho = 2 \tan \theta$
 28. $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta + 3 \cos \phi$

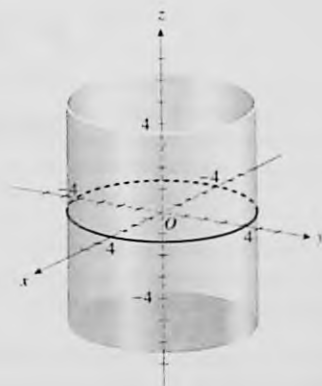
En los ejercicios 29 a 32, relacione la ecuación, dada en coordenadas esféricas o cilíndricas, con una de las superficies mostradas en las figuras (i)-(v).

29. (a) $r = 4$; (b) $\rho = 4$; (c) $r = 2 \sin \theta$
 30. (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $\phi = \frac{1}{3}\pi$; (c) $r = 2 \cos \theta$
 31. (a) $\rho \sin \phi = 2$; (b) $r^2 = 4z$
 32. (a) $\rho \cos \phi = 2$; (b) $z^2 + r^2 = 4$

ii.



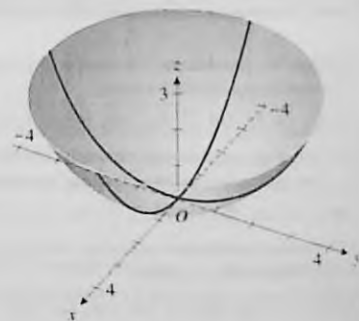
iii.



iv.



v.



i.



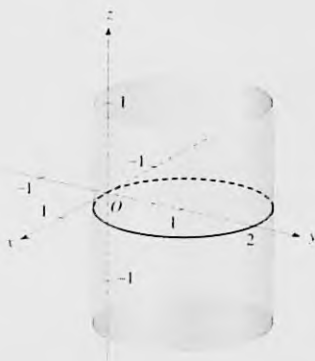
VI.



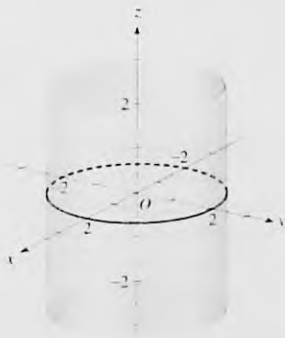
VII.



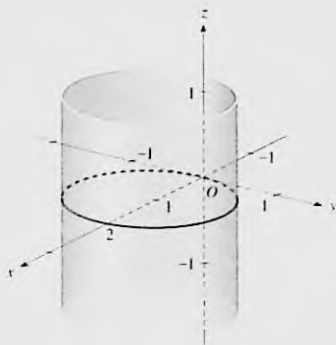
VIII.



IX.



X.



33. Una curva C en R^3 tiene las siguientes ecuaciones paramétricas en coordenadas cilíndricas: $r = F_1(t)$, $\theta = F_2(t)$, $z = F_3(t)$. Utilice la fórmula del teorema 11.2.11 y las fórmulas (1) de esta sección para demostrar que si L unidades es la longitud de arco de C a partir del punto donde $t = a$ hasta el punto donde $t = b$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

34. Una curva C en R^3 tiene las siguientes ecuaciones paramétricas en coordenadas esféricas: $\rho = G_1(t)$, $\theta = G_2(t)$, $\phi = G_3(t)$. Utilice la fórmula del teorema 11.2.11 y las fórmulas (3) de esta sección para demostrar que si L unidades es la longitud de arco de C a partir del punto donde $t = a$ hasta el punto donde $t = b$, entonces

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt$$

35. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la hélice circular del ejemplo 7 de la sección 11.2 son $r = 2$, $\theta = t$, $z = t$. (b) Utilice la fórmula del ejercicio 33 para calcular la longitud de arco de la hélice circular del inciso (a) de $t = 0$ a $t = 4\pi$. Compare el resultado con el del ejemplo 7 de la sección 11.2.
36. Una hélice cónica se enrolla en un cono de manera semejante a como se enrolla en un cilindro. Utilice la fórmula del ejercicio 34 para calcular la longitud de arco de $t = 0$ a $t = 2\pi$ de la hélice cónica que tiene ecuaciones paramétricas $\rho = t$, $\theta = t$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$.

13.2 INTEGRALES DOBLES

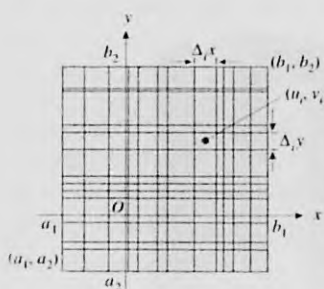


FIGURA 1

En el estudio de *integrales múltiples*, en el cual se tratan funciones de varias variables, se hará referencia a una integral de una función de una sola variable como **integral simple**. Recuerde que al estudiar la integral simple se requirió que la función estuviese definida en un intervalo cerrado del conjunto de números reales. Para la *integral doble* de una función de dos variables, se pedirá que la función esté definida en una región cerrada de R^2 . En este capítulo, cuando se haga referencia a una región, se supondrá que ésta es cerrada.

El tipo más simple de región cerrada en R^2 es la *región rectangular cerrada*, la cual se definirá a continuación. Dos puntos diferentes $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, tales que $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$, determinan un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Refiérase a la figura 1. Los dos puntos, junto con los puntos (b_1, a_2) y (a_1, b_2) , se denominan **vértices** del rectángulo. Los segmentos de recta que unen vértices consecutivos se llaman **lados** del rectángulo. El conjunto de todos los puntos interiores del rectángulo recibe el nombre de **región rectangular abierta**, y el conjunto de todos los puntos de un rectángulo abierto junto con los puntos de sus lados se denomina **región rectangular cerrada**.

Considere la región rectangular cerrada de la figura 1, la cual se denotará por R , y sea f una función definida sobre R . La región R se considerará como una **región de integración**. El primer paso en el estudio de la integral doble es definir una **partición** Δ de R . Al dibujar rectas paralelas a los ejes coordenados se obtiene una red de subregiones rectangulares que cubren a R . La **norma** de esta partición, denotada por $\|\Delta\|$, está determinada por la longitud de la diagonal más grande de las subregiones rectangulares de la partición. Se elige la longitud de la diagonal debido a que representa la distancia más grande entre dos puntos cualesquiera de una subregión rectangular. Numere las subregiones de manera arbitraria y considere que se tienen en total n . Denote el ancho de la i -ésima subregión por $\Delta_i x$ unidades y su longitud por $\Delta_i y$ unidades. Ahora bien, si $\Delta_i A$ unidades cuadradas es el área de la i -ésima subregión rectangular, entonces

$$\Delta_i A = \Delta_i x \Delta_i y$$

Sea (u_i, v_i) un punto arbitrario de la i -ésima subregión y sea $f(u_i, v_i)$ el valor de la función en ese punto. Considere el producto $f(u_i, v_i) \Delta_i A$. Asociado con cada una de las n subregiones se tiene uno de estos productos, y su suma es

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A \quad (1)$$

llamada **suma de Riemann** de una función de dos variables. Existen muchas sumas de Riemann asociadas con una función particular debido a que la norma de la partición puede ser cualquier número positivo y cada punto (u_i, v_i) puede ser cualquier punto de la i -ésima subregión. Si todas estas sumas de Riemann se pueden acercar arbitrariamente a un número L tomando particiones con normas suficientemente pequeñas, entonces se define L como el **límite** de estas sumas conforme la norma de la partición de R se aproxima a cero. Esta discusión conduce a la siguiente definición.

13.2.1 Definición del límite de una suma de Riemann de una función de dos variables

Sea f una función definida en una región rectangular cerrada R . El número L es el **límite** de las sumas de la forma $\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A$ si L satisface la propiedad de que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cualquier partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$ y para toda elección posible del punto (u_i, v_i) en el i -ésimo rectángulo, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A - L \right| < \epsilon$$

Si tal número L existe, se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A = L$$

Puede demostrarse que el número L que satisfaga esta definición será único. La demostración es similar a la demostración del teorema 1.5.16 relativo a la *unicidad* del límite de una función de una variable.

13.2.2 Definición de la integral doble

Sea f una función de dos variables definida en una región rectangular cerrada R . La **integral doble** de f en R , denotada por $\iint_R f(x, y) dA$, está definida por

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A$$

si este límite existe.

Si la integral doble de f en R existe, entonces se dice que f es **integrable** en R . El teorema siguiente, enunciado sin demostración, proporciona una condición suficiente para que una función de dos variables sea integrable.

13.2.3 Teorema

Si una función de dos variables es continua en una región rectangular cerrada R , entonces f es integrable en R .

► **EJEMPLO 1** Obtenga un valor aproximado de la integral doble

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA$$

donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(-1, 1)$ y $(2, 3)$. Considere una partición de R generada por las rectas $x = 0$, $x = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

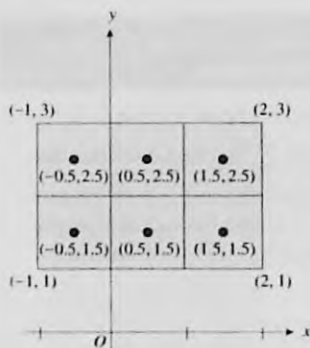


FIGURA 2

Solución Refiérase a la figura 2, la cual muestra la región R dividida en seis subregiones que son cuadrados cuyos lados miden 1 unidad. Así, para cada i , $\Delta_i A = 1$. En cada subregión el punto (u_i, v_i) es el centro del cuadrado. Con $f(x, y) = 3y - 2x^2$, una aproximación de la integral doble indicada está dada por

$$\begin{aligned} \iint_R (3y - 2x^2) dA &= f(-0.5, 1.5) \cdot 1 + f(0.5, 1.5) \cdot 1 + f(1.5, 1.5) \cdot 1 + \\ &\quad f(-0.5, 2.5) \cdot 1 + f(0.5, 2.5) \cdot 1 + f(1.5, 2.5) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

El valor exacto de la integral doble del ejemplo 1 es 24, como se verá en el ejemplo 3.

Ahora se considerará la integral doble de una función sobre una región más general. Recuerde que una curva lisa es la gráfica de una función lisa, es decir, aquella cuya derivada es continua. Sea R una región cerrada cuya frontera consiste de un número finito de arcos de curvas lisas que se unen para formar una curva cerrada simple. Como se hizo con una región rectangular, se dibujan rectas paralelas a los ejes coordenados, lo cual proporciona una partición rectangular de R . Si se descartan las subregiones que contienen puntos que no pertenecen a R , se tendrán sólo aquellas contenidas completamente en R . Sea el número de estas subregiones, sombreadas en la figura 3. Al proceder de manera análoga a la descrita para una región rectangular, se pueden aplicar las definiciones 13.2.1 y 13.2.2 para esta región R más general. Conforme la norma de la partición se aproxima a cero, n crece sin límite, y el área de las regiones omitidas (es decir, los rectángulos descartados) tiende a cero. Si una función es integrable en una región R , se puede demostrar que el límite de las sumas de Riemann es el mismo sin importar como se subdivide R , siempre y cuando se tenga una forma mediante la cual se pueda asignar un área a cada subregión.

Así como se interpreta geoméricamente la integral de una función de una variable en términos del área de una región plana, la integral doble puede interpretarse geoméricamente en términos del volumen de un sólido tridimensional. Suponga que la función f es continua en una región cerrada R de \mathbb{R}^2 . Además, para simplificar la discusión, suponga que $f(x, y)$ es no negativa en R . La gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ es una superficie que se encuentra por arriba del plano xy , como se muestra en la figura 4. Esta figura presenta una subregión particular de R , cuyas dimensiones son Δ_x y Δ_y . La figura también muestra un sólido rectangular que tiene esta subregión como base, y $f(u_i, v_i)$ como medida de su altura, donde (u_i, v_i) es un punto de la i -ésima subregión. El volumen del sólido rectangular está determinado por

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= f(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= f(u_i, v_i) \Delta_x \Delta_y \end{aligned}$$

El número $\Delta_i V$ es la medida del volumen del sólido rectangular delgado que se muestra en la figura 4; de modo que la suma dada en (1) es la suma de las medidas de los volúmenes de los n sólidos como éste. Esta suma aproxima la medida del volumen del sólido tridimensional que aparece en la figura 4. El sólido está limitado en la parte superior por la gráfica de f y en la parte inferior por la región R del plano xy . La suma de (1) también aproxima el número proporcionado por la integral doble

$$\iint_R f(x, y) dA$$

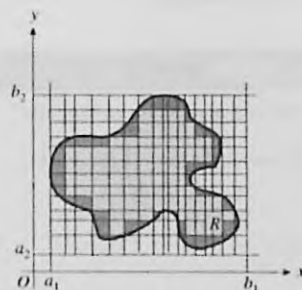


FIGURA 3



FIGURA 4

y el volumen del sólido tridimensional de la figura 4 es el valor de esta integral. Este hecho se establece en el siguiente teorema, omitiéndose su demostración formal.

13.2.4 Teorema

Sea f una función de dos variables y continua en una región cerrada R del plano xy tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de R . Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido S que tiene la región R como su base y cuya altura es $f(x, y)$ unidades en el punto (x, y) de R , entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R f(x, y) dA \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 2** Exprese el volumen del sólido limitado por la superficie

$$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

los planos $x = 3$, $y = 2$ y los tres planos coordenados como una integral doble. A fin de obtener un valor aproximado de la integral doble, considere la partición de la región del plano xy generada al dibujar las rectas $x = 1$, $x = 2$ y $y = 1$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

Solución En la figura 5 se muestra el sólido. La región rectangular R es el rectángulo del plano xy limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = 3$ y $y = 2$. Del teorema 13.2.4, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$V = \iint_R \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dA$$

La figura 5 también muestra la región R dividida en seis subregiones que son cuadrados cuyos lados miden 1 unidad. Por tanto, para cada i , $\Delta_i A = 1$. El punto (u_i, v_i) de cada subregión es el centro del cuadrado. Entonces una aproximación de V está dada por una aproximación de la integral doble. Por tanto,

$$\begin{aligned} V &\approx f(0.5, 0.5) \cdot 1 + f(1.5, 0.5) \cdot 1 + f(2.5, 0.5) \cdot 1 + \\ &\quad f(0.5, 1.5) \cdot 1 + f(1.5, 1.5) \cdot 1 + f(2.5, 1.5) \cdot 1 \end{aligned}$$

Si se emplea una calculadora para determinar los valores de la función, se obtiene

$$\begin{aligned} V &= 3.957 + 3.734 + 3.290 + 3.832 + 3.609 + 3.165 \\ &\approx 21.59 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen es aproximadamente 21.59 unidades cúbicas. ◀



FIGURA 5

El volumen exacto del ejemplo anterior es 21.5 unidades cúbicas, como se mostrará en el ejemplo 4.

Varias propiedades de la integral doble son análogas a las propiedades de la integral definida de una función de una variable. Las más importantes se dan en los cinco teoremas siguientes.

13.2.5 Teorema

Si c es una constante y la función f es integrable en una región cerrada R , entonces cf es integrable en R y

$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$$

La demostración de este teorema y del siguiente, se deducen inmediatamente de la definición de integral doble.

13.2.6 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R , entonces la función $f + g$ es integrable en R y

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$$

El resultado de este teorema puede extenderse a cualquier número finito de funciones integrables.

13.2.7 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R y además $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) de R , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

Este teorema es análogo al teorema 4.6.1, y el siguiente es análogo al teorema 4.6.2. Las demostraciones son similares a las demostraciones correspondientes de la sección 4.6.

13.2.8 Teorema

Sea f una función integrable en una región cerrada R , y suponga que m y M son dos números tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) de R . Si A es la medida del área de la región R , entonces

$$mA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq MA$$

13.2.9 Teorema

Suponga que la función f es continua en la región cerrada R y que la región R se compone de dos subregiones R_1 y R_2 que no tienen puntos en común excepto algunos puntos en parte de sus fronteras. Entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

La demostración de este teorema depende de la definición de integral doble y de los teoremas de límites.

Para funciones de una variable, el segundo teorema fundamental del Cálculo proporciona un método para evaluar la integral definida mediante una antiderivada, o integral indefinida, del integrando. Un método correspondiente para evaluar una integral doble implica realizar integraciones indefinidas simples en forma sucesiva. Un desarrollo riguroso de este procedimiento corresponde a un curso de Cálculo avanzado. En este libro el análisis es sólo intuitivo, y se utiliza la interpretación geométrica de la integral doble como la medida de un volumen. Primero se desarrollará el método para la integral doble en una región rectangular.

Sea f una función integrable en una región rectangular cerrada R del plano xy limitada por las rectas $x = a_1$, $x = b_1$, $y = a_2$ y $y = b_2$. Suponga que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) de R . Refiérase a la figura 6, la cual muestra la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$, donde (x, y) pertenece a R . El número que representa el valor de la integral doble

$$\iint_R f(x, y) dA$$

es la medida del volumen del sólido entre la superficie y la región R . Este número puede determinarse mediante el método de rebanado como se muestra a continuación.

Sea y un número del intervalo $[a_2, b_2]$. Considere el plano paralelo al plano xz que pasa por el punto $(0, y, 0)$. Sean $A(y)$ unidades cuadradas el área de la región plana de intersección de este plano con el sólido. La medida del volumen del sólido se expresa por

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y) dy$$

Como el volumen del sólido también está determinado por la integral doble, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y) dy \quad (2)$$

Así, puede calcularse el valor de la integral doble de la función f en R al evaluar una integral simple de $A(y)$. Ahora debe obtenerse $A(y)$ cuando y está dada. Como $A(y)$ unidades cuadradas es el área de la región plana, este número puede obtenerse mediante integración. Observe en la figura 6 que la frontera superior de la región plana es la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ cuando x pertenece

a $[a_1, b_1]$. Por tanto, $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$. Al sustituir de esta ecuación en (1) se obtiene

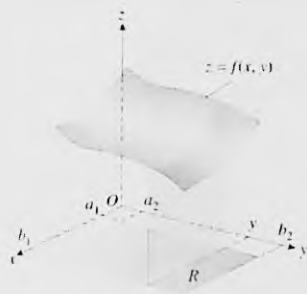


FIGURA 6

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right] dy \quad (3)$$

La expresión del miembro derecho de (3) se denomina **integral iterada**. Debido a que los corchetes se omiten regularmente cuando se escribe una integral iterada, entonces (3) puede expresarse como

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy \quad (4)$$

Al evaluar la "integral interior" de (4), recuerde que x es la variable de integración y se considera a y como una constante. Esto es análogo a tomar y como una constante cuando se obtiene la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x .

Si se consideran secciones planas paralelas al plano yz se obtiene una integral iterada en la que se intercambia el orden de integración, esto es,

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

Una condición suficiente para que (4) y (5) sean válidas es que la función sea continua en la región rectangular R .

▶ EJEMPLO 3 Evalúe la integral doble

$$\iint_R (3y - 2x^2) dA$$

si R es la región del plano xy que consiste de todos los puntos (x, y) para los cuales $-1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 3$.

Solución Con $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 1$ y $b_2 = 3$, de (4) se tiene

$$\begin{aligned} \iint_R (3y - 2x^2) dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx dy \\ &= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (3y - 2x^2) dx \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[3xy - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^2 dy \\ &= \int_1^3 (9y - 6) dy \\ &= \left[\frac{9}{2}y^2 - 6y \right]_1^3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se obtuvo un valor aproximado de 25 para la integral doble del ejemplo anterior.



FIGURA 7

► **EJEMPLO 4** Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie

$$f(x, y) = 4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2$$

así como por los planos $x = 3$ y $y = 2$, y los tres planos coordenados.

Solución La figura 7 muestra la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$ y el sólido dado en el primer octante. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces por el teorema 13.2.4,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R f(x, y) dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2\right) dy dx \\ &= \int_0^3 \left[4y - \frac{1}{9}x^2 y - \frac{1}{48}y^3\right]_0^2 dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9}x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{47}{6}x - \frac{2}{27}x^3\right]_0^3 \\ &= 21.5 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen es 21.5 unidades cúbicas. ◀

En el ejemplo 2 se obtuvo un valor aproximado de 21.59 para el volumen del sólido del ejemplo anterior.

Suponga ahora que R es la región del plano xy limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$ y por las curvas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, suponga que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ siempre que $a \leq x \leq b$ (consulte la figura 8). Sea Δ una partición del intervalo $[a, b]$ definida por $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Considere la región R de la figura 8 dividida en franjas verticales de ancho $\Delta_i x$ unidades. En esta figura se muestra una franja particular. La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = u_i$, donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$, es una curva. Una porción de esta curva se encuentra sobre la i -ésima franja vertical. La región debajo de este segmento de curva y sobre el plano xy se muestra en la figura 9 y la medida del área de esta región está dada por

$$\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y) dy$$

La medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la i -ésima franja vertical es aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y) dy \right] \Delta_i x$$



FIGURA 8



FIGURA 9



FIGURA 10



FIGURA 11

Si se toma el límite, conforme la norma de Δ tiende a cero, de la suma de las medidas de los volúmenes para las n franjas verticales de R desde $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene la medida del volumen del sólido limitado en la parte superior por la superficie $z = f(x, y)$ y en la parte inferior por la región R del plano xy . (Refiérase a la figura 10). Este límite es la integral doble de f en R ; es decir

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\phi_1(u_i)}^{\phi_2(u_i)} f(u_i, y) dy \right] \Delta_i x &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx \\ &= \iint_R f(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (6)$$

Las condiciones suficientes para que la fórmula (6) sea válida son que f sea continua en la región cerrada R y que ϕ_1 y ϕ_2 sean funciones lisas.

▶ EJEMPLO 5 Exprese como una integral doble y una integral iterada la medida del volumen del sólido que se encuentra por arriba del plano xy delimitado por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Evalúe la integral iterada para calcular el volumen del sólido.

Solución La figura 11 muestra el sólido. Se obtendrá el volumen de la porción del sólido del primer octante, el cual, por las propiedades de simetría, es un cuarto del volumen requerido. La región R del plano xy es aquella limitada por los ejes x y y , así como por la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Esta región se presenta en la figura 12, la cual también muestra la i -ésima subregión de una partición rectangular de R , donde (u_i, v_i) es cualquier punto de esta subregión. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces, por el teorema 13.2.4,

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (u_i^2 + 4v_i^2) \Delta_i A \\ &= 4 \iint_R (x^2 + 4y^2) dA \end{aligned}$$

A fin de expresar V como una integral iterada, se divide la región R en n franjas verticales. La figura 13 muestra la región R y la i -ésima franja vertical cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades y su longitud es $\frac{1}{2} \sqrt{4 - u_i^2}$ unidades, donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$. De (6),

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{4 - u_i^2}} (u_i^2 + 4y^2) dy \right] \Delta_i x \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{4 - u^2}} (x^2 + 4y^2) dy dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right]_0^{\frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{6} (4 - x^2)^{3/2} \right] dx \end{aligned}$$

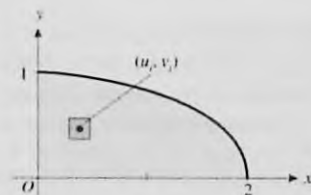


FIGURA 12

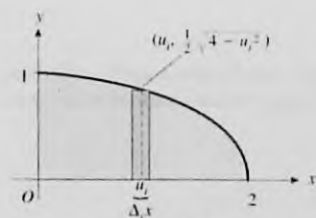


FIGURA 13

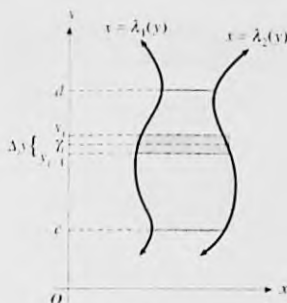


FIGURA 14

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2) \sqrt{4 - x^2} \, dx \\
 &= -\frac{1}{3} x(4 - x^2)^{3/2} + 2x \sqrt{4 - x^2} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} x \Big|_0^2 \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen es 4π unidades cúbicas. ◀

Suponga que la región R está limitada por las curvas $x = \lambda_1(y)$ y $x = \lambda_2(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$, donde $c < d$, y λ_1 y λ_2 son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[c, d]$ para las cuales $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$ siempre que $c \leq y \leq d$. Considere una partición Δ del intervalo $[c, d]$ y divida la región R en franjas horizontales de ancho Δy_i unidades. Consulte la figura 14, la cual muestra la i -ésima franja horizontal. La intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = v_i$, donde $y_{i-1} \leq v_i \leq y_i$, es una curva, y una porción de esta curva se encuentra sobre la i -ésima franja horizontal. Entonces, de la misma manera en que se obtuvo la fórmula (6), la medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la i -ésima franja horizontal es aproximadamente igual a

$$\left[\int_{\lambda_1(v_i)}^{\lambda_2(v_i)} f(x, v_i) \, dx \right] \Delta y_i$$

Al tomar el límite, conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, de la suma de las medidas de los volúmenes para las n franjas horizontales de R desde $y = c$ hasta $y = d$, se obtiene la medida del volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la región R del plano xy . Esta medida de volumen es la integral doble de f en R . En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\lambda_1(v_i)}^{\lambda_2(v_i)} f(x, v_i) \, dx \right] \Delta y_i &= \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad (7)
 \end{aligned}$$

Las condiciones suficientes para que la fórmula (7) sea válida son que λ_1 y λ_2 sean funciones lisas y que f sea continua en R . Al aplicar las fórmulas (6) y (7), en ocasiones puede ser necesario dividir la región R en subregiones en las cuales se cumplan estas condiciones.

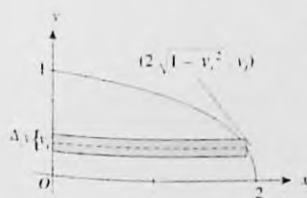


FIGURA 15

▶ **EJEMPLO 6** Exprese el volumen del sólido del ejemplo 5 mediante una integral iterada en la que el orden de integración sea contrario al de dicho ejemplo. Calcule el volumen del sólido.

Solución Otra vez se obtendrá el volumen del sólido correspondiente al primer octante, y después se multiplicará el resultado por 4. La figura 15 muestra la región R del plano xy y la i -ésima franja horizontal cuyo ancho es Δy_i unidades y su longitud es $2\sqrt{1 - v_i^2}$ unidades. Entonces, por (7),

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{2\sqrt{1-v_i^2}} (x^2 + 4v_i^2) dx \right] \Delta y_i \\
 &= 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy \\
 &= 4 \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + 4y^2x \right]_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= 4 \int_0^1 \left[\frac{8}{3}(1-y^2)^{3/2} + 8y^2\sqrt{1-y^2} \right] dy \\
 &= \frac{32}{3} \int_0^1 (2y^2 + 1)\sqrt{1-y^2} dy \\
 &= -\frac{16}{3}y(1-y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1-y^2} + 8\sin^{-1}y \Big|_0^1 \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen es 4π unidades cúbicas, lo cual concuerda con la respuesta del ejemplo 5. ◀

De las soluciones de los ejemplos 5 y 6 se observa que la integral doble

$$\iint_R (x^2 + 4y^2) dA \text{ puede evaluarse por medio de las integrales iteradas}$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx \quad \text{o} \quad \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy$$

Si en (6) o (7), se considera $f(x, y) = 1$ para toda x y y , entonces la medida A del área de la región R se expresa como una integral doble. Así,

$$A = \iint_R dy dx \Leftrightarrow A = \iint_R dx dy \quad (8)$$

▶ **EJEMPLO 7** Calcule mediante integración doble el área de la región del plano xy limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$.

Solución En la figura 16 se muestra la región. De (8) se tiene

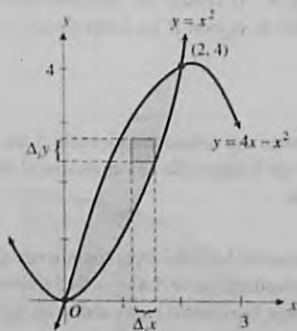


FIGURA 16

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx \\
 &= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx \\
 &= 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la región es $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 13.2

1. Obtenga un valor aproximado de la integral doble

$$\iint_R (3x - 2y + 1) dA$$

donde R es la región rectangular que tiene vértices en $(0, -2)$ y $(3, 0)$. Considere la partición de R generada por las rectas $x = 1$, $x = 2$ y $y = -1$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

2. Obtenga un valor aproximado de la integral doble

$$\iint_R (y^2 - 4x) dA$$

donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(-1, 0)$ y $(1, 3)$. Considere la partición de R generada por las rectas $x = 0$, $x = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

En los ejercicios 3 a 8, obtenga un valor aproximado de la integral doble, donde R es la región rectangular que tiene vértices en P y Q , Δ es una partición de R y (u_i, v_i) es el centro de cada subregión

3. $\iint_R (x^2 + y) dA$; $P(0, 0)$; $Q(4, 2)$; Δ : $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$

4. $\iint_R (2 - x - y) dA$; $P(0, 0)$; $Q(6, 4)$; Δ : $x_1 = 0$,
 $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$

5. $\iint_R (xy + 3y^2) dA$; $P(-2, 0)$; $Q(4, 6)$; Δ : $x_1 = -2$,
 $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$

6. $\iint_R (xy + 3y^2) dA$; $P(0, -2)$; $Q(6, 4)$; Δ : $x_1 = 0$,
 $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$

7. $\iint_R (x^2y - 2xy^2) dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$;
 Δ : $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 4$

8. $\iint_R (x^2y - 2xy^2) dA$; $P(-3, -2)$; $Q(1, 6)$;
 Δ : $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $y_1 = -2$,
 $y_2 = -1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$, $y_5 = 2$, $y_6 = 3$, $y_7 = 4$,
 $y_8 = 5$

En los ejercicios 9 a 12, obtenga un valor aproximado de la integral doble donde R es la región rectangular que tiene vértices en P y Q , Δ es una partición de R y (u_i, v_i) es un punto arbitrario en cada subregión.

9. La integral doble, con P , Q y Δ como en el ejercicio 3;

$$(u_1, v_1) = (0.25, 0.5); (u_2, v_2) = (1.75, 0);$$

$$(u_3, v_3) = (2.5, 0.25); (u_4, v_4) = (4, 1);$$

$$(u_5, v_5) = (0.75, 1.75); (u_6, v_6) = (1.25, 1.5);$$

$$(u_7, v_7) = (2.5, 2); (u_8, v_8) = (3, 1)$$

10. La integral doble, con P , Q y Δ como en el ejercicio 4;

$$(u_1, v_1) = (0.5, 1.5); (u_2, v_2) = (3, 1);$$

$$(u_3, v_3) = (5.5, 0.5); (u_4, v_4) = (2, 2)$$

$$(u_5, v_5) = (2, 2); (u_6, v_6) = (5, 3).$$

11. La integral doble, con P , Q y Δ como en el ejercicio 5;

$$(u_1, v_1) = (-0.5, 0.5); (u_2, v_2) = (1, 1.5);$$

$$(u_3, v_3) = (2.5, 2); (u_4, v_4) = (-1.5, 3.5);$$

$$(u_5, v_5) = (0, 3); (u_6, v_6) = (4, 4);$$

$$(u_7, v_7) = (-1, 4.5); (u_8, v_8) = (1, 4.5);$$

$$(u_9, v_9) = (3, 4.5).$$

12. La integral doble, con P , Q y Δ como en el ejercicio 5;

$$(u_1, v_1) = (-2, 0); (u_2, v_2) = (0, 0);$$

$$(u_3, v_3) = (2, 0); (u_4, v_4) = (-2, 2);$$

$$(u_5, v_5) = (0, 2); (u_6, v_6) = (2, 2); (u_7, v_7) = (-2, 4);$$

$$(u_8, v_8) = (0, 4); (u_9, v_9) = (2, 4).$$

13. Exprese como una integral doble el volumen del sólido

ubicado en el primer octante y limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, los planos $x = 3$, $y = 3$ y los tres planos coordenados. Afin de obtener un valor aproximado de la integral, considere la partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

14. Exprese como una integral doble el volumen del sólido

limitado por los planos $z = 2x + y + 4$, $y = 3$ y los tres planos coordenados. A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere una partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $y = 2$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

15. Exprese como una integral doble el volumen del sólido limi-

tado por la superficie $z = 10 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2$, los planos $x = 2$, $y = 2$ y los tres planos coordenados. A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere la partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$ y $y = 1$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

16. Exprese como una integral doble el volumen del sólido

limitado por la superficie $100z = 300 - 25x^2 - 4y^2$, los planos $x = -1$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 5$ y el plano xy . A fin de obtener un valor aproximado de la integral, considere una partición de la región del plano xy generada por las rectas $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ y $y = 3$, y tome el centro de la i -ésima subregión como (u_i, v_i) .

En los ejercicios 17 a 20, aplique el teorema 13.2.8 para obtener un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral doble.

17. $\iint_R (2x + 5y) dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$.

18. $\iint_R (x^2 + y^2) dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

19. $\iint_R e^{xy} dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

20. $\iint_R (\sin x + \sin y) dA$, donde R es la región rectangular cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, π) . *Sugerencia:* utilice el resultado del ejercicio 24 de la sección 12.8.

En los ejercicios 21 a 30, evalúe la integral iterada.

21. $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dy dx$

22. $\int_0^4 \int_0^y dx dy$

23. $\int_0^4 \int_0^3 \sqrt{9 + y^2} dx dy$

24. $\int_{-1}^1 \int_1^{e^y} \frac{x}{y} dx dy$

25. $\int_1^4 \int_{y^2}^4 \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy$

26. $\int_1^4 \int_{x^2}^4 \frac{y}{\sqrt{x}} dy dx$

27. $\int_0^1 \int_0^1 |x - y| dy dx$

28. $\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx$

29. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \sin(4x - y) dy dx$

30. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx dy$

En los ejercicios 31 a 38, calcule el valor exacto de la integral doble.

31. La integral doble del ejercicio 1.

32. La integral doble del ejercicio 2.

33. La integral doble del ejercicio 3.

34. La integral doble del ejercicio 6.

35. $\iint_R \sin x dA$; R es la región acotada por las rectas $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$ y $x = \pi$.

36. $\iint_R \cos(x + y) dA$; R es la región acotada por las rectas $y = xy$, $x = \pi$, y el eje x .

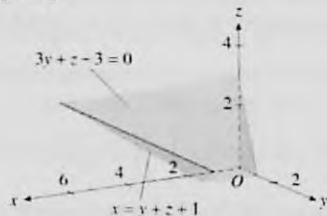
37. $\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA$; R es la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

38. $\iint_R \frac{y^2}{x^2} dA$; R es la región limitada por las rectas $y = x$ y $y = 2$, y la hipérbola $xy = 1$.

39. Obtenga el volumen del sólido ubicado debajo del plano $z = 4x$ y que se encuentra por arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ del plano xy .



40. Determine el volumen del sólido delimitado por los planos $x = y + 2z + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $3y + z - 3 = 0$.



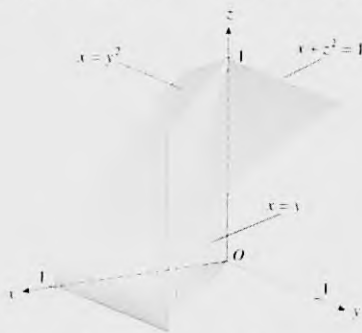
41. Calcule el volumen del sólido del primer octante acotado por los dos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 4$.



42. Obtenga el volumen del sólido del primer octante limitado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - 3y^2$.



43. Determine el volumen del sólido del primer octante limitado por las superficies $x + z^2 = 1$, $x = y$ y $x = y^2$.



44. Calcule mediante integración doble el volumen de la porción del sólido del primer octante limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.



En los ejercicios 45 a 48, utilice integrales dobles para calcular el área de la región limitada por las curvas del plano xy . Dibuje la región.

45. $y = x^3$ y $y = x^2$ 46. $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$

47. $y = x^2 - 9$ y $y = 9 - x^2$

48. $x^2 + y^2 = 16$ y $y^2 = 6x$

49. Exprese como una integral iterada la medida del volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

50. Utilice integración doble para obtener el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 4x$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, y el eje x mediante dos métodos: (a) integre primero con respecto a x , (b) integre primero con respecto a y . Compare los dos métodos de solución.

51. Calcule mediante dos métodos el volumen del sólido ubicado debajo del plano $3x + 8y + 6z = 24$ y por arriba de la región del primer cuadrante del plano xy limitada por la parábola $y^2 = 2x$, la recta $2x + 3y = 10$ y el eje x : (a) integre primero con respecto a x , (b) integre primero con respecto a y . Compare los dos métodos de solución.

52. Considere la integral iterada $\int_0^1 \int_0^x (a^2 - x^2) dy dx$. (a) Dibuje el sólido cuya medida de volumen está representada por la integral; (b) evalúe la integral iterada; (c) escriba la integral iterada que proporciona la medida del volumen del mismo sólido con el orden de integración inverso.

53. Considere la integral iterada

$$\frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2x + y) dy dx$$

y efectúe las instrucciones del ejercicio 52.

54. Utilice doble integración para calcular el volumen del sólido común a los dos cilindros circulares rectos de radio r unidades, cuyos ejes se intersectan formando ángulos rectos. (Consulte el ejercicio 60 de la sección 4.9).

En los ejercicios 55 y 56, la integral iterada no puede evaluarse exactamente en términos de funciones elementales mediante el orden de integración propuesto. Invierta el orden de integración y realice el cálculo.

55. $\int_0^4 \int_{-1}^2 \sin \pi y^3 dy dx$

56. $\int_0^1 \int_{-1}^1 e^{x^2} dx dy$

13.3 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

En la sección 13.2 se estudió cómo aplicar las integrales dobles a fin de calcular volúmenes de sólidos. En esta sección se tratarán otras aplicaciones de las integrales dobles, tales como determinar centros de masa, momentos de inercia y el área de una superficie.

Cuando se aplicaron las integrales simples para determinar el centro de masa de una lámina, se consideraron únicamente láminas homogéneas, excepto en casos especiales. Sin embargo, con las integrales dobles se puede determinar el centro de masa de una lámina homogénea o no homogénea.

Suponga que se tiene una lámina cuya forma es la de una región cerrada R del plano xy . Sea $\rho(x, y)$ la medida de la densidad superficial de la lámina

en cualquier punto (x, y) de R donde ρ es continua en R . Para calcular la masa total de la lámina se procede como sigue. Sea Δ una partición de R en n rectángulos. Si (u_i, v_i) es cualquier punto del i -ésimo rectángulo que tiene área $\Delta_i A$ unidades cuadradas, entonces una aproximación de la medida de la masa total del i -ésimo rectángulo es $\rho(u_i, v_i) \Delta_i A$, y la medida de la masa total de la lámina está aproximada por

$$\sum_{i=1}^n \rho(u_i, v_i) \Delta_i A$$

Al tomar el límite de la suma anterior, conforme la norma de Δ tiende a cero, la medida M de la masa de la lámina puede expresarse como

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R \rho(x, y) dA \end{aligned} \quad (1)$$

La medida del momento de masa del i -ésimo rectángulo con respecto al eje x está aproximada por $v_i \rho(u_i, v_i) \Delta_i A$. Entonces la suma de las medidas de los momentos de masa con respecto al eje x de los n rectángulos será aproximada por la suma de n términos de éstos. La medida M_x del momento de masa con respecto al eje x de la lámina completa está dada por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R y \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

De manera análoga, la medida M_y de su momento de masa con respecto al eje y está determinada por

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R x \rho(x, y) dA \end{aligned} \quad (2)$$

El centro de masa de la lámina se denota por el punto (\bar{x}, \bar{y}) donde

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

▶ EJEMPLO 1 Una lámina cuya forma es la de un triángulo rectángulo isósceles, tiene una densidad superficial que varía de acuerdo al cuadrado de la distancia a partir del vértice del ángulo recto. Si la masa se mide en kilogramos y la distancia en metros, calcule la masa y el centro de masa de la lámina.

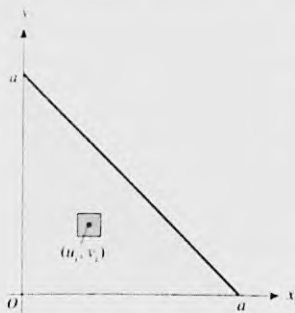


FIGURA 1

Solución Elija los ejes coordenados de modo que el vértice del ángulo recto esté en el origen y los catetos de longitud a queden sobre los ejes coordenados (consulte la figura 1). Sea $\rho(x, y)$ kilogramos por metro cuadrado la densidad superficial de la lámina en el punto (x, y) . Entonces $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$, donde k es una constante. Por tanto, si M kilogramos es la masa de la lámina, se tiene, de (1),

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k(u_i^2 + v_i^2) \Delta_i A \\
 &= k \iint_R (x^2 + y^2) dA \\
 &= \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= k \int_0^a \left[yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{a-x} dx \\
 &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2x + 2ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx \\
 &= k \left(\frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4 \right) \\
 &= \frac{1}{6}ka^4
 \end{aligned}$$

A fin de determinar el centro de masa, observe que, debido a la simetría, éste debe estar sobre la recta $y = x$. Por tanto, si se obtiene \bar{x} , también se obtendrá \bar{y} . De (2),

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{y}} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n ku_i(u_i^2 + v_i^2) \Delta_i A \\
 &= k \iint_R x(x^2 + y^2) dA \\
 &= k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^3 + xy^2) dy dx \\
 &= k \int_0^a \left[x^3y + \frac{1}{3}xy^3 \right]_0^{a-x} dx \\
 &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3x - a^2x^2 + 2ax^3 - \frac{1}{3}x^4 \right) dx \\
 &= k \left(\frac{1}{6}a^5 - \frac{1}{3}a^5 + \frac{1}{2}a^5 - \frac{1}{15}a^5 \right) \\
 &= \frac{1}{15}ka^5
 \end{aligned}$$

Como $M\bar{x} = M_{\bar{y}}$, entonces $M\bar{x} = \frac{1}{15}ka^5$; y debido a que $M = \frac{1}{6}ka^4$, se obtiene $\bar{x} = \frac{2}{5}a$.

Conclusión: El centro de masa se encuentra en el punto $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$. ◀

El momento de masa de una lámina con respecto a un eje se denomina, en ocasiones, **primer momento** de la lámina con respecto al eje. Otro momento de una lámina con respecto a un eje es el *momento de inercia*, también llamado

segundo momento de la lámina. El momento de inercia es una medición de la resistencia al cambio en el movimiento de rotación. Para llegar a la definición de momento de inercia de una lámina, primero considere una partícula de masa m kilogramos cuya distancia perpendicular desde un eje es r metros. El momento de inercia de la partícula con respecto al eje se define como mr^2 kilogramos-metro cuadrado. Entonces el momento de inercia de un sistema de n partículas respecto al eje es la suma de los momentos de inercia de todas las partículas. Esto es, si la i -ésima partícula tiene una masa de m_i kilogramos y se encuentra a una distancia de r_i metros del eje, entonces I kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sistema respecto al eje, donde

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Al extender este concepto a una distribución continua de masa en un plano, tal como una lámina, mediante procesos semejantes a los anteriores, se tiene la definición siguiente.

13.3.1 Definición de momento de inercia respecto a un eje

Suponga que se tiene una lámina que ocupa una región R en el plano xy tal que la densidad superficial en el punto (x, y) tiene medida $\rho(x, y)$, donde ρ es continua en R . Entonces, la medida del **momento de inercia** de la lámina con respecto al eje x , denotado por I_x , está determinada por

$$\begin{aligned} I_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i^2 \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R y^2 \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

De manera similar, la medida del **momento de inercia** de la lámina con respecto al eje y , denotado por I_y , está dada por

$$\begin{aligned} I_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i^2 \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R x^2 \rho(x, y) dA \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 2** Un alambre recto homogéneo tiene una densidad lineal constante de k kilogramos por metro. Calcule el momento de inercia del alambre con respecto a un eje perpendicular al alambre que pasa por uno de sus extremos.

Solución Suponga que la longitud del alambre es de a metros, y que se extiende a lo largo del eje x a partir del origen. Se determinará el momento de inercia del alambre con respecto al eje y . Divida el alambre en n segmentos de modo que la longitud del i -ésimo segmento es $\Delta_i x$ metros. Entonces, la masa del i -ésimo segmento es $k \Delta_i x$ kilogramos. Suponga que la masa del i -ésimo segmento se concentra en un punto u_i , donde $x_{i-1} \leq u_i \leq x_i$. La medida del momento de inercia del i -ésimo segmento con respecto al eje y se encuentra entre $kx_{i-1}^2 \Delta_i x$ y $kx_i^2 \Delta_i x$ y está aproximado por $ku_i^2 \Delta_i x$. Si el momento de inercia del alambre con respecto al eje y es I_y kilogramos-metro cuadrado, entonces

$$\begin{aligned}
 I_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k u_i^2 \Delta_i x \\
 &= \int_0^a k x^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} k a^3
 \end{aligned}$$

Conclusión: El momento de inercia es $\frac{1}{3} k a^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. ◀

La suma de los momentos de inercia I_x e I_y de una lámina del plano xy se denomina *momento polar de inercia*, y representa el momento de inercia de la lámina con respecto al origen o al eje z .

13.3.2 Definición de momento polar de inercia

Suponga que se tiene una lámina que ocupa una región R del plano xy tal que la densidad superficial en el punto (x, y) tiene medida $\rho(x, y)$, donde ρ es continua en R . Entonces la medida del **momento polar de inercia**, denotado por I_0 , está definido por

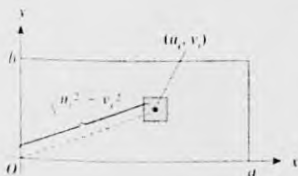
$$\begin{aligned}
 I_0 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (u_i^2 + v_i^2) \rho(u_i, v_i) \Delta_i A \\
 &= \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA
 \end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 3** Una lámina rectangular homogénea tiene una densidad superficial constante de k slugs por pie cuadrado. Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a una esquina.

Solución Suponga que la lámina está limitada por las rectas $x = a$, $y = b$ y los ejes x y y . Refiérase a la figura 2. Si I_0 slug-pie cuadrado es el momento de inercia con respecto al origen, entonces

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k(u_i^2 + v_i^2) \Delta_i A \\
 &= \iint_R k(x^2 + y^2) dA \\
 &= k \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= k \int_0^b \left[\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right]_0^a dy \\
 &= k \int_0^b (\frac{1}{3} a^3 + ay^2) dy \\
 &= \frac{1}{3} kab(a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

Conclusión: El momento de inercia es $\frac{1}{3} kab(a^2 + b^2)$ slug-pie². ◀



El *radio de giro* de una lámina con respecto a un eje L es la distancia desde L a un punto de la lámina en el que puede ser concentrada su masa sin afectar su momento de inercia con respecto a L . Esto es, si la masa M kilogramos de la lámina se concentra en un punto ubicado a r metros de L , el momento de inercia de la lámina con respecto a L es la misma que la de una partícula de masa M kilogramos a una distancia de r metros de L ; este momento de inercia es Mr^2 kilogramos-metro cuadrado. Así, se tiene la definición siguiente.

13.3.3 Definición del radio de giro

Si I es la medida del momento de inercia con respecto a un eje L de una lámina y M es la medida de la masa total de la lámina, entonces el **radio de giro** de la lámina con respecto a L tiene medida r , donde

$$r^2 = \frac{I}{M}$$

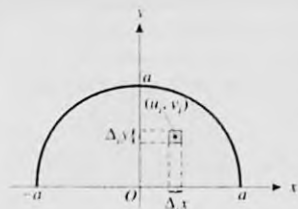


FIGURA 3

► **EJEMPLO 4** Suponga que una lámina tiene la forma de un semicírculo y que la medida de la densidad superficial de la lámina en cualquier punto es proporcional a la medida de la distancia del punto a partir del diámetro. Si la masa se mide en kilogramos y la distancia en metros, calcule el radio de giro de la lámina con respecto al eje x .

Solución Elija los ejes x y y de modo que el semicírculo sea la parte superior del círculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Consulte la figura 3. Entonces la densidad superficial de la lámina en el punto (x, y) es ky kilogramos-metro cuadrado. Así, si M kilogramos es la masa de la lámina, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|S\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k v_i \Delta_i A \\ &= \iint_R ky \, dA \\ &= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} ky \, dx \, dy \\ &= k \int_0^a [yx]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy \\ &= 2k \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} \, dy \\ &= -\frac{2}{3}k(a^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{3}ka^3 \end{aligned}$$

Si I_x kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia de la lámina con respecto al eje x , entonces

$$\begin{aligned} I_x &= \lim_{\|S\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i^2 (k v_i) \Delta_i A \\ &= \iint_R ky^3 \, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3 dy dx \\
 &= k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{4}y^4 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{4}k \int_{-a}^a (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx \\
 &= \frac{1}{4}k(2a^5 - \frac{2}{3}a^5 + \frac{2}{5}a^5) \\
 &= \frac{4}{15}ka^5
 \end{aligned}$$

Por tanto, si r metros es el radio de giro, entonces

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{\frac{4}{15}ka^5}{\frac{2}{3}ka^3} \\
 &= \frac{2}{5}a^2
 \end{aligned}$$

De modo que $r = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{10}a$.

Conclusión: El radio de giro es $\frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{10}a$ metros. ◀

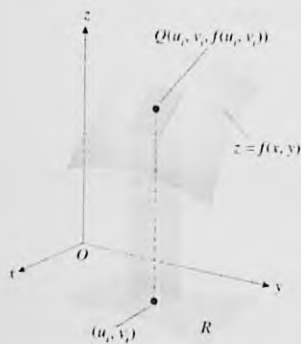


FIGURA 4

La integral doble puede emplearse para determinar el área de la porción de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre la región cerrada R del plano xy . A fin de mostrar esto, primero se definirá lo que significa la medida de esta área y después se obtendrá una fórmula para calcularla. Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en R , y que $f(x, y) > 0$ en R . Sea Δ una partición de R de n subregiones rectangulares. El i -ésimo rectángulo tiene dimensiones $\Delta_i x$ unidades y $\Delta_i y$ unidades y un área de $\Delta_i A$ unidades cuadradas. Sea (u_i, v_i) cualquier punto del i -ésimo rectángulo, y considere el plano tangente a la superficie en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$. Projete verticalmente hacia arriba el i -ésimo rectángulo sobre el plano tangente y sea $\Delta_i \sigma$ unidades cuadradas el área de esta proyección. La figura 4 muestra la región R , la porción de la superficie sobre R , la i -ésima subregión rectangular de R y la proyección del i -ésimo rectángulo sobre el plano tangente a la superficie en Q . El número $\Delta_i \sigma$ es una aproximación de la medida del área de la porción de la superficie que se encuentra sobre el i -ésimo rectángulo. Como existen n de estas porciones, la suma

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma$$

es una aproximación de la medida σ del área de la porción de la superficie ubicada sobre R . Esto conduce a definir σ como sigue:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma \quad (3)$$

A continuación se obtendrá una fórmula para calcular este límite. Para esto, se deducirá una fórmula a fin de calcular $\Delta_i \sigma$ como la medida del área de un paralelogramo. Con el fin de simplificar los cálculos se toma el punto (u_i, v_i) del i -ésimo rectángulo como el vértice (x_{i-1}, y_{i-1}) . Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} los vectores que tienen como representaciones los segmentos de recta dirigidos cuyo punto inicial es Q y que forman dos lados adyacentes del paralelogramo cuya área es $\Delta_i \sigma$ unidades cuadradas. Refiérase a la figura 5. Así, $\Delta_i \sigma = \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$. Como

$$\mathbf{A} = \Delta_i x \mathbf{i} + f_x(u_i, v_i) \Delta_i x \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \Delta_i y \mathbf{j} + f_y(u_i, v_i) \Delta_i y \mathbf{k}$$

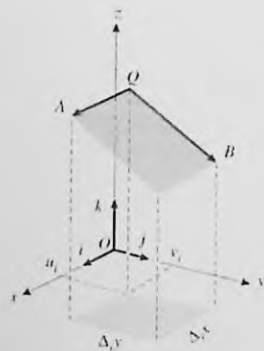


FIGURA 5

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(u_i, v_i) \Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(u_i, v_i) \Delta_i y \end{vmatrix} \\ &= -\Delta_i x \Delta_i y f_x(u_i, v_i) \mathbf{i} - \Delta_i x \Delta_i y f_y(u_i, v_i) \mathbf{j} + \Delta_i x \Delta_i y \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta_i \sigma &= \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| \\ &= \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y \end{aligned}$$

Al sustituir esta expresión por $\Delta_i \sigma$ en (3) se tiene

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y$$

Este límite es una doble integral que existe sobre R debido a la continuidad de f_x y f_y en R . De este modo se tiene el teorema siguiente.

13.3.4 Teorema.

Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R del plano xy . Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre R , entonces

$$\sigma = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy$$

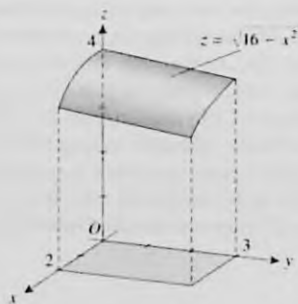


FIGURA 6

► **EJEMPLO 5** Calcule el área de la superficie en el primer octante cortada en el cilindro $x^2 + z^2 = 16$ por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 3$.

Solución La superficie dada se muestra en la figura 6. La región R es el rectángulo en el primer cuadrante del plano xy limitado por las rectas $x = 2$, $y = 3$. La superficie tiene la ecuación $x^2 + z^2 = 16$. Si se despeja z en la ecuación anterior se obtiene $z = \sqrt{16 - x^2}$. Por tanto, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2}$. De modo que si σ unidades cuadradas es el área de la superficie, entonces, por el teorema 13.3.4,

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2 + 0 + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx \, dy \\ &= 4 \int_0^3 \left[\sin^{-1} \frac{1}{4} x \right]_0^2 \, dy \\ &= 4 \int_0^3 \frac{1}{6} \pi \, dy \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la superficie es 2π unidades cuadradas.

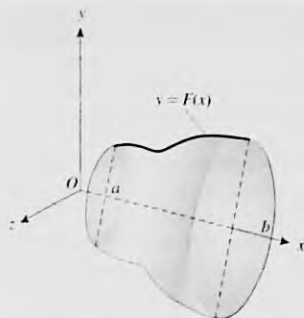


FIGURA 7

Considere ahora la curva $y = F(x)$ con $a \leq x \leq b$, $F(x) > 0$ para toda x de $[a, b]$ y F' continua en $[a, b]$. Si esta curva se gira alrededor del eje x , se obtiene una superficie de revolución. De la sección 10.6, una ecuación de esta superficie es

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \quad (4)$$

La figura 7 muestra la superficie de revolución. En esta figura el plano xy se encuentra en el plano de esta hoja; sin embargo, se tiene un sistema coordenado derecho. Se desea obtener una fórmula para calcular el área de esta superficie de revolución empleando el teorema 13.3.4. De las propiedades de simetría, el área de la superficie ubicada por arriba del plano xz y frente al plano xy es un cuarto del área de la superficie completa. Al resolver (4) para z y no tomando en cuenta la raíz cuadrada negativa puesto que $z \geq 0$, se tiene $f(x, y) = \sqrt{[F(x)]^2 - y^2}$. La región R del plano xy es la región limitada por el eje x , la curva $y = F(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si se calculan las derivadas parciales de f se obtiene

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

Se observa que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no existen en parte de la frontera de R (cuando $y = -F(x)$ y cuando $y = F(x)$). La integral doble que se obtiene a partir del teorema 13.3.4 es

$$\begin{aligned} \iint_R \sqrt{\frac{[F(x)]^2 [F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1} \, dy \, dx \\ = \iint_R \frac{F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \, dy \, dx \end{aligned}$$

Esta doble integral es impropia debido a que el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto de la frontera de R donde $y = -F(x)$ y en donde $y = F(x)$. En consecuencia, se evalúa la doble integral como una integral iterada para la cual el integrando interior es impropio. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie de revolución, entonces

$$\begin{aligned} \sigma &= 4 \int_a^b \left[F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \right] dx \quad (5) \\ \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \\ &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{F(x)} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow F(x)^-} \operatorname{sen}^{-1} \frac{b}{F(x)} \\ &= \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

Por tanto, de (5),

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \, dx$$

Este resultado se establece como un teorema, donde F se sustituye por f .

13.3.5 Teorema

Suponga que la función f es positiva en $[a, b]$ y que f' es continua en $[a, b]$. Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la curva $y = f(x)$, con $a \leq x \leq b$, entonces

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx$$



FIGURA 8

EJEMPLO 6 Calcule el área del paraboloide de revolución generado al girar la mitad superior de la parábola $y^2 = 4px$, con $0 \leq x \leq h$, alrededor del eje x .

Solución En la figura 8 se muestra el paraboloide de revolución. Si se despeja y en la ecuación de la parábola, con $y \geq 0$, se obtiene $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. De modo que si σ unidades cuadradas es el área de la superficie, entonces por el teorema 13.3.5, con $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$,

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2} \sqrt{\frac{p}{x} + 1} dx \\ &= 4\pi p^{1/2} \int_0^h \sqrt{p+x} dx \\ &= \frac{8}{3}\pi p^{1/2} (p+x)^{3/2} \Big|_0^h \\ &= \frac{8}{3}\pi (\sqrt{p(p+h)^3} - p^2) \end{aligned}$$

Conclusión: El área del paraboloide de revolución es $\frac{8}{3}\pi (\sqrt{p(p+h)^3} - p^2)$ unidades cuadradas.

EJERCICIOS 13.3

En los ejercicios 1 a 12, calcule la masa y el centro de masa de la lámina si se considera la densidad superficial como se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

- Una lámina tiene la forma de una región rectangular limitada por las rectas $x = 3$ y $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad superficial en cualquier punto es xy^2 kilogramos por metro cuadrado.
- Una lámina tiene la forma de una región rectangular acotada por las rectas $x = 4$ y $y = 5$ y los ejes coordenados. La densidad superficial en cualquier punto es $(x^2 + y)$ kilogramos por metro cuadrado.
- Una lámina tiene la forma de una región triangular cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados y la recta $x + 2y = 6$. La densidad superficial en cualquier punto es y^2 kilogramos por metro cuadrado.
- Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = 1$ y el eje y . La densidad superficial en cualquier punto es $(x + y)$ kilogramos por metro cuadrado.
- Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la parábola $x^2 = 8y$, la recta $y = 2$ y el eje y . La densidad superficial varía como la distancia desde la recta $y = -1$.
- Una lámina tiene la forma de la región limitada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 1$ y los ejes coordenados. La densidad superficial varía como la distancia desde el eje x .
- Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad superficial varía conforme a la suma de las distancias a los dos lados rectos.

8. Una lámina tiene la forma de la región limitada por el triángulo cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados y la recta $3x + 2y = 18$. La densidad superficial varía como el producto de las distancias a los ejes coordenados.
9. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la curva $y = \sin x$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = \pi$. La densidad superficial varía conforme a la distancia desde el eje x .
10. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$. La densidad superficial varía como la distancia desde el eje y .
11. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la recta $x + y = 2$. La densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.
12. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1$. La densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.

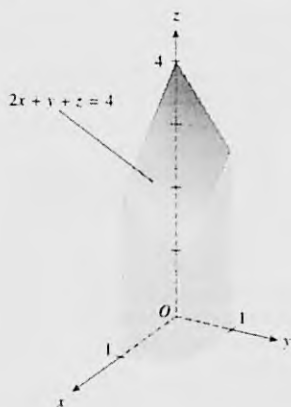
En los ejercicios 13 a 18, calcule el momento de inercia de la lámina homogénea con respecto al eje indicado si la densidad superficial es k kilogramos por metro cuadrado y la distancia se mide en metros.

13. Una lámina tiene la forma de la región limitada por $4y = 3x$, $x = 4$ y el eje x ; con respecto al eje x .
14. La lámina del ejercicio 13; con respecto a la recta $x = 4$.
15. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la circunferencia de radio a metros; con respecto a su centro.
16. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la parábola $x^2 = 4 - 4y$ y el eje x ; con respecto al eje x .
17. La lámina del ejercicio 16; con respecto al origen.
18. Una lámina tiene la forma de la región acotada por un triángulo cuyos lados miden a metros, b metros y c metros; con respecto al lado que mide a metros.

En los ejercicios 19 a 22, determine para cada lámina lo siguiente: (a) el momento de inercia con respecto al eje x , (b) el momento de inercia con respecto al eje y , (c) el radio de giro con respecto al eje x , (d) el momento polar de inercia.

19. La lámina del ejercicio 1.
20. La lámina del ejercicio 4.
21. La lámina del ejercicio 9.
22. La lámina del ejercicio 10.
23. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la parábola $y = 2x - x^2$ y el eje x . Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a la recta $y = 4$ si la densidad superficial varía como la distancia desde la recta $y = 4$. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.
24. Una lámina homogénea de k slugs por pie cuadrado de densidad superficial tiene la forma de la región limitada por la curva $x = \sqrt{y}$, el eje x y la recta $x = a$, donde $a > 0$. Calcule el momento de inercia de la lámina con respecto a la recta $x = a$.

25. Determine el área de la superficie cortada en el plano $2x + y + z = 4$ por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$.



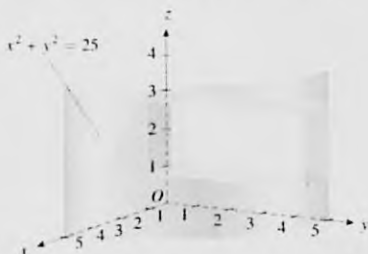
26. Calcule el área de la superficie cortada en el plano $z - 2x - y = 5$ por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 4$.



27. Obtenga el área de la porción de superficie del plano $36x + 16y + 9z = 144$ cortada por los planos coordenados.
28. Determine el área de la superficie cortada en el plano $z = ax + by$ por los planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y $y = b$, donde $a > 0$ y $b > 0$.
29. Calcule el área de la superficie del primer octante cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ por el plano $x = z$.



30. Obtenga el área de la superficie cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 25$ por los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 1$ y $z = 3$.



31. Sea R la región triangular del plano xy con vértices en $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$. Determine el área de la superficie de la parte de la gráfica de $z = 5x - y^2 = 2$ que se encuentra sobre R .
32. Calcule el área de la superficie del primer octante cortada en el cono $x^2 + y^2 = z^2$ por el plano $x + y = 4$.
33. Obtenga el área de la porción de superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
34. Determine el área de la porción de superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.
35. Calcule el área de la porción de superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre el cilindro $y^2 = xy$ y el plano $x - y = 2$.
36. Obtenga el área de la porción del plano $x = z$ que está entre los planos $y = 0$ y $y = 6$ y dentro del hiperboloide $9x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 144$.

37. Se gira el segmento de recta del origen al punto (a, b) alrededor del eje x . Determine el área de la superficie del cono generado.
38. Deduzca una fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.
39. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la catenaria $y = a \cosh(x/a)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$ alrededor del eje y .
40. Determine el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la catenaria del ejercicio 39.
41. El lazo de la curva $18y^2 = x(6 - x)^2$ se gira alrededor del eje x . Obtenga el área de la superficie de revolución generada.
42. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar el arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$ alrededor del eje y .
43. Una lámina homogénea de k slugs por pie cuadrado de densidad superficial tiene la forma de la región limitada por un triángulo isósceles cuya base mide b pies de longitud y su altura h pies de longitud. Determine el radio de giro de la lámina con respecto a su recta de simetría.
44. Suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en una región cerrada R del plano xy . Demuestre que si σ unidades cuadradas es el área de la porción de la superficie $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre R , entonces

$$\sigma = \iint_R \|\nabla g(x, y, z)\| \, dx \, dy$$

donde $g(x, y, z) = z - f(x, y)$

13.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

A fin de definir la integral doble de una función en una región cerrada del plano coordenado polar, primero se considera el tipo más simple de región. Sea R la región limitada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y las circunferencias $r = a$ y $r = b$. Sea Δ la *partición* de esta región que se obtiene al dibujar rayos que pasen por el polo y circunferencias con centro en el polo. Refiérase a la figura 1, la cual muestra una red de subregiones denominadas **rectángulos curvados**. La norma $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la mayor diagonal de los rectángulos curvados. Sea n el número de subregiones y sea $\Delta_i A$ unidades cuadradas el área del i -ésimo rectángulo curvado. Como el área de la i -ésima subregión es la diferencia de las áreas de dos sectores circulares, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_i A &= \frac{1}{2} r_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} (r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}) \end{aligned}$$

Sean $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$, y $\Delta_i \theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Entonces

$$\Delta_i A = \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

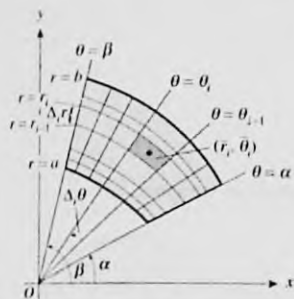


FIGURA 1

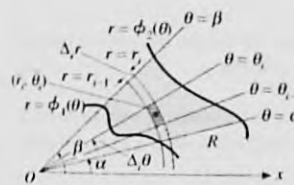


FIGURA 2

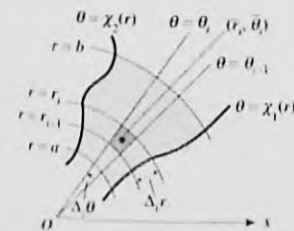


FIGURA 3



FIGURA 4

Tome el punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ en la i -ésima subregión, donde $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$, y forme la suma

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta_i \theta$$

Se puede demostrar que si f es continua en la región R , entonces el límite de esta suma, conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, existe y se considerará como la integral doble de f en R . De este modo se puede escribir

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \iint_R f(r, \theta) dA$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta_i \theta = \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta$$

Observe que en coordenadas polares, $dA = r dr d\theta$.

También puede demostrarse que la integral doble es igual a una integral iterada que tiene una de las dos formas posibles:

$$\begin{aligned} \iint_R f(r, \theta) dA &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta) r d\theta dr \end{aligned}$$

Es posible definir la integral doble de una función continua f de dos variables en regiones cerradas del plano coordenado polar de manera diferente a la anterior. Por ejemplo, considere la región R limitada por las curvas $r = \phi_1(\theta)$ y $r = \phi_2(\theta)$, donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones lisas, y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Consulte la figura 2. En la figura, $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$ para toda θ del intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$. Entonces se puede demostrar que la doble integral de f en R existe y que es igual a una integral iterada, obteniéndose

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

Si la región R está limitada por las curvas $\theta = \chi_1(r)$ y $\theta = \chi_2(r)$, donde χ_1 y χ_2 son funciones lisas, y por las circunferencias $r = a$ y $r = b$, como se muestra en la figura 3, donde $\chi_1(r) \leq \chi_2(r)$ para toda r del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr$$

La integral doble de una función en una región cerrada del plano coordenado polar puede considerarse como la medida del volumen de un sólido empleando coordenadas cilíndricas. La figura 4 muestra un sólido que tiene como base a la región R del plano coordenado polar y limitado superiormente por la superficie $z = f(r, \theta)$, donde f es continua en R y $f(r, \theta) \geq 0$ en R . Considere una partición de R , la cual proporciona una red de n rectángulos curvados. Construya los n sólidos para los cuales el i -ésimo sólido tiene como base al i -ésimo rectángulo curvado y cuya altura es $f(r_i, \theta_i)$ unidades, donde (r_i, θ_i) pertenece a la i -ésima subregión. La figura 4 muestra el i -ésimo sólido. La medida del volumen del i -ésimo sólido es

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

La suma de las medidas de los n sólidos es

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

► **EJEMPLO 1** Calcule el volumen del sólido del primer octante limitado por el cono $z = r$ y el cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

Solución El sólido y el i -ésimo elemento de volumen se muestran en la figura 5. Al utilizar (1) con $f(r, \theta) = r$, y si V unidades cúbicas es el volumen del sólido dado, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \operatorname{sen} \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{3 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta \\ &= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Conclusión: La medida del volumen es 6 unidades cúbicas.

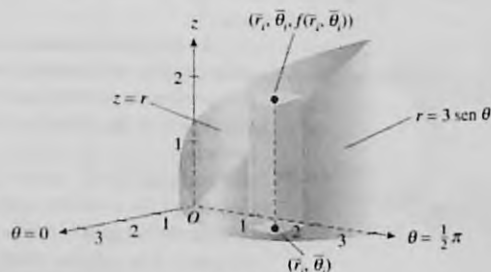


FIGURA 5

► **EJEMPLO 2** Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región limitada por la semicircunferencia $r = a \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, y cuya densidad superficial en cualquier punto es proporcional a la medida de su distancia desde el polo. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

Solución La figura 6 muestra un dibujo de la lámina y del i -ésimo rectángulo curvado. La densidad superficial en el punto (r, θ) es kr kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante. Si M kilogramos es la masa de la lámina, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^2 dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} ka^3 \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{9} ka^3 \end{aligned}$$

Conclusión: La medida de la masa es $\frac{2}{9}ka^3$ kilogramos. ◀

► **EJEMPLO 3** Obtenga el centro de masa de la lámina del ejemplo 2.

Solución Sean \bar{x} y \bar{y} las coordenadas cartesianas del centro de masa de la lámina, donde, como es costumbre, el eje x está ubicado sobre el eje polar y el eje y se encuentra sobre el eje $\frac{1}{2}\pi$. Sea (\bar{x}_i, \bar{y}_i) la representación en coordenadas cartesianas del punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$. Si M_x kilogramos-metro es el momento de masa de la lámina con respecto al eje x , entonces

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Al sustituir \bar{y}_i por $\bar{r}_i \sin \bar{\theta}_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{r}_i^3 \sin \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R kr^3 \sin \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} ka^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{20} ka^4 \cos^5 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{20} ka^4 \end{aligned}$$

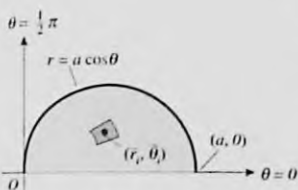


FIGURA 6

Si M_y kilogramos-metro es el momento de masa de la lámina con respecto al eje y , entonces

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

Al reemplazar \bar{x}_i por $\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i$ resulta

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{r}_i^3 \cos \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R k r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \left[\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{15} k a^4 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \frac{\frac{2}{15} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3} & &= \frac{\frac{1}{20} k a^4}{\frac{2}{9} k a^3} \\ &= \frac{3}{5} a & &= \frac{9}{40} a \end{aligned}$$

Conclusión: El centro de masa se encuentra en el punto $(\frac{3}{5}a, \frac{9}{40}a)$. ◀

El ejemplo siguiente muestra cómo puede calcularse el área de una región del plano polar mediante la integración doble.

► **EJEMPLO 4** Calcule por medio de integración doble el área de la región limitada por una hoja de la rosa $r = \sin 3\theta$.

Solución La región y el i -ésimo rectángulo curvado se muestran en la figura 7. Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i A \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \iint_R r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{\sin 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta \, d\theta \end{aligned}$$

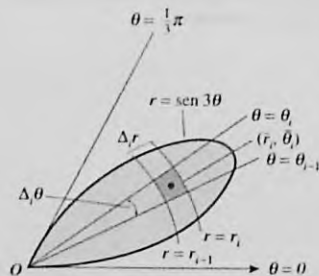


FIGURA 7

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{24}\operatorname{sen} 6\theta \Big|_0^{\pi/3} \\
 &= \frac{1}{12}\pi
 \end{aligned}$$

Conclusión: El área es $\frac{1}{12}\pi$ unidades cuadradas. ◀

En ocasiones resulta más fácil evaluar una integral doble empleando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas, como se muestra en los ejemplos siguientes.

► **EJEMPLO 5** Evalúe la integral doble

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$$

donde la región R se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados.

Solución Como $x^2 + y^2 = r^2$, y $dA = r dr d\theta$, entonces

$$\begin{aligned}
 \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA &= \iint_R e^{-r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[e^{-r^2} \right]_0^a d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1) d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} (e^{-a^2} - 1) \theta \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4}\pi(1 - e^{-a^2})
 \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 6** Calcule el área de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano $z = 4$.

Solución La figura 8 muestra la superficie dada. De la ecuación del paraboloide se ve que $f(x, y) = x^2 + y^2$. La región cerrada del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ es la región R . Si σ unidades cuadradas es el área de la superficie requerida, entonces, por el teorema 13.3.4,

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy \\
 &= \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dx dy
 \end{aligned}$$

Como el integrando contiene el término $4(x^2 + y^2)$, la evaluación de la integral se simplifica al utilizar coordenadas polares. Así, $x^2 + y^2 = r^2$. Puesto que $dx dy = dA$, entonces $dx dy = r dr d\theta$. Además, los límites para r son de 0 a 2 y los límites para θ son de 0 a 2π . Por tanto,



FIGURA 8

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \iint_R \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{6} \pi (17\sqrt{17} - 1)
 \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la porción del paraboloides que se encuentra debajo del plano dado es $\frac{1}{6} \pi (17\sqrt{17} - 1)$ unidades cuadradas. \blacktriangleleft

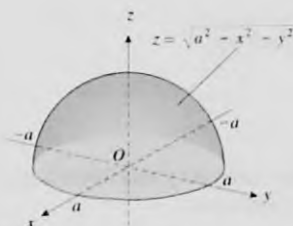


FIGURA 9

EJEMPLO 7 Calcule el área de la mitad superior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Solución La semiesfera se muestra en la figura 9. Al despejar z en la ecuación de la esfera y considerando esto igual a $f(x, y)$ se obtiene

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Como

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

f_x y f_y no están definidas en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, la cual es la frontera de la región R del plano xy . Además, la integral doble que se obtiene al aplicar el teorema 13.3.4 es

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

la cual es impropia debido a que el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto de la frontera de R . Esta situación puede evitarse al considerar la región R' como aquella limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2$, donde $b < a$, y tomar el límite cuando $b \rightarrow a^-$. Además, el cálculo se simplifica si la integral doble se evalúa mediante una integral iterada en la que se utilizan coordenadas polares. De este modo, si σ unidades cuadradas es el área de la semiesfera, entonces

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r d\theta dr \\
 &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\
 &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \\
 &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - b^2} + a \right] \\
 &= 2\pi a^2
 \end{aligned}$$

Conclusión: El área de la semiesfera es $2\pi a^2$ unidades cuadradas. \blacktriangleleft

EJERCICIOS 13.4

En los ejercicios 1 a 6, utilice integrales dobles para calcular el área de la región.

1. La región ubicada dentro de la cardiode $r = 2(1 + \sin \theta)$.
2. Una hoja de la rosa $r = a \cos 2\theta$.
3. La región ubicada dentro de la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$ y fuera de la circunferencia $r = a$.
4. La región ubicada dentro de la circunferencia $r = 1$ y fuera de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.
5. La región que se encuentra dentro del lazo más grande del caracol

$$r = 2 - 4 \sin \theta$$

y fuera del lazo pequeño.

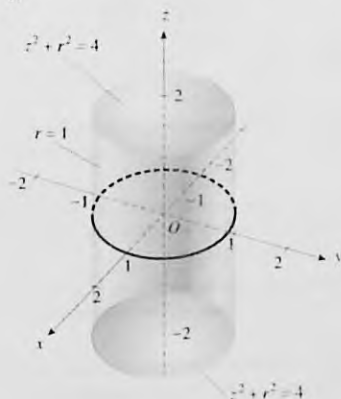
6. La región ubicada dentro del caracol $r = 3 - \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 5 \cos \theta$.

En los ejercicios 7 a 12, obtenga el volumen del sólido.

7. El sólido limitado por el elipsoide $z^2 + 9r^2 = 9$.



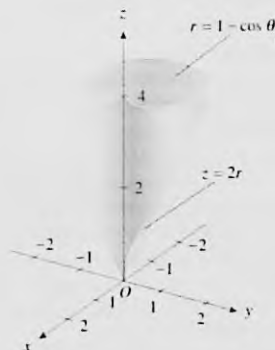
8. El sólido cortado en la esfera $z^2 + r^2 = 4$ por el cilindro $r = 1$.



9. El sólido cortado en la esfera $z^2 + r^2 = 16$ por el cilindro $r = 4 \cos \theta$.



10. El sólido sobre el plano polar limitado por el cono $z = 2r$ y el cilindro $r = 1 - \cos \theta$.



11. El sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - r^2$, el cilindro $r = 1$ y el plano polar.
12. El sólido ubicado por arriba del paraboloide $z = r^2$ y por debajo del plano $z = 2r \sin \theta$.

En los ejercicios 13 a 19, calcule la masa y el centro de masa de la lámina si la densidad superficial es la que se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

13. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 1. La densidad superficial varía conforme cambia la distancia medida desde el polo.

14. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 2. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.
15. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el caracol $r = 2 - \cos \theta$. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.
16. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el caracol $r = 2 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y el eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k sen θ kilogramos por metro cuadrado.
17. La lámina del ejercicio 16. La densidad superficial en cualquier punto es kr sen θ kilogramos por metro cuadrado.
18. Una lámina tiene la forma de la región del ejercicio 6. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.
19. Una lámina tiene la forma de la región acotada por el lazo pequeño del caracol del ejercicio 5. La densidad superficial varía como la distancia medida desde el polo.

En los ejercicios 20 a 24, calcule el momento de inercia de la lámina con respecto al eje o punto indicado si la densidad superficial es la que se indica. La masa se mide en kilogramos y la distancia en metros.

20. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la circunferencia $r = \sin \theta$; con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.
21. La lámina del ejercicio 20; con respecto al eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.
22. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la cardiode $r = a(1 - \cos \theta)$; con respecto al polo. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.
23. Una lámina tiene la forma de la región limitada por la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$ y la circunferencia $r = 2a \cos \theta$; con respecto al polo. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.
24. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$; con respecto al eje polar. La densidad superficial en cualquier punto es k kilogramos por metro cuadrado.
25. Una lámina homogénea tiene la forma de la región limitada por un lazo de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$. Calcule el radio de giro de la lámina con respecto a un eje perpendicular al plano polar que pase por el polo.
26. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la circunferencia $r = 4$, y la densidad superficial varía conforme la distancia medida desde el polo. Determine el radio de giro de la lámina con respecto a un eje perpendicular al plano polar que pase por el polo.
27. Evalúe por medio de coordenadas polares la integral

$$\iint_R e^{x^2 + y^2} dA$$

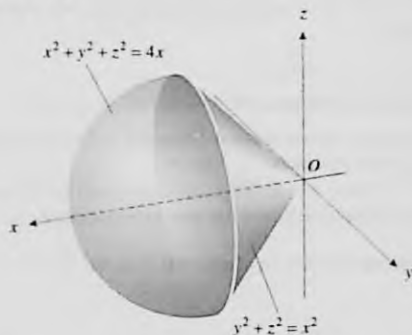
donde R es la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

28. Evalúe por medio de coordenadas polares la integral

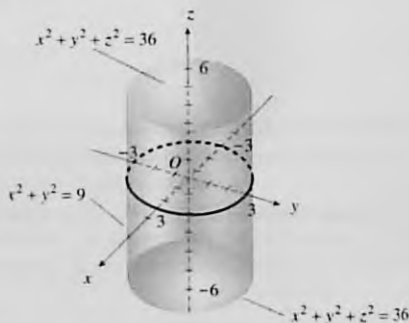
$$\iint_R \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y los ejes coordenados.

29. Calcule el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ cortada por un manto del cono $y^2 + z^2 = x^2$.



30. Determine el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.



31. Calcule el área de la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que se encuentra dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.
32. Para la esfera y el paraboloide del ejercicio 31, obtenga el área de la porción de la superficie del paraboloide que se encuentra dentro de la esfera.
33. Determine el área de la porción de la superficie $xy = az$ del primer octante que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
34. Calcule el área de la superficie cortada en el paraboloide hiperbólico $y^2 - x^2 = 6z$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 36$.

13.5 INTEGRALES TRIPLES

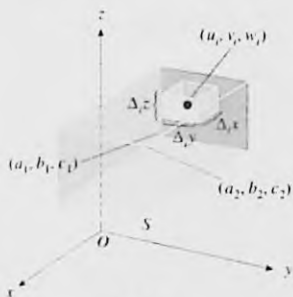


FIGURA 1

La extensión de la integral doble a la *integral triple* es análoga a la extensión de la integral simple a la integral doble. El tipo de región más simple en R^3 es un paralelepípedo rectangular limitado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$ y $z = c_2$, con $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$. Sea f una función de tres variables y suponga que f es continua en una región S de este tipo. Una partición de esta región se forma al dividir S en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Denote tal partición por Δ y suponga que se tienen n cajas. Sean $\Delta_i V$ unidades cúbicas el volumen de la i -ésima caja. Se elige un punto arbitrario (u_i, v_i, w_i) en la i -ésima caja y se forma la suma

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta_i V \quad (1)$$

Refiérase a la figura 1, la cual muestra el paralelepípedo rectangular junto con la i -ésima caja. La *norma* $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más grande de las cajas. Si las sumas de la forma (1) se aproximan a un límite conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero para cualesquiera elecciones de los puntos (u_i, v_i, w_i) , entonces este límite recibe el nombre de **integral triple** de f en S , y se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV$$

Una condición suficiente para que exista la integral triple de f en S es que f sea continua en S .

Así como una integral doble es igual a una integral iterada doble, la integral triple es igual a una integral iterada triple. Cuando S es el paralelepípedo rectangular descrito anteriormente, y f es continua en S , se tiene entonces

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx$$

► **EJEMPLO 1** Evalúe la integral triple

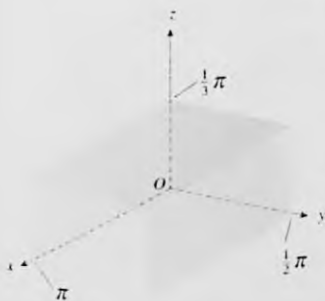
$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz \, dV$$

si S es el paralelepípedo rectangular limitado por los planos $x = \pi$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $z = \frac{1}{3}\pi$ y los planos coordenados.

Solución La figura 2 muestra el paralelepípedo rectangular S .

$$\iiint_S xy \operatorname{sen} yz \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} xy \operatorname{sen} yz \, dz dy dx$$

FIGURA 2



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi^2} [-x \cos yz]_0^{\pi/3} dy dx \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi^2} x(1 - \cos \frac{1}{3}\pi y) dy dx \\
 &= \int_0^{\pi} x \left(y - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi y \right) \Big|_0^{\pi^2} dx \\
 &= \int_0^{\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right) \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(\pi^2 - 6 \operatorname{sen} \frac{\pi^2}{6} \right)
 \end{aligned}$$

A continuación se discutirá cómo definir la integral triple de una función continua de tres variables en una región de R^3 diferente de un paralelepípedo rectangular. Sea S la región tridimensional cerrada y limitada por los planos $x = a$ y $x = b$, los cilindros $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$, y las superficies $z = F_1(x, y)$ y $z = F_2(x, y)$, donde las funciones ϕ_1, ϕ_2, F_1 y F_2 son lisas. Trace planos paralelos a los planos coordenados de modo que se forme un conjunto de paralelepípedos rectangulares que cubran toda la región S . Los paralelepípedos que se encuentran completamente dentro de S o en la frontera de S forman una **partición** Δ de S . Elija un sistema para numerar de 1 a n estos paralelepípedos. La norma $\|\Delta\|$ de esta partición de S es la longitud de la diagonal más grande de los n paralelepípedos. El volumen del i -ésimo paralelepípedo es $\Delta_i V$ unidades cúbicas. Sea f una función de tres variables continua en S , y sea (u_i, v_i, w_i) un punto arbitrario del i -ésimo paralelepípedo. Refiérase a la figura 3.

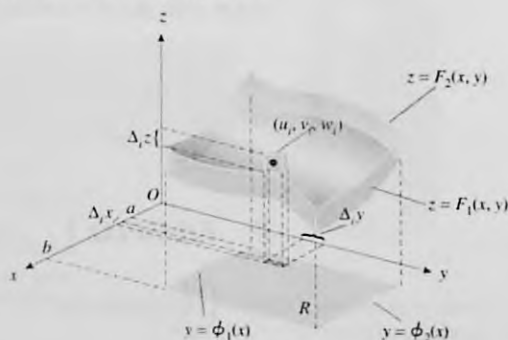


FIGURA 3

Forme la suma

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta_i V$$

Si esta suma tiene un límite conforme $\|\Delta\|$ tiende a cero, y si el límite es independiente de la elección de los planos de la partición y de los puntos arbi-

trios (u_i, v_i, w_i) en cada paralelepípedo, entonces el límite se denomina **integral triple** de f en S , y se escribe

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV \quad (2)$$

Se puede demostrar, en Cálculo avanzado, que una condición suficiente para que el límite de (2) exista es que f sea continua en S . Además, con la condición impuesta a las funciones ϕ_1 , ϕ_2 , F_1 y F_2 de que sean lisas, también es posible demostrar que la integral triple puede evaluarse mediante la integral iterada

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x, y)}^{F_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Así como la integral doble puede interpretarse como la medida del área de una región plana cuando $f(x, y) = 1$ en R , la integral triple puede interpretarse como la medida del volumen de una región tridimensional. Si $f(x, y, z) = 1$ en S , entonces (2) se transforma en

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V = \iiint_S dV$$

de modo que la integral triple es la medida del volumen de la región S .

► **EJEMPLO 2** Calcule el volumen del sólido del ejemplo 5 de la sección 13.2 mediante integración triple.

Solución El sólido se encuentra sobre el plano xy y está limitado por el paraboloides elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. Consulte la figura 4. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \end{aligned}$$

donde S es la región limitada por el sólido. Los límites de z son de 0 (el valor de z en el plano xy) a $x^2 + 4y^2$ (el valor de z en el paraboloides elíptico). Los límites de y para un cuarto del volumen son de 0 (el valor de y en plano xz) a $\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$ (el valor de y en el cilindro). Los límites de x para el primer octante son de 0 a 2. Al evaluar la integral triple por medio de una integral iterada se obtiene

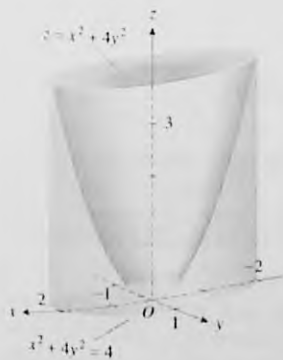


FIGURA 4

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2/2}} \int_0^{x^2+4y^2} dz \, dy \, dx \\
 &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2/2}} (x^2 + 4y^2) \, dy \, dx
 \end{aligned}$$

Ésta es la misma integral iterada doble que se obtuvo en el ejemplo 5 de la sección 13.2, por lo que el resto de la solución es la misma. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 25$, el plano $x + y + z = 8$ y el plano xy .

Solución El sólido se muestra en la figura 5. Los límites de z para la integral iterada son de 0 a $8 - x - y$ (el valor de z en el plano). Los límites de y se obtienen de la frontera de la región en el plano xy , la cual es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Por tanto, los límites para y son de $-\sqrt{25 - x^2}$ a $\sqrt{25 - x^2}$. Los límites para x son de -5 a 5 . Si V unidades cúbicas es el volumen requerido, entonces



FIGURA 5

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V \\
 &= \iiint dV \\
 &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (8 - x - y) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-5}^5 \left[(8 - x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_{-5}^5 (8 - x) \sqrt{25 - x^2} \, dx \\
 &= 16 \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} \, dx + \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} (-2x) \, dx \\
 &= 16 \left[\frac{1}{2}x\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} \right]_{-5}^5 + \frac{2}{3} (25 - x^2)^{3/2} \Big|_{-5}^5 \\
 &= 200\pi
 \end{aligned}$$

Conclusión: El volumen es 200π unidades cúbicas. ◀

▶ **EJEMPLO 4** Calcule la masa del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por el cono $9x^2 + z^2 = y^2$ y el plano $y = 9$ si la medida de la densidad volumétrica en cualquier punto (x, y, z) del sólido es proporcional a la medida de la distancia del punto al plano xy . La densidad volumétrica se mide en kilogramos por metro cúbico.

Solución La figura 6 muestra el sólido. Sean M kilogramos la masa del sólido. La densidad volumétrica en cualquier punto (x, y, z) del sólido es kz kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante. Si (u_i, v_i, w_i) es cualquier punto del i -ésimo paralelepípedo rectangular de la partición, entonces



FIGURA 6

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{\|S\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \mu_i \Delta_i V \\
 &= \iiint_S kz \, dV \\
 &= 2k \int_0^9 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx \\
 &= 2k \int_0^9 \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \, dy \, dx \\
 &= k \int_0^9 \int_0^{\sqrt{3}} (y^2 - 9x^2) \, dx \, dy \\
 &= \frac{2}{9} k \int_0^9 y^3 \, dy \\
 &= \frac{729}{2} k
 \end{aligned}$$

Conclusión: La masa es $\frac{729}{2}k$ kilogramos. ◀

EJERCICIOS 13.5

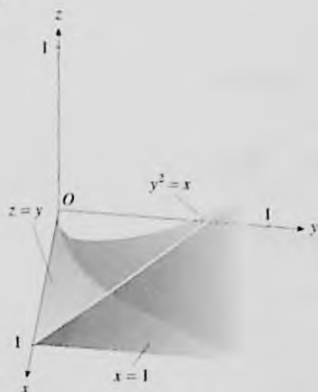
En los ejercicios 1 a 8, evalúe la integral iterada.

- $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x \, dz \, dy \, dx$
- $\int_1^2 \int_0^1 \int_1^{1+xy} xy \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x+y+z) \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z \, dx \, dz \, dy$
- $\int_{-4}^0 \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi^3} y \ln z \tan x \, dx \, dz \, dy$
- $\int_1^2 \int_1^y \int_0^{\ln 4} ye^z \, dz \, dx \, dy$
- $\int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{y}{z} \, dy \, dx \, dz$
- $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{xy} \frac{z}{x^2+z^2} \, dx \, dz \, dy$

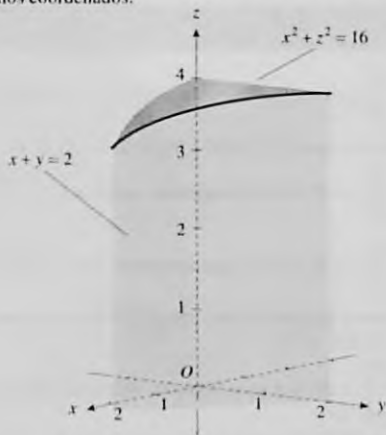
En los ejercicios 9 a 18, evalúe la integral triple.

- $\iiint_S y \, dV$ si S es la región limitada por el tetraedro formado por el plano $12x + 20y + 15z = 60$ y los planos coordenados.
- $\iiint_S (x^2 + z^2) \, dV$ si S es la región del ejercicio 9.
- $\iiint_S z \, dV$ si S es la región acotada por el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$.
- $\iiint_S yz \, dV$ si S es la región del ejercicio 11.
- $\iiint_S xy \, dV$ si S es el paralelepípedo rectangular del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 4$.
- $\iiint_S x \, dV$ si S es el tetraedro delimitado por los planos $x^2 + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.
- $\iiint_S dV$ si S es la región limitada por las superficies $z = x^2 + y^2$ y $yz = 27 - 2x^2 - 2y^2$.
- $\iiint_S y^2 \, dV$ si S es la región acotada por los cilindros $x^2 + y = 1$ y $yz^2 + y = 1$ y el plano $y = 0$.
- $\iiint_S (xz + 3z) \, dV$ si S es la región limitada por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x + y = 3$, $z = 0$ y $y = 0$, y ubicada arriba del plano xy .
- $\iiint_S xyz \, dV$ si S es la región acotada por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + z^2 = 4$.

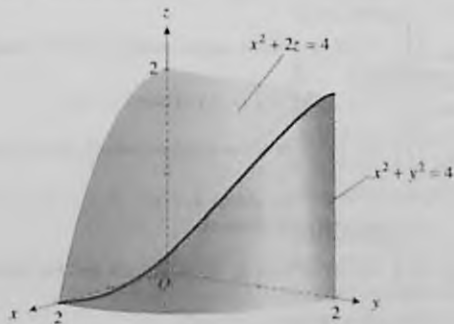
19. Calcule el volumen del sólido del primer octante limitado inferiormente por el plano xy , superiormente por el plano $z = y$, y lateralmente por el cilindro $y^2 = x$ y el plano $x = 1$.



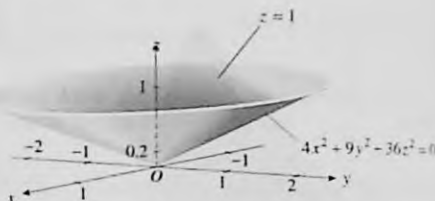
20. Determine el volumen del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + z^2 = 16$, el plano $x + y = 2$ y los tres planos coordenados.



21. Obtenga el volumen del sólido del primer octante limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + 2z = 4$ y los tres planos coordenados.



22. Calcule el volumen del sólido acotado por el cono elíptico $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ y el plano $z = 1$.



23. Determine el volumen del sólido ubicado sobre el paraboloide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ y debajo del cilindro $x^2 + z = 4$.
24. Obtenga el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
25. Calcule el volumen del sólido acotado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

26. Obtenga el volumen del sólido limitado por los cilindros $z = 5x^2$ y $z = 3 - x^2$, el plano $y + z = 4$ y el plano xz .
27. Determine la masa del sólido homogéneo acotado por el cilindro $z = 4 - x^2$, el plano $y = 5$ y los planos coordenados si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.
28. Calcule la masa del sólido limitado por el tetraedro formado por los planos $100x + 25y + 16z = 400$ y los planos coordenados si la densidad volumétrica varía como la distancia medida desde el plano yz . La densidad volumétrica se mide en kilogramos por metro cúbico.
29. Obtenga la masa del sólido acotado por los cilindros $x = z^2$ y $y = x^2$, y los planos $x = 1$, $y = 0$ y $z = 0$. La densidad volumétrica varía conforme el producto de las distancias medidas desde los tres planos coordenados, y se mide en kilogramos por metro cúbico.
30. Determine la masa del sólido limitado por la superficie $z = 4 - 4x^2 - y^2$ y el plano xy . La densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es $3z|x|$ kilogramos por metro cúbico.
31. Calcule la masa del sólido limitado por la superficie $z = x^3$ y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 0$. La densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es $3\sqrt{x^2 + y^2}$ kilogramos por metro cúbico.
32. Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo radio de la base mide r metros y cuya altura mide h metros. Calcule la masa del sólido si la densidad volumétrica varía como la distancia a una de las bases. La densidad volumétrica se mide en kilogramos por metro cúbico.

13.6 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

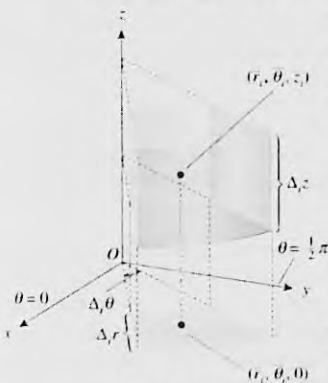


FIGURA 1

Si una región S de R^3 tiene un eje de simetría, las integrales triples en S son más fáciles de evaluar si se emplean coordenadas cilíndricas. Si la región es simétrica con respecto a un punto, entonces conviene elegir el punto como origen y emplear coordenadas esféricas. En esta sección se discutirán las integrales triples en estos sistemas coordenados y se aplicarán a problemas físicos.

A fin de definir la integral triple en coordenadas cilíndricas se construye una partición de la región S dibujando planos que contengan al eje z , planos perpendiculares al eje z y cilindros circulares rectos que tengan al eje z como eje. La figura 1 muestra una subregión típica. Los elementos de la partición construida se encuentran completamente en S . A esta partición se le denomina **partición cilíndrica**. La medida de la longitud de la "diagonal" más grande de todas las subregiones es la **norma** de la partición. Sea n el número de subregiones de la partición y sean $\Delta_i V$ unidades cúbicas el volumen de la i -ésima subregión. El área de la base de la i -ésima subregión es $\bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta$ unidades cuadradas, donde $\bar{r}_i = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$ como se mostró en la sección 13.4. En consecuencia, si $\Delta_i z$ unidades es la altura de la i -ésima subregión, entonces

$$\Delta_i V = \bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta \Delta_i z$$

Sea f una función de r , θ y z , y suponga que f es continua en S . Elija un punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ en la i -ésima subregión tal que $\theta_{i-1} \leq \theta_i \leq \theta_i$, y $z_{i-1} \leq \bar{z}_i \leq z_i$. Forme la suma

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta \Delta_i z \quad (1)$$

Si la norma de Δ tiende a cero, se puede demostrar, con ciertas condiciones sobre S , que el límite de esta suma existe. Este límite se denomina **integral triple en coordenadas cilíndricas** de la función f en S , y se escribe

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V &= \iiint_S f(r, \theta, z) dV \\ \Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_r \Delta_\theta \Delta_i z &= \iiint_R f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

Observe que en coordenadas cilíndricas, $dV = r dr d\theta dz$. De modo que puede evaluarse una integral triple por medio de una integral iterada. Por ejemplo, suponga que la región S de R^3 está limitada por los planos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, con $\alpha < \beta$, por los cilindros $r = \lambda_1(\theta)$ y $r = \lambda_2(\theta)$, donde λ_1 y λ_2 son lisas en $[\alpha, \beta]$ y $\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$, y por las superficies $z = F_1(r, \theta)$ y $z = F_2(r, \theta)$, donde F_1 y F_2 son dos funciones de dos variables y que son lisas en alguna región R del plano polar limitada por las curvas $r = \lambda_1(\theta)$, $r = \lambda_2(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. También suponga que $F_1(r, \theta) \leq F_2(r, \theta)$ para todo punto (r, θ) de R . Entonces la integral triple puede evaluarse como una integral iterada por medio de la fórmula

$$\iiint_S f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r, \theta)}^{F_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

Existen otras cinco integrales iteradas que pueden emplearse para evaluar la integral triple ya que se tienen seis permutaciones posibles de las tres variables r , θ y z .

Las integrales triples y las coordenadas cilíndricas son útiles especialmente cuando se calcula el momento de inercia de un sólido con respecto al eje z debido a que la distancia desde el eje z a un punto del sólido está determinada por la coordenada r .

EJEMPLO 1 Un sólido homogéneo tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo radio de la base mide 2 m y cuya altura es de 4 m. Calcule el momento de inercia del sólido con respecto a su eje.

Solución Elija los planos coordenados de modo que el plano xy coincida con la base del sólido y el eje z sea el eje del sólido. La figura 2 muestra la porción del sólido en el primer octante junto con la i -ésima subregión de una partición cilíndrica. Al emplear coordenadas cilíndricas y tomar el punto $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ de la i -ésima subregión con k kilogramos por metro cúbico como la densidad volumétrica en cualquier punto, y si I_z kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sólido con respecto al eje z , entonces

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i^2 k \Delta_i V \\ &= \iiint_S k r^2 dV \end{aligned}$$

Se tiene seis órdenes posibles de integración. En la figura 2 se muestra el orden $dz dr d\theta$. Al emplear este orden se obtiene

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_S k r^2 r dz dr d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 r^3 dz dr d\theta \end{aligned}$$

En la primera integración se suman los bloques desde $z = 0$ hasta $z = 4$; por lo que los bloques se transforman en una columna mostrada en la figura. En la segunda integración se suman las columnas desde $r = 0$ hasta $r = 2$; de modo que las columnas se transforman en una rebanada del cilindro en forma de cuña, también mostrada en la figura. En la tercera integración se gira la cuña desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$; esto hace que la cuña se desplace por toda la región tridimensional del primer octante. Después se multiplica por 4 para obtener el volumen completo. Al realizar la integración se obtiene

$$\begin{aligned} I_z &= 16k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

Conclusión: El momento de inercia es $32k\pi \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

EJEMPLO 2 Resuelva el ejemplo 1 tomando el orden de integración indicado: (a) $dr dz d\theta$, (b) $d\theta dr dz$.



FIGURA 2

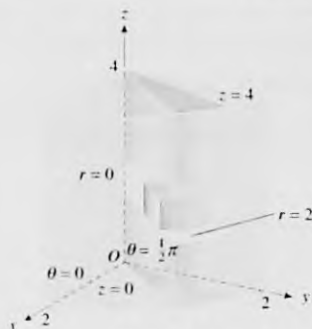


FIGURA 3



FIGURA 4

Solución

- (a) En la figura 3 se ilustra el orden $dr dz d\theta$. En ella se muestran los bloques sumados desde $r = 0$ hasta $r = 2$ para obtener un sector en forma de cuña. Después se suman desde $z = 0$ hasta $z = 4$, lo que produce una rebanada en forma de cuña también mostrada en la figura. Luego, se gira la cuña desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$ a fin de cubrir el primer octante. Entonces

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^2 r^3 dr dz d\theta \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

- (b) La figura 4 muestra el orden $d\theta dr dz$. En ella se presentan los bloques sumados desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$ para obtener un anillo dentro del cilindro. Después se suman estos anillos desde $r = 0$ hasta $r = 2$, lo que produce una rebanada horizontal del cilindro. Luego se suman las rebanadas horizontales desde $z = 0$ hasta $z = 4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^3 d\theta dr dz \\ &= 32k\pi \end{aligned}$$

► **EJEMPLO 3** Calcule la masa de una semiesfera sólida de radio a metros si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al eje x , y se mide en kilogramos por metro cúbico.

Solución Si se eligen los planos coordenados de modo que el origen sea el centro de la esfera y el eje z sea el eje del sólido, entonces una ecuación de la superficie semiesférica ubicada por arriba del plano xy es $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. La figura 5 muestra esta superficie y el sólido junto con la i -ésima subregión de una partición cilíndrica. Una ecuación de la semiesfera en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Si $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ es un punto de la i -ésima subregión, entonces la densidad volumétrica en este punto es $k\bar{r}_i$ kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante; y si M kilogramos es la masa del sólido, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\bar{r}_i \Delta_i V \\ &= \iiint_S k r \, dV \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 dz dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4} r(a^2 - r^2)^{3/2} + \frac{1}{8} a^2 r \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{1}{8} a^4 \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\ &= \frac{1}{16} k a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{8} k a^4 \pi^2 \end{aligned}$$



FIGURA 5

Conclusión: La masa de la semiesfera sólida es $\frac{1}{8} k a^4 \pi^2$ kilogramos.

► **EJEMPLO 4** Determine el centro de masa del sólido del ejemplo 3.

Solución Sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ una representación en coordenadas cartesianas del centro de masa. Debido a la simetría, $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$, por lo que se necesita calcular \bar{z} . Si M_{xy} kg-m es el momento de masa del sólido con respecto al plano xy , entonces

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{z}_i (k\bar{r}_i) \Delta_i V \\ &= \iiint_S k z r \, dV \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{a^2-r^2} z r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{15} k a^5 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2}{15} k a^5 \pi \end{aligned}$$

Como $M\bar{z} = M_{xy}$, se obtiene $\bar{z} = M_{xy}/M$; de modo que

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\frac{2}{15} k a^5 \pi}{\frac{1}{8} k a^4 \pi^2} \\ &= \frac{16}{15\pi} a \end{aligned}$$

Conclusión: El centro de masa se encuentra sobre el eje del sólido a una distancia de $16a/15\pi$ metros sobre el plano de la base. ◀

Ahora se procederá a definir la integral triple en coordenadas esféricas. Una **partición esférica** de la región tridimensional S se forma al trazar planos que contengan al eje z , esferas con centro en el origen, y conos circulares que tengan su vértice en el origen y el eje z como su eje. La figura 6 muestra una subregión típica de la partición. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la i -ésima subregión, y $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ es un punto en ella, puede obtenerse una aproximación de $\Delta_i V$ al considerar la región como si fuese un paralelepípedo rectangular y tomando el producto de las medidas de las tres dimensiones. Estas medidas son $\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \theta$, $\bar{\rho}_i \Delta_i \phi$, y $\Delta_i \rho$. Las figuras 7 y 8 ilustran cómo se obtienen las dos primeras medidas, mientras que la figura 6 muestra la dimensión de la medida $\Delta_i \rho$. En consecuencia,

$$\Delta_i V = \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi$$

La **integral triple en coordenadas esféricas** de una función f en S está definida por

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \Delta_i V &= \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) \, dV \\ \Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi &= \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

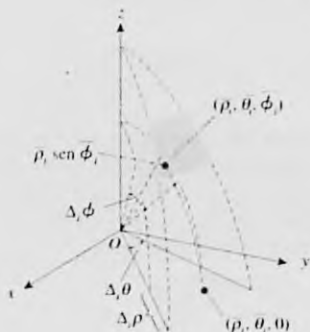


FIGURA 6

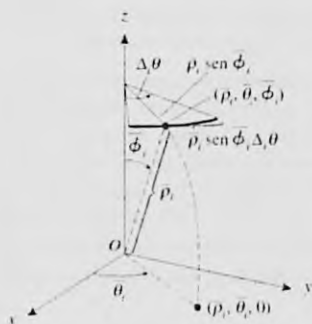


FIGURA 7

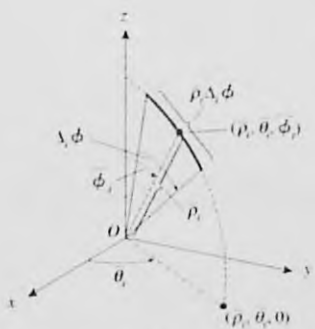


FIGURA 8

La integral triple puede evaluarse mediante una integral iterada. Observe que en coordenadas esféricas, $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$.

Las coordenadas esféricas son especialmente útiles en algunos problemas que involucren esferas, como en el ejemplo siguiente.

▶ EJEMPLO 5 Calcule la masa de la semiesfera sólida del ejemplo 3 si la densidad volumínica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al centro de la base.

Solución Si (ρ, θ, ϕ) es un punto de la i -ésima subregión de una partición esférica, entonces la densidad volumínica en este punto es $k\rho_i$ kilogramos por metro cúbico, donde k es una constante. Si M kilogramos es la masa del sólido, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\rho_i \Delta_i V \\ &= \iiint_S k\rho \, dV \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= a^4 k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} a^4 k \pi \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} a^4 k \pi [-\cos \phi]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} a^4 k \pi \end{aligned}$$

Conclusión: La masa de la semiesfera sólida es $\frac{1}{2} a^4 k \pi$ kilogramos. ◀

Resulta interesante comparar la solución del ejemplo 5, en la cual se utilizan coordenadas esféricas, con la que se obtuvo cuando se emplearon coordenadas cartesianas. En el último método se generó una partición de S cuando se dividió en cajas rectangulares al trazar planos paralelos a los planos coordenados. Si (u_i, v_i, w_i) es cualquier punto de la i -ésima subregión, y como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV \\ &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

El cálculo implicado en la evaluación de esta integral es obviamente mucho más complicado que cuando se emplearon coordenadas esféricas.

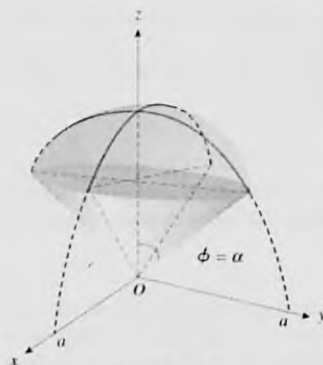


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Un sólido homogéneo está limitado superiormente por la superficie $\rho = a$ e inferiormente por el cono $\phi = \alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Calcule el momento de inercia del sólido con respecto al eje z . La densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.

Solución En la figura 9 se muestra el sólido. Considere una partición esférica y sea $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ un punto de la i -ésima subregión. La medida de la distancia del punto $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ al eje z es $\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i$. En consecuencia, si I_z kilogramos-metro cuadrado es el momento de inercia del sólido con respecto al eje z , entonces

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i)^2 k \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \rho^2 \sin^2 \phi \, dV \\ &= k \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{5} k a^5 \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \int_0^\alpha \sin^3 \phi \, d\phi \\ &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\alpha \\ &= \frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \end{aligned}$$

Conclusión: El momento de inercia del sólido con respecto al eje z es $\frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2)$ kg·m².

EJERCICIOS 13.6

En los ejercicios 1 a 6, evalúe la integral iterada.

$$1. \int_0^{\pi/4} \int_0^a \int_0^{r \cos \theta} r \sec^3 \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$2. \int_0^{\pi/4} \int_{2 \sec \theta}^{2 \cos \theta} \int_0^{r \sec \theta} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$3. \int_0^\pi \int_2^4 \int_0^1 r e^z \, dz \, dr \, d\theta$$

$$4. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$5. \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \phi} \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$$

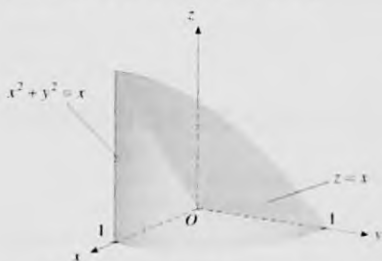
$$6. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^\phi \int_0^{a \csc \theta} \rho^3 \sin^2 \theta \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

7. Calcule el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ empleando (a) coordenadas cilíndricas, y (b) coordenadas esféricas.

8. Si S es el sólido del primer octante limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y los planos coordenados, evalúe la integral triple $\iiint_S xyz \, dV$ mediante tres métodos: (a) utilizando coordenadas esféricas; (b) empleando coordenadas rectangulares; (c) usando coordenadas cilíndricas.

En los ejercicios 9 a 16, utilice coordenadas cilíndricas.

9. Calcule el volumen del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = x$.



10. Determine el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ y el plano xy .



11. Obtenga el volumen del sólido acotado por el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 12$ y el plano $z = 8$.
12. Calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano xy .
13. Determine la masa del sólido acotado por una esfera de radio a metros si la densidad volumétrica varía de acuerdo al cuadrado de la distancia desde el centro. La densidad volumétrica se mide en kilogramos por metro cúbico.
14. Obtenga la masa del sólido del primer octante ubicado dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ y que se encuentra debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. La densidad volumétrica varía de acuerdo a la distancia desde el plano xy , y se mide en kilogramos por metro cúbico.
15. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo limitado por el cilindro $r = 5$, el cono $z = r$ y el plano xy . La densidad volumétrica en cualquier punto es k slugs por pie cúbico.
16. Determine el momento de inercia del sólido limitado por un cilindro circular recto de altura h metros y radio a metros, con respecto al eje del cilindro. La densidad volumétrica varía de acuerdo a la distancia al eje del cilindro, y se mide en kilogramos por metro cúbico.
17. Obtenga la masa del sólido del ejercicio 13 mediante el uso de coordenadas esféricas.

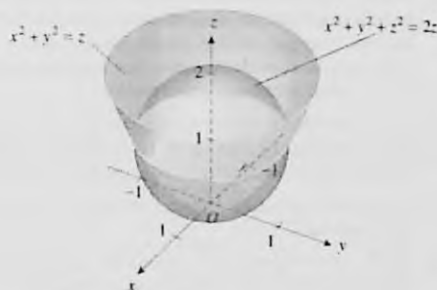
18. Utilice coordenadas esféricas para calcular el centro de masa del sólido limitado por la semiesfera del ejemplo 5. La densidad volumétrica es la misma que en ese ejemplo.

En los ejercicios 19 a 22, emplee coordenadas esféricas.

19. Determine el volumen del sólido ubicado dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y que se encuentra arriba del cono $x^2 + y^2 = z^2$.



20. Obtenga el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ y por arriba del paraboloide $x^2 + y^2 = z$.



21. Determine el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo ubicado dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x = 0$, debajo del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y por arriba del plano xy . La densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es k kilogramos por metro cúbico.
22. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. La densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es k slugs por pie cúbico.

En los ejercicios 23 a 28, utilice el sistema coordenado que crea más conveniente para el problema.

23. Obtenga la masa de la semiesfera sólida de radio 2 m si la densidad volumétrica varía de acuerdo a la distancia desde el centro de la base y se mide en kilogramos por metro.
24. Determine la masa del sólido homogéneo que se encuentra dentro del paraboloide $3x^2 + 3y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$ si la densidad volumétrica constante es k kilogramos por metro cúbico.

25. Calcule el momento de inercia con respecto a un diámetro del sólido ubicado entre dos esferas de radios a pies y $2a$ pies. La densidad volumétrica varía inversamente al cuadrado de la distancia desde el centro, y se mide en slugs por pie cúbico.
26. Obtenga la masa del sólido del ejercicio 25. La densidad volumétrica es la misma de ese ejercicio.
27. Determine el centro de masa del sólido ubicado dentro del paraboloido $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. La densidad volumétrica constante es k kilogramos por metro cúbico.
28. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del sólido homogéneo del ejercicio 27.

En los ejercicios 29 a 32, evalúe la integral iterada empleando coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas.

$$29. \int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx \, dz$$

$$30. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dz \, dy \, dx$$

$$31. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2+y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

$$32. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 13

► SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 13

- Defina las *coordenadas cilíndricas* de un punto del espacio tridimensional.
- Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas cilíndricas. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cilíndricas en términos de las coordenadas cartesianas. Haga un dibujo que muestre cómo se obtienen estas ecuaciones.
- Si la representación en coordenadas cilíndricas de un punto es (r, θ, z) , describa cada una de las siguientes superficies donde c es una constante: (a) $r = c$; (b) $\theta = c$; (c) $z = c$.
- Defina las *coordenadas esféricas* de un punto del espacio tridimensional.
- Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas esféricas. Escriba las ecuaciones que expresan las coordenadas esféricas en términos de las coordenadas cartesianas. Haga un dibujo que muestre cómo se obtienen estas ecuaciones.
- Si la representación en coordenadas esféricas de un punto es (ρ, θ, ϕ) , describa cada una de las siguientes superficies donde c es una constante: (a) $\rho = c$; (b) $\theta = c$; (c) $\phi = c$.
- Defina el *límite de una suma de Riemann* de una función de dos variables.
- Defina la *integral doble* de una función de dos variables en una *región rectangular cerrada* del plano.
- ¿Cómo puede extenderse la definición de la sugerencia 8 a la de integral doble de una función sobre una región del plano más general?
- Dé una interpretación geométrica de la integral doble.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se calcula el volumen de un sólido mediante una integral doble.
- ¿Cómo se utilizan las *integrales iteradas* para evaluar una integral doble? Invente un ejemplo.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se determina el *área de una región plana* por medio de una integral doble.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se calculan la *masa* y el *centro de masa* de una lámina mediante una integral doble.
- Invente un ejemplo que muestre cómo puede calcularse el *momento de inercia* con respecto a un eje por medio de una integral doble.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se obtiene el *momento polar de inercia* mediante una integral doble.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se determina el *radio de giro* de una lámina con respecto a un eje por medio de una integral doble.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se calcula el *área de una superficie* mediante una integral doble.
- Escriba la fórmula, que involucre una integral simple, para calcular el *área de una superficie de revolución*. Invente un ejemplo que muestre la aplicación de esta fórmula.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se utiliza una *integral doble en coordenadas polares* para calcular el volumen de un sólido.
- Invente un ejemplo que muestre cómo se pueden emplear las integrales dobles en coordenadas polares para calcular la masa y el centro de masa de una lámina.
- Invente un ejemplo que ilustre cómo se puede calcular el área de una región del plano polar mediante integración doble.
- ¿Cómo puede cambiarse una integral doble en coordenadas rectangulares a una integral doble en coordenadas polares? Invente un ejemplo que muestre un caso en el que un cambio de coordenadas sea conveniente.
- Defina la *integral triple* de una función de tres variables en un *paralelepípedo rectangular*.

25. ¿Cómo se utilizan las integrales iteradas para calcular integrales triples? Invente un ejemplo.
26. Invente un ejemplo que ilustre cómo se puede calcular el volumen de un sólido por medio de integración triple.
27. Defina una *integral triple en coordenadas cilíndricas* y una *integral triple en coordenadas esféricas*.
28. ¿Cuándo es ventajoso emplear una integral triple en coordenadas cilíndricas en lugar de una integral triple en coordenadas rectangulares? Invente un ejemplo.
29. ¿Cuándo es ventajoso emplear una integral triple en coordenadas esféricas en lugar de una integral triple en coordenadas rectangulares? Invente un ejemplo.

► EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 13

- Determine un conjunto de coordenadas cilíndricas para el punto que tiene coordenadas cartesianas $(3, \pi, \frac{1}{3}\pi)$.
- Otenga un conjunto de coordenadas esféricas para el punto que tiene coordenadas cartesianas $(-3, -3, 2)$.
- Determine una ecuación en coordenadas cilíndricas de la gráfica de la ecuación: (a) $(x + y)^2 + 1 = z$, (b) $25x^2 + 4y^2 = 100$.
- Otenga una ecuación en coordenadas esféricas de la gráfica de la ecuación: (a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, (b) $4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$.

En los ejercicios 5 a 12, evalúe la integral iterada.

- $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} x^2 y \, dy \, dx$
- $\int_{-2}^2 \int_{-4-y^2}^{4-y^2} xy \, dx \, dy$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r \cos^2 \theta \, dr \, d\theta$
- $\int_0^{\pi} \int_0^{3(1+\cos \theta)} r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta$
- $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{3+z} e^x e^y e^z \, dx \, dy \, dz$
- $\int_1^2 \int_3^4 \int_0^{(y-1)^2} \frac{y}{y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$
- $\int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{a^2-z^2} z r e^{-r^2} \, dr \, d\theta \, dz$

En los ejercicios 13 a 16, evalúe la integral múltiple.

- $\iint_R xy \, dA$, R es la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y los ejes coordenados.
- $\iint_R (x + y) \, dA$, R es la región delimitada por la curva $y = \cos x$ y el eje x desde $x = -\frac{1}{2}\pi$ hasta $x = \frac{1}{2}\pi$.

- $\iiint_S z^2 \, dV$, S es la región limitada por los cilindros $x^2 + z = 1$ y $y^2 + z = 1$ y el plano xy .
- $\iiint_S y \cos(x + z) \, dV$, S es la región acotada por el cilindro $x = y^2$ y los planos $x + z = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$ y $z = 0$.
- Evalúe mediante coordenadas polares la integral doble

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} \, dA$$

donde R es la región del primer cuadrante limitada por las dos circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

18. Evalúe mediante coordenadas polares la integral iterada

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

En los ejercicios 19 y 20, evalúe la integral iterada invirtiendo el orden de integración.

- $\int_0^1 \int_1^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx$
- $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1}y} e^{\operatorname{sen} x} \, dx \, dy$

En los ejercicios 21 y 22, utilice integrales dobles para calcular el área de la región limitada por las curvas del plano xy . Dibuje la región.

- $y = x^2$ y $y = x^4$
- $y = \sqrt{x}$ y $y = x^3$

En los ejercicios 23 y 24, evalúe la integral iterada cambiando a coordenadas cilíndricas o esféricas.

- $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$
- $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} \, dz \, dy \, dx$

- Utilice integración doble para determinar el área de la región del primer cuadrante limitada por las parábolas $x^2 = 4y$ y $x^2 = 8 - 4y$. Integre primero con respecto a x .
- Emplee integración doble para calcular el área de la región del plano xy acotada por las parábolas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$. Integre primero con respecto a x .

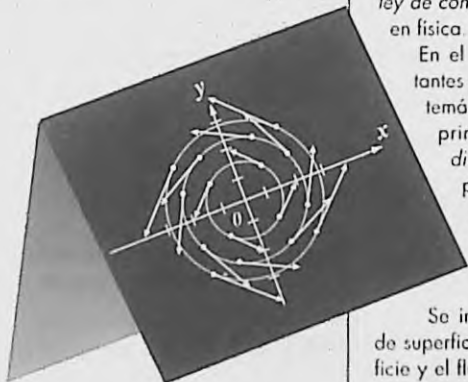
27. Use integración doble a fin de obtener el área de la región del ejercicio 25 integrando primero con respecto a y .
28. Utilice integración doble para determinar el área de la región del ejercicio 26 integrando primero con respecto a y .
29. Emplee integración doble con el propósito de calcular el volumen del sólido limitado por los planos $x = y$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$ y $z = 1$. Integre primero con respecto a x .
30. Use integración doble para obtener el volumen del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $z = 2y$. Integre primero con respecto a x .
31. Utilice integración doble a fin de determinar el volumen del ejercicio 29 integrando primero con respecto a y .
32. Emplee integración doble para calcular el volumen del sólido del ejercicio 30 integrando primero con respecto a y .
33. Obtenga el volumen del sólido ubicado por arriba del plano xy y limitado por las superficies $x^2 = 4y$, $y^2 = 4x$ y $x^2 = z - y$.
34. Determine la masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y + 2 = 0$, si la densidad superficial en cualquier punto es $x^2 y^2$ kilogramos por metro cuadrado.
35. Calcule el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ ubicada en el primer octante y que se encuentra entre los planos $x = z$ y $3x = z$.
36. Obtenga el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$.
37. Utilice integración doble con el objeto de determinar el área de la región ubicada dentro de la circunferencia $r = 1$ y a la derecha de la parábola $r(1 + \cos \theta) = 1$.
38. Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región exterior al caracol $r = 3 - \cos \theta$ y que está en el interior de la circunferencia $r = 5 \cos \theta$ si la densidad superficial en cualquier punto es $2 |\sin \theta|$ kilogramos por metro cuadrado.
39. Obtenga el centro de masa de la lámina rectangular limitada por las rectas $x = 3$ y $y = 2$ y los ejes coordenados si la densidad superficial en cualquier punto es xy^2 kilogramos por metro cuadrado.
40. Determine el centro de masa de la lámina que tiene la forma de la región acotada por las parábolas $x^2 = 4 + 4y$ y $x^2 = 4 - 8y$ si la densidad superficial en cualquier punto es kx^2 kilogramos por metro cuadrado.
41. Calcule la masa de la lámina que tiene la forma de la región limitada por el eje polar y la curva $r = \cos 2\theta$, donde $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. La densidad superficial en cualquier punto es $r\theta$ kilogramos por metro cuadrado.
42. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje x de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ si la densidad superficial en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2}$ kilogramos por metro cuadrado.
43. Utilice coordenadas cilíndricas a fin de determinar el volumen del sólido limitado por el paraboloides $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4ay$ y el plano $z = 0$.
44. Use coordenadas esféricas con el objeto de calcular la masa de la esfera sólida de radio a metros si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es proporcional a la distancia del punto al centro de la esfera. La densidad volumétrica se mide en kilogramos por metro cúbico.
45. Emplee integración triple para obtener el volumen del sólido acotado por el plano $z = 1$ y el segmento más pequeño de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ cortado por este plano.
46. Utilice integración triple a fin de determinar el volumen del sólido del primer octante limitado por el plano $y + z = 8$, el cilindro $y = 2z^2$, el plano xy y el plano yz .
47. Calcule el momento de inercia con respecto al eje x de la lámina que tiene la forma de la región acotada por la curva $y = e^x$, la recta $x = 2$ y los ejes coordenados si la densidad superficial en cualquier punto es xy kilogramos por metro cuadrado.
48. Obtenga el momento de inercia de la lámina del ejercicio 47.
49. Determine el momento de inercia con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ de la lámina homogénea que tiene la forma de la región acotada por la curva $r^2 = 4 \cos 2\theta$ si la densidad superficial en cualquier punto es de k kilogramos por metro cuadrado.
50. Calcule la masa de la lámina del ejercicio 49.
51. Obtenga el momento polar de inercia y el radio de giro correspondiente de la lámina del ejercicio 49.
52. Determine el momento de inercia con respecto al eje y de la lámina que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $x + y = 0$, si la densidad superficial en cualquier punto es $(x + y)$ kilogramos por metro cuadrado.
53. Calcule la masa del sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ si la densidad volumétrica en cualquier punto es $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kilogramos por metro cúbico.
54. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje z del sólido del ejercicio 53.
55. El sólido homogéneo limitado por el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ y ubicado entre los planos $z = 0$ y $z = 4$ tiene una densidad volumétrica de k kilogramos por metro cúbico en cualquier punto. Determine el momento de inercia con respecto al eje z para este sólido.
56. Calcule el centro de masa del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ y que se encuentra por arriba del cono $x^2 + y^2 = z^2$, si la densidad volumétrica en cualquier punto del sólido es kz kilogramos por metro cúbico.

Introducción al cálculo de campos vectoriales

Capítulo 14

VISIÓN PRELIMINAR

- 14.1 Campos vectoriales
- 14.2 Integrales de línea
- 14.3 Integrales de línea independientes de la trayectoria
- 14.4 Teorema de Green
- 14.5 Integrales de superficie
- 14.6 Teorema de la divergencia de Gauss y teorema de Stokes



Este capítulo final sirve como introducción a los conceptos elementales de campos vectoriales, mismos que se desarrollan completamente en los cursos de Cálculo avanzado. De igual forma que en el capítulo 13, el estudio de varios de estos conceptos y de algunos métodos es informal e intuitivo.

Los *campos vectoriales*, (funciones que asocian vectores con puntos del espacio), la *divergencia* y el *rotacional* de un vector se presentan en la sección 14.1. Después, en la sección 14.2, se aplican las *integrales de línea* para calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva. Las *integrales de línea independientes de la trayectoria* se estudian en la sección 14.3, donde se presenta un teorema análogo al segundo teorema fundamental del Cálculo para integrales de línea. También en esta sección se demuestra la *ley de conservación de energía*, concepto muy importante en física.

En el Cálculo vectorial existen tres teoremas importantes que reciben sus nombres en honor de tres matemáticos: el *teorema de Green*, el cual es el tema principal de la sección 14.4; el *teorema de la divergencia de Gauss* y el *teorema de Stokes* se presentan en la sección final, después de la sección 14.5 que trata sobre *integrales de superficie*. Las aplicaciones de estos tres teoremas en física, química e ingeniería se estudian en los cursos de estas disciplinas.

Se incluyen algunas aplicaciones de las integrales de superficie en las que se calcula la masa de una superficie y el flujo de un campo de velocidad a través de una superficie.

14.1 CAMPOS VECTORIALES

A fin de preparar el terreno para el estudio de *campos vectoriales*, se mostrará cómo se determina si una función vectorial particular es el gradiente de alguna función real f , y si lo es, de qué forma determinar tal función. Primero considere el problema de cómo obtener f si se conoce su gradiente. Esto es, se tiene

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

y se desea determinar $f(x, y)$.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Suponga que

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j} \quad (2)$$

Como la ecuación (1) debe satisfacerse, entonces se infiere que

$$f_x(x, y) = y^2 + 2x + 4 \quad (3)$$

$$f_y(x, y) = 2xy + 4y - 5 \quad (4)$$

Al integrar ambos miembros de (3) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y) \quad (5)$$

Observe que la "constante" de integración es una función de y e independiente de x debido a que se integró con respecto a x . Si ahora se derivan parcialmente los dos miembros de (5) con respecto a y , se obtiene

$$f_y(x, y) = 2xy + g'(y) \quad (6)$$

Las ecuaciones (4) y (6) son dos expresiones para $f_y(x, y)$. En consecuencia,

$$2xy + 4y - 5 = 2xy + g'(y)$$

Por tanto,

$$g'(y) = 4y - 5 \quad \text{y} \quad g(y) = 2y^2 - 5y + K$$

Al sustituir este valor de $g(y)$ en (5) resulta

$$f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

donde K es una constante arbitraria. ◀

Cada vector de la forma $M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ no necesariamente es un gradiente, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se demostrará que no existe una función f tal que

$$\nabla f(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} \quad (7)$$

Suponga que existe tal función. Entonces se deduce que

$$f_x(x, y) = 3y \quad (8)$$

y

$$f_y(x, y) = -2x \quad (9)$$

Si se integran los miembros de (8) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = 3xy + g(y)$$

Al derivar parcialmente los dos miembros de esta ecuación con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y) = 3x + g'(y)$$

Si se igualan los miembros derechos de esta ecuación y de (9) resulta

$$\begin{aligned} 3x + g'(y) &= -2x \\ g'(y) &= -5x \end{aligned}$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a x se obtiene

$$0 = -5$$

lo cual, por supuesto, no es verdad. Así, la suposición de que $3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ es un gradiente conduce a una contradicción. ◀

A continuación se estudiará una condición que debe satisfacer un vector para que sea un gradiente.

Suponga que M_y y N_x son continuas en un disco abierto B de R^2 . Si

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \tag{10}$$

es un gradiente en B , entonces existe una función f tal que

$$f_x(x, y) = M(x, y) \tag{11}$$

$$f_y(x, y) = N(x, y) \tag{12}$$

para todo (x, y) de B . Como $M_y(x, y)$ existe en B , entonces, de (11),

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y) \tag{13}$$

Además, como $N_x(x, y)$ existe en B , entonces, de (12),

$$N_x(x, y) = f_{yx}(x, y) \tag{14}$$

Debido a que M_y y N_x son continuas en B , sus equivalentes f_{xy} y f_{yx} también son continuas en B . Así, por el teorema 12.3.3, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ en todos los puntos de B . Por tanto, los miembros izquierdos de (13) y (14) son iguales en todos los puntos de B . De este modo se ha demostrado que si M_y y N_x son continuas en un disco abierto B de R^2 , entonces una condición necesaria para que el vector (10) sea un gradiente en B es que

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{15}$$

Esta ecuación también es una condición suficiente para que el vector (10) sea un gradiente en B . Si (15) se cumple entonces se puede mostrar cómo obtener una función f tal que el vector (10) sea un gradiente. Sin embargo, la demostración de que dicha función existe, siempre que (15) se cumpla, pertenece a un curso de Cálculo avanzado. El método para determinar f es una generalización de lo que se hizo en el ejemplo ilustrativo 1. De esta forma, se tiene el teorema siguiente.

14.1.1 Teorema

Suponga que M y N son funciones de las variables x y y definidas en un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ de R^2 , y que M_y y N_x son continuas en B . Entonces el vector

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

es un gradiente en B si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

en todos los puntos de B .

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

- (a) Se aplicará el teorema 14.1.1 al vector del miembro derecho de (2) del ejemplo ilustrativo 1. Sean

$$\begin{aligned} M(x, y) &= y^2 + 2x + 4 & N(x, y) &= 2xy + 4y - 5 \\ M_y(x, y) &= 2y & N_x(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

De modo que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, y por tanto, el vector es un gradiente.

- (b) Si se aplica el teorema 14.1.1 al vector del miembro derecho de la ecuación (7) del ejemplo ilustrativo 2, con $M(x, y) = 3y$ y $N(x, y) = -2x$, entonces se tiene

$$M_y(x, y) = 3 \quad N_x(x, y) = -2$$

En consecuencia, $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$; de modo que el vector no es un gradiente. \blacktriangleleft

EJEMPLO 1 Determine si el vector

$$(e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}$$

es un gradiente $\nabla f(x, y)$, y si lo es, entonces obtenga $f(x, y)$.

Solución Se aplicará el teorema 14.1.1. Sean

$$\begin{aligned} M(x, y) &= e^{-y} - 2x & N(x, y) &= -xe^{-y} - \sin y \\ M_y(x, y) &= -e^{-y} & N_x(x, y) &= -e^{-y} \end{aligned}$$

Por tanto $M_y(x, y) = N_x(x, y)$; de modo que el vector dado es un gradiente $\nabla f(x, y)$. Además,

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \tag{16}$$

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \sin y \tag{17}$$

Al integrar ambos miembros de (16) con respecto a x se tiene

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + g(y) \tag{18}$$

donde $g(y)$ es independiente de x . Si ahora se derivan parcialmente los dos miembros de (18) con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} + g'(y)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (17) resulta

$$\begin{aligned} -xe^{-y} + g'(y) &= -xe^{-y} - \operatorname{sen} y \\ g'(y) &= -\operatorname{sen} y \\ g(y) &= \cos y + K \end{aligned}$$

Si se sustituye esta expresión para $g(y)$ en (18) se tiene

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y + K \quad \blacktriangleleft$$

El teorema siguiente es una extensión del teorema 14.1.1 para funciones de tres variables.

14.1.2 Teorema

Sean M , N y R funciones de tres variables x , y y z definidas en la bola abierta $B((x_0, y_0, z_0); r)$ de R^3 , y suponga que M_x, M_z, N_x, N_z, R_x y R_z son continuas en B . Entonces el vector $M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es un gradiente en B si y sólo si $M_x(x, y, z) = N_z(x, y, z)$, $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ y $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$.

La demostración de la parte "sólo si" es semejante a la demostración de la parte "sólo si" del teorema 14.1.1 y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 49). La demostración de la parte "sí" se omite debido a que está más allá del alcance de este libro.

▶ EJEMPLO 2 Determine si el vector siguiente es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$, y si lo es, entonces obtenga $f(x, y, z)$:

$$(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

Solución Se aplicará el teorema 14.1.2. Sean

$$\begin{aligned} M(x, y, z) &= e^x \operatorname{sen} z + 2yz & N(x, y, z) &= 2xz + 2y & R(x, y, z) &= e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \\ M_y(x, y, z) &= 2z & N_x(x, y, z) &= 2z & R_x(x, y, z) &= e^x \cos z + 2y \\ M_z(x, y, z) &= e^x \cos z + 2y & N_z(x, y, z) &= 2x & R_y(x, y, z) &= 2x \end{aligned}$$

Por tanto,

$$M_x(x, y, z) = N_z(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

Así, el vector dado es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$. Además,

$$f_x(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2yz \quad (19)$$

$$f_y(x, y, z) = 2xz + 2y \quad (20)$$

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \quad (21)$$

Al integrar ambos miembros de (19) con respecto a x se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + g(y, z) \quad (22)$$

donde $g(y, z)$ es independiente de x . Si se derivan parcialmente los dos miembros de (22) con respecto a y se obtiene

$$f_y(x, y, z) = 2xz + g_y(y, z)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (20) resulta

$$\begin{aligned} 2xz + g_y(y, z) &= 2xz + 2y \\ g_y(y, z) &= 2y \end{aligned}$$

Ahora, al integrar ambos miembros de esta ecuación con respecto a y se obtiene

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \quad (23)$$

donde h es independiente de x y y . Al sustituir de (23) en (22) se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + h(z) \quad (24)$$

Si se derivan parcialmente los dos miembros de (24) con respecto a z resulta

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + h'(z)$$

Después de igualar los miembros derechos de esta ecuación y de (21) se obtiene

$$\begin{aligned} e^x \cos z + 2xy + h'(z) &= e^x \cos z + 2xy + 3z^2 \\ h'(z) &= 3z^2 \\ h(z) &= z^3 + K \end{aligned}$$

Al sustituir $z^3 + K$ por $h(z)$ en (24) se tiene

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + K \quad \blacktriangleleft$$

Un *campo vectorial* asocia un vector con un punto del espacio. Por ejemplo, si \mathbf{F} es una función vectorial, definida en alguna bola abierta B de R^3 , tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (25)$$

entonces \mathbf{F} asocia a cada punto (x, y, z) de B un vector, y \mathbf{F} recibe el nombre de **campo vectorial**. Este campo vectorial tiene como dominio un subconjunto de R^3 y como contradominio un subconjunto de V_3 . Si el dominio de un campo vectorial es un conjunto de puntos de un plano y su contradominio es un conjunto de vectores de V_2 , entonces el campo vectorial tiene una ecuación de la forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Si en lugar de un vector se asocia un escalar con un punto del espacio, entonces se tiene un **campo escalar**; de modo que un campo escalar es una función real. Un ejemplo de un campo escalar se obtiene al expresar la temperatura en un punto como una función de las coordenadas del punto.

Como un ejemplo de campo vectorial, considere el flujo de un fluido, tal como el agua a través de un tubo o la sangre en una arteria. Suponga que el fluido consiste de un número infinito de partículas y que la velocidad de una de éstas depende sólo de su posición; de modo que la velocidad es independiente del tiempo, y debido a este hecho, el flujo del fluido se designa como un flujo de *estado estable*. En un punto (x, y, z) la velocidad del fluido está dada por $\mathbf{F}(x, y, z)$, definida mediante una ecuación de la forma (25). Así, \mathbf{F} es un campo vectorial denominado **campo de velocidad** del fluido. Los campos de velocidad pueden describir otros movimientos, tales como el viento o el giro de una rueda. Todos los campos vectoriales que se presentan en este libro serán independientes del tiempo; por lo que se llaman **campos vectoriales de estado estable**.

No es posible mostrar en una figura las representaciones de todos los vectores de un campo vectorial particular. Sin embargo, al dibujar las representaciones de algunos vectores se puede obtener una representación visual del campo vectorial, como se muestra en el ejemplo siguiente.

► **EJEMPLO 3** (a) Muestre en una figura las representaciones, que tienen su punto inicial en (x, y) , de los vectores del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

donde $x = \pm 1$ o $x = \pm 2$, y $y = \pm 1$ o $y = \pm 2$. (b) Demuestre que cada representación es tangente a la circunferencia que tiene su centro en el origen y que tiene una longitud igual al radio de la circunferencia.

Solución

(a) La tabla 1 presenta los vectores $\mathbf{F}(x, y)$ asociados con los dieciséis puntos (x, y) . Las representaciones de estos vectores se muestra en la figura 1.

(b) Sea

$$\mathbf{R}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

el vector de posición cuyo punto terminal está en (x, y) . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(x, y) \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + xy \\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, \mathbf{R} y \mathbf{F} son ortogonales. De esta manera, la representación de \mathbf{F} cuyo punto inicial está en (x, y) es tangente a la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio $\|\mathbf{R}(x, y)\|$. Como

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(x, y)\| &= \sqrt{(-y)^2 + x^2} \\ &= \|\mathbf{R}(x, y)\|\end{aligned}$$

entonces la longitud de cada representación es igual al radio de la circunferencia. ◀

El campo vectorial del ejemplo 3 es similar al campo de velocidad determinado por una rueda que gira en el origen.

Un ejemplo de un campo vectorial en V_3 surge de la ley de atracción gravitacional de Newton. Esta ley establece que la medida de la atracción gravitacional entre dos partículas de M unidades y m unidades de masa, respectivamente, es

$$\frac{GMm}{d^2}$$

donde d unidades es la distancia entre las partículas y G es la constante gravitacional. De modo que si una partícula de masa M unidades está en el origen y otra partícula de masa 1 unidad ($m = 1$) se encuentra en el punto $P(x, y, z)$, y si $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la fuerza gravitacional ejercida por la partícula ubicada en el origen sobre la partícula que está en P , entonces

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{GM(1)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2}$$

Tabla 1

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
(1, 1)	$-1 + \mathbf{j}$
(1, -1)	$1 + \mathbf{j}$
(-1, 1)	$-1 - \mathbf{j}$
(-1, -1)	$1 - \mathbf{j}$
(1, 2)	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(1, -2)	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
(-1, 2)	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(-1, -2)	$2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
(2, 1)	$-1 + 2\mathbf{j}$
(2, -1)	$1 + 2\mathbf{j}$
(-2, 1)	$-1 - 2\mathbf{j}$
(-2, -1)	$1 - 2\mathbf{j}$
(2, 2)	$-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(2, -2)	$2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
(-2, 2)	$-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
(-2, -2)	$2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

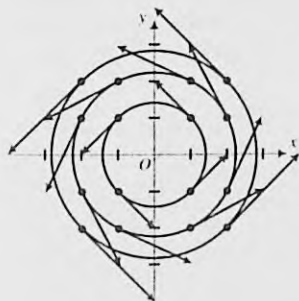


FIGURA 1

donde $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Para obtener el vector fuerza $\mathbf{F}(x, y, z)$, también se necesita la dirección de \mathbf{F} . Como esta dirección es hacia el origen, entonces es la misma que la dirección del vector unitario $-\frac{1}{\|\mathbf{R}\|}\mathbf{R}$. Con esta dirección y la intensidad (o módulo) indicadas anteriormente se tiene

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{GM}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|^2} \left(-\frac{\mathbf{R}(x, y, z)}{\|\mathbf{R}(x, y, z)\|} \right)$$

Debido a que $\|\mathbf{R}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se obtiene

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad (26)$$

El campo vectorial definido por (26) se denomina **campo de fuerza**. La figura 2 muestra representaciones de algunos vectores de este campo de fuerza, donde el objeto del origen es una esfera (por ejemplo, la Tierra) y $\|\mathbf{R}\|$ es mayor que el radio de la esfera. Cada representación apunta hacia el origen. Las representaciones de los vectores en puntos cercanos al origen son más largas que las representaciones de vectores en puntos más alejados, y las longitudes son iguales en puntos que están a la misma distancia del origen. Con estas propiedades, el campo de fuerza definido por (26) se denomina **campo de fuerza central**.

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial. Si ϕ es un campo escalar y \mathbf{F} es el campo vectorial definido por $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces a \mathbf{F} se le llama **campo vectorial gradiente** y ϕ recibe el nombre de **función potencial para \mathbf{F}** . Un campo vectorial gradiente también se denomina **campo vectorial conservador** (o **conservativo**). El término *conservador* se aclarará después de que lea la sección 14.3.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Considere el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

Del ejemplo ilustrativo 1, si

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + K$$

entonces

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y)$$

De modo que \mathbf{F} es un campo vectorial conservador y ϕ es una función potencial para \mathbf{F} . ◀

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra que el campo de fuerza gravitacional definido por (26) es conservador.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 6 de la sección 12.6 se demostró que si

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

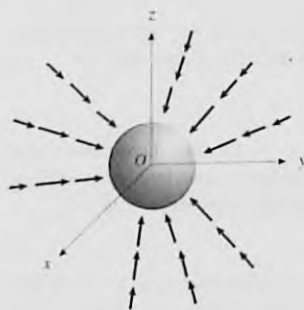


FIGURA 2

entonces

$$\nabla V(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

De esta forma, si

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\nabla \phi(x, y, z) = \frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Al comparar esta ecuación con (26), se observa que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$$

Por tanto, \mathbf{F} es conservador y ϕ es una función potencial para \mathbf{F} . ◀

En los dos ejemplos ilustrativos anteriores fue fácil demostrar que el campo vectorial es conservador debido a que se conocía una función ϕ para la cual \mathbf{F} es su gradiente. Para decidir si un campo vectorial dado es conservador, y en caso de serlo, determinar una función potencial, se aplican los teoremas 14.1.1 y 14.1.2 como en los ejemplos 1 y 2.

Existen dos campos que involucran derivadas y que se asocian con un campo vectorial \mathbf{F} . Uno es el campo llamado *rotacional* de \mathbf{F} , el cual es un campo vectorial, y el otro es el campo denominado *divergencia* de \mathbf{F} , el cual es un campo escalar. Antes de dar sus definiciones, se mostrará la forma en que se utiliza el símbolo ∇ como un operador.

Si f es una función escalar de tres variables x , y y z , el gradiente de f es

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (27)$$

Ahora se utilizará el operador ∇ en tres dimensiones para denotar

$$\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Por tanto, la operación de ∇ sobre la función escalar f significa

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

lo cual concuerda con (27).

14.1.3 Definición de rotacional de un campo vectorial

Sea \mathbf{F} un campo vectorial sobre alguna bola abierta B de R^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Entonces el *rotacional* de \mathbf{F} , denotado por $\text{rot } \mathbf{F}$, está definido por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

si estas derivadas parciales existen.

Un truco nemotécnico para calcular $\text{rot } \mathbf{F}$ consiste en desarrollar la notación del producto cruz de dos vectores al “producto cruz” del operador ∇ y el campo vectorial \mathbf{F} y escribir

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Como se indicó cuando se utilizó por primera vez la notación de determinantes para el producto cruz de dos vectores, los elementos del determinante no fueron todos números reales como es costumbre. En el “determinante” anterior el primer renglón contiene vectores, el segundo consiste de operadores de derivadas parciales, y el tercer renglón está constituido por funciones escalares.

EJEMPLO 4 Calcule $\text{rot } \mathbf{F}$ si \mathbf{F} es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2x}\mathbf{i} + 3x^2yz\mathbf{j} + (2y^2z + x)\mathbf{k}$$

Solución

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{2x} & 3x^2yz & 2y^2z + x \end{vmatrix} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (6xyz - 0)\mathbf{k} \\ &= (4yz - 3x^2y)\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6xyz\mathbf{k}\end{aligned}$$

14.1.4 Definición de divergencia de un campo vectorial

Sea \mathbf{F} un campo vectorial sobre alguna bola abierta de \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Entonces la **divergencia** de \mathbf{F} , denotada por $\text{div } \mathbf{F}$, está definida como

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

si estas derivadas parciales existen.

Se extenderá la notación del producto punto de dos vectores al “producto punto” del operador ∇ y el campo vectorial \mathbf{F} para calcular la divergencia de \mathbf{F} , y se escribirá

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\end{aligned}$$

► **EJEMPLO 5** Calcule $\operatorname{div} \mathbf{F}$ si \mathbf{F} es el campo vectorial del ejemplo 4.

Solución

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + x) \\ &= 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2\end{aligned}$$

En las secciones 14.4–14.6 se explicará el significado físico de $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ y $\operatorname{div} \mathbf{F}$ al estudiar el movimiento de un fluido. En esta sección sólo interesa aprender a calcularlos y demostrar algunas de sus propiedades. Dos de dichas propiedades se dan en los teoremas siguientes, cuyas demostraciones se le pedirán en los ejercicios 47 y 48.

14.1.5 Teorema

Suponga que \mathbf{F} es un campo vectorial sobre una bola abierta B de \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Si las segundas derivadas parciales de M , N y R son continuas en B , entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$$

14.1.6 Teorema

Si f es un campo escalar sobre una bola abierta B de \mathbb{R}^3 y las segundas derivadas parciales de f son continuas en B , entonces

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

La ecuación del teorema 14.1.6 establece que el rotacional del gradiente de f es igual al vector cero. Considere ahora la divergencia del gradiente de f , esto es, $\nabla \cdot (\nabla f)$, lo cual puede escribirse como $\nabla \cdot \nabla f$ o $\nabla^2 f$. Por definición,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y, z) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ \nabla^2 f(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

La expresión del miembro derecho de esta ecuación se denomina el **laplaciano** de f . La ecuación siguiente, obtenida al igualar a cero el laplaciano, recibe el nombre de **ecuación de Laplace**, en honor al matemático y astrónomo francés **Pierre Simon, marqués de Laplace** (1749–1827):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

A toda función escalar que satisfaga la ecuación de Laplace se le llama **armónica**. Este tipo de funciones tienen aplicaciones importantes en física en el estudio de la transferencia del calor, radiación electromagnética y acústica, entre otras.

Si \mathbf{F} es un campo vectorial sobre algún disco abierto B de \mathbb{R}^2 tal que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, entonces el rotacional de \mathbf{F} y la divergencia de \mathbf{F} en dos dimensiones están definidas por

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad \text{div } \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

si estas derivadas parciales existen. El laplaciano en dos dimensiones está definido como

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

► **EJEMPLO 6** Si $\mathbf{F}(x, y) = 3x^2y\mathbf{i} - 2xy^3\mathbf{j}$, calcule:

(a) $\text{rot } \mathbf{F}(x, y)$, y (b) $\text{div } \mathbf{F}(x, y)$.

Solución Si $M(x, y) = 3x^2y$ y $N(x, y) = -2xy^3$, entonces

$$\begin{aligned} \text{(a) } \text{rot } \mathbf{F}(x, y) &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} & \text{(b) } \text{div } \mathbf{F}(x, y) &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= (-2y^3 - 3x^2) \mathbf{k} & &= 6xy - 6xy^2 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

EJERCICIOS 14.1

En los ejercicios 1 a 6, muestre en una figura las representaciones de los vectores del campo vectorial que tienen su punto inicial en (x, y) , donde $x = \pm 1$ o $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ o $y = \pm 2$.

- $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

En los ejercicios 7 a 14, determine un campo vectorial conservador que tenga la función potencial dada.

- $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3$
- $f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$
- $f(x, y) = \tan^{-1}x^2y$
- $f(x, y) = ye^x - xe^y$
- $f(x, y, z) = 2x^3 - 3x^2y + xy^2 - 4y^3$
- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $f(x, y, z) = x^2ye^{-4z}$
- $f(x, y, z) = z \sin(x^2 - y)$

En los ejercicios 15 a 20, determine si el campo vectorial es conservador.

- $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (3 - 4xy)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (e^xe^y + 6e^{2x})\mathbf{i} + (e^xe^y - 2e^y)\mathbf{j}$

- $\mathbf{F}(x, y) = y \cos(x + y)\mathbf{i} - x \sin(x + y)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 6yz)\mathbf{j} + (2xy + 3y^2 - 2z)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2ye^{2x} + e^z)\mathbf{i} + (3ze^{3y} + e^{2x})\mathbf{j} + (xe^z + e^{3y})\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y \sec^2 x\mathbf{i} + (\tan x - z \sec^2 y)\mathbf{j} + x \sec z \tan z\mathbf{k}$

En los ejercicios 21 a 32, demuestre que el campo vectorial es conservador y obtenga una función potencial.

- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = e^x \sin y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y \sinh x + \cos y \cosh x)\mathbf{i} + (\cos y \cosh x - \sin y \sinh x)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^y)\mathbf{i} + (2x - 2ye^y)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - 3z)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\mathbf{i} + (xe^y - e^z)\mathbf{j} + (-ye^z + e^y)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (\tan y + 2xy \sec z)\mathbf{i} + (x \sec^2 y + x^2 \sec z)\mathbf{j} + \sec z(x^2y \tan z - \sec z)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2 \sin y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y^3 - 8xz^2)\mathbf{i} + (6xy^2 + 1)\mathbf{j} - (8xz^2 + 3z^2)\mathbf{k}$

En los ejercicios 33 a 42, calcule $\text{rot } \mathbf{F}$ y $\text{div } \mathbf{F}$ para el campo vectorial \mathbf{F} indicado.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$

34. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} - \sin y\mathbf{j}$

35. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \sin y\mathbf{j}$

36. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$

37. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

38. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos y\mathbf{i} + \cos z\mathbf{j} + \cos x\mathbf{k}$

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + xe^y \cos z\mathbf{j} - xe^y \cos z\mathbf{k}$

41. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

42. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 43 a 46, demuestre que la función escalar es armónica probando que su Laplaciano es cero.

43. $f(x, y) = e^x \sin x + e^x \cos y$

44. $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

45. $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 5z^2$

46. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

47. Demuestre el teorema 14.1.5.

48. Demuestre el teorema 14.1.6.

49. Demuestre la parte "sólo si" del teorema 14.1.2.

50. Explique por qué la definición del rotacional de un campo vectorial aplicada al teorema 14.1.2 indica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ es un gradiente si y sólo si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

14.2 INTEGRALES DE LÍNEA

En el capítulo 4 se utilizó el concepto geométrico de área para motivar la definición de la integral definida. Para motivar la definición de integral de un campo vectorial, se empleará el concepto físico de trabajo.

En la sección 10.3 se dijo que si una fuerza constante de medida vectorial \mathbf{F} mueve una partícula a lo largo de una recta de un punto A a un punto B , y si W es la medida del trabajo realizado, entonces

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overline{AB}) \quad (1)$$

Suponga ahora que el vector de fuerza no es constante, y en lugar de que el movimiento sea a lo largo de una recta, es a lo largo de una curva. Considere que la fuerza ejercida sobre la partícula ubicada en el punto (x, y) , de algún disco B de R^2 , está dada por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N son continuas en B . Sea C la curva, contenida en B , que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

Se requiere que las funciones f y g sean tales que f' y g' resulten continuas en $[a, b]$ y que en cualquier punto de $[a, b]$ al menos una de ellas sea diferente de cero; esto es, de acuerdo con la definición 9.1.1, la curva C es suave en $[a, b]$. Se desea definir el trabajo realizado por la fuerza variable de medida vectorial \mathbf{F} al desplazar la partícula a lo largo de C del punto $(f(a), g(a))$ al punto $(f(b), g(b))$. En cualquier punto $(f(t), g(t))$ de C el vector fuerza es

$$\mathbf{F}(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t))\mathbf{i} + N(f(t), g(t))\mathbf{j} \quad (2)$$

Considere que Δ es una partición del intervalo $[a, b]$ tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

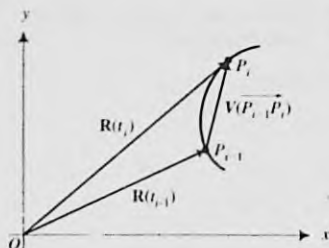


FIGURA 1

Sea P_i el punto $(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ de C . Refiérase a la figura 1. El vector $\mathbf{V}(P_{i-1}P_i)$ es igual a $\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})$; por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(P_{i-1}P_i) &= f(t_i)\mathbf{i} + g(t_i)\mathbf{j} - [f(t_{i-1})\mathbf{i} + g(t_{i-1})\mathbf{j}] \\ \mathbf{V}(P_{i-1}P_i) &= [f(t_i) - f(t_{i-1})]\mathbf{i} + [g(t_i) - g(t_{i-1})]\mathbf{j}\end{aligned}\quad (3)$$

Puesto que f' y g' son continuas en $[a, b]$, se infiere del teorema del valor medio que existen números c_i y d_i en el intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) tales que

$$\begin{aligned}f(t_i) - f(t_{i-1}) &= f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(d_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

Al tomar $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, y sustituir de las dos ecuaciones anteriores en (3) se obtiene

$$\mathbf{V}(P_{i-1}P_i) = [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}] \Delta_i t \quad (4)$$

Para cada i considere el vector

$$\mathbf{F}_i = M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j} \quad (5)$$

Cada uno de los vectores \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es una aproximación al vector fuerza $\mathbf{F}(f(t), g(t))$, dado por (2), a lo largo del arco de C desde P_{i-1} a P_i . Observe que aunque c_i y d_i son, en general, números diferentes del intervalo abierto (t_{i-1}, t_i) , los valores de los vectores $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ se encuentran cerca de \mathbf{F}_i . Además, el arco de C desde P_{i-1} a P_i se aproxima mediante el segmento rectilíneo $P_{i-1}P_i$. Así, al aplicar la fórmula (1) se obtiene el trabajo realizado por el vector $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ al desplazar la partícula a lo largo del arco de C desde P_{i-1} a P_i . Si se denota esta aproximación por $\Delta_i W$, de la fórmula (1) y las ecuaciones (4) y (5) se tiene

$$\begin{aligned}\Delta_i W &= [M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}] \cdot [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}] \Delta_i t \\ \Leftrightarrow \Delta_i W &= [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)] \Delta_i t + [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)] \Delta_i t\end{aligned}$$

Una aproximación de la medida del trabajo realizado por $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ a lo largo de C es $\sum_{i=1}^n \Delta_i W$ o bien, equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^n [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)] \Delta_i t + \sum_{i=1}^n [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)] \Delta_i t$$

Cada una de estas sumas es una suma de Riemann. La primera es una suma de Riemann para la función que tiene valores $M(f(t), g(t))f'(t)$, y la segunda es una suma de Riemann para la función que tiene valores $N(f(t), g(t))g'(t)$. Si n se incrementa sin límite y cada $\Delta_i t$ se aproxima a cero, entonces estas sumas tienden a la integral definida:

$$\int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt$$

Por tanto, se tiene la definición siguiente, donde se emplea la notación $\mathbf{F}(\mathbf{R}(t))$ en lugar de $\mathbf{F}(f(t), g(t))$.

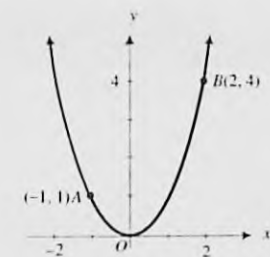
14.2.1 Definición del trabajo realizado por un campo de fuerza sobre una partícula que se desplaza a lo largo de una curva de \mathbb{R}^2

Sea C una curva suave contenida en un disco abierto B de \mathbb{R}^2 para la cual una ecuación vectorial de C es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Además, considere un campo de fuerza definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, donde M y N son continuas en B . Si W es la medida del trabajo realizado por una fuerza de medida vectorial \mathbf{F} al desplazar una partícula a lo largo de C desde $(f(a), g(a))$ hasta $(f(b), g(b))$, entonces

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt \quad (6)$$

o, equivalentemente, utilizando notación vectorial,

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\ \Leftrightarrow W &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \end{aligned} \quad (7)$$



$$x = t \quad y = t^2 \quad -1 \leq t \leq 2$$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 Suponga que una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde el punto $A(-1, 1)$ hasta el punto $B(2, 4)$. Calcule el trabajo total efectuado si el movimiento es ocasionado por el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$$

Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

Solución La figura 2 muestra el arco de la parábola de A a B . La parábola tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad y = t^2 \quad -1 \leq t \leq 2$$

De esta forma, la ecuación vectorial de la parábola es

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2) \\ &= \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle \end{aligned}$$

Si W joules es el trabajo realizado, entonces, de (7), se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \quad (8) \\ &= \int_{-1}^2 \langle t^2 + t^4, 3t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + 6t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{363}{5} \end{aligned}$$

Conclusión: El trabajo efectuado es 72.6 joules. ◀

Las integrales de las ecuaciones (6) y (7) se denominan *integrales de línea*. Para la integral de línea de la ecuación (6), una notación común que involucre la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

Esta notación es sugerida por el siguiente hecho: como las ecuaciones paramétricas de C son $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces $dx = f'(t)dt$ y $dy = g'(t)dt$. Una notación vectorial para la integral de la ecuación (7) es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

La notación anterior proviene de considerar la ecuación vectorial de C , la cual es $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, y tomar $d\mathbf{R} = \mathbf{R}'(t)dt$. Entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt$$

En consecuencia, se tiene la definición formal siguiente.

14.2.2 Definición de integral de línea sobre una curva de \mathbb{R}^2

Sea C una curva suave contenida en un disco abierto B de \mathbb{R}^2 y que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

Sea \mathbf{F} un campo vectorial sobre B definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N son continuas en B . Si se emplea la notación de la forma diferencial, la **integral de línea** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C está definida por

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy \\ = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt \end{aligned}$$

o, equivalentemente, usando la notación vectorial, la **integral de línea** de \mathbf{F} sobre C está definida por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt$$

Se empleará la notación de la forma diferencial así como la notación vectorial para las integrales de línea.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** En el ejemplo 1, la integral de la ecuación (8) que define W es una integral de línea. Con la notación vectorial, esta integral de línea puede expresarse como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

donde $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ y $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$. Con la notación de la forma diferencial, esta integral de línea puede escribirse como

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + 3x^2y dy \quad (9)$$

Si una ecuación de C es de la forma $y = F(x)$, entonces puede emplearse x como un parámetro en lugar de t . De manera semejante, si una ecuación de C es de la forma $x = G(y)$, entonces y puede utilizarse como parámetro en lugar de t .

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** En el ejemplo 1 y en el ejemplo ilustrativo 1, la ecuación de C es $y = x^2$, la cual es de la forma $y = F(x)$. Por tanto, x puede emplearse como parámetro en lugar de t . Así, en la integral (9) del ejemplo ilustrativo 1 se puede sustituir y por x^2 y dy por $2x dx$, obteniéndose

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4) dx + 3x^2x^2(2x dx) \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4 + 6x^5) dx \end{aligned}$$

esta integral es la misma que la tercera la cual aparece en la solución del ejemplo 1, excepto que se tiene la variable x en lugar de t .

Si la curva C de la definición de la integral de línea es el intervalo cerrado $[a, b]$ del eje x , entonces $y = 0$ y $dy = 0$. De modo que

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b M(x, 0) dx$$

Por tanto, en tal caso, la integral de línea se reduce a una integral definida.

Se puede extender el concepto de integral de línea para incluir a las curvas que son suaves a trozos. Recuerde de la sección 9.1 que si un intervalo I puede dividirse en un número finito de subintervalos en los que la curva C es suave, entonces se dice que C es suave a trozos en I .

14.2.3 Definición de integral de línea sobre una curva suave a trozos de \mathbb{R}^2

Suponga que la curva C consiste de los arcos suaves C_1, C_2, \dots, C_n contenidos en un disco abierto B de \mathbb{R}^2 , y considere $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{F}(x, y)$ como en la definición 14.2.2. Entonces la **integral de línea** de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sobre C está definida por

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} M(x, y) dx + N(x, y) dy \right)$$

o, equivalentemente, empleando la notación vectorial, la integral de línea de \mathbf{F} sobre C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \left(\int_{a_i}^{b_i} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \right)$$

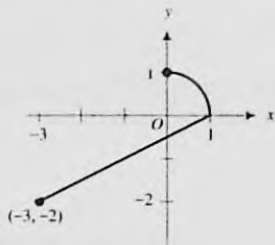


FIGURA 3

► **EJEMPLO 2** Evalúe la integral de línea

$$\int_C 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy$$

si la curva C consiste del segmento de recta de $(-3, -2)$ a $(1, 0)$ y el arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, recorrida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Solución La figura 3 muestra la curva C compuesta por los arcos C_1 y C_2 . El arco C_1 es el segmento de recta. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, -2)$ y $(1, 0)$ es $x - 2y = 1$. Por tanto, C_1 puede representarse paramétricamente por

$$x = 1 + 2t \quad y = t \quad -2 \leq t \leq 0$$

El arco C_2 , el cual es el arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, puede representarse paramétricamente por

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$$

Si se aplica la definición 14.2.2 a cada uno de los arcos C_1 y C_2 se tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy &= \int_{-2}^0 4(1+2t)t(2 \, dt) + [2(1+2t)^2 - 3(1+2t)t] \, dt \\ &= \int_{-2}^0 (8t + 16t^2 + 2 + 8t + 8t^2 - 3t - 6t^2) \, dt \\ &= \int_{-2}^0 (18t^2 + 13t + 2) \, dt \\ &= 6t^3 + \frac{13}{2}t^2 + 2t \Big|_{-2}^0 \\ &= -(-48 + 26 - 4) \\ &= 26 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{C_2} 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy &= \int_0^{\pi/2} 4 \cos t \sin t (-\sin t \, dt) + (2 \cos^2 t - 3 \cos t \sin t)(\cos t \, dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} (-4 \cos t \sin^2 t + 2 \cos^3 t - 3 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [-4 \cos t \sin^2 t + 2 \cos t (1 - \sin^2 t) - 3 \cos^2 t \sin t] \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2 \cos t - 6 \cos t \sin^2 t - 3 \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= 2 \sin t - 2 \sin^3 t + \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2 - 2 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, de la definición 14.2.3,

$$\int_C 4xy dx + (2x^2 - 3xy) dy = 26 + (-1) = 25$$

La definición de integral de línea en tres dimensiones requiere que la curva sea suave: una curva de R^3 que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

es suave si f' , g' y h' son continuas en $[a, b]$ y en cualquier punto de $[a, b]$ no son simultáneamente cero.

14.2.4 Definición de integral de línea sobre una curva de R^3

Sea C una curva suave contenida en una bola abierta B de R^3 que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

Sea \mathbf{F} un campo vectorial sobre B definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde M , N y R son funciones continuas en B . Si se emplea la notación de la forma diferencial, la **integral de línea** de $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ sobre C está definida por

$$\int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)] dt$$

o, equivalentemente, empleando la notación vectorial, la **integral de línea** de \mathbf{F} sobre C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt$$

▶ EJEMPLO 3 Evalúe la integral de línea

$$\int_C 3x dx + 2xy dy + z dz$$

si la curva C es la hélice circular definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución: De la notación de la forma diferencial para una integral de línea de la definición 14.2.4, se tiene

$$\begin{aligned} \int_C 3x dx + 2xy dy + z dz &= \int_0^{2\pi} 3 \cos t (-\sin t dt) + 2(\cos t)(\sin t)(\cos t dt) + t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3 \cos t (-\sin t dt) + 2(\cos t)(\sin t)(\cos t dt) + t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} (-3 \operatorname{sen} t \cos t + 2 \cos^2 t \operatorname{sen} t + t) dt \\
 &= -\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 t - \frac{2}{3} \cos^3 t + \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} \\
 &= -\frac{3}{2} (0) - \frac{2}{3} (1) + \frac{1}{2} (4\pi^2) + \frac{3}{2} (0) + \frac{2}{3} (1) + \frac{1}{2} (0) \\
 &= 2\pi^2
 \end{aligned}$$

El trabajo realizado por un campo de fuerza al desplazar una partícula a lo largo de una curva de R^3 se puede definir de manera semejante como se hizo en la definición 14.2.1 para una curva de R^2 . En el ejemplo siguiente se aplica dicha definición.

► **EJEMPLO 4** Una partícula recorre la cúbica alabeada

$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Calcule el trabajo total efectuado si el movimiento es causado por el campo de fuerza

$$F(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \operatorname{sen} \pi y^2\mathbf{k}$$

Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

Solución La figura 4 muestra la cúbica alabeada a partir de $t = 0$ hasta $t = 1$. Como $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, entonces

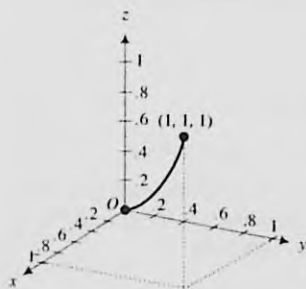
$$R'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Debido a que $F(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \operatorname{sen} \pi y^2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
 F(R(t)) &= F(t, t^2, t^3) \\
 &= \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle
 \end{aligned}$$

Si W joules es el trabajo realizado, entonces, de la notación vectorial para la integral de línea de la definición 14.2.4, se tiene

$$\begin{aligned}
 W &= \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\
 &= \int_0^1 \mathbf{F}(R(t)) \cdot R'(t) dt \\
 &= \int_0^1 \langle e^t, te^{t^3}, t \operatorname{sen} \pi t^4 \rangle \cdot \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle dt \\
 &= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 3t^3 \operatorname{sen} \pi t^4) dt \\
 &= e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos \pi t^4 \Big|_0^1 \\
 &= e + \frac{2}{3} e - \frac{3}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{4\pi} \cos 0
 \end{aligned}$$



$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

FIGURA 4

$$= \frac{5}{3}e + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}$$

$$\approx 3.34$$

Conclusión: El trabajo realizado es 3.34 joules.

EJERCICIOS 14.2

En los ejercicios 1 a 22, evalúe la integral de línea sobre la curva C .

- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x - 2y)\mathbf{j}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = \sin t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$; $C: \mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, del punto $(1, 1)$ al punto $(4, -8)$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$; C : la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ a partir del punto $(2, 0)$ en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = y\sin x\mathbf{i} - \cos x\mathbf{j}$; C : el segmento de recta de $(\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\pi, 1)$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y\mathbf{i} + (5x^2 - y)\mathbf{j}$; C : la curva $y = x^3 + 1$ de $(1, 2)$ a $(3, 28)$.
- $\int_C (x^2 + xy) dx + (y^2 - xy) dy$; C : la recta $y = x$ del origen al punto $(2, 2)$.
- La integral de línea del ejercicio 9; C : la parábola $x^2 = 2y$ desde el origen hasta el punto $(2, 2)$.
- La integral de línea del ejercicio 9; C : el eje x desde el origen hasta el punto $(2, 0)$ y después la recta $x = 2$ de $(2, 0)$ a $(2, 2)$.
- $\int_C yx^2 dx + (x + y) dy$; C : la recta $y = -x$ desde el origen hasta el punto $(1, -1)$.
- La integral de línea del ejercicio 12; C : la curva $y = -x^3$ desde el origen hasta el punto $(1, -1)$.
- La integral de línea del ejercicio 12; C : el eje y del origen al punto $(0, -1)$ y después la recta $y = -1$ desde $(0, -1)$ hasta $(1, -1)$.
- $\int_C 3xy dx + (4x^2 - 3y) dy$; C : la recta $y = 2x + 3$ de $(0, 3)$ a $(3, 9)$ y después la parábola $y = x^2$ de $(3, 9)$ a $(5, 25)$.
- $\int_C (xy - z) dx + e^x dy + y dz$; C : el segmento de recta de $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 8)$.
- $\int_C (x + y) dx + (y + z) dy + (x + z) dz$; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 2, 4)$.
- La integral de línea del ejercicio 16;
 $C: \mathbf{R}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$.

- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C : la helice circular $\mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (6y^2 - xz)\mathbf{j} + 10z\mathbf{k}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.
- La integral de línea del ejercicio 20; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(0, 0, 1)$; después el segmento de $(0, 0, 1)$ a $(0, 1, 1)$; luego el segmento de $(0, 1, 1)$ a $(1, 1, 1)$.
- La integral de línea del ejercicio 20; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 1, 1)$.

En los ejercicios 23 a 36, calcule el trabajo total realizado al mover una partícula a lo largo del arco C si el movimiento lo ocasiona el campo de fuerza \mathbf{F} . Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

- $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 1)$.
- El campo de fuerza del ejercicio 23; C : el arco de la parábola $y^2 = x$ desde el origen hasta el punto $(1, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$; C : el segmento de recta del punto $(1, 1)$ al punto $(2, 4)$.
- El campo de fuerza del ejercicio 25; C : el arco de la parábola $y = x^2$ desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(2, 4)$.
- El campo de fuerza del ejercicio 25; C : el segmento de recta de $(1, 1)$ a $(2, 2)$ y después el segmento de $(2, 2)$ a $(2, 4)$.
- $\mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; C : el segmento de recta de $(a, 0)$ a $(0, a)$.
- El campo de fuerza del ejercicio 28;
 $C: \mathbf{R}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi, a > 0$.
- El campo de fuerza del ejercicio 28; C : el segmento de recta de $(a, 0)$ a (a, a) y después el segmento de (a, a) a $(0, a)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 1, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(4, 0, 3)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz + x)\mathbf{i} + (x^2z + y)\mathbf{j} + (x^2y + z)\mathbf{k}$;
 C : el arco del ejercicio 33.
- El campo de fuerza del ejercicio 34; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 0, 0)$; después el segmento de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$; luego el segmento de $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$.

14.3 INTEGRALES DE LÍNEA INDEPENDIENTES DE LA TRAYECTORIA

En la sección 14.2 se dijo que el valor de una integral de línea está determinado por el integrando y una curva C entre dos puntos P_1 y P_2 . Sin embargo, en ciertas condiciones el valor de una integral de línea depende sólo del integrando y de los puntos P_1 y P_2 y no de la trayectoria de P_1 a P_2 . De dicha integral se dice que es **independiente de la trayectoria**.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Suponga que un campo de fuerza

$$F(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

mueve una partícula desde el origen hasta el punto $(1, 1)$. Se demostrará que el trabajo total realizado es el mismo si la trayectoria es a lo largo (a) del segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, 1)$; (b) del arco de la parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $(1, 1)$; y (c) del arco de la curva $x = y^3$ desde el origen hasta el punto $(1, 1)$.

Si W es la medida del trabajo efectuado, entonces

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy \quad (1)$$

(a) Consulte la figura 1. Una ecuación de C es $y = x$. Se emplea x como parámetro y se considera $y = x$ y $dy = dx$ en (1). Entonces

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= x^3 + 3x^2 - x \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(b) Refiérase a la figura 2. Una ecuación de C es $y = x^2$. Otra vez, tomando x como parámetro y considerando $y = x^2$ y $dy = 2x dx$ en (1), se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^4 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5)2x dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x \Big|_0^1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(c) Vea la figura 3. Una ecuación de C es $x = y^3$. Si se toma y como parámetro y se considera $x = y^3$ y $dx = 3y^2 dy$ en (1), se obtiene

$$W = \int_0^1 (y^2 + 2y^3 + 4)3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy$$

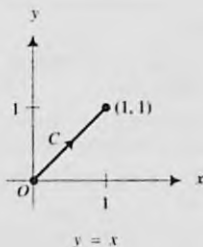


FIGURA 1

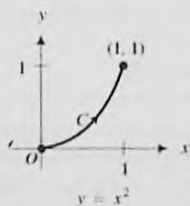


FIGURA 2

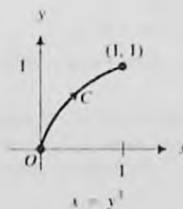


FIGURA 3

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (6y^5 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\
 &= y^6 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y \Big|_0^1 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

En el ejemplo ilustrativo se ha visto que el valor de la integral de línea es el mismo sobre las tres trayectorias diferentes de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. En realidad, el valor de la integral de línea es el mismo sobre cualquier curva suave a trozos desde el origen hasta el punto $(1, 1)$; por tanto, esta integral de línea es independiente de la trayectoria. Este hecho se demuestra en el ejemplo ilustrativo 2.

A continuación se establecerá y demostrará un teorema que no sólo proporciona condiciones para las cuales el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, sino que también provee una fórmula para calcular el valor.

14.3.1 Teorema

Sea C cualquier curva suave a trozos contenida en un disco abierto B de R^2 desde el punto (x_1, y_1) hasta el punto (x_2, y_2) . Si F es un campo vectorial conservador continuo sobre B y ϕ es una función potencial para F , entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria C , y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

Demostración Se presenta la demostración en el caso de que C es suave. Si C es suave a trozos, entonces considere cada parte por separado; la demostración siguiente se aplica a cada parte suave.

Considere como ecuaciones paramétricas de C las siguientes:

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

De esta forma, una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Además, se tiene que el punto (x_1, y_1) es $(f(t_1), g(t_1))$ y el punto (x_2, y_2) es $(f(t_2), g(t_2))$. Puesto que ϕ es una función potencial para F , entonces $\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$, donde $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{R} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^{t_2} \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} [M(f(t), g(t))f'(t) dt + N(f(t), g(t))g'(t) dt] \quad (2)
 \end{aligned}$$

Observe que como $M(x, y) dx + N(x, y) dy = d\phi(x, y)$, entonces

$$M(f(t), g(t))f'(t) dt + N(f(t), g(t))g'(t) dt = d\phi(f(t), g(t))$$

Si se sustituye de esta ecuación en (2) y después se aplica el segundo teorema fundamental del Cálculo se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t_1}^{t_2} d\phi(f(t), g(t)) \\
 &= \phi(f(t), g(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} \\
 &= \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)) \\
 &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)
 \end{aligned}$$

lo cual es lo que se deseaba demostrar. ■

Debido a la semejanza del teorema 14.3.1 con el segundo teorema fundamental del Cálculo, en ocasiones se le denomina **teorema fundamental para las integrales de línea**. Puesto que un campo vectorial conservador tiene un número infinito de funciones potenciales que se diferencian por una constante arbitraria K , se omitirá dicha constante para la función potencial ϕ cuando se aplique el teorema 14.3.1. Por supuesto, lo que en realidad se está haciendo es elegir la función potencial para la cual $K = 0$.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Se aplicará el teorema 14.3.1 para evaluar la integral de línea del ejemplo ilustrativo 1:

$$\int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy$$

Con la notación vectorial, esta integral de línea se expresa como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

En el ejemplo ilustrativo 4 de la sección 14.1 se demostró que \mathbf{F} es un campo vectorial conservador que tiene la función potencial

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

Por tanto, del teorema 14.3.1, la integral de línea es independiente de la trayectoria, y C puede ser cualquier curva suave a trozos desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Además, del teorema 14.3.1,

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0) \\ &= 3 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el del ejemplo ilustrativo 1. ◀

▶ **EJEMPLO 1** Utilice el resultado del ejemplo 1 de la sección 14.1 para evaluar la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

si $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}$ y C es el arco en el primer cuadrante de la circunferencia

$$\mathbf{R}(t) = \pi \cos t \mathbf{i} + \pi \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$$

Solución Del ejemplo 1 de la sección 14.1, se sabe que

$$\nabla(xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}$$

Por tanto, \mathbf{F} es un campo conservador, de modo que puede aplicarse el teorema 14.3.1 con $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$. El punto para el cual $t = 0$ es $(\pi, 0)$ y el punto correspondiente a $t = \frac{1}{2}\pi$ es $(0, \pi)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0) \\ &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1) \\ &= \pi^2 - \pi - 2 \end{aligned}$$

Si el valor de una integral de línea es independiente de la trayectoria, entonces no es necesario determinar la función potencial para calcular el valor. El procedimiento para esto se muestra en el ejemplo siguiente.

▶ **EJEMPLO 2** Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y} \mathbf{i} - \frac{x}{y^2} \mathbf{j}$$

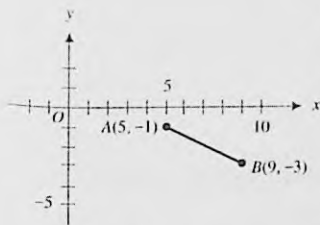
Si C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $A(5, -1)$ al punto $B(9, -3)$, demuestre que el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ es independiente de la trayectoria y evalúela.

Solución Sean

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{y} & N(x, y) &= -\frac{x}{y^2} \\ M_y(x, y) &= -\frac{1}{y^2} & N_x(x, y) &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Puesto que $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, entonces \mathbf{F} es conservador. Por tanto, la integral de línea es independiente de la trayectoria.

Se toma como trayectoria el segmento de recta de A a B , mostrado en la figura 4. Una ecuación de la recta que pasa por A y B es $x + 2y = 3$. Al considerar $y = -t$ y $x = 3 + 2t$, una ecuación vectorial de esta recta es



$$x + 2y = 3$$

FIGURA 4

$$\mathbf{R}(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} \quad 1 \leq t \leq 3$$

Ahora se calculará el valor de la integral de línea aplicando la definición 14.2.2.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_1^3 \mathbf{F}(3 + 2t, -t) \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3+2t}{t^2} \right\rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3+2t}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^3 \frac{3}{t^2} dt \\ &= -\frac{3}{t} \Big|_1^3 \\ &= 2 \end{aligned}$$



$A = B$

FIGURA 5

Recuerde de la definición 9.1.2 que si en una curva C definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, o la ecuación vectorial equivalente

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b$$

el punto inicial $A(f(a), g(a))$ y el punto $B(f(b), g(b))$ coinciden, entonces se dice que la curva C es cerrada. La figura 5 muestra una curva suave y cerrada.

El teorema siguiente se refiere a la integral de línea de un campo vectorial conservador sobre una curva cerrada y suave a trozos, y se deduce inmediatamente del teorema 14.3.1

14.3.2 Teorema

Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en algún disco abierto B de R^2 y \mathbf{F} es un campo vectorial conservador continuo en B , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

Demostración Se aplicará el teorema 14.3.1, y como C es cerrada, entonces el punto (x_1, y_1) coincide con el punto (x_2, y_2) . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Una partícula se mueve sobre la circunferencia

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Calcule el trabajo total realizado si el movimiento lo ocasiona el campo de fuerza

$$F(x, y) = \left(\frac{xe^{2y}}{x^2 + 2} \right) \mathbf{i} + e^{2y} \ln(x^2 + 2) \mathbf{j}$$

Solución Sean

$$M(x, y) = \frac{xe^{2y}}{x^2 + 2} \qquad N(x, y) = e^{2y} \ln(x^2 + 2)$$

$$M_y(x, y) = \frac{2xe^{2y}}{x^2 + 2} \qquad N_x(x, y) = \frac{2xe^{2y}}{x^2 + 2}$$

Como $M_y(x, y) = N_x(x, y)$, entonces F es conservador. Además, la circulación es una curva cerrada y suave. Por tanto, si W es el trabajo realizado, del teorema 14.3.2 se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se extenderá el estudio a las funciones de tres variables. El enunciado del teorema siguiente y su demostración son análogos a los del teorema 14.3.1. Se le pedirá que efectúe la demostración en el ejercicio 32.

14.3.3 Teorema

Sea C cualquier curva suave a trozos contenida en un disco B de R^3 desde el punto (x_1, y_1, z_1) hasta el punto (x_2, y_2, z_2) . Si F es un campo vectorial conservador continuo sobre B y ϕ es una función potencial para F , entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria C , y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 En el ejemplo 2 de la sección 14.1 se demostró que el campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} z + 2yz) \mathbf{i} + (2xz + 2y) \mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2) \mathbf{k}$$

es un gradiente $\nabla f(x, y, z)$, y

$$f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3$$

Así, F es un campo vectorial conservador. Por tanto, si C es cualquier curva suave a trozos desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, -2, \pi)$, entonces se infiere, por el teorema 14.3.3, que la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

es independiente de la trayectoria y su valor es

$$\begin{aligned} f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) &= (e \operatorname{sen} \pi - 4\pi + 4 + \pi^3) - 0 \\ &= \pi^3 - 4\pi + 4 \end{aligned}$$

En el próximo ejemplo, se evaluará una integral de línea independiente de la trayectoria cuando el integrando se ha expresado con la notación de la forma diferencial y se emplearán ecuaciones paramétricas de la curva C en lugar de una ecuación vectorial.

► **EJEMPLO 4** Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz$$

es independiente de la trayectoria, y evalúe la integral si C es una curva suave a trozos de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$.

Solución Sean

$$\begin{array}{lll} M(x, y, z) = 4x + 2y - z & N(x, y, z) = 2x - 2y + z & R(x, y, z) = -x + y + 2z \\ M_y(x, y, z) = 2 & N_x(x, y, z) = 2 & R_x(x, y, z) = -1 \\ M_z(x, y, z) = -1 & N_z(x, y, z) = 1 & R_y(x, y, z) = 1 \end{array}$$

Como

$$M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z) \quad M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z) \quad N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$$

el campo vectorial $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ es conservador. Por tanto, del teorema 14.3.3, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Se considerará la trayectoria como el segmento de recta de $(4, -2, 1)$ a $(-1, 2, 0)$. Un conjunto de números directores de la recta que pasa por esos dos puntos es $[5, -4, 1]$. Por tanto, las ecuaciones de la recta son

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas del segmento de recta son

$$x = -5t - 1 \quad y = 4t + 2 \quad z = -t \quad -1 \leq t \leq 0$$

Así,

$$\begin{aligned} &\int_C (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz \\ &= \int_{-1}^0 [4(-5t - 1) + 2(4t + 2) - (-t)](-5 dt) \\ &\quad + \int_{-1}^0 [2(-5t - 1) - 2(4t + 2) + (-t)](4 dt) \\ &\quad + \int_{-1}^0 [-(-5t - 1) + (4t + 2) + 2(-t)](-dt) \\ &= \int_{-1}^0 (-28t - 27) dt \\ &= -14t^2 - 27t \Big|_{-1}^0 \\ &= -13 \end{aligned}$$

La integral de línea del ejemplo 4 también puede calcularse si se determina la función potencial del campo vectorial conservativo $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 31.

► **EJEMPLO 5** Suponga que \mathbf{F} es el campo de fuerza gravitacional ejercido por una partícula de masa M unidades ubicado en el origen sobre una partícula de masa 1 unidad localizada en el punto $P(x, y, z)$. Entonces, de la sección 14.1,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Calcule el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} que mueve una partícula de masa 1 unidad a lo largo de una curva suave C desde el punto $(0, 3, 4)$ hasta el punto $(2, 2, 1)$.

Solución En el ejemplo ilustrativo 5 de la sección 14.1 se demostró que \mathbf{F} es un campo vectorial conservador y que una función potencial para \mathbf{F} está determinada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - GM$$

Si W es la medida del trabajo realizado al mover la partícula de masa 1 unidad a lo largo de C , entonces

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

Por el teorema 14.3.3, la integral de línea es independiente de la trayectoria, y

$$\begin{aligned} W &= \phi(2, 2, 1) - \phi(0, 3, 4) \\ &= \frac{GM}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} - \frac{GM}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{GM}{3} - \frac{GM}{5} \\ &= \frac{2}{15}GM \end{aligned}$$

Ahora se mostrará cómo los resultados de esta sección conducen a una importante conclusión en física. Si el movimiento de una partícula es causado por un campo vectorial conservador \mathbf{F} , entonces la **energía potencial** de la partícula en el punto (x, y, z) está definida por un campo escalar E tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla E(x, y, z)$$

Esto es, $-E$ es una función potencial de \mathbf{F} . Se utilizará la notación $E(P)$ para denotar la energía potencial de la partícula en el punto P . Si W es la medida del trabajo realizado por \mathbf{F} al desplazar una partícula a lo largo de una curva suave a trozos C desde un punto A hasta un punto B , entonces, por el teorema 14.3.3,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ W &= -E(x, y, z) \Big|_A^B \end{aligned}$$

$$W = -[E(B) - E(A)]$$

$$W = E(A) - E(B) \quad (3)$$

Por tanto, W es la diferencia de las energías potenciales de la partícula en A y B .

Ahora suponga que la partícula está ubicada en un punto A en el tiempo t_1 , y en el punto B en el tiempo t_2 , y que la curva C tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Entonces los vectores velocidad y aceleración en el tiempo t son $\mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{A}(t)$ definidos por

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$$

La rapidez de la partícula en el tiempo t se denota por $v(t)$, donde $v(t) = \|\mathbf{V}(t)\|$. Entonces, otra fórmula para calcular W está dada por

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t) dt \quad (4)$$

La segunda ley de Newton acerca del movimiento establece que si la fuerza \mathbf{F} actúa sobre una partícula de masa m unidades, entonces

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{A}(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) = m\mathbf{V}'(t)$$

Al sustituir de esta ecuación en (4) se tiene

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m[\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)] dt$$

Como $D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] = 2\mathbf{V}'(t) \cdot \mathbf{V}(t)$ y $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t) = [v(t)]^2$, se tiene

$$W = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t)] dt$$

$$W = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} D_t[v(t)]^2 dt$$

$$W = \frac{1}{2}m[v(t)]^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$W = \frac{1}{2}m[v(t_2)]^2 - \frac{1}{2}m[v(t_1)]^2 \quad (5)$$

En física, la **energía cinética** de una partícula se define como $\frac{1}{2}mv^2$. Por tanto, la ecuación (5) afirma que el trabajo efectuado al desplazar una partícula a lo largo de C desde un punto A hasta un punto B es la variación en la energía cinética de una partícula. Si se emplea la notación $K(P)$ para denotar la energía cinética de una partícula ubicada en el punto P , entonces (5) puede expresarse como

$$W = K(B) - K(A)$$

Al igualar los valores de W de (3) y de esta ecuación se obtiene

$$E(A) - E(B) = K(B) - K(A)$$

$$E(A) + K(A) = E(B) + K(B)$$

La ecuación anterior establece que la suma de las energías potencial y cinética son iguales en el punto inicial A y en el punto final B . Como A y B pueden ser puntos cualesquiera de C , la suma de las dos energías es constante a lo largo de C ; esto es, la energía total de la partícula permanece sin alteración durante el movimiento. Este hecho es un concepto muy importante en física denominado **ley de conservación de la energía**. Por esta razón, se utilizó el término *conservador* para un campo de fuerza que es un gradiente.

EJERCICIOS 14.3

En los ejercicios 1 a 12, utilice el resultado del ejercicio de la sección 14.1 indicado para demostrar que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria. Después evalúe la integral de línea aplicando el teorema 14.3.1 o el teorema 14.3.3 y empleando la función potencial obtenida en el ejercicio indicado. En cada ejercicio C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B .

- $\int_C y \, dx + x \, dy$; A es $(1, 4)$ y B es $(3, 2)$; ejercicio 21.
- $\int_C x \, dx + y \, dy$; A es $(-5, 2)$ y B es $(1, 3)$; ejercicio 22.
- $\int_C e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy$; A es $(0, 0)$ y B es $(2, \frac{1}{2}\pi)$; ejercicio 23.
- $\int_C (\sin y \operatorname{senh} x + \cos y \operatorname{cosh} x) \, dx + (\cos y \operatorname{cosh} x - \sin y \operatorname{senh} x) \, dy$; A es $(1, 0)$ y B es $(2, \pi)$; ejercicio 24.
- $\int_C (2xy^2 - y^3) \, dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2) \, dy$; A es $(-3, -1)$ y B es $(1, 2)$; ejercicio 25.
- $\int_C (3x^2 + 2y - y^2e^x) \, dx + (2x - 2ye^x) \, dy$; A es $(0, 2)$ y B es $(1, -3)$; ejercicio 26.
- $\int_C (x^2 - y) \, dx - (x - 3z) \, dy + (z + 3y) \, dz$; A es $(-3, 1, 2)$ y B es $(3, 0, 4)$; ejercicio 27.
- $\int_C yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$; A es $(0, -2, 5)$ y B es $(4, 1, -3)$; ejercicio 28.
- $\int_C (ze^x + e^x) \, dx + (xe^y - e^y) \, dy + (-ye^z + e^z) \, dz$; A es $(1, 0, 2)$ y B es $(0, 2, 1)$; ejercicio 29.
- $\int_C (\tan y + 2xy \sec z) \, dx + (x \sec^2 y + x^2 \sec z) \, dy + \sec z(x^2 y \tan z - \sec z) \, dz$; A es $(2, \frac{1}{6}\pi, 0)$ y B es $(3, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi)$; ejercicio 30.
- $\int_C (2x \cos y - 3) \, dx - (x^2 \operatorname{sen} y + z^2) \, dy - (2yz - 2) \, dz$; A es $(-1, 0, 3)$ y B es $(1, \pi, 0)$; ejercicio 31.
- $\int_C (2y^3 - 8xz^2) \, dx + (6xy^2 + 1) \, dy - (8xz^2 + 3z^2) \, dz$; A es $(2, 0, 0)$ y B es $(3, 2, 1)$; ejercicio 32.

En los ejercicios 13 a 20, demuestre que el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ para el campo vectorial \mathbf{F} y la curva C indicados es independiente de la trayectoria, y evalúe la integral de línea.

- $\mathbf{F}(x, y) = 2(x - y)\mathbf{i} + 2(3y - x)\mathbf{j}$; C es el arco ubicado en el primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ desde el punto sobre el eje x hasta el punto sobre el eje y .
- $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 6xy - 2y^2)\mathbf{i} + (3x^2 - 4xy + 3y^2)\mathbf{j}$; C es el arco ubicado en el primer cuadrante de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ limitado por los puntos donde intersecta a los ejes coordenados.
- $\mathbf{F}(x, y) = (4e^{2x} - 3e^x e^y)\mathbf{i} + (2e^{2y} - 3e^x e^y)\mathbf{j}$; C es el arco de la parábola $y^2 = 4x$ desde su vértice hasta el extremo del lado recto del primer cuadrante.
- $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j}$; C es el segmento de la recta $3x + 4y = 12$ desde el punto sobre el eje x hasta el punto sobre el eje y .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xi + 3y^2j + k$; C es la traza del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ en el plano xz desde la parte positiva del eje x hasta la parte positiva del eje z .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$; C es la traza de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz desde la parte positiva del eje y hasta la parte positiva del eje z .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2ye^{2x}\mathbf{i} + e^{2x}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$; C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $(\ln 2, 1, 1)$ hasta el punto $(\ln 2, 2, 2)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{x} + \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}\right)\mathbf{k}$; C es cualquier curva suave a trozos desde el punto $(1, 2, -1)$ hasta el punto $(2, 4, -2)$.

En los ejercicios 21 a 30, demuestre que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, y calcule su valor de cualquier manera conveniente. En cada ejercicio, C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B .

- $\int_C (2y - x) \, dx + (y^2 + 2x) \, dy$; A es $(0, -1)$ y B es $(1, 2)$.
- $\int_C (11x + 2y) \, dx + (e^x + 2x) \, dy$; A es $(3, 1)$ y B es $(1, 3)$.
- $\int_C \tan y \, dx + x \sec^2 y \, dy$; A es $(-2, 0)$ y B es $(4, \frac{1}{4}\pi)$.

24. $\int_C \text{sen } y \, dx + (\text{sen } y + x \cos y) \, dy$; A es $(-2, 0)$ y B es $(2, \frac{1}{6}\pi)$.
25. $\int_C \frac{2y}{(xy+1)^2} \, dx + \frac{2x}{(xy+1)^2} \, dy$; A es $(0, 2)$ y B es $(1, 0)$.
26. $\int_C \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \, dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \, dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \, dz$; A es $(1, 0, 0)$ y B es $(1, 2, 3)$.
27. $\int_C (y+z) \, dx + (x+z) \, dy + (x+y) \, dz$; A es $(0, 0, 0)$ y B es $(1, 1, 1)$.
28. $\int_C (yz+x) \, dx + (xz+y) \, dy + (xy+z) \, dz$; A es $(0, 0, 0)$ y B es $(1, 1, 1)$.
29. $\int_C (e^x \text{sen } y + yz) \, dx + (e^x \cos y + z \text{sen } y + xz) \, dy + (xy - \cos y) \, dz$; A es $(2, 0, 1)$ y B es $(0, \pi, 3)$.
30. $\int_C (2x \ln yz - 5ye^x) \, dx - (5e^x - x^2y^{-1}) \, dy + (x^2z^{-1} + 2z) \, dz$; A es $(2, 1, 1)$ y B es $(3, 1, e)$.
31. Evalúe la integral del ejemplo 4 determinando una función potencial para el campo vectorial conservador $(4x + 2y - z)\mathbf{i} + (2x - 2y + z)\mathbf{j} + (-x + y + 2z)\mathbf{k}$ y aplicando el teorema 14.3.3.
32. Demuestre el teorema 14.3.3.

En los ejercicios 33 a 36, calcule el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C si el movimiento es causado por el

campo de fuerza F . Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons. Sugerencia: primero demuestre que F es conservador.

33. $F(x, y) = 3(x+y)^2\mathbf{i} + 3(x+y)^2\mathbf{j}$; C : el arco de la parábola $y = x^2$ desde su vértice hasta el punto $(2, 4)$.
34. $F(x, y) = (2xy - 5y + 2y^2)\mathbf{i} + (x^2 - 5x + 4xy)\mathbf{j}$; C : un cuarto de la circunferencia $R(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \text{sen } t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.
35. $F(x, y, z) = 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k}$; C : el arco de $R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$.
36. $F(x, y, z) = 4y^2z\mathbf{i} + 8xyz\mathbf{j} + 4(3z^3 + xy^2)\mathbf{k}$; C : el arco de $R(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \text{sen } t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{3}\pi$.
37. Si F es el campo de fuerza, con régimen de cuadrado inverso, definido por

$$F(x, y, z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde k es una constante positiva, calcule el trabajo realizado por F al desplazar una partícula a lo largo del segmento de recta desde el punto $(3, 0, 0)$ hasta el punto $(3, 0, 4)$. Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: (a) utilice una función potencial para F ; (b) no emplee una función potencial para F .

14.4 TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green, así llamado en honor del matemático y físico inglés **George Green** (1793–1841) quien lo presentó en un trabajo sobre aplicaciones de las matemáticas a la electricidad y el magnetismo, expresa una doble integral sobre una región plana R en términos de una integral de línea sobre la curva frontera de R .

Antes de proseguir revise las definiciones 9.1.1–9.1.3 concernientes a curvas *suaves*, *cerradas* y *simples*, respectivamente. El enunciado del teorema de Green se refiere a una integral de línea sobre una curva cerrada, simple y suave a trozos que constituye la frontera de una región plana, y el sentido en que se recorre C es el contrario al giro de las manecillas del reloj. La figura 1 muestra una región R junto con la curva C la cual es su frontera. La integral de línea sobre C , recorrida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, se denota por \oint_C .



FIGURA 1

14.4.1 Teorema de Green

Sean M y N funciones de las dos variables x y y tales que sus primeras derivadas parciales son continuas en un disco abierto B de R^2 . Si C es una curva cerrada, simple y suave a trozos contenida completamente en B , y si R es la región limitada por C , entonces

$$\oint_C M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dA$$

La demostración del teorema de Green para todas las regiones limitadas por curvas que son suaves a trozos, simples y cerradas pertenece a un curso de Cálculo avanzado. Sin embargo, se demostrará el teorema para

un tipo particular de regiones, aquellas para las cuales cada recta horizontal y cada recta vertical intersectan a su curva frontera a lo más en dos puntos. Enseguida se presenta la demostración

Demostración Sea R una región del plano xy que puede definirse por

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \quad (1)$$

o

$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\} \quad (2)$$

donde las funciones f_1, f_2, g_1 y g_2 son suaves. La figura 2 muestra dicha región R , la cual se considera definida por (1) en la figura 3, y por (2) en la figura 4. La demostración consiste en probar que

$$\oint_C M(x, y) dx = \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (3)$$

y

$$\oint_C N(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \quad (4)$$

A fin de demostrar (3) se considera a R como una región definida por (1). Refiérase a la figura 3. Sea C_1 la gráfica de $y = f_1(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$; esto es, C_1 es la parte inferior de la curva frontera C recorrida de izquierda a derecha. Sea C_2 la gráfica de $y = f_2(x)$ desde $x = b$ hasta $x = a$; es decir, C_2 es la parte superior de la curva frontera C recorrida de derecha a izquierda. Considere la integral de línea $\oint_C M(x, y) dx$.

$$\begin{aligned} \oint_C M(x, y) dx &= \int_{C_1} M(x, y) dx + \int_{C_2} M(x, y) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx - \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora se tratará la integral doble $\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA$, donde R está definida por (1). Entonces

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \end{aligned} \quad (6)$$

Al comparar (5) y (6) se deduce que se cumple (3).

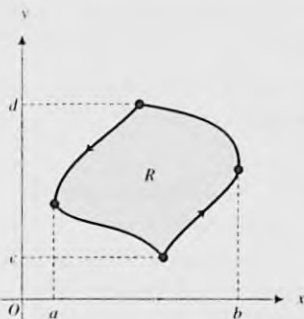


FIGURA 2

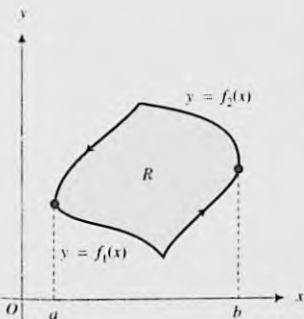


FIGURA 3

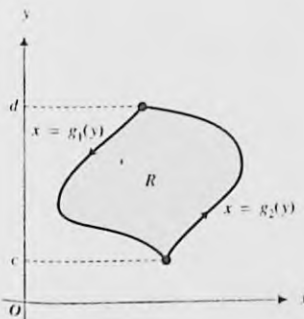


FIGURA 4

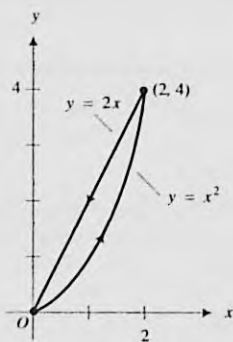


FIGURA 5

Para demostrar (4), se considera que R es una región definida por (2), como en la figura 4. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio (vea el ejercicio 43).

Si se suman los miembros correspondientes de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene el teorema de Green para esta región R .

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se aplicará el teorema de Green para evaluar la integral $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$, donde C es la curva cerrada que consiste del arco de parábola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto $(2, 4)$ y el segmento de recta desde el punto $(2, 4)$ hasta el origen. La región R con la frontera C se muestra en la figura 5. Del teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (4xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - 2y) dy dx \\ &= \int_0^2 y^2 \Big|_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\ &= \left. \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right|_0^2 \\ &= \frac{64}{15} \end{aligned}$$

A fin de mostrar la ventaja de emplear el teorema de Green, se evaluará la misma integral de línea mediante el método de la sección 14.2. Si C_1 es el arco de la parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y C_2 es el segmento de recta desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$, entonces

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \int_{C_1} y^2 dx + 4xy dy + \int_{C_2} y^2 dx + 4xy dy$$

Las ecuaciones paramétricas para C_1 son

$$x = t \quad y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} y^2 dx + 4xy dy &= \int_0^2 (t^2)^2 dt + 4(t)(t^2)(2t dt) \\ &= \int_0^2 9t^4 dt \\ &= \left. \frac{9}{5}t^5 \right|_0^2 \\ &= \frac{288}{5} \end{aligned}$$

El arco C_2 puede representarse paramétricamente por

$$x = t \quad y = 2t \quad \text{de } t = 2 \text{ a } t = 0$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} y^2 dx + 4xy dy &= \int_2^0 (2t)^2 dt + 4(t)(2t)(2 dt) \\ &= \int_2^0 20t^2 dt \\ &= \left. \frac{20}{3} t^3 \right|_2^0 \\ &= -\frac{160}{3} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \frac{288}{5} - \frac{160}{3} \\ &= \frac{64}{15} \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido al utilizar el teorema de Green. ◀

► **EJEMPLO 1** Utilice el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj una vez sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ si el movimiento es causado por el campo de fuerza $F(x, y) = (\sin x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$. Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

Solución Si W joules es el trabajo realizado, entonces

$$W = \oint_C (\sin x - y) dx + (e^y - x^2) dy$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Del teorema de Green,

$$\begin{aligned} W &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin x - y) \right] dA \\ &= \iint_R (-2x + 1) dA \end{aligned}$$

Se emplearán coordenadas polares para evaluar la integral doble. Con $x = r \cos \theta$ y $dA = r dr d\theta$ se tiene

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3} a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{2}{3} a^3 \sin \theta + \frac{a^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

Conclusión: El trabajo realizado es πa^2 joules. ◀

El teorema siguiente, el cual es una consecuencia del teorema de Green, proporciona un método útil para calcular el área de una región limitada por una curva cerrada, simple y suave a trozos.

14.4.2 Teorema

Si R es una región que tiene como su frontera una curva C cerrada, simple y suave a trozos, y A unidades cuadradas es el área de R , entonces

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Demostración En el enunciado del teorema de Green, considere $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$ y $N(x, y) = \frac{1}{2}x$. Entonces

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\ &= \iint_R dA \end{aligned}$$

Como $\iint_R dA$ es la medida del área de R , entonces

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = A$$

► **EJEMPLO 2** Utilice el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución Las ecuaciones paramétricas para la elipse son

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Entonces $dx = -a \sin t dt$ y $dy = b \cos t dt$. Si C es la elipse y A unidades cuadradas es el área de la región limitada por C , entonces, por el teorema 14.4.2,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t dt) - (b \sin t)(-a \sin t dt)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Conclusión: El área es πab unidades cuadradas.

► **EJEMPLO 3** Utilice el teorema de Green para evaluar la integral

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy$$

si C es la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solución Del teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (4 + 3) dA \\ &= 7 \iint_R dA \end{aligned}$$

La doble integral $\iint_R dA$ es la medida del área de la región acotada por la elipse. Del ejemplo 2 con $a = 3$ y $b = 2$, el área de región limitada por la elipse es 6π unidades cuadradas. Por tanto,

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy = 42\pi \quad \blacktriangleleft$$

Existen dos formas vectoriales del teorema de Green, las cuales se obtendrán a continuación. Sea C una curva cerrada, simple y suave a trozos del plano xy . Suponga que una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

con $x = f(s)$ y $y = g(s)$, donde s unidades es la longitud de arco medida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj a partir de un punto particular P_0 de C hasta un punto P de C . Entonces si $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente unitario de C en P , $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$. Así,

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \quad (7)$$

El vector normal $\mathbf{N}(s)$ definido por

$$\mathbf{N}(s) = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \quad (8)$$

es un vector normal unitario de C en P . Este vector normal unitario se ha elegido en lugar de su valor negativo debido a que cuando el sentido en que se recorre C es contrario al giro de las manecillas del reloj, $\mathbf{N}(s)$ apuntará hacia afuera de la región R limitada por C . A este vector se le denomina **vector normal saliente unitario**. Vea la figura 6. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

donde M y N satisfacen la hipótesis del teorema de Green. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y) dy - N(x, y) dx \end{aligned}$$

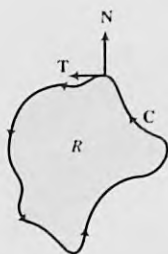


FIGURA 6

entonces

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds = \oint_C -N(x, y) dx + M(x, y) dy$$

Al aplicar el teorema de Green a la integral de línea del miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= \iint_R \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (-N) \right] dA \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA \end{aligned}$$

Esta forma vectorial del teorema de Green se enuncia formalmente en el teorema siguiente, llamado *teorema de la divergencia de Gauss* en honor al matemático y científico alemán **Karl Gauss** (1777–1855).

14.4.3 Teorema de la divergencia de Gauss en el plano

Considere las funciones M y N , la curva C y la región R como se definieron en el teorema de Green. Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ y $\mathbf{N}(s)$ es el vector normal saliente unitario de C en P , donde s unidades es la longitud de arco medida en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj desde un punto particular P_0 de C hasta P , entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dA$$

► **EJEMPLO 4** Verifique el teorema de la divergencia de Gauss en el plano si

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

y R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución La frontera de R es la circunferencia unitaria que puede representarse paraméricamente por las ecuaciones

$$x = \cos s \quad y = \sin s \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

donde s es la longitud de arco desde el punto donde $s = 0$ hasta el punto P de C . Entonces una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

De (8), el vector normal saliente unitario es

$$\mathbf{N}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}$$

En un punto $P(\cos s, \sin s)$ de C , \mathbf{F} tiene el valor $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}) \cdot (\cos s \mathbf{i} + \operatorname{sen} s \mathbf{j}) \, ds \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sen} s \cos s + 5 \operatorname{sen} s \cos s) \, ds \\
 &= 7 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s \cos s \, ds \\
 &= \frac{7}{2} \operatorname{sen}^2 s \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$, y puesto que $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
 \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De esta manera se ha verificado el teorema de la divergencia de Gauss en el plano para \mathbf{F} y R . \blacktriangleleft

Observe en el ejemplo 4 que $\iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$ es más fácil de calcular que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds$.

Si \mathbf{F} es un campo vectorial y $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, entonces se dice que \mathbf{F} está **libre de divergencia**. El campo vectorial del ejemplo 4 está libre de divergencia. En el estudio de hidrodinámica (movimiento de los fluidos), si el campo de velocidad de un fluido está libre de divergencia, entonces el fluido se denomina **incompresible**. En la teoría de la electricidad y el magnetismo, un campo vectorial que está libre de divergencia se dice que es **solenoidal**.

A continuación se utilizará el teorema de la divergencia de Gauss en el plano para dar una interpretación física de la divergencia de un campo vectorial. Considere las funciones M y N , la región R y la curva C como se definieron en el teorema de Green. Suponga que \mathbf{F} es el campo de velocidad de un fluido bidimensional (es decir, con profundidad constante) y que \mathbf{F} está definido por $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Además suponga que el fluido fluye a través de la región R que tiene la curva C como su frontera, para la cual el sentido en que se recorre C es contrario al giro de las manecillas del reloj. Se asumirá que el fluido tiene una densidad constante en R , y por conveniencia, la densidad es de valor unitario. El flujo del campo vectorial \mathbf{F} a través de C es la tasa a la que el fluido atraviesa C en dirección perpendicular a C . Se mostrará cómo este flujo puede expresarse como una integral de línea.

Sea s la longitud de arco de la curva C medida desde un punto particular P_0 hasta un punto P . Divida la curva C en n arcos y sea Δs la longitud del i -ésimo arco que contiene al punto $P_i(x_i, y_i)$, donde s_i es la longitud del arco de C desde P_0 hasta P_i . Como \mathbf{F} es continuo, entonces una aproximación de la velocidad del fluido en cada punto del i -ésimo arco es $\mathbf{F}(x_i, y_i)$. La cantidad de fluido que cruza el arco por unidad de tiempo está dada aproximadamente por el área de un paralelogramo que tiene un par de lados opuestos de longitud Δs y una altura de longitud $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i)$ unidades, donde $\mathbf{N}(s_i)$ es el vector normal saliente unitario de C en $P_i(x_i, y_i)$. Vea la figura 7. El área del paralelogramo es $\mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i) \Delta s$ unidades cuadradas. La cantidad total de fluido que atraviesa C por unidad de tiempo está dada aproximadamente por

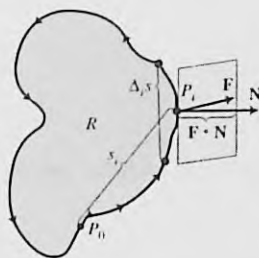


FIGURA 7

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{N}(s_i) \Delta s$$

Al tomar el límite de esta suma conforme n se incrementa sin límite y como cada Δs tiende a cero, se obtiene la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds$$

la cual se denomina **flujo** de \mathbf{F} a través de C .

Ahora bien, sea $P(\bar{x}, \bar{y})$ un punto particular de R . Considere una circunferencia que tiene centro en P y radio pequeño δ , y denótela por C_δ . Sea R_δ la región limitada por C_δ . Entonces

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta = \oint_{C_\delta} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N} ds$$

Al aplicar el teorema 14.4.3 se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta = \iint_{R_\delta} \operatorname{div} \mathbf{F} dA$$

Si M_x y N_y son continuas en R_δ , entonces $\operatorname{div} \mathbf{F}$ es continua en esa región, y para una δ pequeña, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ en R_δ es aproximadamente $\mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y})$. Así,

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta \approx \iint_{R} \operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) dA$$

Como $\operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y})$ es constante y $\iint_{R} dA$ es la medida del área de una circunferencia de radio δ , entonces se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C_\delta \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) (\pi\delta^2) \quad (9)$$

Recuerde que el flujo de \mathbf{F} a través de C_δ es la cantidad total de fluido que atraviesa C_δ por unidad de tiempo. Por tanto, de (9), $\operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y})$ puede interpretarse como la medida aproximada de la tasa de flujo del fluido por unidad de área que sale del punto (\bar{x}, \bar{y}) . Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) > 0$, se dice que el fluido tiene una **fuentes** en (\bar{x}, \bar{y}) . Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) < 0$, entonces el fluido tiene una **antifuentes** o **sumidero** en (\bar{x}, \bar{y}) . Si \mathbf{F} está libre de divergencia en todos los puntos de una región, entonces no existen fuentes ni antifuentes en la región. Como se mencionó anteriormente, el fluido es incompresible.

La palabra *flujo* normalmente significa escurrimiento o fluencia; sin embargo, el término *flujo* se aplica a campos vectoriales en general, no sólo a aquellos asociados con la velocidad de un fluido. De esta manera, si \mathbf{F} es un campo vectorial, entonces

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds \quad (10)$$

► **EJEMPLO 5** El campo de velocidad de un fluido está definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = (5x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y)\mathbf{j}$$

Calcule la intensidad (tasa) de fluencia del fluido cuando sale de una región limitada por una curva C cerrada, simple y suave cuya área es de 150 cm^2 .

Solución La intensidad de fluencia del fluido está dada por el flujo de \mathbf{F} a través de C . De (10) y del teorema de la divergencia de Gauss en el plano se tiene

$$\begin{aligned} \text{flujo} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} (5x - y) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 3y) \right] dA \\ &= \iint_R (5 - 3) \, dA \\ &= 2 \iint_R dA \end{aligned}$$

Como el área de R es de 150 cm^2 , entonces $\iint_R dA = 150$. Así,

$$\text{flujo} = 300$$

Conclusión: La intensidad de fluencia (o flujo) del fluido que sale de la región es 300 cm^2 por unidad de tiempo. \blacktriangleleft

A fin de obtener la segunda forma vectorial del teorema de Green se considerará el producto punto de $\mathbf{F}(x, y)$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T}(s)$ definido por la ecuación (7). De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) \, ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) ds \\ &= M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy \end{aligned}$$

De donde

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) \, ds = \oint_C M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy \quad (11)$$

El rotacional de \mathbf{F} en dos dimensiones se definió en la sección 14.1 como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Por tanto,

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

En consecuencia, de esta ecuación y (11), la ecuación del teorema de Green puede escribirse como

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) \, ds = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Esta forma vectorial del teorema de Green se enuncia formalmente en el teorema siguiente denominado *teorema de Stokes*, en honor al matemático y físico irlandés *George Stokes* (1819–1903).

14.4.4 Teorema de Stokes en el plano

Considere las funciones M y N , la curva C y la región R como se definieron en el teorema de Green. Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ y $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente unitario de C en P , donde s unidades es la longitud de arco medida desde un punto particular P_0 de C hasta P , entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA$$

► **EJEMPLO 6** Verifique el teorema de Stokes en el plano para \mathbf{F} y la región R del ejemplo 4.

Solución Como en el ejemplo 4, el campo vectorial \mathbf{F} está definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$$

y una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{R}(s) = \cos s\mathbf{i} + \sin s\mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

Como $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$,

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}$$

En un punto $P(\cos s, \sin s)$ de C , \mathbf{F} tiene el valor $2 \sin s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \sin s\mathbf{i} + 5 \cos s\mathbf{j}) \cdot (-\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 s + 5 \cos^2 s) \, ds \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} \, ds + 5 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds \\ &= -s + \frac{1}{2} \sin 2s + \frac{5}{2}s + \frac{5}{4} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2}s + \frac{7}{4} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

Como $N = 5x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 5$, y como $M = 2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$. Así

$$\begin{aligned} \iint_R \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dA \\ &= \iint_R (5 - 2) \, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \iint_R dA \\
 &= 3\pi
 \end{aligned}$$

De esta manera se ha verificado el teorema de Stokes para este campo vectorial \mathbf{F} y esta región R .

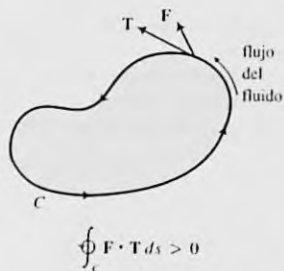


FIGURA 8

Si \mathbf{F} es el campo de velocidad de un fluido, entonces el producto punto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ es la componente tangencial de \mathbf{F} y la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ se denomina **circulación** de \mathbf{F} sobre o alrededor de C . De manera intuitiva, se puede pensar que la circulación es la suma de las componentes tangenciales de \mathbf{F} alrededor de C . Si el desplazamiento alrededor de C se efectúa en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds > 0$, entonces el fluido circula en ese sentido; refiérase a la figura 8. Si $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds < 0$, la circulación del fluido se efectúa en el mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj; consulte la figura 9.

Sea $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ un punto particular de la región R y sea C_δ la circunferencia de centro \bar{P} y radio pequeño δ . Si R_δ es la región limitada por C_δ , entonces

$$\oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_{R_\delta} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

Si M_x y N_x son continuas en R_δ , entonces $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ es continua en esa región y para un valor pequeño de δ , $\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}$ en R_δ es aproximadamente igual a $\text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k} \iint_{R_\delta} dA \\
 \oint_{C_\delta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k} (\pi\delta^2)
 \end{aligned}$$

De esta forma se interpreta $\text{rot } \mathbf{F}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \mathbf{k}$ como la medida aproximada de la intensidad (o tasa) de circulación por unidad de área en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj en el punto P . Cuando \mathbf{F} y \mathbf{T} son vectores ortogonales, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 0$ por lo que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. En tal caso se dice que \mathbf{F} es **irrotacional**. Este término se emplea aún si \mathbf{F} no es el campo de velocidad de un fluido.

EJERCICIOS 14.4

En los ejercicios 1 a 8, evalúe la integral de línea mediante el teorema de Green. Después verifique el resultado por medio del método de la sección 14.2.

- $\oint_C 4y dx + 3x dy$, donde C es el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
- $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, donde C es el cuadrado del ejercicio 1.
- $\oint_C 2xy dx - x^2y dy$, donde C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
- La integral de línea del ejercicio 3, donde C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.
- $\oint_C x^2y dx - y^2x dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
- $\oint_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
- La integral de línea del ejercicio 5, donde C es la curva cerrada que consiste del arco de $4y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ y el segmento de recta de $(2, 2)$ a $(0, 0)$.
- La integral de línea del ejercicio 6, donde C es la curva cerrada del ejercicio 7.

En los ejercicios 9 a 20, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

- $\oint_C (x + y) dx + xy dy$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x , la recta $x = 2$ y la curva $4y = x^3$.
- $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x , la recta $x = 1$ y la curva $y = x^2$.
- $\oint_C (-x^2 + x) dy$, donde C es la curva cerrada determinada por la recta $x - 2y = 0$ y la parábola $x = 2y^2$.
- $\oint_C (x^2 + y) dx$, donde C es la curva cerrada determinada por el eje x y la parábola $y = 4 - x^2$.
- $\oint_C \cos y dx + \cos x dy$, donde C es el rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ y $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
- $\oint_C e^{x+y} dx + e^{x+y} dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.
- $\oint_C (\sin^4 x + e^{2x}) dx + (\cos^3 y - e^y) dy$, donde C es la curva $x^4 + y^4 = 16$.
- $\oint_C x \sin y dx - y \cos x dy$, donde C es el rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ y $(0, \frac{1}{4}\pi)$.
- $\oint_C \frac{x^2 y}{x^2 + 1} dx - \tan^{-1} x dy$, donde C es la elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
- $\oint_C e^y \cos x dx + e^y \sin x dy$, donde C es la curva $x^6 + y^4 = 10$.
- $\oint_C (e^x - x^2 y) dx + 3x^2 y dy$, donde C es la curva cerrada determinada por $y = x^2$ y $x = y^2$.
- $\oint_C \tan y dx - x \tan^2 y dy$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

En los ejercicios 21 a 26, emplee el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región.

- La región limitada por el cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$ y $(1, 1)$.
- La región cuya frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.
- La región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
- La región acotada por la parábola $y = 2x^2$ y la recta $y = 8x$.
- La región limitada por la hipocicloide cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t$$
 donde $a > 0$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.
- La región acotada inferiormente por el eje x y superiormente por un arco de la cicloide que tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

En los ejercicios 27 a 30, verifique el teorema de la divergencia de Gauss en el plano y el teorema de Stokes en el plano para F y R .

- $F(x, y) = 3xi + 2yj$ y R es la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
- $F(x, y) = 3yi - 2xj$ y R es la región limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

- $F(x, y) = x^2i + y^2j$ y R es la región acotada por la elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
- $F(x, y) = y^2i + x^2j$ y R es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

En los ejercicios 31 a 34, utilice el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover una vez un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor de la curva C si el movimiento es causado por el campo de fuerza $F(x, y)$. Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

- C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$;
 $F(x, y) = (3x + y)i + (4x - 5y)j$.
- C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$;
 $F(x, y) = (e^x + y^2)i + (x^2y + \cos y)j$.
- C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$;
 $F(x, y) = (e^{x^2} + y^2)i + (e^{y^2} + x^2)j$.
- C consiste de la mitad superior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ y el intervalo $[-2, 2]$ sobre el eje x ;
 $F(x, y) = (xy + y^2)i + xyj$.

En los ejercicios 35 a 38, determine la intensidad (o tasa de fluencia (o flujo) del fluido que sale de la región R limitada por la curva C si F es el campo de velocidad del fluido. Suponga que la velocidad se mide en centímetros por segundo y el área de R en centímetros cuadrados.

- $F(x, y) = (y^2 + 6x)i + (2y - x^2)j$; C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.
- $F(x, y) = (5x - y^2)i + (3x - 2y)j$; C es el triángulo rectángulo cuyos vértices son $(1, 2)$, $(4, 2)$ y $(4, 6)$.
- $F(x, y) = x^3i + y^3j$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.
- $F(x, y) = xy^2i + yx^2j$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

En los ejercicios 39 a 42, F es el campo de velocidad de un fluido alrededor de la curva cerrada C , donde el movimiento alrededor de C se efectúa en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Emplee el teorema de Stokes en el plano para calcular $\oint_C F \cdot T ds$ y del resultado determine cual de los siguientes enunciados es correcto; (i) la circulación del fluido es en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj; (ii) la circulación del fluido es en el sentido del giro de las manecillas del reloj; (iii) F es irrotacional.

- $F(x, y) = 4yi + 6xj$; C es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(3, 5)$.
- $F(x, y) = 8yi + 3xj$; C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.
- $F(x, y) = \sin^2 xi + \cos^2 yj$; C es la curva determinada por la elipse $9x^2 + y^2 = 9$.
- $F(x, y) = y^3i + x^3j$; C es la curva determinada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.
- Demuestre que $\oint_C N(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$ si R es la región definida por

$$R = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

donde g_1 y g_2 son suaves.

14.5 INTEGRALES DE SUPERFICIE

El concepto de *integral de superficie* es una extensión del concepto de integral de línea en tres dimensiones. Se inicia el estudio de las integrales de superficie al considerar una región cerrada en el plano xy . Denote esta región por D , en lugar de R , a fin de evitar confusiones con la función definida por $R(x, y, z)$ empleada posteriormente en la discusión. Suponga que S es una superficie que se encuentra sobre D y que tiene la ecuación $z = f(x, y)$, donde f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D . Entonces, si σ es la medida del área de la superficie S , por el teorema 13.3.4 se tiene

$$\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \quad (1)$$

Se puede generalizar la integral de (1) si se considera una función G de las tres variables x , y y z , donde G es continua sobre S . Se procede de manera semejante a la discusión de la sección 13.3 que precede al teorema 13.3.4. Sea Δ una partición de la región D en subregiones rectangulares, donde el i -ésimo rectángulo tiene las dimensiones de medidas Δx y Δy , y un área de medida $\Delta_i A$. Sea (u_i, v_i) cualquier punto del i -ésimo rectángulo, y considere el plano tangente a la superficie en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$ de S . Proyecte verticalmente hacia arriba el i -ésimo rectángulo en el plano tangente, y sea $\Delta_i \sigma$ la medida del área de esta proyección. Vea la figura 1. El número $\Delta_i \sigma$ es una aproximación de la medida del área correspondiente a la porción de la superficie ubicada sobre el i -ésimo rectángulo. En la sección 13.3 se demostró que

$$\Delta_i \sigma = \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1} \, \Delta_i A \quad (2)$$

Si se forma la suma

$$\sum_{i=1}^n G(u_i, v_i, f(u_i, v_i)) \, \Delta_i \sigma$$

y se toma el límite de ésta conforme la norma de la partición tiende a cero, se tiene

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G(u_i, v_i, f(u_i, v_i)) \, \Delta_i \sigma \quad (3)$$

Este límite se denomina **integral de superficie** de G sobre S y se denota mediante

$$\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma$$

A fin de obtener una fórmula para evaluar esta integral de superficie, se sustituye de (2) en (3) y se obtiene

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n G(u_i, v_i, f(u_i, v_i)) \sqrt{f_x^2(u_i, v_i) + f_y^2(u_i, v_i) + 1} \, \Delta_i A$$

Este límite es una doble integral sobre la región D del plano xy . De modo que,

$$\begin{aligned} \iint_S G(x, y, z) \, d\sigma \\ = \iint_D G(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dA \end{aligned} \quad (4)$$

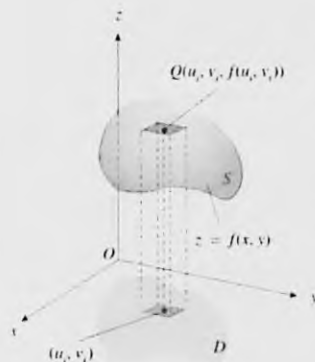


FIGURA 1

Si $G(x, y, z) = 1$, entonces (4) se transforma en

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dA$$

Al comparar esta ecuación con (1), se observa que para esta G la integral de superficie de G sobre S proporciona la medida del área de la superficie S .

Para la integral de superficie de (4), $z = f(x, y)$ es una ecuación de la superficie S que se proyecta sobre la región D del plano xy . Si una ecuación de la superficie S es de la forma $y = g(x, z)$ y S se proyecta sobre la región D del plano xz , y si g y sus primeras derivadas parciales son continuas en D , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S G(x, y, z) \, d\sigma \\ = \iint_D G(x, g(x, z), z) \sqrt{g_x^2(x, z) + g_z^2(x, z) + 1} \, dA \end{aligned} \quad (5)$$

Además, si una ecuación de la superficie S es de la forma $x = h(y, z)$ y S se proyecta sobre la región D del plano yz , y si h y sus primeras derivadas parciales son continuas en D , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S G(x, y, z) \, d\sigma \\ = \iint_D G(h(y, z), y, z) \sqrt{h_y^2(y, z) + h_z^2(y, z) + 1} \, dA \end{aligned} \quad (6)$$

▶ EJEMPLO 1 Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S x^2 z^2 \, d\sigma$$

donde S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

Solución La figura 2 muestra la superficie S y la proyección de S sobre la región D del plano xy . La región D está limitada por las dos circunferencias de radios 1 y 2, y cuyos centros están en el origen. Al despejar z de la ecuación de S , donde $z \geq 0$, se obtiene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto,

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De (4), con $G(x, y, z) = x^2 z^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 z^2 \, d\sigma &= \iint_D x^2(x^2 + y^2) \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dA \\ &= \iint_D x^2(x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dA \end{aligned}$$

Se evalúa la integral doble empleando coordenadas polares. Con $x = r \cos \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ y $dA = r \, dr \, d\theta$ se tiene



FIGURA 2

$$\begin{aligned}
 \iint_S x^2 z^2 d\sigma &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \cos^2 \theta) r^2 (r dr d\theta) \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \cos^2 \theta r^5 dr d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 \theta \frac{r^6}{6} \right]_1^2 d\theta \\
 &= \frac{21\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{21\sqrt{2}}{4} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{21\pi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Si la medida de la densidad superficial en el punto (x, y, z) de la superficie S es $\rho(x, y, z)$, y si M es la medida de la masa de S , entonces

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma \quad (7)$$

EJEMPLO 2 Calcule la masa de la porción del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es kx^2 kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante.

Solución La figura 3 muestra S , la cual es la superficie del plano dado en el primer octante, la región D , que es la proyección de S en el plano xy . Si se despeja z en la ecuación del plano se obtiene $z = 1 - x - y$. De esta manera,

$$f(x, y) = 1 - x - y \quad f_x(x, y) = -1 \quad f_y(x, y) = -1$$

De (7), con $\rho(x, y, z) = kx^2$, si M kilogramos es la masa de la superficie, entonces

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_S kx^2 d\sigma \\
 &= \iint_D kx^2 \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dA \\
 &= \iint_D kx^2 \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1} dA \\
 &= \sqrt{3}k \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dy dx \\
 &= \sqrt{3}k \int_0^1 \left[x^2 y \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \sqrt{3}k \int_0^1 (x^2 - x^3) dx
 \end{aligned}$$

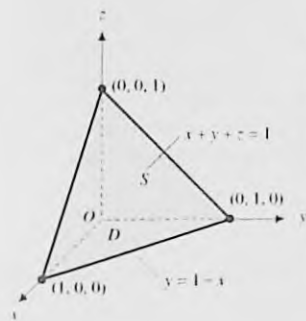


FIGURA 3

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{3}k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{12} \sqrt{3}k
 \end{aligned}$$

Conclusión: La masa es $\frac{1}{12} \sqrt{3}k$ kilogramos. ◀

Ahora se presentará una aplicación de las integrales de superficie para determinar el flujo de un fluido. Sea \mathbf{F} el campo de velocidad de un fluido definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Además, suponga que el fluido fluye a través de la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$, la cual se encuentra sobre la región D del plano xy . También suponga que f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D . En cada punto de S existen dos vectores normales unitarios a S . El vector normal unitario que tiene la componente k positiva se denomina **vector normal superior unitario** y el que tiene la componente k negativa recibe el nombre de **vector normal inferior unitario**.

Como en la discusión anterior a la ecuación (2), tome una partición de la región D que consiste de n subregiones rectangulares. Elija un punto (u_i, v_i) en el i -ésimo rectángulo. Projete verticalmente hacia arriba el i -ésimo rectángulo sobre el plano tangente a la superficie S en el punto $Q(u_i, v_i, f(u_i, v_i))$ y sea $\Delta_i\sigma$, dado por (2), una aproximación de la medida del área de esta proyección. Otra vez refiérase a la figura 1. Ahora sea \mathbf{N}_i el vector normal superior unitario a S en el punto Q y sea \mathbf{F}_i el vector velocidad del fluido en Q . La cantidad del fluido que atraviesa la proyección por unidad de tiempo está dada aproximadamente por el volumen del paralelepípedo que tiene una base de área $\Delta_i\sigma$ unidades cuadradas y una altura de longitud $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i$ unidades. Refiérase a la figura 4. La medida del volumen del paralelepípedo es $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i \Delta_i\sigma$. La cantidad total de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo está dada aproximadamente por

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_i \Delta_i\sigma$$

Al tomar el límite de esta suma conforme n crece sin límite y cada $\Delta_i\sigma$ se aproxima a cero, se obtiene la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma \quad (8)$$

la cual se denomina **flujo** de \mathbf{F} a través de S .

Con el fin de evaluar la integral de superficie (8), se escribe la ecuación de S en la forma $g(x, y, z) = 0$, donde

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

Del teorema 12.7.2, un vector normal unitario de la superficie definida por $g(x, y, z) = 0$ es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \\
 &= \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}}
 \end{aligned}$$

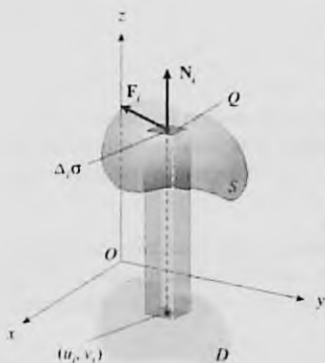


FIGURA 4

De modo que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iint_S (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \right) d\sigma \\ &= \iint_D \frac{-Mf_x - Nf_y + R}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} (\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}) \, dA\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R) \, dA \quad (9)$$

donde \mathbf{N} es un vector normal superior unitario. Si \mathbf{N} es un vector normal inferior unitario (donde la componente \mathbf{k} es negativa), entonces se tiene

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_D (Mf_x + Nf_y - R) \, dA \quad (10)$$

Esta fórmula se demuestra de manera semejante a la empleada al deducir (9).

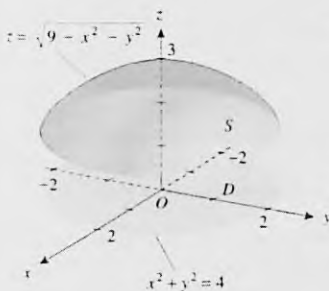


FIGURA 5

► **EJEMPLO 3** El campo de velocidad de un fluido está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

y la superficie S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ubicada sobre la región D del plano xy acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S .

Solución La figura 5 muestra la superficie S y la región D del plano xy . Al despejar z de la ecuación de la esfera, con $z > 0$, se obtiene $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} & f_x &= \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} & f_y &= \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \\ f_x &= -\frac{x}{z} & f_y &= -\frac{y}{z}\end{aligned}$$

De la definición de flujo se tiene

$$\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Del campo de velocidad dado, $M = y$, $N = -x$ y $R = 8$. Por tanto, de (9),

$$\begin{aligned}\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S &= \iint_D (-Mf_x - Nf_y + R) \, dA \\ &= \iint_D \left[-y\left(-\frac{x}{z}\right) - (-x)\left(-\frac{y}{z}\right) + 8 \right] dA \\ &= 8 \iint_D dA\end{aligned}$$

Como D es la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, entonces $A = 4\pi$. Así,

$$\begin{aligned}\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S &= 8(4\pi) \\ &= 32\pi\end{aligned}$$

Conclusión: La intensidad de fluencia (tasa de flujo) a través de S es 32π unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo. ◀

Suponga que S es una superficie cerrada, como lo son los paralelepípedos rectangulares, las esferas y los elipsoides. Cuando se utiliza (8) para calcular el flujo de \mathbf{F} a través de una superficie cerrada, se elige \mathbf{N} como un vector normal saliente unitario, el cual es un vector normal cuya dirección es hacia afuera del sólido limitado por la superficie. En particular, si S es un elipsoide, como el mostrado en la figura 6, se considera que S consiste de una superficie superior S_1 y una superficie inferior S_2 , como se indica en la figura. En tal caso el flujo de \mathbf{F} a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma$$

Para la integral de superficie a través de S_1 , \mathbf{N}_1 es un vector normal superior unitario y para la integral de superficie a través de S_2 , \mathbf{N}_2 es un vector normal inferior unitario.

▶ **EJEMPLO 4** El campo de velocidad de un fluido está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S si la longitud se mide en centímetros y el tiempo en horas.

Solución La figura 7 muestra la esfera y la región D del plano xy , la cual es el círculo limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $M = 0$, $N = 0$ y $R = 5z$. El flujo de \mathbf{F} a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma \quad (11)$$

donde S_1 es la mitad superior de la esfera y S_2 es la mitad inferior. Para S_1 , \mathbf{N}_1 es un vector normal superior unitario y una ecuación de S_1 es $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Así, $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (9),

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, d\sigma &= \iint_D [-Mf_x - Nf_y + R] \, dA \\ &= \iint_D 5z \, dA \\ &= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dA \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{16 - r^2} \, r \, dr \, d\theta\end{aligned}$$

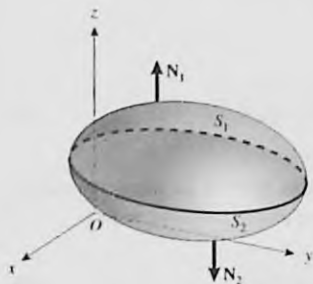


FIGURA 6

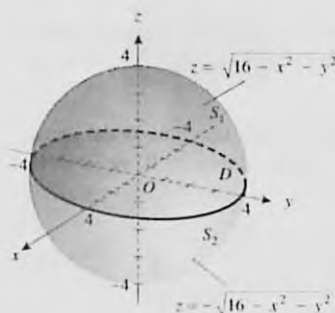


FIGURA 7

$$\begin{aligned}
 &= 5 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} (16 - r^2)^{3/2} \Big|_0^4 d\theta \\
 &= \frac{320}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{640}{3} \pi
 \end{aligned}$$

Para S_2 , \mathbf{N}_2 es un vector normal inferior unitario y una ecuación de S_2 es $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Por tanto, $f(x, y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$. De (10),

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma &= \iint_D [Mf_x + Nf_y - R] \, dA \\
 &= \iint_D -5z \, dA \\
 &= 5 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} \, dA
 \end{aligned}$$

De igual modo que en el cálculo del flujo de \mathbf{F} a través de S_1 , se tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, d\sigma = \frac{640}{3} \pi$$

En consecuencia, de (11),

$$\begin{aligned}
 \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \frac{640}{3} \pi + \frac{640}{3} \pi \\
 &= \frac{1280}{3} \pi
 \end{aligned}$$

Conclusión: La intensidad de fluencia (tasa de flujo) del fluido a través de la esfera es $\frac{1280}{3} \pi \text{ cm}^3/\text{hr}$. ◀

El concepto de flujo no se limita sólo a campos de velocidad de fluidos. Por ejemplo, si \mathbf{F} es un campo eléctrico, entonces la integral de superficie (8) es un flujo eléctrico, y si \mathbf{F} es un campo magnético, entonces dicha integral es un flujo magnético. La integral de superficie (8) también puede representar un flujo de calor.

EJERCICIOS 14.5

En los ejercicios 1 a 14, evalúe la integral de superficie $\iint_S G(x, y, z) \, d\sigma$ para G y S .

- $G(x, y, z) = z$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra por arriba del plano xy .
- $G(x, y, z) = x$; S es la porción del plano $x + y + z = 1$ del primer octante.
- $G(x, y, z) = x + 2y - z$; S es la porción del plano $x + y + z = 2$ del primer octante.
- $G(x, y, z) = z$; S es la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ del primer octante.
- $G(x, y, z) = xyz$; S se define como en el ejercicio 4.
- $G(x, y, z) = x^2$; S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ ubicado entre el plano xy y el plano $z = 1$ en el primer octante.
- $G(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = x^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y los planos $x = 1$ y $y = 2$.
- $G(x, y, z) = y$; S es la porción del cilindro $z = 4 - y^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $x = 3$.
- $G(x, y, z) = z^2$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

10. $G(x, y, z) = xyz$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.
11. $G(x, y, z) = x + y$; S es la porción del plano $4x + 3y + 6z = 12$ del primer octante.
12. $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre el plano xy y el plano $z = 2$.
13. $G(x, y, z) = xyz$; S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $y = 1$ y $y = 3$.
14. $G(x, y, z) = x^2$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está por arriba del plano xy . *Sugerencia:* la integral de superficie es impropia. Vea el ejemplo 7 de la sección 13.4.
- En los ejercicios 15 a 20, calcule la masa de la superficie S si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$ kilogramos por metro cuadrado.
15. S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ubicada por arriba de la región limitada por circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, donde k es una constante.
16. S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ del primer octante; $\rho(x, y, z) = y + 2z$.
17. S es la porción del paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra por arriba del plano $z = 1$; $\rho(x, y, z) = 1/\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.
18. S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está debajo del plano xy ; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Consulte la sugerencia.
19. S es la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ ubicada entre los planos $z = 2$ y $z = 3$; $\rho(x, y, z) = y^2z^2$.
20. S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ del primer octante; $\rho(x, y, z) = kz^2$, donde k es una constante.
- En los ejercicios 21 a 24 calcule el flujo de \mathbf{F} a través de la superficie S donde $\mathbf{F}(x, y, z)$ proporciona el campo de velocidad de un fluido.
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ del primer octante.
22. $\mathbf{F}(x, y, z)$ está definido del mismo modo que en el ejercicio 21; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ubicada por arriba de la región del plano xy acotada por la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 1$.
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encuentra sobre la región del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ ubicada por arriba del plano xy .
25. Suponga que $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ y S es el cubo del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S evaluando seis integrales de superficie, una para cada cara del cubo.
26. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ y S es el cubo del ejercicio 25, calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S evaluando seis integrales de superficie, una para cada cara del cubo.

14.6 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA DE GAUSS Y TEOREMA DE STOKES

Las dos formas vectoriales del teorema de Green, el teorema de la divergencia de Gauss en el plano y el teorema de Stokes en el plano, pueden generalizarse a tres dimensiones. Una exposición rigurosa de estos teoremas pertenece a un curso de Cálculo avanzado. Sin embargo, en esta sección se proporcionará una breve introducción a estos teoremas.

14.6.1 Teorema de la divergencia de Gauss

Sean M , N y R funciones de las tres variables x , y y z , y suponga que tienen primeras derivadas parciales continuas en una bola abierta B de \mathbb{R}^3 . Sea S una superficie cerrada y suave a trozos contenida en B , y sea E la región limitada por S . Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y \mathbf{N} es un vector normal saliente unitario de S , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Este teorema afirma que el flujo de \mathbf{F} a través de la frontera S de una región E de R^3 es la integral triple de la divergencia de \mathbf{F} sobre E . La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro. En el ejemplo siguiente se verifica este teorema para una \mathbf{F} y una S particulares.

► **EJEMPLO 1** Utilice el teorema de la divergencia de Gauss para resolver el ejemplo 4 de la sección 14.5.

Solución $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Del teorema de la divergencia de Gauss, el flujo de \mathbf{F} a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Como $\mathbf{F}(x, y, z) = 5z\mathbf{k}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial z}(5z)$; esto es, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 5$. De este modo,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 5 \iiint_E dV$$

Debido a que el volumen de E es el volumen de una esfera de radio 4, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= 5 \left[\frac{4}{3} \pi (4)^3 \right] \\ &= \frac{1280}{3} \pi \end{aligned}$$

Al comparar la solución del ejemplo anterior con la del ejemplo 4 de la sección 14.5, se observa cómo el teorema de la divergencia de Gauss simplifica el cálculo de una integral de superficie.

► **EJEMPLO 2** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, y S es el cubo del primer octante limitado por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$, y los planos coordenados, calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S .

Solución El cubo se muestra en la figura 1. El flujo de \mathbf{F} a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Al calcular esta integral de superficie directamente se tendrían que evaluar seis integrales de superficie, una por cada cara del cubo. Si se aplica el teorema de la divergencia de Gauss con

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ &= 2xy + 2y + x \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) \, dz \, dy \, dx \end{aligned}$$

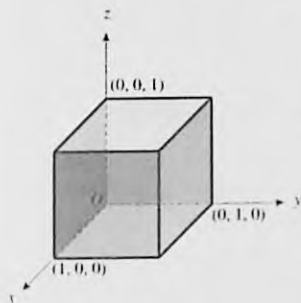


FIGURA 1

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \int_0^1 (2xy + 2y + x) dy dx \\
 &= \int_0^1 [xy^2 + y^2 + xy]_0^1 dx \\
 &= \int_0^1 (2x + 1) dx \\
 &= [x^2 + x]_0^1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Conclusión: La tasa de flujo del fluido a través de S es 2 unidades cúbicas de volumen por unidad de tiempo. ◀

La segunda forma vectorial del teorema de Green, conocida como teorema de Stokes en el plano, afirma que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

donde C es una curva cerrada simple y suave a trozos de R^2 y D es la región limitada por C . A continuación se extenderá este teorema al espacio tridimensional.

14.6.2 Teorema de Stokes

Sean M , N y R funciones de las tres variables x , y y z , y suponga que tienen primeras derivadas parciales continuas en una bola abierta B de R^3 . Sea S una superficie suave a trozos contenida en B y C una curva cerrada, simple y suave a trozos que es la frontera de S . Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y si \mathbf{N} es un vector normal saliente unitario de S , y \mathbf{T} es un vector tangente unitario de C donde s unidades es la longitud de arco medida a partir de un punto particular P_0 de C hasta P , entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_D \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma$$

El teorema de Stokes afirma que la integral de línea de la componente tangencial de un campo vectorial \mathbf{F} alrededor de la frontera C de una superficie S puede calcularse evaluando la integral de superficie de la componente normal del rotacional de \mathbf{F} sobre S . El teorema 14.6.2 se ha restringido a superficies para las cuales \mathbf{N} es un vector normal saliente de S . Un enunciado completo del teorema de Stokes, que involucre superficies orientadas y para las cuales puede definirse adecuadamente un vector normal unitario \mathbf{N} , puede encontrarse en un texto de Cálculo avanzado. La demostración de este teorema también puede hallarse en dicho texto.

La figura 2 muestra una superficie S , con la curva C como frontera, a la cual se aplica el teorema 14.6.2. Una ecuación de S es de la forma $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas en la región D , que es la proyección de S en el plano xy . La curva \bar{C} es la proyección de C en el plano xy , y D y \bar{C} satisfacen las condiciones del teorema

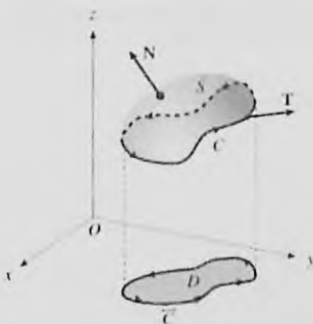


FIGURA 2

de Green. El sentido positivo a lo largo de C es el mismo que el sentido positivo a lo largo de \bar{C} , el cual es contrario al giro de las manecillas del reloj. La figura 2 también muestra representaciones de \mathbf{N} y \mathbf{T} .

Otra forma de la ecuación del teorema de Stokes se obtiene al escribir $d\mathbf{R}$ en lugar de $\mathbf{T} ds$ en la integral de línea de la izquierda. De modo que,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma \quad (1)$$

► **EJEMPLO 3** Sea \mathbf{F} el campo de fuerza definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -4y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$$

y sea $\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ una ecuación vectorial de C . Suponga que S es la porción del paraboloido $z = 10 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano $z = 1$. Verifique el teorema de Stokes para estas \mathbf{F} , C y S al

determinar cada una de las expresiones siguientes: (a) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

(b) $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$; (c) $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma$.

Solución La figura 3 muestra la superficie S y la región D , la cual es la proyección de S en el plano xy . La región D está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. La curva C , la cual es la frontera de S , es la circunferencia con centro en $(0, 0, 1)$ y radio 3, del plano $z = 1$.

(a) La curva C tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{R}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2)$$

Así,

$$\mathbf{R}'(t) = -3 \sin t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} \quad (3)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9 \cos t\mathbf{k}) \cdot (-3 \sin t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (36 \sin^2 t + 6 \cos t) dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 6 \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &= 18 - 9 \sin 2t + 6 \Big|_0^{2\pi} \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

(b) Para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$, se obtiene una ecuación vectorial de C que tenga a s como parámetro, donde s es la longitud de arco medida a partir del punto donde $t = 0$. Como $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{R}'(t)\|$, de (3) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} \\ &= 3 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &= 3 \end{aligned}$$

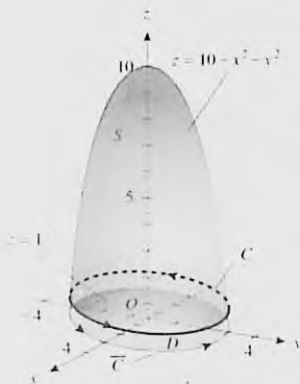


FIGURA 3

Por tanto, $s = 3t + k$, y puesto que $s = 0$ cuando $t = 0$, entonces $k = 0$. De esta manera,

$$s = 3t$$

De (2) con $t = \frac{1}{3}s$, se obtiene

$$\mathbf{R}(s) = 3 \cos \frac{1}{3}s \mathbf{i} + 3 \sin \frac{1}{3}s \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad 0 \leq s \leq 6\pi$$

Debido a que $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$, se tiene

$$\mathbf{T}(s) = -\sin \frac{1}{3}s \mathbf{i} + \cos \frac{1}{3}s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq 6\pi$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{R}(s)) \cdot \mathbf{T}(s) \, ds \\ &= \int_0^{6\pi} (-12 \sin \frac{1}{3}s \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9 \cos \frac{1}{3}s \mathbf{k}) \cdot (-\sin \frac{1}{3}s \mathbf{i} + \cos \frac{1}{3}s \mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_0^{6\pi} (12 \sin^2 \frac{1}{3}s + 2 \cos \frac{1}{3}s) \, ds \\ &= 12 \int_0^{6\pi} \frac{1 - \cos \frac{2}{3}s}{2} \, ds + 2 \int_0^{6\pi} \cos \frac{1}{3}s \, ds \\ &= 6s - 9 \sin \frac{2}{3}s + 6 \sin \frac{1}{3}s \Big|_0^{6\pi} \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

(c) Primero se calculará rot \mathbf{F} .

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -4y & 2z & 3x \end{vmatrix} \\ &= -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \end{aligned}$$

De donde,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_S (-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

A fin de evaluar esta integral de superficie se aplica (9) de la sección 14.5 ya que \mathbf{N} es un vector normal superior unitario. El campo vectorial es $-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; por lo que $M = -2$, $N = -3$ y $R = 4$. Puesto que una ecuación de la superficie es $z = 10 - x^2 - y^2$, entonces

$$f(x, y) = 10 - x^2 - y^2 \quad f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = -2y$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \iint_D [-(-2)(-2x) - (-3)(-2y) + 4] \, dA \\ &= \iint_D (-4x - 6y + 4) \, dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-4r \cos \theta - 6r \sin \theta + 4)r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4}{3} r^2 \cos \theta - 2r^3 \sin \theta + 2r^2 \right]_0^3 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (-36 \cos \theta - 54 \sin \theta + 18) \, d\theta \\
 &= -36 \sin \theta + 54 \cos \theta + 18\theta \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 36\pi
 \end{aligned}$$

Los resultados de los incisos (a), (b) y (c) son iguales a 36π . De modo que así se ha verificado el teorema de Stokes para estas \mathbf{F} , C y S . ◀

► **EJEMPLO 4** Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ y C es la frontera de la superficie que consiste de la porción del cilindro $z = 4 - x^2$ del primer octante determinada por los planos coordenados y el plano $y = 3$.

Solución La figura 4 muestra la superficie S y la curva C , que es su frontera, compuesta por C_1 , C_2 , C_3 y C_4 . Del teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, d\sigma$$

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & y^2 \end{vmatrix} \\
 &= 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

De modo que,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S (2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$$

Como \mathbf{N} es un vector normal superior unitario, se calcula el valor de la integral de superficie aplicando (9) de la sección 14.5. Debido a que el campo vectorial es $2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces $M = 2y$, $N = x$ y $R = y$. Una ecuación de S es $z = 4 - x^2$. Por tanto,

$$f(x, y) = 4 - x^2 \quad f_x(x, y) = -2x \quad f_y(x, y) = 0$$

En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \iint_D [-(2y)(-2x) - x(0) + y] \, dA \\
 &= \iint_D (4xy + y) \, dA
 \end{aligned}$$

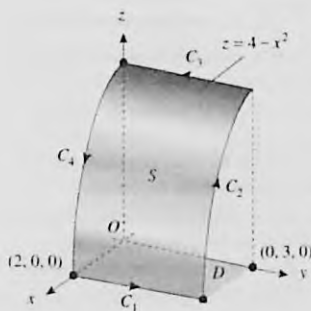


FIGURA 4

La región D está acotada por el rectángulo del plano xy delimitado por los ejes x y y , y las rectas $x = 2$ y $y = 3$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_0^2 \int_0^3 (4xy + y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[2xy^2 + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^3 \, dx \\ &= \int_0^2 (18x + \frac{9}{2}) \, dx \\ &= 9x^2 + \frac{9}{2}x \Big|_0^2 \\ &= 45\end{aligned}$$

EJERCICIOS 14.6

En los ejercicios 1 a 4, verifique el teorema de la divergencia de Gauss para \mathbf{F} y S .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$; S es el cubo delimitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

En los ejercicios 5 a 8, para \mathbf{F} y S del ejercicio indicado de la sección 14.5, calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S mediante el teorema de la divergencia de Gauss.

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 5. Ejercicio 21 | 6. Ejercicio 22 |
| 7. Ejercicio 25 | 8. Ejercicio 26 |

En los ejercicios 9 a 16, utilice el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ para \mathbf{F} y S .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$; S es el cubo del primer octante limitado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 3$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 6x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es el tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, inferiormente por el plano xy y superiormente por el plano $z = 4$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 12.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 11.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

- $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$; S es la frontera de la región exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En los ejercicios 17 a 22, verifique el teorema de Stokes para \mathbf{F} y S .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encuentra arriba del plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está debajo del plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloides $z = x^2 + y^2$ ubicado por debajo del plano $z = 1$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la superficie del ejercicio 19.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del plano xy .

En los ejercicios 23 a 28, utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ para \mathbf{F} y C .

- $\mathbf{F}(x, y, z) = 4y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ del plano xy .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C es el cuadrado cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(2, 2, 0)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + \sin^{-1}x)\mathbf{i} + e^{y^2}\mathbf{j} + (x + \ln(z^2 + 4))\mathbf{k}$; C es el triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z - e^y)\mathbf{i} + (x^3 + \sin y)\mathbf{j} + (y^2 - \tan z)\mathbf{k}$; C tiene la ecuación $\mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- Explique por qué el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes son versiones tridimensionales del teorema de Green.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 14

► SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 14

1. Establezca una condición que pueda emplearse para determinar si un vector del plano es un gradiente. Invente un ejemplo.
2. Realice la sugerencia I para un vector de tres dimensiones. Invente un ejemplo.
3. ¿Qué es un *campo vectorial*? Invente un ejemplo de un campo vectorial en el plano y otro en tres dimensiones.
4. ¿Qué es un campo vectorial *conservador* (o *conservativo*) y qué es una *función potencial* para un campo vectorial conservador? Invente un ejemplo de cada uno.
5. Defina el *rotacional* de un campo vectorial en tres dimensiones. Invente un ejemplo.
6. Defina la *divergencia* de un campo vectorial en tres dimensiones. Invente un ejemplo.
7. Establezca un truco nemotécnico, que involucre la notación de determinantes, para calcular $\text{rot } \mathbf{F}$. Invente un ejemplo.
8. ¿Cómo se calcula el trabajo realizado por un campo de fuerza sobre una partícula que la desplaza a lo largo de una curva? Invente un ejemplo.
9. ¿Qué es una *integral de línea*? Invente un ejemplo de una integral de línea expresada tanto con la notación de la forma diferencial como con la notación vectorial.
10. ¿Qué significa que una integral de línea sea *independiente de la trayectoria*? Invente un ejemplo.
11. Enuncie un teorema que proporcione condiciones para que una integral de línea de un campo vectorial del plano sea independiente de la trayectoria. Invente un ejemplo.
12. Realice la sugerencia II para una integral de línea de un campo vectorial en tres dimensiones.
13. Establezca la fórmula del teorema fundamental de la integral de línea que proporciona el valor de una integral de línea independiente de la trayectoria. Invente un ejemplo para el plano y otro para el espacio tridimensional.
14. Enuncie el *teorema de Green*.
15. Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
16. Enuncie un teorema que proporcione un método para calcular el área de una región plana limitada por una curva cerrada, simple y suave a trozos. Invente un ejemplo.
17. Enuncie el teorema de la *divergencia de Gauss* para el plano. Invente un ejemplo que muestre cómo este teorema relaciona el flujo con la divergencia de un campo vectorial en el plano.
18. Enuncie el *teorema de Stokes* para el plano. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema la circulación y el rotacional de un campo vectorial en el plano.
19. ¿Qué es una *integral de superficie*? Invente un ejemplo.
20. ¿Cómo puede calcularse la masa de una superficie mediante una integral de superficie? Invente un ejemplo.
21. ¿Cómo se aplican las integrales de superficie para calcular el flujo de un campo vectorial a través de la superficie?
22. Enuncie el teorema de la divergencia de Gauss en tres dimensiones. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema el flujo y la divergencia de un campo vectorial en tres dimensiones.
23. Enuncie el teorema de Stokes en tres dimensiones. Invente un ejemplo que muestre cómo relaciona este teorema la circulación y el rotacional de un campo vectorial en tres dimensiones.

► EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 14

En los ejercicios 1 a 4, determine si el vector es un gradiente, y si lo es, obtenga una función que tenga ese gradiente.

1. $2xe^{x^2} \ln y \mathbf{i} + \frac{e^{x^2}}{y} \mathbf{j}$
2. $(e^x \tan y - \sec y) \mathbf{i} - \sec y(x \tan y - e^x \sec y) \mathbf{j}$
3. $\left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \mathbf{i} + \frac{1}{x+z} \mathbf{j} + \left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2}\right) \mathbf{k}$
4. $y(\cos x - z \sin x) \mathbf{i} + z(\cos x + \sin y) \mathbf{j}$
 $- (z \cos y - y \cos x) \mathbf{k}$

En los ejercicios 5 y 6, obtenga un campo vectorial conservador que tenga como una función potencial a la función f .

5. (a) $f(x, y) = 2x^2y + 3xy^3$;
 (b) $f(x, y, z) = xe^y - yze^z$.

6. (a) $f(x, y) = e^x \cos y + x \sin y$;

(b) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

En los ejercicios 7 a 10, demuestre que el campo vectorial \mathbf{F} es conservador, y después obtenga una función potencial.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2y^2}{1+4x^2y^4} \mathbf{i} + \frac{4xy}{1+4x^2y^4} \mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x - 4y) \mathbf{i} + (z - 4x) \mathbf{j} + (y - 8z) \mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \sec^2 x \mathbf{i} + 2ye^{3z} \mathbf{j} + (3y^2e^{3z} + 2z \tan x) \mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x - \sin y) \mathbf{i} - (x \cos y + \cos x) \mathbf{j}$

En los ejercicios 11 a 14, calcule $\text{rot } \mathbf{F}$ y $\text{div } \mathbf{F}$.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xz} \mathbf{i} + e^{yz} \mathbf{j} + e^{xz} \mathbf{k}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \sin y \mathbf{i} + \sin x \mathbf{k}$

13. $F(x, y) = \frac{1}{y} \mathbf{i} - \frac{2x}{y} \mathbf{j}$

14. $F(x, y, z) = \frac{x}{y} \mathbf{i} + \frac{y}{z} \mathbf{j} + \frac{z}{x} \mathbf{k}$

En los ejercicios 15 a 22, evalúe la integral de línea sobre la curva C .

15. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $F(x, y) = 3y\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$;

$C: \mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1.$

16. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $F(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$;

$C: \mathbf{R}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ del punto (8, 4) al punto (1, 1).

17. $\int_C (2x + 3y) dx + xy dy$;

$C: \mathbf{R}(t) = 4 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi.$

18. $\int_C (2x + y) dx + (x - 2y) dy$; $C: x^2 + y^2 = 9.$

19. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$;

$C: \mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$

20. $\int_C xe^y dx - xe^y dy + e^y dz$;

$C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$

21. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $F(x, y, z) = 3xy\mathbf{i} + (4y^2 - xz)\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$;

C : la cúbica alabeada $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$

22. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C : la hélice circular

$\mathbf{R}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

En los ejercicios 23 a 30, demuestre que el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, después calcule el valor en cualquier forma conveniente. En cada ejercicio C es cualquier curva suave a trozos desde el punto A hasta el punto B .

23. $\int_C 2xe^y dx + x^2e^y dy$; A es (1, 0) y B es (3, 2).

24. $\int_C \left(\frac{1}{y} - y \right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} - x \right) dy$; A es (0, 1) y B es (6, 3).

25. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$F(x, y) = (\cos y - y \cos x)\mathbf{i} - (\sin x + x \sin y)\mathbf{j}$

A es (0, $\frac{1}{2}\pi$) y B es (π , 0).

26. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$F(x, y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 - 2x + 3y^2)\mathbf{j}$;

A es (2, -1) y B es (3, 2).

27. $\int_C 3y dx + (3x + 4y) dy - 2z dz$; A es (0, 1, -1) y B es (1, 2, 0).

28. $\int_C z \sin y dx + xz \cos y dy + x \sin y dz$; A es (0, 0, 0) y B es (2, 3, $\frac{1}{2}\pi$).

29. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$;

$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{2z}{x^2} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{y^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{2}{x} + \frac{y}{z^2} \right) \mathbf{k}$;

A es (2, -1, 1) y B es (4, 2, -2).

30. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$; $F(x, y, z) = (2xy + 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 4yz + 3xz)\mathbf{j} + (3xy - 2y^2)\mathbf{k}$;

A es (0, 2, 1) y B es (1, -1, 4).

En los ejercicios 31 a 34, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

31. $\oint_C (3x + 2y) dx + (3x + y^2) dy$, donde C es la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144.$

32. $\oint_C \ln(y + 1) dx - \frac{xy}{y+1} dy$, donde C es la curva cerrada

determinada por la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ y los intervalos $[0, 4]$ en los ejes x y y .

33. $\oint_C e^t \sin y dx + e^t \cos y dy$, donde C es cualquier curva cerrada y suave.

34. $\oint_C (x^2 - y^3) dx + (y^2 + x^3) dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1.$

En los ejercicios 35 y 36, utilice el teorema 14.4.2 para calcular el área de la región.

35. La región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2.$

36. La región acotada por las dos parábolas $y = x^2$ y $x^2 = 18 - y.$

En los ejercicios 37 a 40, calcule el trabajo total efectuado al mover un objeto a lo largo de C si el movimiento es causado por el campo de fuerza F . Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

37. $F(x, y) = 2x^2y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j}$; C : el arco de la parábola $y = 3x^2 + 2x + 4$ desde (0, 4) hasta (1, 9).

38. $F(x, y) = xy^2\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; C : el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde (2, 0) hasta (0, 2).

39. $F(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C : el segmento de recta desde el origen hasta el punto (4, 1, 2).

40. $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$;

$C: \mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; 0 \leq t \leq 3.$

En los ejercicios 41 y 42, verifique los teoremas de la divergencia de Gauss y de Stokes en el plano para F y R .

41. $F(x, y) = 4y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$ y R es la región limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$

42. $F(x, y) = 3x^2\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ y R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144.$

En los ejercicios 43 y 44, emplee el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover un objeto en el sentido contrario al del giro de las manecillas del reloj una vez alrededor de C si el movimiento es causado por el campo de fuerza $F(x, y)$. Suponga que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

43. C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$;

$F(x, y) = (xy^2 + \cos x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j}.$

44. C es la elipse $9x^2 + y^2 = 9$;

$F(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}.$

En los ejercicios 45 y 46, calcule la tasa de flujo (o intensidad de fluencia) de un fluido fuera de la región R limitada por C si $F(x, y)$ es el campo de velocidad del fluido. Suponga que la

velocidad se mide en centímetros por segundo y el área de R en centímetros cuadrados.

45. $\mathbf{F}(x, y) = (4x - 3y)\mathbf{i} + (5y - 4x^2)\mathbf{j}$; C es el triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 1)$, $(0, 4)$ y $(4, 4)$.
46. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 12x)\mathbf{i} + (4y - x^2)\mathbf{j}$; C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.
47. Obtenga el valor de la integral de línea

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

si C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hasta $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

48. Aplique el teorema de Green para calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 5)$ y $(-2, 1)$.
49. Evalúe la integral de superficie $\iint_S xy \, d\sigma$, donde S es la porción del plano $3x + 2y - z = 0$ del primer octante y que se encuentra debajo del plano $z = 6$.
50. Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2 \, d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ del primer octante limitada por el plano xy y el plano $z = 1$.
51. Determine la integral de superficie $\iint_S x \, d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $z = 9 - x^2$ del primer octante limitada por los planos coordenados y el plano $y = 2$.
52. Evalúe la integral de superficie $\iint_S xyz \, d\sigma$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ ubicada entre los planos $x = 1$ y $x = 4$.
53. Calcule la masa de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ del primer octante si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es kz^2 kilogramos por metro cuadrado, donde k es una constante.
54. Determine la masa de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra arriba del plano xy si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es $(4 - z)$ kilogramos por metro cuadrado. *Sugerencia:* la integral de superficie es impropia. Consulte el ejemplo 7 de la sección 13.4.
55. Un embudo tiene la forma de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 4$. Si la densidad superficial en cualquier punto (x, y, z) de la superficie es $(10 - z)$ kilogramos por metro cuadrado, obtenga la masa del embudo.

56. Suponga que la superficie S es parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra por arriba de la región D del plano xy limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Si el campo de velocidad de un fluido está determinado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S .

57. El campo de velocidad de un fluido está definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

y la superficie S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano xy . Calcule el flujo de \mathbf{F} a través de S .

58. Verifique el teorema de la divergencia de Gauss si $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{2}z\mathbf{i}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

En los ejercicios 59 y 60, emplee el teorema de la divergencia de Gauss para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ para \mathbf{F} y S .

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$, inferiormente por el plano xy y superiormente por el plano $z = 2$.
60. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la frontera de la región limitada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$.

En los ejercicios 61 y 62, verifique el teorema de Stokes para \mathbf{F} y S .

61. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ ubicada arriba del plano xy .
62. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está arriba del plano xy .

En los ejercicios 63 y 64, utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$ para \mathbf{F} y C .

63. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z + \ln(x^2 + 1))\mathbf{i} + \cos(y - x^2)\mathbf{j} + (3y^2 - z^2)\mathbf{k}$;
 $C: \mathbf{R}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
64. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ del plano xy .

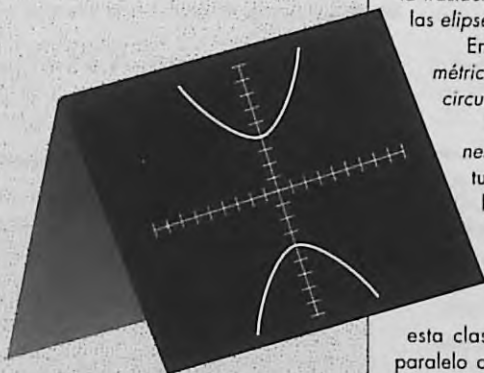
En los ejercicios 65 y 66, demuestre la identidad si f es una función real y \mathbf{V} es una función vectorial.

65. $\text{div}(f\mathbf{V}) = \nabla f \cdot \mathbf{V} + f \text{div } \mathbf{V}$
66. $\text{rot}(f\mathbf{V}) = \nabla f \times \mathbf{V} + f \text{rot } \mathbf{V}$

Temas de matemáticas previas al Cálculo

VISIÓN PRELIMINAR

- A.1** Números reales y desigualdades
- A.2** Coordenadas y gráficas de ecuaciones
- A.3** Rectas
- A.4** Parábolas
- A.5** Circunferencias
- A.6** Traslación de ejes
- A.7** Elipses
- A.8** Hipérbolas
- A.9** Funciones trigonométricas
- A.10** Ecuación general de segundo grado en dos variables y rotación de ejes
- A.11** Fracciones parciales



En este apéndice se encuentran en forma concisa los conocimientos previos al estudio del Cálculo necesarios para una mejor comprensión de este libro.

La habilidad para resolver ecuaciones y desigualdades es crucial en Cálculo; por esto, en la sección A.1 se tratan aspectos relativos al *conjunto de los números reales* entre ellos las *relaciones de orden*, los *intervalos* y el *valor absoluto*.

La geometría analítica es fundamental para el estudio del Cálculo. Los conceptos elementales de esta rama de las matemáticas tales como el *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares*, la *distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento*, así como los de *gráfica de una ecuación* y *simetría de una gráfica*, se presentan en la sección A.2.

La sección A.3 está dedicada al estudio de la recta. Aquí se muestran algunas formas de sus ecuaciones y los conceptos sobre *paralelismo* y *perpendicularidad*.

En la sección A.4 se inicia el análisis de las *secciones cónicas* (o *cónicas*) con el estudio de la *parábola* y sus propiedades, mientras que en la sección A.5 se aborda la *circunferencia*. Con el objeto de obtener las ecuaciones generales de las cónicas, se ha destinado la sección A.6 a la *traslación de ejes*. En las secciones A.7 y A.8 se tratan las *elipses* e *hipérbolas*, respectivamente.

En la sección A.9 se estudian las *funciones trigonométricas* de manera general, es decir, definidas en la *circunferencia unitaria*.

En la sección A.10 se analiza la *ecuación general de segundo grado en dos variables* y se estudia la *rotación de ejes*. Estos dos temas están ligados debido a que una ecuación del tipo mencionado representa una cónica, o cónica degenerada, cuyo eje principal no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados. A fin de eliminar el término en xy de una ecuación de esta clase y de que el eje principal de la cónica sea paralelo a alguno de los ejes coordenados, es necesario rotar los ejes mediante un ángulo conveniente.

El estudio de las *fracciones parciales*, indispensable para ciertas manipulaciones en Cálculo integral, se presenta en la sección final de este apéndice, en el A.11.

A.1 NÚMEROS REALES Y DESIGUALDADES

El sistema numérico real consiste de un conjunto R de elementos denominados **números reales** y dos operaciones llamadas **adición** y **multiplicación**, denotadas por los símbolos $+$ y \cdot , respectivamente. Si a y b son elementos del conjunto R , $a + b$ indica la **suma** de a y b , y $a \cdot b$ (o ab) representa su **producto**. La operación **sustracción** se define mediante la ecuación

$$a - b = a + (-b)$$

donde $-b$ denota el **negativo** de b el cual es el número para el que $b + (-b) = 0$. La operación **división** se define mediante la ecuación

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \quad b \neq 0$$

donde b^{-1} representa el **recíproco** de b , que es el número para el cual $b \cdot b^{-1} = 1$.

El sistema numérico real puede describirse completamente mediante un conjunto de axiomas (la palabra **axioma** se emplea para indicar una proposición formal que se considera verdadera sin demostración). Con base en estos axiomas se pueden deducir las propiedades de los números reales de las que se obtienen las conocidas operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación y división, así como los conceptos algebraicos de resolución de ecuaciones y factorización, entre otros.

Las propiedades que pueden obtenerse como consecuencias lógicas de los axiomas se denominan **teoremas**. En los enunciados de la mayoría de los teoremas se presentan dos partes: la parte del "si", llamada **hipótesis**, y la parte del "entonces", denominada **conclusión**. El argumento que verifica un teorema recibe el nombre de **demostración** (o **prueba**). Una demostración consiste en mostrar que la conclusión se infiere de la supuesta verdad de la hipótesis.

Un número real es positivo, negativo o cero, y cualquier número real puede clasificarse como **racional** o **irracional**. Un **número racional** es aquel que puede expresarse como la razón de dos números enteros. Esto es, un número racional es de la forma p/q , donde p y q son números enteros y $q \neq 0$. Los números racionales consisten de:

Los números **enteros** (positivos, negativos y cero)

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Las **fracciones** positivas y negativas, tales como

$$\frac{2}{7} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{83}{5}$$

Los números **decimales finitos** positivos y negativos, por ejemplo,

$$2.36 = \frac{236}{100} \quad -0.003251 = -\frac{3251}{1000000}$$

Los números **decimales infinitos periódicos** positivos y negativos, tales como

$$0.333\dots = \frac{1}{3} \quad -0.549549549\dots = -\frac{61}{111}$$

Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales**. Éstos son los números **decimales infinitos no periódicos** positivos y negativos, por ejemplo,

$$\sqrt{3} = 1.732 \dots \quad \pi = 3.14159 \dots$$

En ocasiones se utilizará notación y terminología de conjuntos. La idea de *conjunto* se emplea extensivamente en matemáticas y se considera un concepto básico, del que no se presenta una definición formal. Se puede decir que un **conjunto** es una colección de objetos, y los objetos de un conjunto se denominan **elementos**. Si cada elemento de un conjunto S es también un elemento de un conjunto T , entonces se dice que S es un **subconjunto** de T . En Cálculo se tratará con el conjunto R de los números reales. Dos subconjuntos importantes de R son el conjunto N de los *números naturales* (o *enteros positivos*) y el conjunto Z de los *números enteros*.

Se utilizará el símbolo \in para indicar que un elemento específico pertenece a un conjunto. En consecuencia, se puede escribir $8 \in N$, lo cual se lee "8 es un elemento de N ". La notación $a, b \in S$ expresa que tanto a como b son elementos de S . El símbolo \notin se lee "no es elemento de". Así, $\frac{1}{2} \notin N$ se lee " $\frac{1}{2}$ no es elemento de N ".

Un par de llaves $\{ \}$, empleado junto con palabras o símbolos, puede describir un conjunto. Si S es el conjunto de los números naturales menores que 6, puede escribirse el conjunto S como

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

También puede expresarse el conjunto S como

$$\{x, \text{tales que } x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

donde el símbolo x se denomina *variable*. Una **variable** es un símbolo que se emplea para representar cualquier elemento de un conjunto dado.

El conjunto S también se puede expresar por medio de la **notación por construcción** como sigue, donde se emplea una barra vertical en lugar de las palabras *tales que*:

$$\{x \mid x \text{ es un número natural menor que } 6\}$$

lo cual se lee "el conjunto de todas las x tales que x es un número natural menor que 6".

Dos conjuntos A y B se dice que son **iguales**, lo que se escribe como $A = B$, si A y B tiene elementos idénticos. La **unión** de dos conjuntos A y B , denotada por $A \cup B$ y que se lee "A unión B", es el conjunto de todos los elementos que están en A o en B , o en ambos. La **intersección** de A y B , denotada por $A \cap B$ y que se lee "A intersección B", es el conjunto de sólo aquellos elementos que están tanto en A como en B . El conjunto que no contiene elementos recibe el nombre de **conjunto vacío** y se denota por \emptyset .

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Considere los siguientes conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ y $C = \{2, 10\}$. Entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \quad A \cap B = \{4\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \quad B \cap C = \emptyset$$

Los elementos del conjunto R pueden *ordenarse* mediante una relación denotada por los símbolos $<$ (léase "menor que") y $>$ (léase "mayor que"), los cuales se definen a continuación.

A.1.1 Definición de $< y >$

Dados $a, b \in R$,

- (i) $a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo;
- (ii) $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

- (a) $3 < 5$ porque $5 - 3 = 2$, y 2 es positivo.
- (b) $-10 < -6$ porque $-6 - (-10) = 4$, y 4 es positivo.
- (c) $7 > 2$ porque $7 - 2 = 5$ y 5 es positivo.
- (d) $-2 > -7$ porque $-2 - (-7) = 5$, y 5 es positivo.
- (e) $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$ porque $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, y $\frac{1}{12}$ es positivo.

Ahora se definirán los símbolos \leq (léase "es menor que o igual a") y \geq (léase "es mayor que o igual a").

A.1.2 Definición de $\leq y \geq$

Dados $a, b \in R$,

- (i) $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$;
- (ii) $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$.

Las proposiciones $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan **desigualdades**. En particular, $a < b$ y $a > b$ se llaman **desigualdades estrictas**, mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de **desigualdades no estrictas**.

De la definición de $< y >$,

$a > 0$ si y sólo si a es positivo

$a < 0$ si y sólo si a es negativo

El teorema siguiente proporciona algunas propiedades de las desigualdades. Estas propiedades pueden demostrarse utilizando los axiomas del conjunto R y las definiciones anteriores.

A.1.3 Teorema Propiedades de $< y >$

Dados $a, b, c, d \in R$,

- (i) si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$;
- (ii) si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$;
- (iii) si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; (propiedad transitiva)
- (iv) si $a < b$, entonces $a + c < b + c$;
- (v) si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$;
- (vi) si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$;
- (vii) si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

La propiedad (i) anterior establece que la suma de dos números positivos es positiva, y la propiedad (ii) establece que el producto de dos números positivos es positivo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

- (a) Si $x < 5$ y $5 < y$, entonces, por la propiedad (iii), $x < y$.
- (b) Si $x < y$, entonces, por la propiedad (iv), $x + 4 < y + 4$. Por ejemplo, $3 < 9$; de modo que $3 + 4 < 9 + 4$ o, equivalentemente, $7 < 13$. Además, si $x < y$, entonces $x - 11 < y - 11$. Por ejemplo, $3 < 9$, por lo que $3 - 11 < 9 - 11$ o, equivalentemente, $-8 < -2$.
- (c) Si $x < 8$ y $y < -3$, entonces, de la propiedad (v), $x + y < 8 + (-3)$; esto es, $x + y < 5$.
- (d) Si $x < y$, entonces, de la propiedad (v), $7x < 7y$. Por ejemplo, como $5 < 8$, entonces $7 \cdot 5 < 7 \cdot 8$ o, equivalentemente, $35 < 56$.
- (e) Como $4 < 6$, y si $z < 0$, entonces, de la propiedad (vii), $4z > 6z$. Por ejemplo, como $4 < 6$, entonces $4(-3) > 6(-3)$ o, equivalentemente, $-12 > -18$. ◀

La propiedad (vi) establece que si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un número positivo, entonces el sentido de la desigualdad no se altera, mientras que la propiedad (vii) establece que si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo, entonces el sentido de la desigualdad se invierte. Las propiedades (vi) y (vii) también se cumplen para la división en vista de que al dividir los dos miembros de una desigualdad entre un número d ($d \neq 0$) equivale a multiplicarlos por $1/d$.

Se dice que un número x está entre a y b si $a < x$ y $x < b$. Esto se puede expresar como la **desigualdad continua** $a < x < b$. Otra desigualdad continua es $a \leq x \leq b$ la cual significa que $a \leq x$ y $x \leq b$. Además de éstas, otras desigualdades continuas son $a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

▶ **EJEMPLO 1** Exprese los siguientes conjuntos con la notación de conjuntos y uno o más de los símbolos $<$, $>$, \leq y \geq : (a) el conjunto de todas las x tales que x está entre -2 y 2 ; (b) el conjunto de todas las t tales que $4t - 1$ es no negativo; (c) el conjunto de todas las y tales que $y + 3$ es positivo y menor que o igual a 15 ; (d) el conjunto de todas las z tales que $2z$ es mayor que o igual a -5 y menor que -1 .

Solución

- (a) $= \{x \mid -2 < x < 2\}$ (b) $= \{t \mid 4t - 1 \geq 0\}$
- (c) $= \{y \mid 0 < y + 3 \leq 15\}$ (d) $= \{z \mid -5 \leq 2z < -1\}$ ◀

A continuación se presentará una interpretación geométrica del conjunto R de los números reales al asociarlos con puntos de una recta horizontal denominada **eje**. Se elige un punto, llamado **origen**, para representar el número 0. Se selecciona arbitrariamente una unidad de distancia. Después, cada número entero positivo n se representa por el punto situado a n unidades a la derecha del origen, y cada número entero negativo $-n$ se representa por el punto ubicado a una distancia de n unidades a la izquierda del origen. A estos puntos se les conoce como **puntos unidad** y se designan mediante los números con los cuales se asocian. Por ejemplo, 4 se representa por el punto que está 4 unidades a la derecha del origen, y -4 se representa por el punto ubicado a 4 unidades a la izquierda del origen. La figura 1 muestra

los puntos unidades que representan a 0 y los primeros doce números enteros positivos y sus correspondientes enteros negativos.

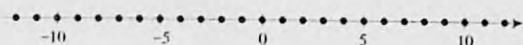


FIGURA 1

Los números racionales se asocian con puntos del eje de la figura 1 al dividir los segmentos cuyos extremos son puntos que representan números enteros sucesivos. Por ejemplo, si el segmento de 0 a 1 se divide en siete partes iguales, el extremo derecho de la primera subdivisión se asocia con $\frac{1}{7}$, el extremo derecho de la segunda se asocia con $\frac{2}{7}$, y así sucesivamente. El punto asociado con el número $\frac{24}{7}$ está a tres séptimos de la distancia del punto unitario 3 al punto unitario 4. De manera semejante, un número racional negativo se asocia con un punto situado a la izquierda del origen. La figura 2 muestra algunos puntos asociados con números racionales.

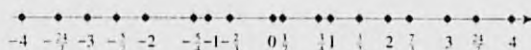


FIGURA 2

Las construcciones geométricas pueden utilizarse para determinar puntos que corresponden a ciertos números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etcétera. Consulte los ejercicios 35 y 36. Los puntos que corresponden a otros números irracionales pueden determinarse empleando aproximaciones decimales. Por ejemplo, el punto que corresponde al número π puede aproximarse empleando algunos de los dígitos de la representación decimal 3.14159. . .

Todo número irracional puede asociarse con un único punto del eje y cada punto que no corresponde a un número racional puede asociarse con un número irracional. Este hecho está garantizado por el axioma de completéz (axioma 8.2.9), cuyo enunciado se presenta en la sección 8.2 debido a que se requiere cierta terminología presentada y discutida ahí. De esta manera, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto R y el conjunto de los puntos de un eje. Por esta razón, al eje horizontal se le conoce como **recta numérica real** (**recta real** o **eje real**). Como los puntos de esta recta están identificados con los números que representan, se utiliza el mismo símbolo para representar el número y el punto.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Considere el conjunto $\{x \mid -6 < x \leq 4\}$. Este conjunto está representado en la recta numérica real de la figura 3. El corchete en 4 indica que el 4 pertenece al conjunto, y el paréntesis en -6 indica que -6 no está en el conjunto. ◀

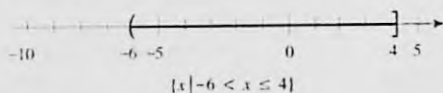


FIGURA 3

El conjunto de los números x que satisfacen la desigualdad $a < x < b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota por (a, b) . Por tanto,

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

El **intervalo cerrado** de a a b es el intervalo abierto (a, b) junto con los dos extremos del segmento a y b , y se denota por $[a, b]$. Así,

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

La figura 4 muestra el intervalo abierto (a, b) , y la figura 5 presenta el intervalo cerrado $[a, b]$.

El **intervalo semiabierto por la izquierda** es el intervalo abierto (a, b) junto con el extremo derecho b . Este intervalo se denota por $(a, b]$, de modo que

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

Se define el **intervalo semiabierto por la derecha** de manera similar y se denota por $[a, b)$. Así,

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

El intervalo (a, b) se muestra en la figura 6, y el intervalo $[a, b)$ se presenta en la figura 7.

Se utilizará el símbolo $+\infty$ (infinito positivo o más infinito) y el símbolo $-\infty$ (infinito negativo o menos infinito); sin embargo, tenga cuidado en no confundir estos símbolos con números reales, ya que no cumplen las propiedades de dichos números. Así, se tienen los siguientes intervalos:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = R$$

La figura 8 muestra el intervalo $(a, +\infty)$, mientras que la figura 9 presenta el intervalo $(-\infty, b)$. Observe que $(-\infty, +\infty)$ representa el conjunto de todos los números reales.

Para cada uno de los intervalos (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ y $[a, b)$ los números a y b se denominan **extremos** del intervalo. El intervalo cerrado $[a, b]$ contiene a los dos extremos, mientras que el intervalo abierto (a, b) no contiene a ninguno de sus extremos. El intervalo $[a, b)$ contiene a su extremo izquierdo pero no al derecho, y el intervalo $(a, b]$ contiene a su extremo derecho pero no al izquierdo. Un intervalo abierto puede considerarse como el intervalo que no contiene a sus extremos; por el contrario, un intervalo cerrado puede considerarse como el intervalo que contiene a todos sus extremos. En consecuencia, el intervalo $[a, +\infty)$ se considera como un intervalo cerrado porque contiene a su único extremo a . De forma semejante, $(-\infty, b]$ es un intervalo cerrado, en tanto que $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ son abiertos. Los intervalos $[a, b)$ y $(a, b]$ no son abiertos ni cerrados. El intervalo $(-\infty, +\infty)$ no tiene extremos, y se considera tanto abierto como cerrado.

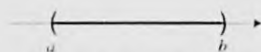


FIGURA 4



FIGURA 5

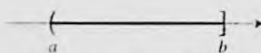


FIGURA 6

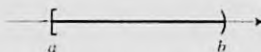


FIGURA 7

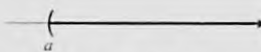


FIGURA 8



FIGURA 9

► **EJEMPLO 2** Muestre el conjunto sobre una recta numérica real y exprese el conjunto en notación de intervalos.

(a) $\{x \mid -7 \leq x < -2\}$

(b) $\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\}$

(c) $\{x \mid x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\}$

(d) $\{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x < 9\}$

(e) $\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$

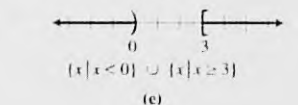
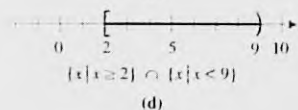
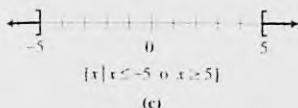
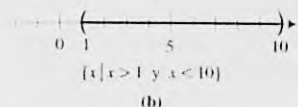
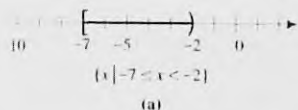


FIGURA 10

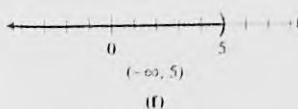
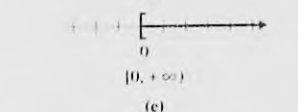
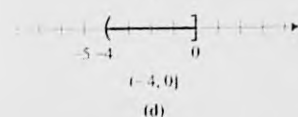
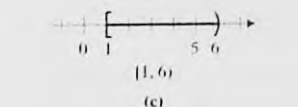
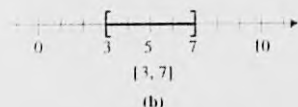
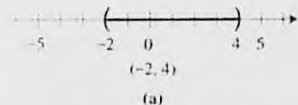


FIGURA 11

Solución Las figuras 10(a), (b), (c), (d) y (e) muestran los conjuntos sobre la recta numérica real, respectivamente. Con la notación de intervalos, se tiene

- (a) $\{x \mid -7 \leq x < -2\} = [-7, -2)$
- (b) $\{x \mid x > 1 \text{ y } x < 10\} = (1, 10)$
- (c) $\{x \mid x \leq -5 \text{ o } x \geq 5\} = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$
- (d) $\{x \mid x \geq 2\} \cap \{x \mid x < 9\} = [2, 9)$
- (e) $\{x \mid x < 0\} \cup \{x \mid x \geq 3\} = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$

EJEMPLO 3 Muestre el intervalo sobre la recta real y utilice la notación de conjuntos y los símbolos de desigualdad para expresar: (a) $(-2, 4)$; (b) $[3, 7]$; (c) $[1, 6)$; (d) $(-4, 0]$; (e) $[0, +\infty)$; (f) $(-\infty, 5)$.

Solución Los intervalos se muestran en la recta real de las figuras 11(a), (b), (c), (d), (e) y (f), respectivamente. Con la notación de conjuntos se tiene

- (a) $(-2, 4) = \{x \mid -2 < x < 4\}$
- (b) $[3, 7] = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$
- (c) $[1, 6) = \{x \mid 1 \leq x < 6\}$
- (d) $(-4, 0] = \{x \mid -4 < x \leq 0\}$
- (e) $[0, +\infty) = \{x \mid x \geq 0\}$
- (f) $(-\infty, 5) = \{x \mid x < 5\}$

El concepto de *valor absoluto* de un número se emplea en algunas definiciones importantes del Cálculo.

A.1.4 Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a , denotado por $|a|$, es a si a es no negativo, y es $-a$ si a es negativo. Con símbolos se escribe

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Si en la definición anterior se toma a como 6, 0 y -6 , se tiene, respectivamente,

$$|6| = 6 \quad |0| = 0 \quad |-6| = -(-6) = 6$$

El valor absoluto de un número puede considerarse como su distancia (sin tener en cuenta el sentido, a la derecha o a la izquierda) desde el origen. En particular, los puntos 6 y -6 están cada uno a seis unidades del origen.

De la definición de valor absoluto, se tiene

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a - b \geq 0 \\ -(a - b) & \text{si } a - b < 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$|a - b| = \begin{cases} a - b & \text{si } a \geq b \\ b - a & \text{si } a < b \end{cases}$$

En la recta numérica real, $|a - b|$ unidades puede interpretarse como la distancia entre a y b sin tener en cuenta el sentido. Refiérase a la figura 12.

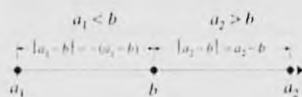


FIGURA 12

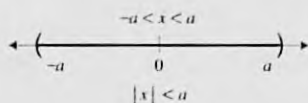


FIGURA 14

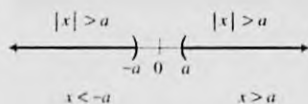


FIGURA 15

► **EJEMPLO 4** Muestre en la recta real los puntos que corresponden a los números $-10, -7, -5, -3, 0, 3, 5, 7$ y 10 . Calcule la distancia entre u y v en los siguientes casos: (a) $u = 10, v = 3$; (b) $u = 3, v = 7$; (c) $u = 5, v = -3$; (d) $u = -7, v = 0$; (e) $u = -3, v = -5$; (f) $u = -10, v = -7$.

Solución La figura 13 muestra en la recta real los puntos que corresponden a los números dados. En cada inciso la distancia entre u y v es $|u - v|$ unidades:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad |u - v| &= |10 - 3| & \text{(b)} \quad |u - v| &= |3 - 7| \\ &= |7| & &= |-4| \\ &= 7 & &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad |u - v| &= |5 - (-3)| & \text{(d)} \quad |u - v| &= |-7 - 0| \\ &= |8| & &= |-7| \\ &= 8 & &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad |u - v| &= |-3 - (-5)| & \text{(f)} \quad |u - v| &= |-10 - (-7)| \\ &= |2| & &= |-3| \\ &= 2 & &= 3 \end{aligned}$$

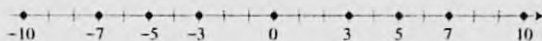


FIGURA 13

Ahora se trabajará con desigualdades que contienen valores absolutos. La desigualdad $|x| < a$, donde $a > 0$, establece que en la recta numérica real la distancia del origen al punto x es menor que a unidades; esto es, $-a < x < a$. Consulte la figura 14. La desigualdad $|x| > a$, donde $a > 0$, indica que en la recta real la distancia del origen al punto x es mayor que a unidades; esto es, $x > a$ o $x < -a$. Refiérase a la figura 15. A continuación se establecen estos dos resultados formalmente. La flecha doble \Leftrightarrow se utiliza aquí y a lo largo del texto para indicar que la proposición anterior al símbolo y la proposición posterior son equivalentes. Así,

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad \text{donde } a > 0 \quad (1)$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ o } x < -a \quad \text{donde } a > 0 \quad (2)$$

Recuerde de álgebra que el símbolo \sqrt{a} , donde $a \geq 0$, está definido como el único número *no negativo* x tal que $x^2 = a$. Se lee \sqrt{a} como “la raíz cuadrada principal de a ”. Por ejemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Nota: $\sqrt{4} \neq -2$ aunque $(-2)^2 = 4$, debido a que $\sqrt{4}$ denota sólo la raíz cuadrada *positiva* de 4 . La raíz cuadrada *negativa* de 4 se representa por $-\sqrt{4}$.

Como se tratarán únicamente números reales en Cálculo, \sqrt{a} no está definida si $a < 0$.

De la definición de \sqrt{a} se deduce que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6**

$$\begin{aligned} \sqrt{5^2} &= |5| & \sqrt{(-3)^2} &= |-3| \\ &= 5 & &= 3 \end{aligned}$$

Las propiedades del valor absoluto dadas en el teorema siguiente son útiles en Cálculo.

A.1.5 Teorema

Sean $a, b \in R$, entonces

- (i) $|ab| = |a| |b|$
 (ii) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

Demostración de (i)

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2 b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

La demostración de (ii) es similar.

En Cálculo, con frecuencia se desea reemplazar una desigualdad por otra equivalente y más simple, como se muestra en el ejemplo siguiente.

► EJEMPLO 5 Muestre que la desigualdad

$$|(3x + 2) - 8| < 1 \quad \text{es equivalente a} \quad |x - 2| < \frac{1}{3}$$

Solución Las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$\begin{aligned} |(3x + 2) - 8| &< 1 \\ |3x - 6| &< 1 \\ |3(x - 2)| &< 1 \\ |3| |x - 2| &< 1 \\ 3|x - 2| &< 1 \\ |x - 2| &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

En el teorema siguiente, denominado *desigualdad del triángulo* (o *triangular*), y sus dos corolarios dados en el teorema A.1.7, se emplean regularmente en la demostración de teoremas del Cálculo.

A.1.6 Teorema La desigualdad del triángulo

Dados $a, b \in R$, entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración Por la definición de valor absoluto, $a = |a|$ o $a = -|a|$, así

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Además,

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

De estas dos desigualdades continuas y la propiedad (v) del teorema A.1.3, resulta

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

En consecuencia, de la proposición (1) con \leq en lugar de $<$, se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \blacksquare$$

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra el contenido de la desigualdad del triángulo para cuatro casos particulares.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Si $a = 3$ y $b = 4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |3 + 4| & |a| + |b| &= |3| + |4| \\ &= |7| & &= 3 + 4 \\ &= 7 & &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = -3$ y $b = 4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |-3 + 4| & |a| + |b| &= |-3| + |4| \\ &= |1| & &= 3 + 4 \\ &= 1 & &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = 3$ y $b = -4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |3 + (-4)| & |a| + |b| &= |3| + |-4| \\ &= |-1| & &= 3 + 4 \\ &= 1 & &= 7 \end{aligned}$$

Si $a = -3$ y $b = -4$, entonces

$$\begin{aligned} |a + b| &= |-3 + (-4)| & |a| + |b| &= |-3| + |-4| \\ &= |-7| & &= 3 + 4 \\ &= 7 & &= 7 \end{aligned}$$

En cada caso $|a + b| \leq |a| + |b|$ ◀

A.1.7 Teorema

Sean $a, b \in R$, entonces

- (i) $|a - b| \leq |a| + |b|$
 (ii) $|a| - |b| \leq |a - b|$

Demostración de (i)

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$

Demostración de (ii)

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

De este modo, al restar $|b|$ de los dos miembros de la desigualdad, se tiene

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS A.1

En los ejercicios 1 y 2, acomode los elementos del subconjunto dado de R en el mismo orden que sus puntos correspondientes de la recta numérica real de izquierda a derecha.

- $\{-2, 3, 21, 5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -\frac{2}{4}, -\sqrt{5}, -10, 0, \frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -1\}$
- $\{\frac{11}{3}, \pi, -8, -\sqrt{2}, 3, -\sqrt{3}, 4, \frac{21}{4}, -\frac{3}{2}, 1.26, \frac{1}{2}\pi\}$

En los ejercicios 3 a 6, utilice la notación de conjuntos y uno o más de los símbolos $<$, $>$, \leq y \geq para denotar el conjunto.

- (a) El conjunto de todas las x tales que x es mayor que -9 y menor que 8 ; (b) el conjunto de todas las y entre -12 y -3 ; (c) el conjunto de todas las z tales que $4z - 5$ es negativo.
- (a) El conjunto de todas las x entre -5 y 3 ; (b) el conjunto de todas las y tales que y es mayor que o igual a -26 y menor que -16 ; (c) el conjunto de todas las t tales que $8t - 4$ es positivo.
- (a) El conjunto de todas las x tales que $2x + 4$ es no negativo; (b) el conjunto de todas las r tales que r es mayor que 0 .

igual a 2 y menor que 8; (c) el conjunto de todas las a tales que $a - 2$ es mayor que -5 y menor que o igual a 7.

6. (a) El conjunto de todas las x tales que $2x + 3$ es no positivo; (b) el conjunto de todas las x tales que $3x$ es mayor que 10 y menor que o igual a 20; (c) el conjunto de todas las z tales que $2z + 5$ está entre -1 y 5 , incluyendo estos números.

En los ejercicios 7 a 14, haga lo siguiente: (i) muestre el conjunto sobre la recta real; (ii) represente el conjunto por medio de notación de intervalos; (iii) describa el conjunto en palabras, de manera semejante a la descripción de los ejercicios 3 a 6.

7. (a) $\{x \mid x > 2\}$ (b) $\{x \mid -4 < x \leq 4\}$
 8. (a) $\{x \mid x \leq 8\}$ (b) $\{x \mid 3 < x < 9\}$
 9. (a) $\{x \mid x > 2 \text{ y } x < 12\}$
 (b) $\{x \mid x \leq -4 \text{ o } x > 4\}$
 10. (a) $\{x \mid x \geq -5 \text{ y } x \leq 5\}$
 (b) $\{x \mid x < 3 \text{ o } x > 6\}$
 11. (a) $\{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 12\}$
 (b) $\{x \mid x \leq -4\} \cup \{x \mid x > 4\}$
 12. (a) $\{x \mid x \geq -5\} \cap \{x \mid x \leq 5\}$
 (b) $\{x \mid x < 3\} \cup \{x \mid x > 6\}$
 13. (a) $\{x \mid x > -4\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
 (b) $\{x \mid x \leq 0\} \cup \{x \mid x \leq 7\}$
 14. (a) $\{x \mid x > -8\} \cap \{x \mid x \leq 0\}$
 (b) $\{x \mid x > 2\} \cup \{x \mid x > 10\}$

En los ejercicios 15 a 18, muestre el intervalo sobre la recta numérica real y utilice la notación de conjuntos y símbolos de desigualdad para denotar el intervalo indicado.

15. (a) (2, 7) (b) $[-3, 6]$
 (c) $(-5, 4)$ (d) $[-10, -2)$
 16. (a) $(-5, 5)$ (b) $[1, 9]$
 (c) $[-8, 3)$ (d) $(-7, 0]$
 17. (a) $[3, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0]$
 (c) $(-4, +\infty)$ (d) $(-\infty, +\infty)$
 18. (a) $(-\infty, -2]$ (b) $(-1, +\infty)$
 (c) $(-\infty, 10)$ (d) $[0, +\infty)$

En los ejercicios 19 y 20, determine el valor absoluto en cada inciso.

19. (a) $|7|$ (b) $|\frac{-3}{4}|$
 (c) $|3 - \sqrt{3}|$ (d) $|\sqrt{3} - 3|$
 20. (a) $|\frac{1}{4}|$ (b) $|-8|$
 (c) $|\pi - 2|$ (d) $|3 - \pi|$

En los ejercicios 21 a 24, muestre los puntos que corresponden a x y y sobre la recta real y después calcule la distancia entre ellos.

21. (a) $u = 8, v = 2$ (b) $u = -8, v = 2$
 (c) $u = 8, v = -2$ (d) $u = -8, v = -2$
 22. (a) $u = 6, v = 4$ (b) $u = -6, v = 4$
 (c) $u = 6, v = -4$ (d) $u = -6, v = -4$
 23. (a) $u = t, v = 2t, \text{ y } t > 0$
 (b) $u = t, v = 2t, \text{ y } t < 0$

24. (a) $u = t, v = \frac{1}{2}t, \text{ y } t > 0$
 (b) $u = t, v = \frac{1}{2}t, \text{ y } t < 0$

En los ejercicios 25 a 30, demuestre que las dos desigualdades son equivalentes.

25. $|(2x - 3) - 9| < 1; |x - 6| < \frac{1}{2}$
 26. $|(2x + 3) - 1| < 1; |x + 6| < \frac{1}{2}$
 27. $|(3x - 5) - 1| < \frac{1}{2}; |x - 2| < \frac{1}{6}$
 28. $|(5x - 2) - 3| < \frac{1}{2}; |x - 1| < \frac{1}{10}$
 29. $|\frac{1}{2}(x - 5) + 7| < \frac{1}{8}; |x + 4| < \frac{1}{4}$
 30. $|\frac{1}{4}(x - 1) + 2| < \frac{1}{6}; |x + 4| < \frac{1}{3}$

En los ejercicios 31 y 32, verifique la desigualdad del triángulo para los valores de a y b .

31. (a) $a = 5$ y $b = 7$ (b) $a = 5$ y $b = -7$
 (c) $a = -5$ y $b = 7$ (d) $a = -5$ y $b = -7$
 32. (a) $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$ (b) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$
 (c) $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$ (d) $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{3}$

En los ejercicios 33 y 34, utilice la desigualdad del triángulo para demostrar la proposición indicada.

33. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y + 1| < \frac{1}{3}$, entonces
 $|x + y| < \frac{7}{12}$.
 34. Si $|x - 1| < \frac{1}{3}$ y $|y - 1| < \frac{1}{3}$, entonces
 $|x - y| < \frac{7}{12}$.

35. Para determinar el punto de la recta numérica real que corresponde al número $\sqrt{5}$, utilice la construcción indicada en la figura adjunta. Desde el punto 1, se dibuja un segmento de recta perpendicular al eje. Al unir el extremo superior de este segmento con el origen se forma un triángulo rectángulo. La longitud de la hipotenusa de este triángulo es $\sqrt{2}$ unidades. Este hecho se deduce del teorema de Pitágoras, el cual establece que c^2 tiene el mismo valor que $a^2 + b^2$, donde c unidades es la longitud de la hipotenusa, y a unidades y b unidades son las longitudes de los otros dos lados. Después se dibuja un arco de la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio $\sqrt{2}$; el punto donde este arco intersecta al eje es $\sqrt{2}$. Utilice este método para determinar el punto correspondiente a $\sqrt{5}$.



36. Determine el punto de la recta real que corresponde al número irracional $\sqrt{10}$. Sugerencia: consulte el ejercicio 35.

A.2 COORDENADAS Y GRÁFICAS DE ECUACIONES



FIGURA 1

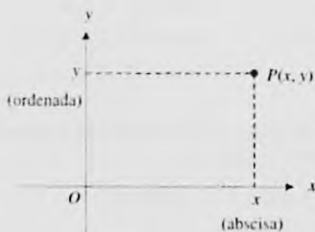


FIGURA 2

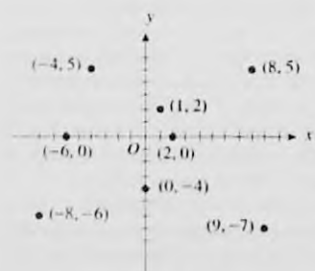


FIGURA 3

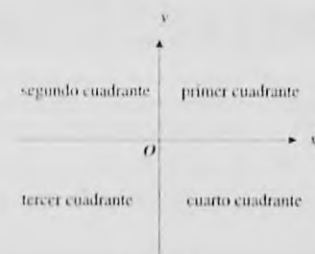


FIGURA 4

La creación de la *geometría analítica* se atribuye a **René Descartes** (1596–1650), matemático y filósofo francés. En su libro *Geometría*, publicado en 1637, Descartes estableció la unión del álgebra y de la geometría mediante un *sistema de coordenadas cartesianas rectangulares* (llamado así en su honor). Este sistema de coordenadas utiliza *pares ordenados* de números reales.

Dos números reales cualesquiera forman un par, y cuando el orden en que aparecen los números es significativo, se le denomina **par ordenado**. Si x es el primer número real y y es el segundo, este par ordenado se denota por (x, y) . Observe que el par ordenado $(5, 2)$ es diferente del par ordenado $(2, 5)$.

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales recibe el nombre de **plano numérico**, el cual se denota por R^2 , y cada par ordenado (x, y) es un **punto** del plano numérico. De la misma forma en que R , el conjunto de los números reales, se identifica con los puntos de un eje (espacio unidimensional), puede identificarse R^2 con los puntos de un plano geométrico (espacio bidimensional). Para ello se eligen dos rectas en el plano geométrico, una horizontal, llamada **eje x** , y la otra vertical, denominada **eje y** . El punto de intersección de los ejes x y y recibe el nombre de **origen**, y se denota por O . Por lo común, las unidades de medición a lo largo de los dos ejes es la misma. Se establece que el sentido positivo del eje x es hacia la derecha del origen, y el sentido positivo del eje y es hacia arriba del origen. Refiérase a la figura 1.

Ahora se asociará un par ordenado de números reales (x, y) con un punto del plano geométrico. En el punto x del eje horizontal y en el punto y del eje vertical, se dibujan segmentos de recta perpendiculares a los ejes respectivos. La intersección de estos dos segmentos de recta perpendiculares es el punto P asociado con el par ordenado (x, y) . Consulte la figura 2. El primer número x del par se denomina **abscisa** (o **coordenada x**) de P , y el segundo número y se llama **ordenada** (o **coordenada y**) de P . Si la abscisa es positiva, P estará a la derecha del eje y ; y si es negativa, P se hallará a la izquierda del eje y . Si la ordenada es positiva, P estará arriba del eje x , y si es negativa, P se hallará debajo del eje x . La abscisa y la ordenada de un punto reciben el nombre de **coordenadas cartesianas rectangulares** del punto. Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de un plano geométrico y R^2 ; esto es, a cada punto le corresponde un único par ordenado (x, y) , y cada par ordenado (x, y) está asociado con un único punto. Esta correspondencia uno a uno se denomina **sistema coordenado cartesiano rectangular**. La figura 3 ilustra un sistema coordenado cartesiano rectangular con algunos puntos indicados.

A los ejes x y y se les llama **ejes coordenados**. Estos dividen al plano en cuatro partes denominadas **cuadrantes**. El primer cuadrante es aquel en el que las abscisas y las ordenadas son positivas, es decir el cuadrante superior derecho. Los otros cuadrantes se numeran en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, por lo que el cuarto cuadrante es el cuadrante inferior derecho. Vea la figura 4.

Debido a la correspondencia uno a uno, se identifica R^2 con el plano geométrico. Por esta razón a un par ordenado (x, y) se le llama también punto.

A continuación se discutirá el problema de calcular la distancia entre dos puntos de R^2 . Si A es el punto (x_1, y_1) y B es el punto (x_2, y_1) (es decir, A y B tiene la misma ordenada pero diferente abscisa), entonces la **distancia dirigida** de A a B se denota por \overline{AB} y se define como

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

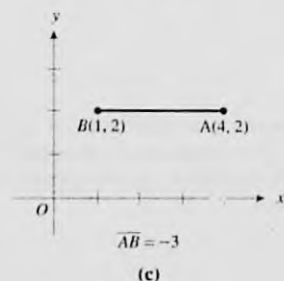
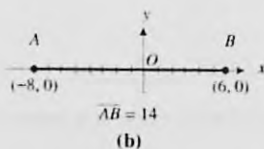
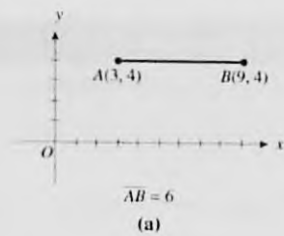


FIGURA 5

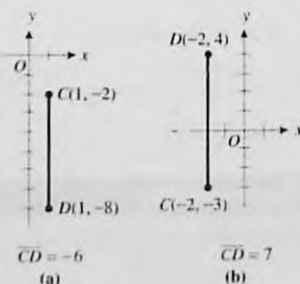


FIGURA 6

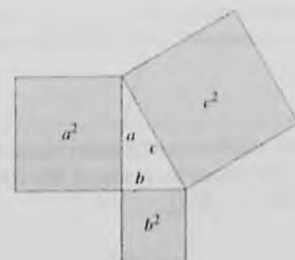


FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Refiérase a las figuras 5(a), (b) y (c). Si A es el punto $(3, 4)$ y B es el punto $(9, 4)$, entonces $\overline{AB} = 9 - 3$; esto es, $\overline{AB} = 6$. Si A es el punto $(-8, 0)$ y B es el punto $(6, 0)$, entonces $\overline{AB} = 6 - (-8)$; es decir, $\overline{AB} = 14$. Si A es el punto $(4, 2)$ y B es el punto $(1, 2)$, entonces $\overline{AB} = 1 - 4$; esto es, $\overline{AB} = -3$. Se observa que \overline{AB} es positiva si B está a la derecha de A , y \overline{AB} es negativa si B se encuentra a la izquierda de A . ◀

Si C es el punto (x_1, y_1) y D es el punto (x_1, y_2) , entonces la **distancia dirigida** de C a D , denotada por \overline{CD} , se define por

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Refiérase a las figuras 6(a) y (b). Si C es el punto $(1, -2)$ y D es el punto $(1, -8)$, entonces $\overline{CD} = -8 - (-2)$; esto es, $\overline{CD} = -6$. Si C es el punto $(-2, -3)$ y D es el punto $(-2, 4)$, entonces $\overline{CD} = 4 - (-3)$; es decir, $\overline{CD} = 7$. El número \overline{CD} es positivo si D está por arriba de C , y \overline{CD} es negativo si D se encuentra debajo de C . ◀

Observe que el término *distancia dirigida* indica tanto la distancia como el sentido (positivo o negativo). Si sólo interesa la longitud del segmento de recta entre los puntos P_1 y P_2 sin considerar el sentido, entonces se emplea el término *distancia no dirigida*. La **distancia no dirigida** de P_1 a P_2 se denota por $|P_1P_2|$, la cual es un número no negativo. Si se utiliza la palabra *distancia* sin el adjetivo *dirigida* o *no dirigida*, debe entenderse que se hace referencia a la distancia no dirigida.

Ahora se obtendrá una fórmula para calcular la distancia $|P_1P_2|$ si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano. Se empleará el teorema de Pitágoras de la geometría plana, el cual se enuncia a continuación. Consulte la figura 7.

A.2.1 Teorema El teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los lados perpendiculares y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

La figura 8 muestra a P_1 y P_2 en el primer cuadrante y el punto $R(x_2, y_1)$. Observe que $|P_1P_2|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo P_1RP_2 . Del teorema de pitágoras, se tiene

$$|P_1P_2|^2 = |P_1R|^2 + |RP_2|^2$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1R|^2 + |RP_2|^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En esta fórmula no se considera el símbolo \pm frente al radical debido a que $|P_1P_2|$ es un número no negativo. La fórmula se cumple para todas las posiciones posibles de P_1 y P_2 en los cuatro cuadrantes. La longitud de la hipotenusa siempre es $|P_1P_2|$, y las longitudes de los catetos siempre son $|P_1R|$ y $|RP_2|$. En consecuencia, se tiene el teorema siguiente.

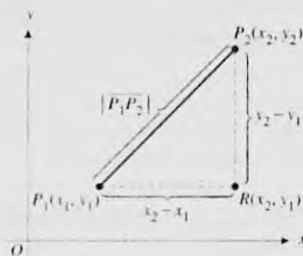


FIGURA 8

A.2.2 Teorema La fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está determinada por

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si P_1 y P_2 están en la misma recta horizontal, como en la figura 9, entonces $y_2 = y_1$ y

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$

$$\Leftrightarrow |P_1P_2| = |x_2 - x_1| \quad (\text{porque } \sqrt{a^2} = |a|)$$

Además, si P_1 y P_2 están en la misma recta vertical, como se muestra en la figura 10, entonces $x_2 = x_1$ y

$$|P_1P_2| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow |P_1P_2| = |y_2 - y_1|$$

A continuación se obtendrán las fórmulas para determinar el punto medio de un segmento de recta. Sea $M(x, y)$ el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Consulte la figura 11. Como los triángulos P_1RM y MTP_2 son congruentes, entonces

$$|P_1R| = |MT| \quad \text{y} \quad |RM| = |TP_2|$$

Así,

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_2 - x & y - y_1 &= y_2 - y \\ 2x &= x_1 + x_2 & 2y &= y_1 + y_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

A.2.3 Teorema Fórmulas del punto medio

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En la deducción de las fórmulas, se supuso que $x_2 > x_1$ y $y_2 > y_1$. Las fórmulas también se cumplen al considerar cualquier otro orden de estos números.

► **EJEMPLO 1** (a) Determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta de $A(5, -3)$ a $B(-1, 6)$. (b) Ubique los puntos A , M y B en un sistema coordenado y demuestre que $|AM| = |MB|$.

Solución

(a) Si M es el punto (x, y) , de las fórmulas del punto medio, se tiene

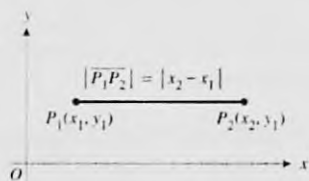


FIGURA 9

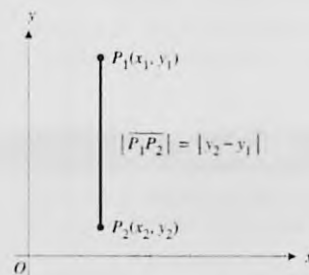


FIGURA 10

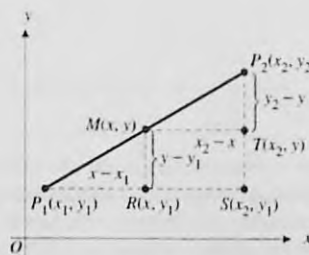


FIGURA 11

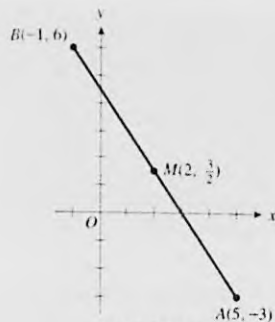


FIGURA 12

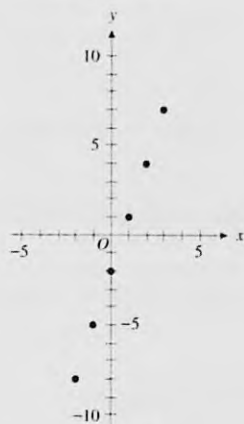


FIGURA 13

Tabla 1

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4	7

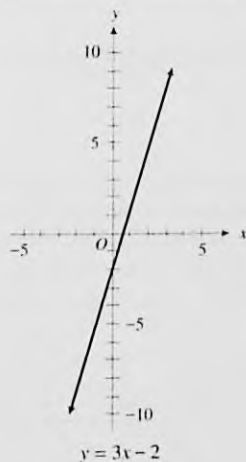


FIGURA 14

$$x = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$y = \frac{-3 + 6}{2} = \frac{3}{2}$$

De modo que M es el punto $(2, \frac{3}{2})$.

- (b) La figura 12 muestra los puntos A , M y B . De la fórmula de la distancia se obtiene

$$\begin{aligned} |\overline{AM}| &= \sqrt{(2 - 5)^2 + (\frac{3}{2} + 3)^2} & |\overline{MB}| &= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (6 - \frac{3}{2})^2} \\ &= \sqrt{9 + \frac{81}{4}} & &= \sqrt{9 + \frac{81}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{13} & &= \frac{3}{2} \sqrt{13} \end{aligned}$$

Por tanto, $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$. ◀

Se ha mostrado cómo el sistema coordenado cartesiano puede emplearse para obtener hechos geométricos mediante álgebra. Ahora se mostrará cómo dicho sistema permite asociar una *gráfica* (un concepto geométrico) con una ecuación (un concepto algebraico).

Una **ecuación algebraica** en dos variables x y y es un enunciado en el que se establece que dos expresiones en x y y son iguales. Cuando x y y se sustituyen por números específicos, por decir a y b , entonces el enunciado que resulta puede ser verdadero o falso. Si es verdadero, entonces el par ordenado (a, b) se denomina **solución de la ecuación**.

▶ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Considere la ecuación

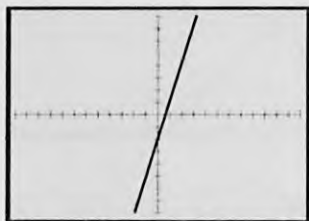
$$y = 3x - 2 \quad (1)$$

donde (x, y) es un punto en R^2 . Si x se sustituye por 2 en la ecuación, se observa que y es igual a 4; así, el par ordenado $(2, 4)$ es una solución de esta ecuación. Si cualquier número se sustituye por x en el miembro derecho de (1), se obtiene un valor correspondiente para y . Por tanto, (1) tiene un número ilimitado de soluciones. Las soluciones que se obtienen de la tabla 1 son $(-2, -8)$, $(-1, -5)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 7)$. ◀

A.2.4 Definición de la gráfica de una ecuación

La **gráfica de una ecuación** en R^2 es el conjunto de todos los puntos de R^2 cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación.

Debido a que la ecuación (1) tiene un número ilimitado de soluciones, su gráfica consiste de un número infinito de puntos. Los seis puntos proporcionados por la tabla 1 y mostrados en la figura 13, parecen estar sobre una recta. De hecho, aprenderá en la sección A.3 del apéndice que cada solución de la ecuación (1) corresponde a un punto sobre una recta, y recíprocamente, las coordenadas de cada punto de la recta satisfacen (1). Por tanto, la recta es la gráfica de la ecuación. Esta gráfica se muestra en la figura 14, donde las puntas de flecha indican que la recta continúa en los dos sentidos. Las coordenadas de cualquier punto (x, y) de la recta satisfacen (1), y las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a la recta no satisfacen la ecuación.



$[-12, 12]$ por $[-8, 8]$

$$y = 3x - 2$$

FIGURA 15

Recuerde, de la sección del principio del libro titulada *Preparación para el estudio del Cálculo*, que se indicó que las gráficas se obtendrían en dos formas: (i) a mano, donde se utilizan los términos *dibuje la gráfica*; (ii) en una calculadora gráfica o graficadora, donde se indica *trace la gráfica*.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** La gráfica de la ecuación

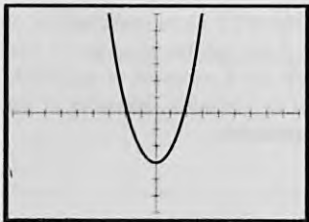
$$y = 3x - 2$$

trazada en el rectángulo de inspección de $[-12, 12]$ por $[-8, 8]$, se muestra en la figura 15. Compare las figuras 14 y 15, las cuales muestran la misma recta. ◀

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** La gráfica de la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

trazada en el rectángulo de inspección de $[-9, 9]$ por $[-6, 6]$, se muestra en la figura 16. ◀



$[-9, 9]$ por $[-6, 6]$

$$y = x^2 - 3$$

FIGURA 16

La gráfica de la ecuación del ejemplo ilustrativo 5 es una *parábola*. Las parábolas se estudian con detalle en la sección A.4 del apéndice.

La mayoría de las graficadoras pueden trazar gráficas para más de una ecuación en el mismo rectángulo de inspección. Esto se realiza en el ejemplo siguiente.

▶ **EJEMPLO 2** (a) Dibuje la gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4x$$

localizando en un sistema coordenado los puntos para los cuales x es igual a 0, 1, 2, 3 y 4 y uniendo estos puntos mediante una curva. (b) Trace las gráficas de las dos ecuaciones

$$y = 2\sqrt{x} \quad y \quad y = -2\sqrt{x}$$

en el mismo rectángulo de inspección. (c) ¿Por qué son idénticas las curvas obtenidas en los incisos (a) y (b)?

Solución

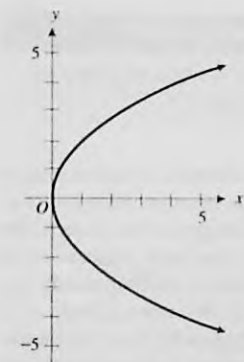
(a) Como y^2 es no negativo, los valores de x están restringidos a números no negativos. Para cada valor positivo de x existen dos valores de y . La tabla 2 proporciona los valores de y cuando x es igual a 0, 1, 2, 3 y 4. Al localizar y unir los puntos cuyas coordenadas son los valores x y y de la tabla se obtiene la gráfica dibujada en la figura 17.

Tabla 2

x	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$y^2 = 4x$	0	2	-2	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	4	-4

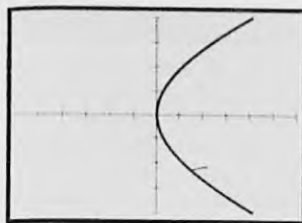
(b) En la graficadora se consideran

$$y_1 = 2\sqrt{x} \quad y \quad y_2 = -2\sqrt{x}$$



$$y^2 = 4x$$

FIGURA 17



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$$y_1 = 2\sqrt{x} \text{ y } y_2 = -2\sqrt{x}$$

FIGURA 18

- y se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se muestra en la figura 18.
- (c) La ecuación $y^2 = 4x$ es equivalente a las dos ecuaciones $y = 2\sqrt{x}$ y $y = -2\sqrt{x}$. Por tanto, la unión de las gráficas de y_1 y y_2 trazadas en el inciso (b) es la misma que la gráfica dibujada en el inciso (a). ◀

La curva del ejemplo 2 también es una parábola.

- ▶ **EJEMPLO 3** (a) Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.
 (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).

Solución

- (a) El cálculo del valor absoluto de un número se efectúa internamente en la graficadora y en la mayoría de las calculadoras se denota por ABS. Sea

$$y = \text{ABS}(x)$$

y trace la gráfica en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-2, 6]$, mostrada en la figura 19.

- (b) De la definición de valor absoluto de un número,

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La tabla 3 proporciona algunos valores de x y y que satisfacen la ecuación, y la gráfica se muestra en la figura 20, la cual concuerda con la figura 19.

Tabla 3

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y = x $	0	1	2	3	4	1	2	3	4

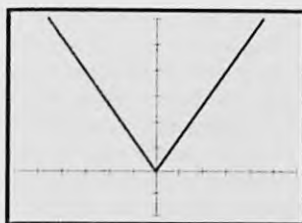
La *simetría* es una propiedad de las gráficas, especialmente útil cuando se dibujan las gráficas de ciertas ecuaciones.

A.2.5 Definición de simetría de dos puntos

Se dice que los dos puntos P y Q son **simétricos con respecto a una recta** si y sólo si la recta es la bisectriz perpendicular (mediatriz) del segmento PQ . Dos puntos P y Q se dicen **simétricos con respecto a un tercer punto** si y sólo si el tercer punto es el punto medio del segmento PQ .

- ▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Los puntos $(3, 2)$ y $(3, -2)$ son simétricos con respecto al eje x , los puntos $(3, 2)$ y $(-3, 2)$ son simétricos con respecto al eje y , y los puntos $(3, 2)$ y $(-3, -2)$ son simétricos con respecto al origen. Refiérase a la figura 21. ◀

En general, los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos con respecto al eje x ; (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje y ; y (x, y) y $(-x, -y)$ son simétricos con respecto al origen.



$[-6, 6]$ por $[-2, 6]$

$$y = \text{ABS}(x)$$

FIGURA 19



FIGURA 20

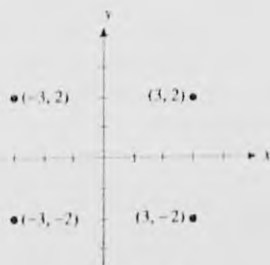


FIGURA 21

A.2.7 Definición de simetría de una gráfica

La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto a una recta l** si y sólo si para cada punto P de la gráfica existe un punto Q también de la gráfica tal que P y Q son simétricos con respecto a la recta l . La gráfica de una ecuación es **simétrica con respecto a un punto R** si y sólo si para cada punto P de la gráfica existe un punto S también de la gráfica tal que P y S son simétricos con respecto al punto R .

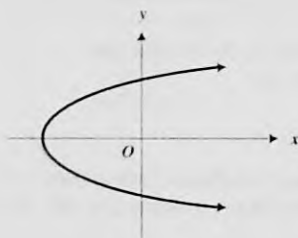


FIGURA 22

La figura 22 muestra una gráfica simétrica con respecto al eje x , la figura 23 presenta una gráfica simétrica con respecto al eje y , y la figura 24 muestra otra gráfica simétrica con respecto al origen.

De la definición de simetría de una gráfica, se deduce que si un punto (x, y) está en una gráfica simétrica con respecto al eje x , entonces el punto $(x, -y)$ también debe estar en la gráfica. Si los puntos (x, y) y $(x, -y)$ están en la gráfica, entonces la gráfica es simétrica con respecto al eje x . Por tanto, las coordenadas del punto $(x, -y)$ así como las del punto (x, y) deben satisfacer la ecuación de la gráfica. En consecuencia, la gráfica de una ecuación en x y y es simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación. De esta forma, se ha demostrado el inciso (i) del siguiente criterio de simetría. Las demostraciones de los incisos (ii) y (iii) son semejantes.

A.2.7 Teorema Criterios de simetría

La gráfica de una ecuación en x y y es

- (i) simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye y por $-y$ en la ecuación;
- (ii) simétrica con respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye x por $-x$ en la ecuación;
- (iii) simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación.

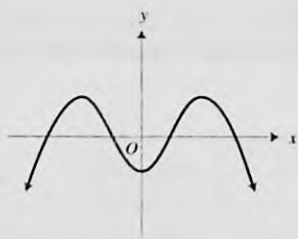


FIGURA 23

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Refiérase a la gráfica de la figura 16, la cual es simétrica con respecto al eje y , y cuya ecuación es

$$y = x^2 - 3$$

Si x se reemplaza por $-x$, se obtiene la ecuación

$$y = (-x)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 3$$

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 8** La gráfica dibujada en la figura 17 es simétrica con respecto al eje x , y su ecuación es

$$y^2 = 4x$$

Al sustituir y por $-y$ en esta ecuación, se obtiene

$$(-y)^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4x$$

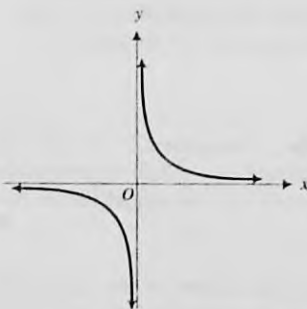
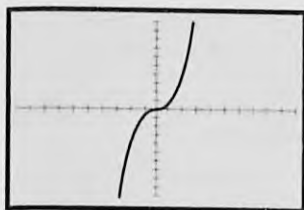


FIGURA 24



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$$y = \frac{1}{2}x^3$$

FIGURA 25

▶ **EJEMPLO 4** Verifique la simetría de la gráfica cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x^3$$

Después trace su gráfica.

Solución Se verificará la simetría. Si x se reemplaza por $-x$ y y se sustituye por $-y$ en la ecuación dada, se tiene

$$-y = \frac{1}{2}(-x)^3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^3$$

Por tanto, por el criterio de simetría (iii), la gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica no es simétrica con respecto al eje x ni con respecto al eje y como se puede verificar al aplicar los criterios de simetría (i) y (ii).

La gráfica de la ecuación dada, trazada en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$, se muestra en la figura 25. Observe la simetría con respecto al origen. ◀

EJERCICIOS A.2

En los ejercicios 1 y 2, localice el punto P en un sistema coordenado cartesiano rectangular y determine el cuadrante en el que se encuentra.

- (a) $P(3, 7)$ (b) $P(-4, -6)$
 (c) $P(2, -5)$ (d) $P(-1, 4)$
- (a) $P(5, 6)$ (b) $P(8, -1)$
 (c) $P(-7, -2)$ (d) $P(-9, 3)$

En los ejercicios 3 a 8, localice el punto P y cada uno de los puntos siguientes en un sistema coordenado cartesiano rectangular. (a) El punto Q tal que el segmento de recta de P a Q sea perpendicular al eje x y bisecado por dicho eje. Proporcione las coordenadas de Q . (b) El punto R tal que el segmento de recta de P a R sea perpendicular al eje y y bisecado por este eje. Dé las coordenadas de R . (c) El punto S tal que el segmento de recta de P a S sea bisecado por el origen. Proporcione las coordenadas de S . (d) El punto T tal que el segmento de recta de P a T sea perpendicular a la recta a 45° que pasa por el origen y bisece los cuadrantes primero y tercero, y que biseque al segmento PT . Dé las coordenadas de T .

3. $P(1, -2)$ 4. $P(-2, 2)$ 5. $P(2, 2)$
 6. $P(-2, -2)$ 7. $P(-1, -3)$ 8. $P(0, -3)$

En los ejercicios 9 y 10, haga lo siguiente: (a) determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta de A a B ; (b) localice los puntos A , M y B en un sistema coordenado cartesiano rectangular y demuestre que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$.

9. $A(-4, 7)$ y $B(1, -3)$ 10. $A(3, 4)$ y $B(4, -3)$

En los ejercicios 11 y 12, dibuje el triángulo que tiene vértices en A , B y C y calcule las longitudes de los lados.

11. $A(4, -5)$, $B(-2, 3)$, $C(-1, 7)$
12. $A(2, 3)$, $B(3, -3)$, $C(-1, -1)$
13. Una mediana de un triángulo es un segmento de recta trazada desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Calcule la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ y $C(-1, -1)$.
14. Calcule las longitudes de las medianas del triángulo que tiene vértices $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -4)$.
15. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ y $C(-1, -1)$ es un triángulo rectángulo. Sugerencia: utilice el recíproco del teorema de Pitágoras.
16. Determine los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 5)$ y $(3, 1)$.
17. Demuestre que los puntos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ y $C(1, 4)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
18. Demuestre que los puntos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 5)$ son los vértices de un rectángulo.
19. Demuestre que los puntos $(-3, 2)$, $(1, -2)$ y $(9, -10)$ son colineales utilizando la fórmula de la distancia.
20. Determine si los puntos $(14, 7)$, $(2, 2)$ y $(-4, -1)$ son colineales empleando la fórmula de la distancia.
21. Demuestre que los puntos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ y $D(21, -5)$ son los vértices de un cuadrado. Calcule la longitud de una diagonal.

22. Si un extremo de un segmento de recta es el punto $(-4, 2)$ y el punto medio del segmento es $(3, -1)$, determine las coordenadas del otro extremo del segmento.
23. La abscisa de un punto es -6 , y su distancia desde el punto $(1, 3)$ es $\sqrt{74}$. Obtenga la ordenada del punto.
24. Dados los dos puntos $A(-3, 4)$ y $B(2, 5)$, determine las coordenadas de un punto P en la recta que pasa por A y B y que no se encuentra entre A y B tal que (a) la distancia de P a A sea el doble que la de P a B y (b) la distancia de P a B sea el doble que la de P a A .

En los ejercicios 25 a 32, haga lo siguiente: (a) verifique la simetría de la gráfica de la ecuación (i); (b) dibuje la gráfica de la ecuación (i); (c) trace las gráficas de las ecuaciones (ii) y (iii) en el mismo rectángulo de inspección; (d) compare las curvas obtenidas en los incisos (b) y (c).

25. (i) $y^2 = 9x$ (ii) $y = 3\sqrt{x}$ (iii) $y = -3\sqrt{x}$
26. (i) $y^2 = \frac{1}{4}x$ (ii) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$
27. (i) $y^2 = -\frac{1}{4}x$ (ii) $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$
(iii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{-x}$
28. (i) $y^2 = -4x$ (ii) $y = 2\sqrt{-x}$
(iii) $y = -2\sqrt{-x}$
29. (i) $y^2 = 1 - x^2$ (ii) $y = \sqrt{1 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{1 - x^2}$
30. (i) $y^2 = 9 - x^2$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$
(iii) $y = -\sqrt{9 - x^2}$
31. (i) $y^2 = x^2 - 4$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 4}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 4}$
32. (i) $y^2 = x^2 - 16$ (ii) $y = \sqrt{x^2 - 16}$
(iii) $y = -\sqrt{x^2 - 16}$

En los ejercicios 33 y 34, dibuje la gráfica de la ecuación.

33. (a) $y = |x - 2|$ (b) $y = |x + 2|$
(c) $y = |x| - 2$ (d) $y = |x| + 2$

34. (a) $y = 2|x - 3|$ (b) $y = 2|x + 3|$
(c) $y = 2|x| - 6$ (d) $y = 2|x| + 6$

En los ejercicios 35 a 38, verifique la simetría de la gráfica de la ecuación y después trace la gráfica.

35. (a) $y = x^3$ (b) $y = -x^3$
(c) $y = \frac{1}{8}x^3$ (d) $y = -\frac{1}{8}x^3$
36. (a) $y = 2x^3$ (b) $y = -2x^3$
(c) $y = \frac{1}{6}x^3$ (d) $y = -\frac{1}{6}x^3$
37. (a) $y = 2x^4$ (b) $y = -2x^4$
(c) $y = \frac{1}{4}x^4$ (d) $y = -\frac{1}{4}x^4$
38. (a) $y = 4x^4$ (b) $y = -4x^4$
(c) $y = \frac{1}{2}x^4$ (d) $y = -\frac{1}{2}x^4$

En los ejercicios 39 a 44, trace las gráficas de las ecuaciones de cada ejercicio en el mismo rectángulo de inspección.

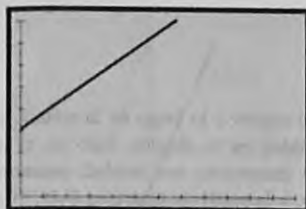
39. $y = x^2, y = (x + 2)^2, y = (x - 2)^2, y = (x - 4)^2$
40. $y = x^2, y = x^2 + 2, y = x^2 - 2, y = x^2 - 4$
41. $y = x^2, y = 2x^2, y = -2x^2, y = 4x^2$
42. $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{4}x^2$
43. $y = |x|, y = |x| + 3, y = |x| - 3,$
 $y = |x| - 4$
44. $y = |x|, y = |x + 3|, y = |x - 3|,$
 $y = |x - 4|$
45. Describa en qué son similares las gráficas del ejercicio 39 y en que son diferentes. Haga lo mismo para las gráficas del ejercicio 41.
46. Siga las instrucciones del ejercicio 45 para las gráficas de los ejercicios 40 y 42.
47. Siga las instrucciones para el ejercicio 45 para las gráficas de los ejercicios 43 y 44.
48. Utilice las definiciones de simetría para explicar por qué una gráfica simétrica con respecto a los dos ejes coordenados también es simétrica con respecto al origen.

A.3 RECTAS

Suponga que el costo de alquiler de un avión de una plaza, de una aerolínea privada, es de \$310 por el avión y el piloto, más 75 centavos por milla de vuelo. Si y dólares es el costo de un viaje de x millas, entonces

$$y = 0.75x + 310$$

La figura 1 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 1200]$ por $[0, 800]$, con una escala de 100 en los ejes. La gráfica parece ser una recta. En el teorema A.3.4 se establece que la gráfica de una



$[0, 1200]$ por $[0, 800]$

$$y = 0.75x + 310$$

FIGURA 1

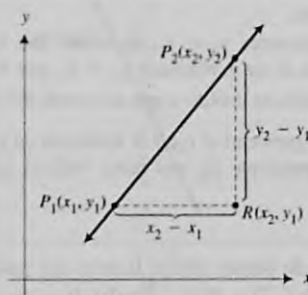


FIGURA 2

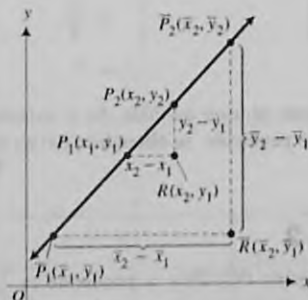


FIGURA 3

equação de este tipo é uma reta. Observe que para cada incremento de 100 unidades em x , y se incrementa em 75 unidades, ou, equivalentemente, por cada unidade de incremento em x , y se incrementa em 0.75 unidades. De este modo, a razão de mudança em y ao mudança em x é a constante 0.75. Esta razão constante se denomina *pendiente* de la recta. A continuación se obtendrá una definición formal de la pendiente de una recta.

Sean l una recta no vertical, y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos cualesquiera de l . La figura 2 muestra esta recta. En la figura, R es el punto (x_2, y_1) , y los puntos P_1 , P_2 y R son vértices de un triángulo rectángulo; además, $P_1R = x_2 - x_1$ y $RP_2 = y_2 - y_1$. El número $y_2 - y_1$ mide el cambio en las ordenadas de P_1 a P_2 , y puede ser positivo, negativo o cero. El número $x_2 - x_1$ mide el cambio en las abscisas de P_1 a P_2 , y también puede ser positivo o negativo. Como la recta l no es vertical, $x_2 - x_1 \neq 0$, y por tanto, $x_2 - x_1$ no puede ser cero. Sea

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

El valor de m calculado a partir de esta ecuación es independiente de la elección de los dos puntos P_1 y P_2 de l . A fin de mostrar esto, suponga que se eligen dos puntos diferentes $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $\bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ de la recta l , y se calcula un número \bar{m} a partir de (1)

$$\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$$

Se probará que $\bar{m} = m$. Refiérase a la figura 3. Los triángulos $\bar{P}_1\bar{R}\bar{P}_2$ y P_1RP_2 son semejantes; por lo que las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. Por tanto,

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o bien,

$$\bar{m} = m$$

Así, el valor de m calculado a partir de (1) es el mismo número sin importar cuales dos puntos de l se eligieron. Este número m se denomina *pendiente* de la recta.

A.3.1 Definición de la pendiente de una recta

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de la recta l , la cual no es paralela al eje y , entonces la *pendiente* de l , denotada por m , está determinada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por $x_2 - x_1$, se obtiene

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

De esta ecuación se deduce que si se considera una partícula que se mueve a lo largo de una recta, el cambio en la ordenada de la partícula es igual al producto de la pendiente y el cambio en la abscisa.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si l es la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 1)$ y $P_2(4, 7)$ y m es la pendiente de l , entonces

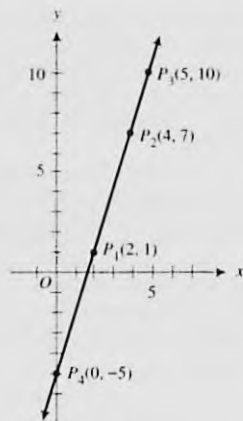


FIGURA 4

$$m = \frac{7 - 1}{4 - 2} = 3$$

Refiérase a la figura 4. Si una partícula se mueve a lo largo de la recta l , el cambio en la ordenada es 3 veces el cambio en la abscisa. Esto es, si la partícula está en $P_2(4, 7)$ y la abscisa se incrementa una unidad, entonces la ordenada se incrementará en 3 unidades, y la partícula estará en $P_3(5, 10)$. De igual manera, si la partícula está en $P_1(2, 1)$ y la abscisa se disminuye en 2 unidades, entonces la ordenada se disminuirá en 6 unidades, y la partícula estará en $P_4(0, -5)$.

Si la pendiente de una recta es positiva, entonces conforme la abscisa de un punto de la recta se incrementa, la ordenada se incrementa también, tal como se muestra en la figura 5. En la figura 6 se presenta una recta cuya pendiente es negativa. Para esta recta, conforme la abscisa de un punto de la recta se incrementa, la ordenada disminuye.

Si una recta es paralela al eje x , entonces $y_2 = y_1$, de modo que la pendiente es cero. Si una recta es paralela al eje y , entonces $x_2 = x_1$, por lo que la fracción $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ carece de significado debido a que no puede dividirse entre cero. Por esta razón, las rectas paralelas al eje y se excluyen de la definición de pendiente. Por tanto, la pendiente de una recta vertical no está definida.

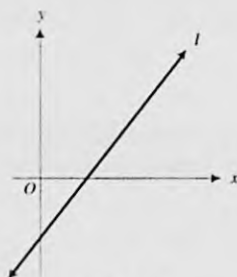


FIGURA 5

► **EJEMPLO 1** Para cada par de puntos, dibuje la recta que pasa por ellos y determine su pendiente: (a) $A(3, 7)$ y $B(-2, -4)$; (b) $A(-2, 5)$ y $B(2, -3)$; (c) $A(-3, 4)$ y $B(5, 4)$; (d) $A(5, 3)$ y $B(5, -1)$.

Solución Las rectas se muestran en las figuras 7(a)–(d). Al calcular la pendiente se obtiene

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad m &= \frac{-4 - 7}{-2 - 3} & \text{(b)} \quad m &= \frac{-3 - 5}{2 - (-2)} & \text{(c)} \quad m &= \frac{4 - 4}{5 - (-3)} \\ &= \frac{-11}{-5} & &= -\frac{8}{4} & &= \frac{0}{8} \\ &= \frac{11}{5} & &= -2 & &= 0 \end{aligned}$$

(d) Como la recta es vertical, la pendiente no está definida. Si se intenta emplear la definición para calcular la pendiente, se obtendrá cero en el denominador.

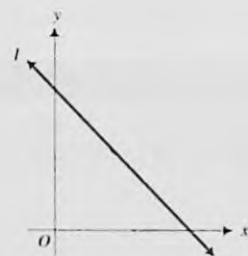


FIGURA 6

► EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

- (a) Suponga que una recta contiene al punto $P(5, 2)$ y su pendiente es $\frac{3}{4}$. Para determinar otro punto de la recta, se inicia en P y como la pendiente es $\frac{3}{4}$, se desplaza 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Entonces se tiene el punto $Q(9, 5)$, que también está en la recta. La recta se dibuja de modo que pase por los puntos P y Q , como se muestra en la figura 8.
- (b) Si una recta pasa por el punto $P(5, 2)$ y tiene la pendiente negativa $-\frac{3}{4}$, se obtiene otro punto de la recta desplazándose, a partir de P , 4 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. Esto proporciona el punto $Q(9, -1)$. La figura 9 muestra la recta que pasa por P y Q .

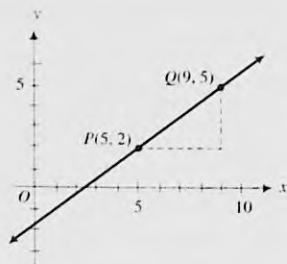
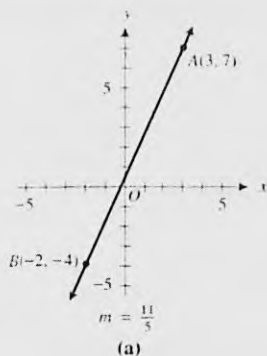


FIGURA 8

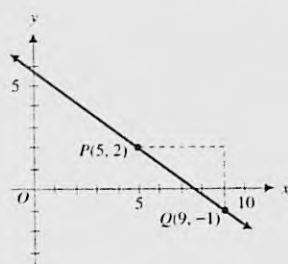


FIGURA 9

En la sección A.2 del apéndice se definió la gráfica de una ecuación. Ahora se explicará lo que se entiende por *ecuación de una gráfica*.

A.3.2 Definición de ecuación de una gráfica

Una **ecuación de una gráfica** es una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de aquellos, y sólo aquellos, puntos de la gráfica.

A partir de esta definición, se deduce que una ecuación de una gráfica tiene las siguientes propiedades:

1. Si un punto $P(x, y)$ está en la gráfica, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación.
2. Si un punto $P(x, y)$ no está en la gráfica, entonces sus coordenadas no satisfacen la ecuación.

A fin de obtener la ecuación de una recta, se emplea el hecho de que un punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m determinan sólo una recta. Sea $P(x, y)$ cualquier punto de la recta diferente de P_1 . Entonces, como la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m , de la definición de pendiente, se tiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta ecuación se denomina **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. Esta forma proporciona la ecuación de la recta si se conocen un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta y la pendiente de la misma.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Con el fin de obtener una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, -3)$ y $B(-2, 3)$, primero se calcula m .

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{3 - (-3)}{-2 - 6} \\
 &= \frac{6}{-8} \\
 &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

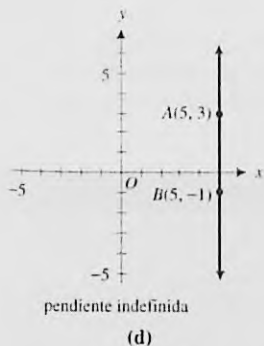
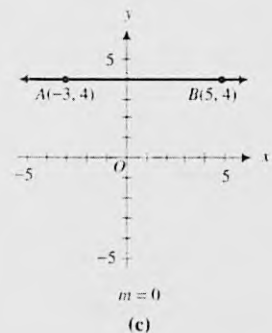
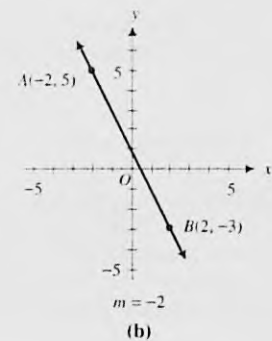


FIGURA 7

Al emplear la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con A como P_1 , resulta

$$y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 6)$$

$$4y + 12 = -3x + 18$$

$$3x + 4y - 6 = 0$$

Si se considera B como P_1 en la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - 3 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$$

$$4y - 12 = -3x - 6$$

$$3x + 4y - 6 = 0$$

la cual, por supuesto, es la misma ecuación obtenida anteriormente

Si en la forma punto-pendiente se elige el punto particular $(0, b)$ (es decir, el punto donde la recta interseca al eje y) como el punto (x_1, y_1) , se tiene

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = mx + b$$

El número b , la ordenada del punto donde la recta corta al eje y , se llama **intercepción** y (u **ordenada al origen**) de la recta. En consecuencia, la ecuación anterior recibe el nombre de **forma pendiente-intercepción** de la ecuación de la recta. Esta forma es especialmente útil debido a que expresa de manera explícita la coordenada y de un punto de la recta en términos de su coordenada x .

► **EJEMPLO 2** Determine la pendiente de la recta que tiene la ecuación

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solución Al resolver la ecuación para y , se obtiene.

$$5y = -6x + 7$$

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$$

Esta ecuación está en la forma pendiente-intercepción, donde $m = -\frac{6}{5}$ y $b = \frac{7}{5}$. Por tanto, la pendiente es $-\frac{6}{5}$.

Como la pendiente de una recta vertical no está definida, no se puede aplicar la forma punto-pendiente para obtener su ecuación. En lugar de esta forma se utiliza el teorema siguiente, el cual también proporciona una ecuación de una recta horizontal.

A.3.3 Teorema

(i) Una ecuación de la recta vertical que tiene intercepción x igual a a es

$$x = a$$

(ii) Una ecuación de la recta horizontal que tiene intercepción y igual a b es

$$y = b$$

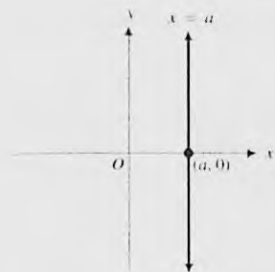


FIGURA 10

Demostración

- (i) La figura 10 muestra la recta vertical que interseca al eje x en el punto $(a, 0)$. Esta recta consta de aquellos puntos del plano y sólo aquellos que tienen la misma abscisa a . De este modo, $P(x, y)$ es cualquier punto de la recta si y sólo si

$$x = a$$

- (ii) La recta horizontal que interseca al eje y en el punto $(0, b)$ se muestra en la figura 11. Para esta recta, $m = 0$. Por tanto, de la forma pendiente intercepción, una ecuación de esta recta es

$$y = b$$

Se ha mostrado que una ecuación de una recta no vertical es de la forma $y = mx + b$, y una ecuación de una recta vertical es $x = a$. Como cada una de estas ecuaciones es un caso especial de una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

donde A , B y C son constantes y A y B no son cero simultáneamente, se deduce que cada recta tiene una ecuación de la forma (2). El recíproco de este hecho se presenta en el teorema siguiente.

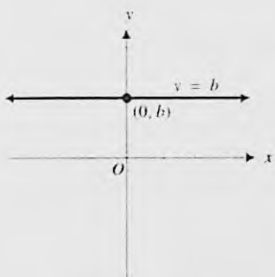


FIGURA 11

A.3.4 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

donde A , B y C son constantes, y A y B no son ambas cero, es una recta.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio. Vea el ejercicio 51.

Como la gráfica de (2) es una recta, esta ecuación se denomina **ecuación lineal**; y es la ecuación general de primer grado en x y y .

A fin de trazar una recta en la graficadora, primero se escribe la ecuación en la forma punto-pendiente, como se hizo con la figura 1. Para dibujar a mano una recta, sólo se necesita determinar las coordenadas de dos puntos de la recta, localizar los puntos y después dibujar la recta. Cualquiera dos puntos serán suficientes, pero por conveniencia, usualmente se eligen los puntos donde la recta corta a los ejes.

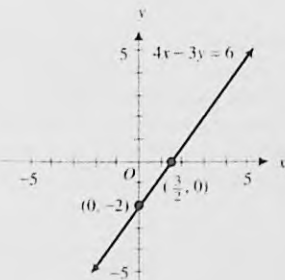


FIGURA 12

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Con el fin de dibujar la recta que tiene ecuación

$$4x - 3y = 6$$

primero se obtiene la intercepción x igual a a y la intercepción y igual a b . Para ello, se sustituye en la ecuación 0 por y y se obtiene $a = \frac{3}{2}$. Al reemplazar 0 por x resulta $b = -2$. Así, se tiene la recta que se muestra en la figura 12. ◀

Una aplicación de la pendiente se presenta en el teorema siguiente.

A.3.5 Teorema

Si l_1 y l_2 son dos rectas no verticales diferentes que tiene pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, entonces l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.

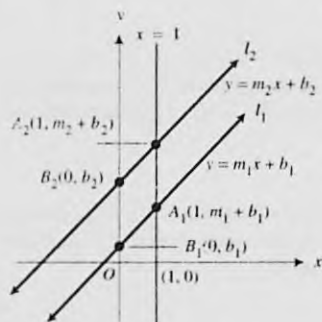


FIGURA 13

Demostración Sean las ecuaciones de l_1 y l_2 , respectivamente,

$$y = m_1x + b_1 \quad y = m_2x + b_2$$

Refiérase a la figura 13, la cual muestra las dos rectas que se intersectan en el eje y en los puntos $B_1(0, b_1)$ y $B_2(0, b_2)$. La recta vertical $x = 1$ interseca a l_1 en el punto $A_1(1, m_1 + b_1)$, y a l_2 en el punto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Entonces

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \quad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

Las dos rectas son paralelas si y sólo si las distancias verticales $|\overline{B_1B_2}|$ y $|\overline{A_1A_2}|$ son iguales; esto es, l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$

$$m_1 = m_2$$

Así, l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$. ■

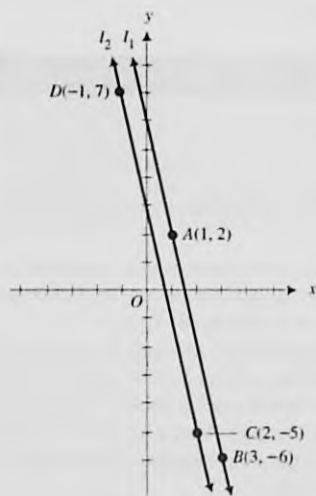


FIGURA 14

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** Sean l_1 la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, -6)$, y m_1 la pendiente de l_1 ; y sean l_2 la recta que pasa por los puntos $C(2, -5)$ y $D(-1, 7)$, y m_2 la pendiente de l_2 . Consulte la figura 14. Entonces

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-6 - 2}{3 - 1} \\ &= \frac{-8}{2} \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{7 - (-5)}{-1 - 2} \\ &= \frac{12}{-3} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Como $m_1 = m_2$, entonces, por el teorema A.3.5, l_1 y l_2 son paralelas. ◀

Dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta. Tres puntos diferentes pueden o no estar en una recta. Si tres o más puntos están en la misma recta se les llama **colineales**. En consecuencia, tres puntos A , B y C son colineales si y sólo si la recta que pasa por los puntos A y B es la misma que la que pasa por los puntos B y C . Como la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C contienen al punto B , ellas serán la misma recta si y sólo si sus pendientes son iguales.

► **EJEMPLO 3** Determine por medio de pendientes si los puntos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ y $C(7, 2)$ son colineales.

Solución Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por A y B , y m_2 es la pendiente de la recta que pasa por B y C , entonces

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1 - (-4)}{2 - (-3)} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{2 - (-1)}{7 - 2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

En consecuencia, $m_1 = m_2$. Por tanto, la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C tienen la misma pendiente y contienen al punto común B . Así, ellas son la misma recta, y por tanto, A , B y C son colineales. ◀

A continuación se demostrará un teorema acerca de las pendientes de dos rectas perpendiculares.

A.3.6 Teorema

Dos rectas no verticales l_1 y l_2 que tienen pendientes m_1 y m_2 , respectivamente, son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

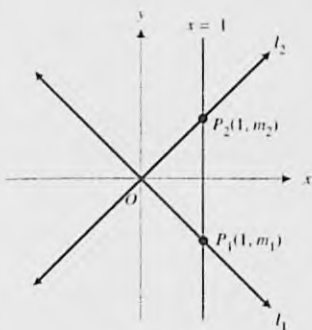


FIGURA 15

Demostración Considere los ejes coordenados de modo que el origen coincida con el punto de intersección de l_1 y l_2 . Vea la figura 15. Puesto que las rectas l_1 y l_2 no son verticales, las dos rectas intersectan a la recta $x = 1$ en los puntos P_1 y P_2 , respectivamente. Las abscisas de P_1 y P_2 son iguales a 1. Sea \bar{y} la ordenada de P_1 . Como l_1 contiene a los puntos $(0, 0)$ y $(1, \bar{y})$ y su pendiente es m_1 , entonces

$$m_1 = \frac{\bar{y} - 0}{1 - 0}$$

Así, $\bar{y} = m_1$. De manera semejante, se muestra que la ordenada de P_2 es m_2 . Del teorema de Pitágoras y de su recíproco, el triángulo P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \quad (3)$$

Al aplicar la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\begin{aligned} |\overline{OP_1}|^2 &= (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 & |\overline{OP_2}|^2 &= (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2 \\ &= 1 + m_1^2 & &= 1 + m_2^2 \\ |\overline{P_1P_2}|^2 &= (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 \\ &= m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2 \end{aligned}$$

Si se sustituye en (3), se puede concluir que P_1OP_2 es un triángulo rectángulo si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 &= m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2 \\ 2 &= -2m_1m_2 \\ m_1m_2 &= -1 \end{aligned}$$

Como la condición $m_1m_2 = -1$ equivale a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

el teorema A.3.6 establece que dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

► **EJEMPLO 4** Dada la recta l que tiene la ecuación

$$5x + 4y - 20 = 0$$

obtenga una ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es (a) paralela a l , y (b) perpendicular a l .

Solución En primer lugar se determina la pendiente de l al escribir su ecuación en la forma pendiente-intercepción. Si se resuelve la ecuación para y se tiene

$$4y = -5x + 20$$

$$y = -\frac{5}{4}x + 5$$

La pendiente de l es el coeficiente de x , el cual es $-\frac{5}{4}$.

- (a) La pendiente de una recta paralela a l es también $-\frac{5}{4}$. Como la recta requerida contiene al punto $(2, -3)$, se emplea la forma punto-pendiente, de donde resulta

$$y - (-3) = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

$$4y + 12 = -5x + 10$$

$$5x + 4y + 2 = 0$$

- (b) La pendiente de una recta perpendicular a l es el recíproco negativo de $-\frac{5}{4}$, el cual es $\frac{4}{5}$. De la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta que pasa por $(2, -3)$ y que tiene pendiente $\frac{4}{5}$ es

$$y - (-3) = \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$5y + 15 = 4x - 8$$

$$4x - 5y - 23 = 0$$

EJEMPLO 5 Demuestre por medio de pendientes que los cuatro puntos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ y $D(2, 4)$ son vértices de un rectángulo.

Solución Consulte la figura 16, donde l_1 es la recta que pasa por A y B , l_2 es la recta que pasa por B y C , l_3 es la recta que pasa por D y C , y l_4 es la recta que pasa por A y D ; m_1, m_2, m_3 y m_4 son sus pendientes respectivas. Entonces

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{6-2}{8-6} & m_2 &= \frac{8-6}{4-8} & m_3 &= \frac{8-4}{4-2} & m_4 &= \frac{4-2}{2-6} \\ &= 2 & &= -\frac{1}{2} & &= 2 & &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $m_1 = m_3$, l_1 es paralela a l_3 ; y debido a que $m_2 = m_4$, l_2 es paralela a l_4 . Puesto que $m_1 m_2 = -1$, l_1 y l_2 son perpendiculares. Por tanto, el cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes perpendiculares. En consecuencia, el cuadrilátero es un rectángulo.

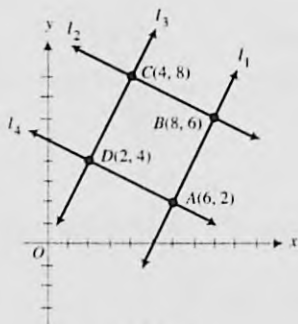


FIGURA 16

EJERCICIOS A.3

En los ejercicios 1 a 6, dibuje la recta que pasa por los puntos A y B y determine la pendiente de la recta.

- (a) $A(1, 4), B(6, 5)$ (b) $A(2, -3), B(-4, 3)$
- (a) $A(5, 2), B(-2, -3)$ (b) $A(-4, 2), B(8, 5)$
- (a) $A(-4, 3), B(0, 0)$ (b) $A(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), B(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$
- (a) $A(7, 0), B(0, -6)$ (b) $A(-\frac{3}{4}, \frac{1}{8}), B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$
- (a) $A(1, 5), B(-2, 5)$ (b) $A(-2.1, 0.3), B(2.3, 1.4)$
- (a) $A(3, -5), B(3, 4)$ (b) $A(5.2, -3.5), B(-6.3, -1.4)$

En los ejercicios 7 y 8, dibuje la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m .

- (a) $P(3, 4), m = \frac{2}{5}$ (b) $P(-1, 6), m = -3$
- (a) $P(4, 3), m = 2$ (b) $P(2, -5), m = -\frac{4}{3}$

En los ejercicios 9 a 20, obtenga una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

- (a) La pendiente es 4 y pasa por el punto $(2, -3)$;
(b) pasa por los dos puntos $(-1, -5)$ y $(3, 6)$.
- (a) La pendiente es -2 y pasa por el punto $(-4, 3)$;
(b) pasa por los dos puntos $(3, 1)$ y $(-5, 4)$.
- (a) La pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intercepción y es igual a 1 ;
(b) la pendiente es 2 y la intercepción x es igual a $-\frac{1}{3}$.

12. (a) La pendiente es $\frac{3}{4}$ y la intercepción y es igual a -4 ;
(b) la pendiente es -2 y la intercepción x es igual a 4 .
13. (a) Pasa por el punto $(1, -7)$ y es paralela al eje x ;
(b) pasa por el punto $(2, 6)$ y es paralela al eje y .
14. (a) Pasa por el punto $(-5, 2)$ y es paralela al eje x ;
(b) pasa por el punto $(-3, -4)$ y es paralela al eje y .
15. (a) La intercepción x es igual a -3 y la intercepción y es igual a 4 ; (b) pasa por el origen y biseca al ángulo entre los ejes en los cuadrantes primero y tercero.
16. (a) La intercepción x es igual a 5 y la intercepción y es igual a -6 ; (b) pasa por el origen y biseca al ángulo entre los ejes en los cuadrantes segundo y cuarto.
17. Pasa por el punto $(-2, 3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - y - 2 = 0$.
18. Pasa por el punto $(1, 4)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 7 = 0$.
19. Pasa por el punto $(2, 4)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 5y + 10 = 0$.
20. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 6 = 0$.

En los ejercicios 21 a 24, obtenga tanto la pendiente como la intercepción y de la recta que tiene la ecuación dada. Dibuje la recta.

21. (a) $x + 3y - 6 = 0$ (b) $4y - 9 = 0$
22. (a) $8x - 4y = 5$ (b) $3y - 5 = 0$
23. (a) $7x - 8y = 0$ (b) $x = 6 - 2y$
24. (a) $x = 4y - 2$ (b) $4x = 3y$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga una ecuación de la recta que pase por los dos puntos indicados, y exprese la ecuación en la forma pendiente-intercepción; dibuje la recta.

25. $(1, 3)$ y $(2, -2)$ 26. $(3, -5)$ y $(1, -2)$
27. Compruebe que las rectas que tienen ecuaciones $3x + 5y + 7 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$ son paralelas; dibuje sus gráficas.
28. Demuestre que las rectas que tienen ecuaciones $4x - 3y + 12 = 0$ y $8x - 6y + 15 = 0$ son paralelas; y dibuje sus gráficas.
29. Pruebe que las rectas que tienen ecuaciones $2x - 3y + 6 = 0$ y $3x + 2y - 12 = 0$ son perpendiculares; dibuje sus gráficas.
30. Demuestre que las rectas que tienen ecuaciones $2y = 10 - 5x$ y $5y = 2x + 20$ son perpendiculares; dibuje sus gráficas.
31. Obtenga el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3x + 6ky = 7$ y $9kx + 8y = 15$ sean paralelas.
32. Determine el valor de k tal que las rectas cuyas ecuaciones son $3kx + 8y = 5$ y $6y - 4kx = -1$ sean perpendiculares.

En los ejercicios 33 a 36, determine por medio de pendientes si los puntos son colineales.

33. (a) $(2, 3), (-4, -7), (5, 8)$
(b) $(2, -1), (1, 1), (3, 4)$
34. (a) $(4, 6), (1, 2), (-5, -4)$
(b) $(-3, 6), (3, 2), (9, -2)$
35. (a) $(2, 5), (-1, 4), (3, -2)$
(b) $(0, 2), (-3, -1), (4, 6)$
36. (a) $(-1, 2), (7, 4), (2, -1)$
(b) $(4, -9), (4, 1), (4, 8)$
37. Demuestre por medio de pendientes que los cuatro puntos $(0, 0), (-2, 1), (3, 4)$ y $(5, 3)$ son los vértices de un paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos).
38. Compruebe mediante pendientes que los cuatro puntos $(-4, -1), (3, \frac{8}{3}), (8, -4)$ y $(2, -9)$ son los vértices de un trapecio (cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos).
39. Pruebe por medio de pendientes que los tres puntos $(3, 1), (6, 0)$ y $(4, 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y calcule el área del triángulo.
40. Demuestre mediante pendientes que los puntos $(-6, 1), (-4, 6), (4, -3)$ y $(6, 2)$ son los vértices de un rectángulo.
41. El fabricante de un artículo de primera necesidad tiene un costo total que consiste de un costo general seminario de \$3 000 y un costo de producción de \$25 por unidad. (a) Si x unidades se producen por semana y y dólares es el costo total seminario, escriba una ecuación que involucre a x y y . (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).
42. El costo total de un fabricante consiste de un costo de \$20 por unidad manufacturada y un costo general de producción diario fijo. (a) Si el costo total de producción de 200 unidades en un día es de \$4 500, determine el costo general diario fijo. (b) Si se producen x unidades por día y y dólares es el costo total diario, escriba una ecuación que contenga a x y y . (c) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (b).
43. Haga el ejercicio 42 si el costo de producción es \$30 por unidad, y el costo total de producción de 200 unidades en un día es de \$6 600.
44. La gráfica de una ecuación que relaciona la temperatura en grados Celsius y la temperatura en grados Fahrenheit es una recta. El agua se congela a 0° Celsius y 32° Fahrenheit, y hierve a 100° Celsius y 212° Fahrenheit. (a) Si y grados Fahrenheit corresponden a x grados Celsius, escriba una ecuación que contenga a x y y . (b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a). (c) ¿Cuál es la temperatura Fahrenheit que corresponde a 20° Celsius? (d) ¿Cuál es la temperatura Celsius que corresponde a 86° Fahrenheit?
45. Obtenga la ordenada del punto cuya abscisa es -3 y es colineal con los puntos $(3, 2)$ y $(0, 5)$.
46. La ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

donde a y b son las intercepciones x y y , respectivamente, es la *forma intercepción* (o *simétrica*) de la ecuación de una recta. Explique cómo puede obtenerse esta forma a partir de la forma punto-intercepción y de la relación entre la pendiente y las intercepciones.

47. Si se conocen las coordenadas de los tres vértices A , B y C de un triángulo, explique cómo obtendría la ecuación de la mediana que va desde A hasta el lado que pasa por B y C .
48. Para el triángulo del ejercicio 47, explique cómo obtendría una ecuación de la altura trazada desde A hasta el lado que pasa por B y C .

49. Aplique la explicación del ejercicio 47 para obtener ecuaciones de las tres medianas del triángulo que tiene vértices en $(3, -2)$, $(2, 4)$ y $(-1, 1)$.
50. Aplique la explicación del ejercicio 48 para obtener ecuaciones de las tres alturas del triángulo del ejercicio 49.
51. Demuestre el teorema A.3.4: La gráfica de la ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A , B y C son constantes y A y B no son ambas cero, es una recta. *Sugerencia:* considere dos casos, $B \neq 0$ y $B = 0$. Si $B \neq 0$, pruebe que la ecuación corresponde a una recta que tiene pendiente $-A/B$ e intercepción y igual a $-C/B$. Si $B = 0$, muestre que la ecuación corresponde a una recta vertical.

A.4 PARÁBOLAS

En la sección A.2 se presentaron las *parábolas*. Las gráficas de las figuras 16 y 17 de esa sección son parábolas. Estas curvas tienen muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo, se emplean en el diseño de espejos parabólicos, reflectores y faros de automóvil. La trayectoria de un proyectil es una parábola si se considera que el movimiento se lleva a cabo en un plano y se desprecia la resistencia del aire. Los arcos tiene algunas veces apariencia parabólica; y los cables de un puente colgante pueden pender en forma de parábola. Las antenas para la recepción de señales de televisión provenientes de satélites son también de forma parabólica.

En la definición de una parábola se hace referencia a la *distancia de un punto a una recta*. Se entiende por tal distancia la longitud del segmento de recta perpendicular del punto a la recta. Consulte la figura 1, donde $|PQ|$ es la distancia de P a la recta l .

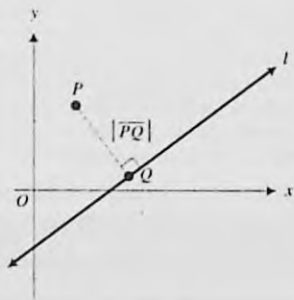


FIGURA 1

A.4.1 Definición de parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se denomina **foco**, y la recta fija se llama **directriz**.

A continuación se deducirá una ecuación de una parábola a partir de la definición. Para que esta ecuación sea lo más simple posible, se elige el eje y perpendicular a la directriz de modo que contenga al foco. El origen se toma como el punto sobre eje y a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Observe que se han elegido los ejes (*no* la parábola) de manera especial. Refiérase a la figura 2.

Sea p la distancia dirigida \overline{OF} . El foco es el punto $F(0, p)$, y la directriz es la recta que tiene la ecuación $y = -p$. Un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si P equidista de F y de la directriz. Esto es, si $Q(x, -p)$ es el pie de la recta perpendicular de P a la directriz, entonces P está en la parábola si y sólo si

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y + p)^2}$$

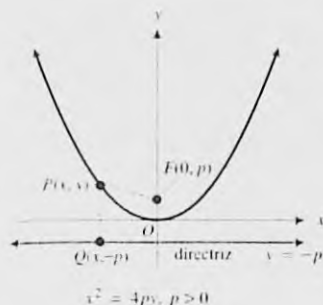


FIGURA 2

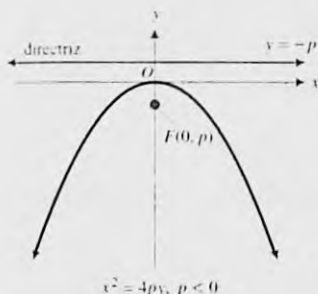


FIGURA 3

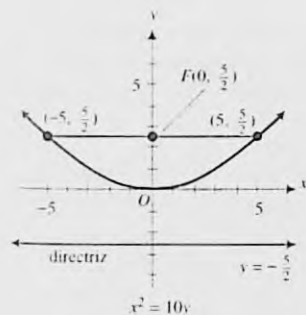


FIGURA 4

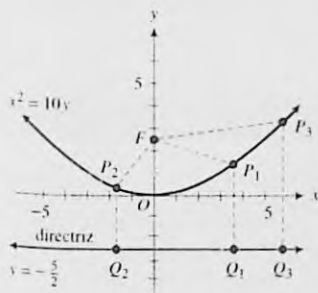


FIGURA 5

el punto P está en la parábola si y sólo si

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

Al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 &= 4py \end{aligned}$$

Este resultado se establece formalmente en el teorema siguiente.

A.4.2 Teorema Ecuación de una parábola

Una ecuación de una parábola cuyo foco está en $(0, p)$ y tiene como su directriz a la recta $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

En la figura 2, p es positivo; sin embargo, p puede ser negativo debido a que es la distancia dirigida \overline{OF} . La figura 3 muestra una parábola para la cual $p < 0$.

De las figuras 2 y 3 se observa que para la ecuación $x^2 = 4py$ la parábola abre hacia arriba si $p > 0$, y abre hacia abajo si $p < 0$. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se denomina **eje** de la parábola. El eje de las parábolas de las figuras 2 y 3 es el eje y . La intersección de la parábola con su eje se llama **vértice**, el cual, por supuesto, está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. El vértice de las parábolas de las figuras 2 y 3 es el origen.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 10y$$

es una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje es el eje y . Como $4p = 10$, $p = \frac{5}{2} > 0$, por lo que la parábola abre hacia arriba. El foco se encuentra en el punto $F(0, \frac{5}{2})$, y la ecuación de la directriz es $y = -\frac{5}{2}$. Dos puntos de la parábola son $(5, \frac{5}{2})$ y $(-5, \frac{5}{2})$. Estos puntos son los extremos de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. Esta cuerda se denomina **lado recto** (*latus rectum*) de la parábola. En el ejercicio 41 se le pedirá que demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$. Cuando se dibuja una parábola, es útil localizar los extremos del lado recto. La figura 4 muestra la parábola, el foco, la directriz y el lado recto. ◀

La parábola de la figura 4 junto con los tres puntos P_1, P_2 y P_3 se muestran en la figura 5. Como la definición de una parábola establece que cualquier punto de la parábola equidista del foco y de la directriz, entonces

$$|\overline{FP_1}| = |\overline{Q_1P_1}| \quad |\overline{FP_2}| = |\overline{Q_2P_2}| \quad |\overline{FP_3}| = |\overline{Q_3P_3}|$$

EJEMPLO 1

Dibuje la parábola cuya ecuación es

$$x^2 = -8y$$

y determine el foco, una ecuación de la directriz y los extremos del lado recto.

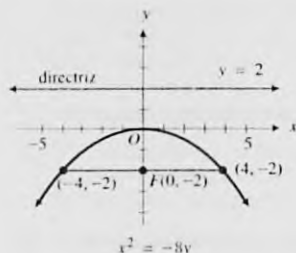
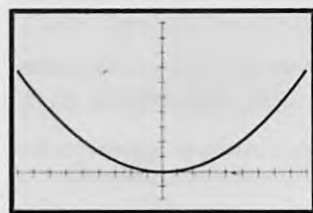


FIGURA 6



[-9, 9] por [-2, 10]

$$y = \frac{1}{12}x^2$$

FIGURA 7



FIGURA 8

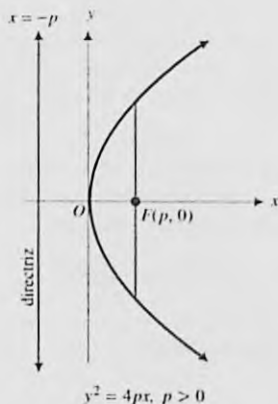


FIGURA 9

Solución La gráfica es una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje es el eje y . Como $4p = -8$, $p = -2$, y ya que $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. El foco está en el punto $F(0, -2)$, y una ecuación de la directriz es $y = 2$. Los extremos del lado recto son $(4, -2)$ y $(-4, -2)$. Estos puntos se obtienen al sustituir -2 por y en la ecuación de la parábola y resolver la ecuación para x . La parábola se presenta en la figura 6, la cual también muestra el foco y la directriz. ◀

Por supuesto, se puede verificar la parábola del ejemplo 1 trazando la gráfica de la ecuación $y = -\frac{1}{8}x^2$ en la graficadora.

► **EJEMPLO 2** Obtenga una ecuación de la parábola que tiene su foco en $(0, 3)$ y como su directriz la recta $y = -3$. Trace la parábola.

Solución Puesto que el foco está sobre el eje y y está también por arriba de la directriz, la parábola abre hacia arriba y $p = 3$. El vértice es el origen. Una ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$, con $4p = 12$. Así, la ecuación pedida es

$$x^2 = 12y$$

A fin de trazar la parábola, se escribe la ecuación como $y = \frac{1}{12}x^2$. Consulte la figura 7. ◀

► **EJEMPLO 3** Un espejo parabólico tiene una profundidad de 12 cm en el centro y el diámetro en la parte superior del espejo mide 32 cm. Obtenga la distancia del vértice al foco.

Solución Refiérase a la figura 8. Se eligen los ejes coordenados de modo que la parábola tenga su vértice en el origen, su eje coincida con el eje y , y abra hacia arriba. Por tanto, una ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py$$

donde p centímetros es la distancia del vértice al foco. Como el punto $(16, 12)$ está en la parábola, sus coordenadas satisfacen la ecuación, por lo que se tiene

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = \frac{16}{3}$$

Conclusión: La distancia del vértice al foco es $\frac{16}{3}$ cm. ◀

Algunas parábolas tienen ejes horizontales. La parábola que tiene la ecuación

$$y^2 = 7x$$

es un ejemplo. Esta ecuación es de la forma

$$y^2 = 4px$$

la cual puede obtenerse a partir de la ecuación $x^2 = 4py$ al intercambiar x y y . Una parábola que tiene la ecuación $y^2 = 4px$ tiene su vértice en el origen, el eje x como su eje y su foco está en el punto $F(p, 0)$; una ecuación de su directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha, como en la figura 9, y si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda, como en la figura 10.

Estos resultados se resumen en el teorema siguiente.

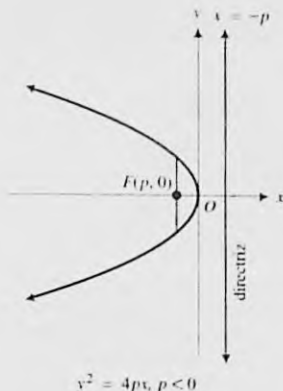


FIGURA 10

A.4.3 Teorema Ecuación de una parábola

Una ecuación de una parábola cuyo foco está en $(p, 0)$ y tiene como su directriz a la recta $x = -p$ es

$$y^2 = 4px$$

Trazo de una parábola

A fin de trazar la gráfica de una ecuación de la forma $y^2 = 4px$:

1. Resuelva para y considerando la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación, obteniéndose las dos ecuaciones

$$y = \sqrt{4px} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4px}$$

2. La unión de las gráficas de estas dos ecuaciones proporciona la gráfica de

$$y^2 = 4px$$

▶ EJEMPLO 4 Dibuje la parábola cuya ecuación es

$$y^2 = 7x$$

y determine el foco, una ecuación de la directriz y los extremos del lado recto. Verifique la gráfica al trazarla en la graficadora.

Solución La ecuación dada es de la forma $y^2 = 4px$; por tanto, el origen es el vértice y el eje x es el eje de la parábola. Como $4p = 7$, $p = \frac{7}{4} > 0$; de modo que la parábola abre hacia la derecha. El foco está en el punto $F(\frac{7}{4}, 0)$ y una ecuación de la directriz es $x = -\frac{7}{4}$. Para determinar los extremos del lado recto, se considera $x = \frac{7}{4}$ en la ecuación, de donde se obtiene

$$y^2 = \frac{49}{4}$$

$$y = \pm \frac{7}{2}$$

Por tanto, los extremos del lado recto son $(\frac{7}{4}, \frac{7}{2})$ y $(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2})$. En la figura 11 se presenta la parábola, también se muestran el foco y la directriz.

A fin de trazar la parábola, se obtienen las gráficas de

$$y = \sqrt{7x} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{7x}$$

en el mismo rectángulo de inspección

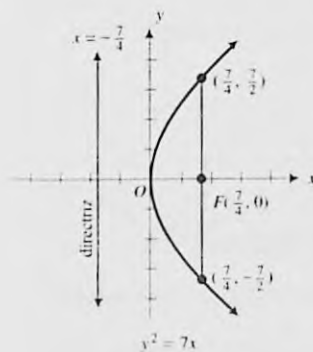


FIGURA 11

EJERCICIOS A.4

En los ejercicios 1 a 16, para la parábola que tiene la ecuación dada, obtenga (a) el vértice, (b) el eje, (c) el foco, (d) una ecuación de la directriz y (e) los extremos del lado recto. Dibuje la parábola.

1. $x^2 = 4y$
3. $x^2 = -16y$

2. $x^2 = 8y$
4. $x^2 = -12y$

5. $x^2 - y = 0$

7. $y^2 = 12x$

9. $y^2 = -8x$

11. $y^2 - 5x = 0$

13. $3x^2 + 8y = 0$

15. $2y^2 - 9x = 0$

6. $x^2 - 2y = 0$

8. $y^2 = -6x$

10. $y^2 = x$

12. $y^2 + 3x = 0$

14. $2x^2 + 5y = 0$

16. $3y^2 - 4x = 0$

En los ejercicios 17 a 22, trace la parábola que tiene la ecuación indicada.

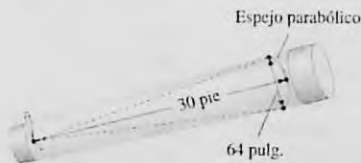
17. (a) $y = 4x^2$ (b) $y = -4x^2$
 (c) $x = 4y^2$ (d) $x = -4y^2$
 18. (a) $y = 2x^2$ (b) $y = -2x^2$
 (c) $x = 2y^2$ (d) $x = -2y^2$
 19. (a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = -\frac{1}{4}x^2$
 (c) $x = \frac{1}{4}y^2$ (d) $x = -\frac{1}{4}y^2$
 20. (a) $y = \frac{1}{2}x^2$ (b) $y = -\frac{1}{2}x^2$
 (c) $x = \frac{1}{2}y^2$ (d) $x = -\frac{1}{2}y^2$
 21. (a) $x^2 - 16y = 0$ (b) $x^2 + 16y = 0$
 (c) $y^2 - 16x = 0$ (d) $y^2 + 16x = 0$
 22. (a) $4x^2 - 3y = 0$ (b) $4x^2 + 3y = 0$
 (c) $4y^2 - 3x = 0$ (d) $4y^2 + 3x = 0$

En los ejercicios 23 a 36, obtenga una ecuación de la parábola que tiene las propiedades dadas. Dibuje la parábola y después verifique la gráfica trazándola en la graficadora.

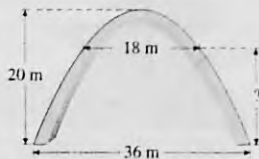
23. Foco (0, 4); directriz, $y = -4$
 24. Foco (0, -2); directriz, $y = 2$
 25. Foco (0, -5); directriz, $y - 5 = 0$
 26. Foco (0, $-\frac{1}{2}$); directriz, $2y - 1 = 0$
 27. Foco (2, 0); directriz, $x = -2$
 28. Foco (1, 0); directriz, $x = -1$
 29. Foco ($-\frac{5}{3}$, 0); directriz, $5 - 3x = 0$
 30. Foco ($-\frac{3}{2}$, 0); directriz, $2x - 3 = 0$
 31. Vértice en el origen; abre hacia arriba; pasa por el punto (6, 3).
 32. Vértice en el origen; abre hacia abajo; pasa por el punto (-4, -2).
 33. Vértice en el origen; directriz, $2x = 3$.
 34. Vértice en el origen; directriz, $2y + 5 = 0$.
 35. Vértice en el origen; el eje y es su eje; pasa por el punto (-2, 4).
 36. Vértice en el origen; el eje x es su eje; pasa por el punto (-3, 3).

En los ejercicios 37 a 40, resuelva el problema verbal y obtenga una ecuación de una parábola como modelo matemático de la situación. Complete el ejercicio, escriba una conclusión.

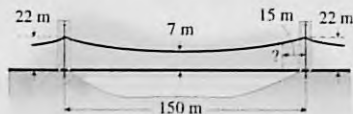
37. Un telescopio refractante tiene un espejo parabólico para el cual la distancia del vértice al foco es de 30 pie. Si el diámetro de la parte superior del espejo es de 64 pulg, ¿cuál es la profundidad del espejo en el centro?



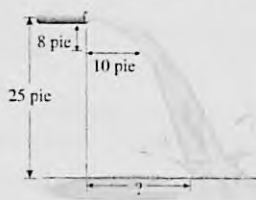
38. Un arco parabólico tiene una altura de 20 m y un ancho de 36 m en la base. Si el vértice de la parábola está en la parte superior del arco, ¿a qué altura sobre la base tiene un ancho de 18 m?



39. Uno de los cables de un puente colgante pende en forma de parábola cuando la carga está uniformemente distribuida de manera horizontal. La distancia entre las dos torres es de 150 m, los puntos de soporte del cable están 22 m arriba de la carretera, y el punto más bajo del cable está 7 m sobre dicha carretera. Determine la distancia vertical de la carretera al cable de un punto que se encuentra a 15 m de la base de una torre.



40. Suponga que el agua que fluye del extremo de un tubo, el cual se encuentra a 25 pie del suelo, describe una curva parabólica, de modo que el vértice de la parábola es el extremo del tubo. Si en un punto 8 pie debajo del tubo el flujo de agua en su trayectoria curva se localiza a 10 pie de distancia de la recta vertical que pasa por el extremo del tubo, ¿qué tan alejada de esta recta llega el agua al piso?



41. Demuestre que la longitud del lado recto de una parábola es $|4p|$.
 42. Obtenga una ecuación de la parábola cuyo vértice esté en el origen y para la cual los extremos del lado recto sean (-8, 4) y (8, 4).
 43. Los extremos del lado recto de una parábola son (5, k) y (-5, k). Si el vértice de la parábola está en el origen y la parábola abre hacia abajo, obtenga (a) el valor de k ; (b) una ecuación de la parábola.
 44. Obtenga todos los puntos de la parábola $y^2 = 8x$ tales que el foco, el punto mismo y el pie de la perpendicular dibujada desde el punto a la directriz sean los vértices de un triángulo equilátero.
 45. Trace las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^4$. Explique por qué la gráfica de la primera ecuación es una parábola y por qué la gráfica de la segunda ecuación no lo es. Utilice la definición de parábola en la explicación.

A.5 CIRCUNFERENCIAS

En la sección anterior aprendió que las parábolas se representan mediante ecuaciones de segundo grado que sólo contienen un término de segundo grado. Otra curva que tiene ecuaciones de segundo grado es la *circunferencia*, pero estas ecuaciones contienen dos términos de segundo grado, uno en la variable x y el otro en la variable y .

A.5.1 Definición de circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina **centro** de la circunferencia, y a la distancia constante se le llama **radio** de la circunferencia.

Con el fin de obtener una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $C(h, k)$ y radio r , se utiliza la fórmula de distancia. Refiérase a la figura 1. El punto $P(x, y)$ está en la circunferencia si y sólo si $|PC| = r$; esto es, si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Esto es cierto si y sólo si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

Esta ecuación es satisfecha por las coordenadas de aquellos puntos y sólo aquellos que se encuentran en la circunferencia. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

A.5.2 Teorema Ecuación de una circunferencia

Una ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Si el centro de una circunferencia está en el origen, entonces $h = 0$ y $k = 0$; por tanto, su ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tal circunferencia se muestra en la figura 2. Si el radio de una circunferencia es 1, se le llama **circunferencia unitaria**.

Si se conocen el centro y el radio de una circunferencia, entonces la circunferencia puede dibujarse con ayuda de un compás.

Trazo de una circunferencia

Para trazar la circunferencia que tiene ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1. Se resuelve esta ecuación para y y se obtiene

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una semicircunferencia.

2. Se trazan estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección, obteniéndose así la circunferencia deseada.

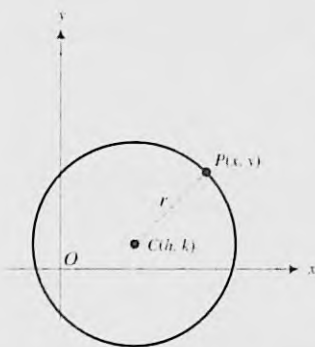
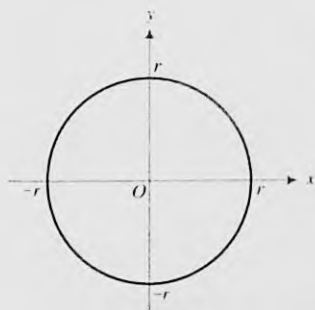
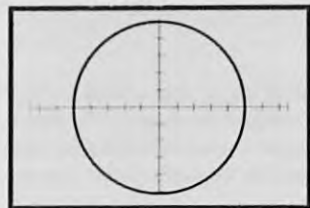


FIGURA 1



$$x^2 + y^2 = r^2$$

FIGURA 2



$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

FIGURA 3

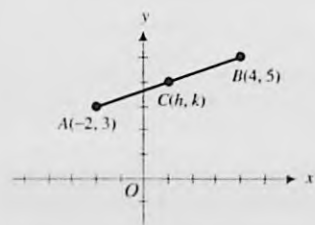
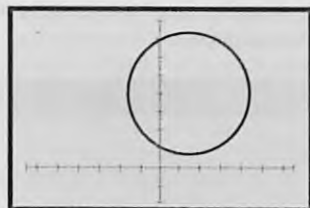


FIGURA 4



$[-7.5, 7.5]$ por $[-2, 8]$

$$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2}$$

$$y = 4 - \sqrt{9 + 2x - x^2}$$

FIGURA 5

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

La gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 16$$

es la circunferencia con centro en el origen y radio 4. Al resolver esta ecuación para y se obtiene

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{16 - x^2}$$

Al trazar estas dos semicircunferencias en el mismo rectángulo de inspección, se obtiene la circunferencia mostrada en la figura 3. ◀

EJEMPLO 1

Obtenga la ecuación de la circunferencia que tiene

un diámetro con extremos en $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$. Trace la circunferencia.

Solución El punto medio del segmento de A a B es el centro de la circunferencia. Vea la figura 4. Si $C(h, k)$ es el centro de la circunferencia, entonces

$$h = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \qquad k = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

Por tanto, el centro está en $C(1, 4)$. El radio de la circunferencia puede calcularse como $|\overline{CA}|$ o $|\overline{CB}|$. Si $r = |\overline{CA}|$, entonces

$$r = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{10}$$

Por tanto, una ecuación de la circunferencia es

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0$$

A fin de trazar la circunferencia, primero se resuelve la ecuación para y considerándola como una ecuación cuadrática en y :

$$y^2 - 8y + (x^2 - 2x + 7) = 0$$

De la fórmula cuadrática, donde $a = 1$, $b = -8$ y $c = x^2 - 2x + 7$, resulta

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(x^2 - 2x + 7)}}{2(1)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4x^2 + 8x - 28}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{36 + 8x - 4x^2}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 2\sqrt{9 + 2x - x^2}}{2} \\ &= 4 \pm \sqrt{9 + 2x - x^2} \end{aligned}$$

Si se trazan en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de

$$y = 4 + \sqrt{9 + 2x - x^2} \quad \text{y} \quad y = 4 - \sqrt{9 + 2x - x^2}$$

se obtiene la circunferencia mostrada en la figura 5. ◀

La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se denomina **forma centro-radio*** de la ecuación de una circunferencia. Si se eliminan los paréntesis y se reducen los términos semejantes se tiene

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Al considerar $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, esta ecuación se transforma en

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual se denomina **forma general** de la ecuación de una circunferencia. Puesto que toda circunferencia tiene centro y radio, su ecuación puede expresarse en la forma centro-radio, y en consecuencia, en la forma general, como se hizo en el ejemplo 1. Si se inicia con una ecuación de una circunferencia en la forma general, ésta puede expresarse en la forma centro-radio completando los cuadrados. El ejemplo siguiente muestra el procedimiento a seguir.

► **EJEMPLO 2** Obtenga el centro y el radio de la circunferencia que tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

Solución La ecuación dada puede escribirse como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 23$$

Si se completan los cuadrados de los términos entre paréntesis al sumar 9 y 4 en ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$\begin{aligned}(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) &= 23 + 9 + 4 \\(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 36\end{aligned}$$

La ecuación anterior está en la forma centro-radio; de modo que es una ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y radio 6. ◀

Algunas ecuaciones de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

tienen gráficas que no son circunferencias. Suponga que cuando se completan los cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d \quad \text{donde } d < 0$$

No hay valores reales de x y y que satisfagan esta ecuación; así, la ecuación no tiene gráfica. En este caso se establece que la gráfica es el conjunto vacío. Consulte el ejercicio 32.

Si cuando se completan los cuadrados se obtiene

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

los únicos valores reales de x y y que satisfacen esta ecuación son $x = h$ y $y = k$. De este modo, la gráfica consta del simple punto (h, k) . Refiérase al ejercicio 31.

La definición de la recta tangente a una curva general en un punto de la curva requiere del concepto de *límite*. Sin embargo, para una circunferencia la definición de geometría plana establece que una recta tangente en un punto P de una circunferencia es la recta que intersecta la circunferencia en sólo un punto.

*N. del T. Esta forma también se conoce como *canónica* o *estándar*.

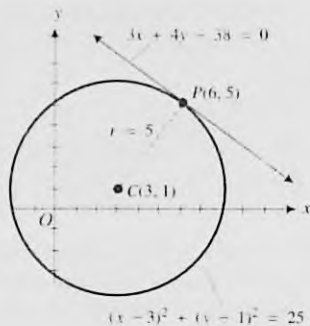
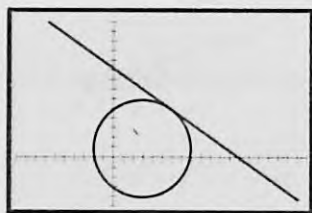


FIGURA 6



$[-10, 20]$ por $[-5, 15]$

$$y = 1 + \sqrt{25 - (x - 3)^2},$$

$$y = 1 - \sqrt{25 - (x - 3)^2}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{38}{4}$$

FIGURA 7

► **EJEMPLO 3** Obtenga una ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

en el punto $(6, 5)$. Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se escribe la ecuación de la circunferencia en la forma centro-radio al completar los cuadrados:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

De esta ecuación, el centro es $C(3, 1)$ y el radio es 5. La figura 6 muestra la circunferencia y una porción de la recta tangente en $P(6, 5)$. Si m_1 es la pendiente de la recta que pasa por C y P , entonces

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{5 - 1}{6 - 3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

De geometría plana, se sabe que la recta tangente es perpendicular a la recta que pasa por C y P . Por tanto, si m_2 es la pendiente de la recta tangente, entonces

$$\begin{aligned} m_2 m_1 &= -1 \\ m_2 \left(\frac{4}{3}\right) &= -1 \\ m_2 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

En consecuencia, de la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que pasa por $(6, 5)$ con pendiente $-\frac{3}{4}$, se tiene como la ecuación requerida

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 6)$$

$$4y - 20 = -3x + 18$$

$$3x + 4y - 38 = 0$$

La figura 7 muestra la circunferencia y la recta tangente trazadas en el mismo rectángulo de inspección. ◀

EJERCICIOS A.5

En los ejercicios 1 a 8, dibuje la gráfica de la ecuación.

1. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$

2. (a) $y = \sqrt{25 - x^2}$

(c) $x^2 + y^2 = 25$

(b) $y = -\sqrt{25 - x^2}$

3. $9x^2 + 9y^2 = 1$

4. $4x^2 + 4y^2 = 1$

5. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

6. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 36$

7. $(x + 4)^2 + y^2 = 1$

8. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

En los ejercicios 9 a 14, trace la gráfica de la ecuación.

9. $x^2 + y^2 = 36$

10. $x^2 + y^2 = 16$

11. $4x^2 + 4y^2 = 81$ 12. $9x^2 + 9y^2 = 49$
 13. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$
 14. $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 64$

En los ejercicios 15 a 20, obtenga una ecuación de la circunferencia con centro C y radio r . Exprese la ecuación en la forma centro-radio y en la forma general. Trace la circunferencia.

15. $C(4, -3)$, $r = 5$ 16. $C(0, 0)$, $r = 8$
 17. $C(-5, -12)$, $r = 3$ 18. $C(-1, 1)$, $r = 2$
 19. $C(0, 7)$, $r = 1$ 20. $C(-3, 0)$, $r = 4$

En los ejercicios 21 a 24, obtenga una ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas. Trace la circunferencia.

21. El centro está en $(1, 2)$ y pasa por el punto $(3, -1)$.
 22. El centro está en $(-3, 4)$ y pasa por el punto $(2, 0)$.
 23. Un diámetro tiene extremos en $(3, -4)$ y $(7, 2)$.
 24. Un diámetro tiene extremos en $(-1, -5)$ y $(4, -6)$.

En los ejercicios 25 a 30, obtenga el centro y el radio de la circunferencia. Dibuje la circunferencia.

25. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
 26. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
 27. $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 18 = 0$
 28. $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
 29. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
 30. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$
 31. Demuestre que la gráfica de

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$$

es un punto.

32. Demuestre que la gráfica de

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 30 = 0$$

es el conjunto vacío.

En los ejercicios 33 a 38, determine si la gráfica es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

33. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
 34. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
 35. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$
 36. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
 37. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
 38. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

En los ejercicios 39 a 42, obtenga una ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P . Trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

39. $x^2 + y^2 = 25$; $P(-4, 3)$
 40. $16x^2 + 16y^2 = 25$; $P(\frac{3}{4}, -1)$
 41. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$; $P(5, 1)$
 42. $x^2 + y^2 + 14x - 8y - 35 = 0$; $P(-1, -4)$
 43. Utilice geometría analítica para demostrar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
 44. Utilice la geometría analítica para demostrar que una recta que parte desde el centro de cualquier circunferencia que biseque a cualquier cuerda, es perpendicular a la cuerda.
 45. ¿Qué desigualdad, que relaciona a D , E y F , debe cumplirse para que la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

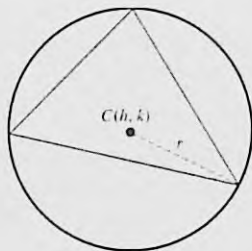
sea una circunferencia.

46. A partir del origen se dibujan cuerdas de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

Demuestre que el conjunto de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

47. La circunferencia circunscrita a un triángulo es la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo. Dados los tres vértices del triángulo, explique cómo puede determinarse el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.



48. Utilice la explicación del ejercicio 47 para obtener el centro y radio de la circunferencia circunscrita al triángulo que tiene vértices en $(-3, 2)$, $(4, -1)$ y $(5, 2)$.
 49. Describa el conjunto de puntos (x, y) de R^2 para los que
 (a) $x^2 + y^2 \leq 1$ (b) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$
 (c) $x^2 + y^2 > 4$
 50. Utilice el hecho de que $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ para escribir una ecuación de cada una de las siguientes gráficas: (a) la gráfica que consiste de todos los puntos de cualquiera de las dos circunferencias que tienen su centro en el origen y una tiene radio 2 y la otra radio 3; (b) la gráfica que consiste del origen y todos los puntos de la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen.

A.6 TRASLACIÓN DE EJES

La forma de una gráfica no es afectada por la posición de los ejes coordenados, en cambio su ecuación sí. Por ejemplo una circunferencia de radio 3 y centro en el punto $(4, -1)$ tiene la ecuación

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Sin embargo, si se eligen los ejes coordenados de modo que el origen esté en el centro, la misma circunferencia tiene la ecuación más simple

$$x^2 + y^2 = 9$$

Si pueden elegirse los ejes a voluntad, generalmente se hará en tal forma que las ecuaciones sean lo más simples posible. Sin embargo, si los ejes están dados puede ser deseable encontrar ecuaciones más sencillas de una gráfica particular relativa a un sistema diferente de ejes. Si estos ejes diferentes se eligen paralelos a los ejes dados, se dice que se ha realizado una **traslación de ejes**.

En particular, considere que los ejes x y y se trasladan a los nuevos ejes x' y y' que tienen origen (h, k) con respecto a los ejes dados. También considere que los números positivos se encuentran en el mismo lado del origen de los ejes x' y y' , como en los ejes x y y . Consulte la figura 1. Un punto P del plano que tiene coordenadas (x, y) con respecto a los ejes coordenados dados tendrá coordenadas (x', y') con respecto a los nuevos ejes. A continuación se obtendrán las relaciones entre estos conjuntos de coordenadas. Para ello, se dibujan dos rectas que pasen por P , una paralela a los ejes y y y' y la otra paralela a los ejes x y x' . Sean A y A' los puntos de intersección de la primera recta con los ejes x y x' , respectivamente, y B y B' las intersecciones de la segunda recta con los ejes y y y' , respectivamente. Estas rectas se muestran en la figura 1.

Con respecto a los ejes x y y , las coordenadas de P son (x, y) , las coordenadas de A son $(x, 0)$ y las de A' son (x, k) . Como $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$,

$$y' = y - k$$

Con respecto a los ejes x y y , las coordenadas de B son $(0, y)$ y las de B' son (h, y) . Debido a que $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$,

$$x' = x - h$$

Estos resultados se establecen formalmente en el teorema siguiente.

A.6.1 Teorema Ecuaciones para la traslación de ejes

Si (x, y) representan al punto P con respecto a un sistema de ejes dado, y (x', y') es una representación de P después de que los ejes se trasladaron a un nuevo origen de coordenadas (h, k) con respecto a los ejes dados, entonces

$$x' = x - h \quad y' = y - k$$

▶ EJEMPLO 1 Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

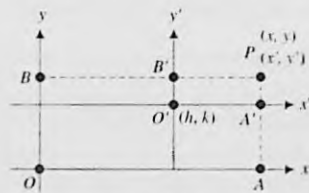


FIGURA 1

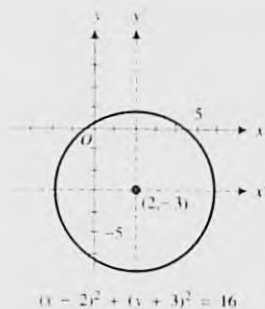


FIGURA 2

traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x' y y' no contenga términos de primer grado.

Solución Se escribe la ecuación dada como

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$

Si se completan los cuadrados de los términos entre paréntesis al agregar 4 y 9 en ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Si se considera $x' = x - 2$ y $y' = y + 3$, se obtiene

$$x'^2 + y'^2 = 16$$

La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es una circunferencia con su centro en el origen y radio 4. Debido a las sustituciones de x' por $x - 2$ y y' por $y + 3$, el resultado es una traslación de ejes al nuevo origen $(2, -3)$, la gráfica de la ecuación dada con respecto a los ejes x y y es una circunferencia con centro en $(2, -3)$ y radio 4. Este resultado concuerda con la discusión acerca de las circunferencias en la sección A.5 de este apéndice. La figura 2 muestra la circunferencia junto con los dos sistemas de ejes.

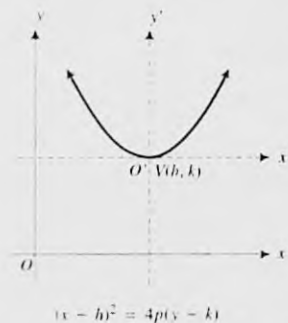


FIGURA 3

Ahora se aplicará la traslación de ejes a fin de obtener la ecuación general de una parábola que tiene su vértice en el punto (h, k) y su eje vertical u horizontal. En particular, considere que el eje es vertical. Se toman los ejes x' y y' de modo que el origen esté en $V(h, k)$. Consulte la figura 3. Con respecto a los ejes x' y y' , una ecuación de la parábola de esta figura es

$$x'^2 = 4py'$$

Con el propósito de obtener una ecuación de esta parábola con respecto a los ejes x y y , se considera $x' = x - h$ y $y' = y - k$, lo cual proporciona

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

En la figura 4, el eje de la parábola es horizontal y el vértice se encuentra en $V(h, k)$. Mediante un argumento similar, su ecuación con respecto a los ejes x y y es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

De este modo, se han obtenido las *formas estándar* de las ecuaciones de las parábolas, las cuales se establecen formalmente en el teorema siguiente.

A.6.2 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las parábolas

Si p es la distancia dirigida del vértice al foco de una parábola, una ecuación de esta parábola, con vértice en (h, k) y eje vertical, es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Una parábola con el mismo vértice y con su eje horizontal tiene la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

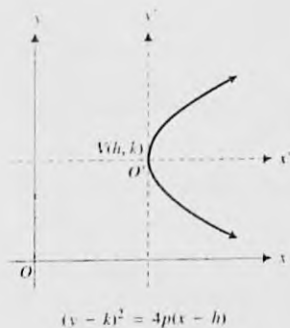


FIGURA 4

La gráfica de cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$, es una parábola cuyo eje es vertical. Esta proposición puede probarse al mostrar que (1) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Se le pedirá que realice esto en el ejercicio 49. La ecuación del ejemplo siguiente es un caso especial de (1) donde $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ y $c = 6$.

► **EJEMPLO 2** Dada la parábola que tiene ecuación

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 6$$

determine el vértice, una ecuación del eje, el foco y los extremos del lado recto. Dibuje la parábola a partir de estas propiedades, y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$4y = -x^2 + 4x + 24$$

$$x^2 - 4x = -4y + 24$$

Si se completa el cuadrado del lado izquierdo al sumar 4 a cada miembro, resulta

$$x^2 - 4x + 4 = -4y + 24 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -4y + 28$$

$$(x - 2)^2 = -4(y - 7)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

en donde $h = 2$, $k = 7$ y $p = -1$. Por tanto, su gráfica es una parábola con vértice en $(2, 7)$, y su eje es vertical. Así, el eje tiene la ecuación $x = 2$. Como $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. Además, el foco es el punto del eje a 1 unidad debajo del vértice; por lo que el foco se encuentra en $(2, 6)$. Debido a que la longitud del lado recto es $|4p| = 4$, sus extremos están 2 unidades a la derecha e izquierda del foco, por lo que se encuentran en $(4, 6)$ y $(0, 6)$.

La figura 5 muestra la parábola dibujada a partir de estas propiedades. En la graficadora se obtiene esta misma gráfica. ◀

Si x y y se intercambian en (1), se tiene la ecuación

$$x = ay^2 + by + c \quad (2)$$

La gráfica de cualquier ecuación de esta forma es una parábola cuyo eje es horizontal. Este hecho puede verificarse al probar que (2) es equivalente a una ecuación de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

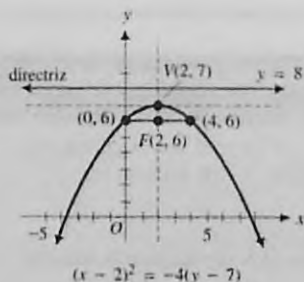


FIGURA 5

► **EJEMPLO 3** Siga las instrucciones del ejemplo 2 para la parábola cuya ecuación es

$$x = 2y^2 + 8y + 11$$

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$2y^2 + 8y = x - 11$$

$$2(y^2 + 4y) = x - 11$$

A fin de completar el cuadrado de la expresión entre paréntesis del miembro izquierdo, se suma 4 a $y^2 + 4y$. En realidad se agrega 8 al miembro izquierdo; de modo que también se suma 8 al miembro derecho, y se obtiene

$$2(y^2 + 4y + 4) = x - 11 + 8$$

$$2(y + 2)^2 = x - 3$$

$$(y + 2)^2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

con $h = 3$, $k = -2$ y $p = \frac{1}{8}$. Por tanto, la parábola tiene su vértice en $(3, -2)$, su eje es la recta horizontal $y = -2$, y como $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha. Debido a que el foco está a $\frac{1}{8}$ de unidad a la derecha del vértice, dicho foco se encuentra en el punto $(\frac{25}{8}, -2)$. La longitud del lado recto es $|4p| = \frac{1}{2}$; de modo que los extremos del lado recto están a $\frac{1}{4}$ de unidad por arriba y debajo del foco, por lo que se encuentran en $(\frac{25}{8}, -\frac{7}{4})$ y $(\frac{25}{8}, -\frac{9}{4})$.

En la figura 6 se muestra la parábola dibujada a partir de estas propiedades. Para trazar la parábola en la graficadora, primero se escribe la ecuación dada como

$$2y^2 + 8y + (11 - x) = 0$$

y después se resuelve para y en términos de x mediante la fórmula cuadrática con $a = 2$, $b = 8$ y $c = (11 - x)$, obteniéndose dos valores para y :

$$y = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2x - 6} \quad \text{y} \quad y = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2x - 6}$$

Cuando se trazan las gráficas de estas dos ecuaciones en el mismo rectángulo de inspección, se obtiene la parábola de la figura 6. ◀

En los dos ejemplos siguientes, se aplica la traslación de ejes a otras dos gráficas.

► **EJEMPLO 4** A partir de la gráfica de $y = |x|$ y una traslación de ejes conveniente, obtenga la gráfica de $y = |x - 4| - 6$.

Solución La gráfica de $y = |x|$ se muestra en la figura 20 de la sección A.2 del apéndice. Aquí se reproduce en la figura 7. La ecuación

$$y = |x - 4| - 6$$

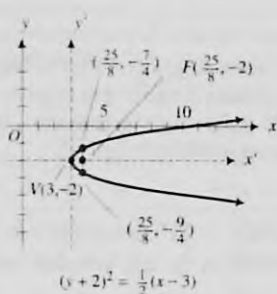


FIGURA 6

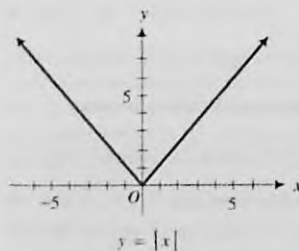


FIGURA 7

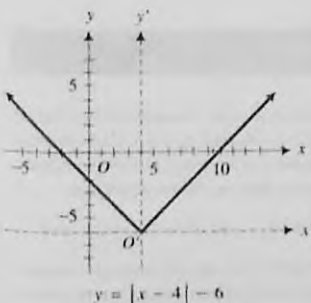


FIGURA 8

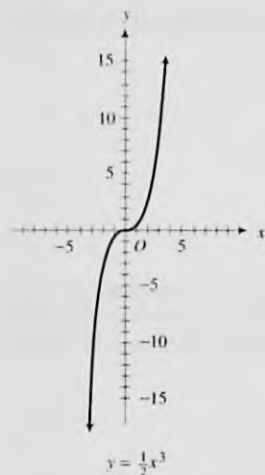


FIGURA 9

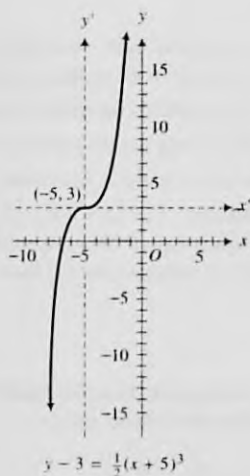


FIGURA 10

es equivalente a

$$y + 6 = |x - 4|$$

A fin de obtener la gráfica de esta ecuación se considera

$$x' = x - 4 \quad y' = y + 6$$

De esta manera, se han trasladado los ejes al nuevo origen $(4, -6)$, y la ecuación se transforma en $y' = |x'|$. La gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' es la misma que la gráfica de la figura 7 con respecto a los ejes x y y . De este modo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8. ◀

▶ **EJEMPLO 5** Utilice la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$ del ejemplo 4 de la sección A.2 del apéndice junto con una traslación de ejes adecuada para obtener la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

Solución La figura 9 muestra la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$. La ecuación

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)^3 + 3$$

equivale a

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 5)^3$$

Con el propósito de obtener la gráfica de esta ecuación, se consideran

$$x' = x + 5 \quad y' = y - 3$$

De esta manera se han trasladado los ejes al nuevo origen $(-5, 3)$, y la ecuación se transforma en $y' = \frac{1}{2}x'^3$. La figura 10 muestra la gráfica de esta ecuación con respecto a los ejes x' y y' . Es la misma que la gráfica de la figura 9 con respecto a los ejes x y y . ◀

EJERCICIOS A.6

En los ejercicios 1 a 4, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes no contenga términos de primer grado. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

- $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$
- $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
- $x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$
- $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

En los ejercicios 5 y 6, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga término de primer grado en x' y tampoco término constante. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

- $x^2 - 4x - 8y - 28 = 0$
- $x^2 + 4x + 2y = 0$

En los ejercicios 7 y 8, traslade los ejes de modo que la ecuación de la gráfica con respecto a los nuevos ejes x' y y' no contenga término de primer grado en y' y tampoco término constante. Trace los ejes originales y los nuevos. Dibuje la gráfica.

7. $y^2 + 6x + 7y + 39 = 0$

8. $2y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

En los ejercicios 9 a 24, para las parábolas dadas, determine (a) el vértice, (b) una ecuación del eje, (c) el foco, (d) una ecuación de la directriz y (e) los extremos del lado recto. (f) Dibuje la parábola a partir de estas propiedades y verifique la gráfica en la graficadora.

9. $y = x^2 - 4$

10. $y = x^2 + 4x$

11. $y = -x^2 + 4x - 5$

12. $y = x^2 + 6x - 2$

13. $x = y^2 - 6y$

14. $x = -y^2 + 1$

15. $x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

16. $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$

17. $y^2 + 4x + 12y = 0$

18. $y^2 - 12x - 14y + 25 = 0$

19. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$

20. $y = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x$

21. $v = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

22. $x = 2y^2 + 10y + 3$

23. $x = -2y^2 - 8y - 5$

24. $x = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - 2$

En los ejercicios 25 a 28, trace la parábola que tiene la ecuación indicada.

25. $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

26. $4y^2 - x + 16y + 12 = 0$

27. $5y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

28. $3y^2 + 8x - 12y + 20 = 0$

En los ejercicios 29 a 46, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la primera ecuación; (b) de la gráfica obtenida en el inciso (a) y una traslación de ejes adecuada, dibuje la gráfica de la segunda ecuación; (c) Verifique las gráficas de los incisos (a) y (b) trazándolas en el mismo rectángulo de inspección.

29. $y = |x|; y = |x - 2|$

30. $y = |x|; y = |x + 3|$

31. $y = |x|; y = |x| + 3$

32. $y = |x|; y = |x| - 2$

33. $y = |x|; y = |x + 4| - 5$

34. $y = |x|; y = |x - 1| + 6$

35. $y = x^3; y = (x - 4)^3$

36. $2y = -x^3; 2y + 2 = -x^3$

37. $y = x^3; y = (x + 1)^3 + 1$

38. $2y = -x^3; 2y = -(x - 4)^3 + 4$

39. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x - 2} + 4$

40. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{x + 3} - 2$

41. $y = x^2; y = (x - 4)^2$

42. $y = x^2; y = (x + 3)^2$

43. $y = x^2; y = x^2 + 3$

44. $y = x^2; y = x^2 - 4$

45. $y = x^2; y = (x + 1)^2 - 5$

46. $y = x^2; y = (x - 2)^2 + 1$

47. Dada la parábola de ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$, obtenga las coordenadas del vértice.

48. Determine las coordenadas del foco de la parábola del ejercicio 47.

49. Muestre que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es equivalente a una ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ al resolver la segunda ecuación para y .

50. Si una parábola tiene su foco en el origen y el eje x como su eje, demuestre que dicha parábola debe tener una ecuación de la forma $y^2 = 4kx + 4k^2, k \neq 0$.

51. (a) Muestre que la ecuación $y = x^2 + bx + c$ puede escribirse en la forma $y = (x - h)^2 + k$. (b) Explique cómo se dibuja la gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ a partir de la gráfica de $y = x^2$. En la explicación invente un ejemplo particular.

A.7 ELIPSES

A fin de referirse al aspecto geométrico de las secciones cónicas, se debe considerar que un cono tiene dos mantos, cada uno extendiéndose indefinidamente. Una porción de un cono circular recto de dos mantos se muestra en la figura 1. Se denomina **generatriz** (o **elemento**) del cono a una recta que esté contenida completamente en el cono. Todas las generatrices de un cono contienen el punto V llamado **vértice**.

Una *elipse* se obtiene como una sección cónica si el plano cortante no es paralelo a ninguna generatriz, en cuyo caso el plano cortante intersecta a cada generatriz como en la figura 2. Un caso especial de la elipse es la circunferencia, la cual se forma si el plano cortante intersecta a cada generatriz y también es perpendicular al eje del cono. Refiérase a la figura 3. A continuación se definirá una elipse como un conjunto de puntos del plano. Al final de esta sección se demostrará que esta definición es una consecuencia de considerar a la elipse como sección de un cono.

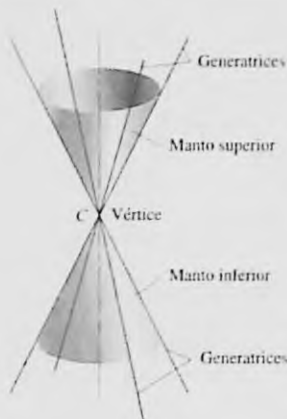


FIGURA 1



FIGURA 2



FIGURA 3

A.7.1 Definición de elipse

Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos es constante. Cada punto fijo se denomina **foco**.

Considere $2c$ como la distancia no dirigida entre los focos, donde $c > 0$. Para obtener una ecuación de una elipse, se elige el eje x como la recta que pasa por F y F' , de modo que el origen sea el punto medio del segmento entre F y F' . Vea la figura 4. Los focos F y F' tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente. Si $2a$ es la suma constante referida en la definición, entonces $a > c$ y el punto $P(x, y)$ de la figura 4 es cualquier punto de la elipse si y sólo si

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

P está en la elipse si y sólo si

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

Con objeto de simplificar esta ecuación, es necesario eliminar los radicales y realizar algunas manipulaciones algebraicas, lo cual se le pedirá que haga en el ejercicio 35. Al efectuar esto, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$. El teorema siguiente establece este resultado formalmente.

A.7.2 Teorema Ecuación de una elipse

Si $2a$ es la constante referida en la definición de la elipse, si los focos se encuentran en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ y si $b^2 = a^2 - c^2$, entonces una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A fin de dibujar la elipse, primero observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los dos ejes. Si se sustituye y por 0 en la ecuación, se obtiene $x = \pm a$, y si se reemplaza x por 0 , se obtiene $y = \pm b$. Por tanto, la gráfica interseca al eje x en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y corta al eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, se deduce que $a > b$. Consulte la figura 5 y refiérase a ella conforme lea el párrafo siguiente.

La recta que pasa por los focos se denomina **eje principal**. Para esta elipse el eje x es el eje principal. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal se llaman **vértices**. Así, para esta elipse los vértices están en $V(a, 0)$ y $V(-a, 0)$. El punto del eje principal que se encuentra a la mitad de la distancia entre los dos vértices recibe el nombre de **centro**. El origen es el centro de esta elipse. El segmento del eje principal entre los dos vértices se denomina **eje mayor**, y su longitud es $2a$ unidades. Para esta elipse el segmento del eje y entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se llama **eje menor**. Su longitud es $2b$ unidades.

Una elipse recibe el nombre de **cónica central** en contraste con una parábola, la cual no tiene centro debido a que sólo tiene un vértice.

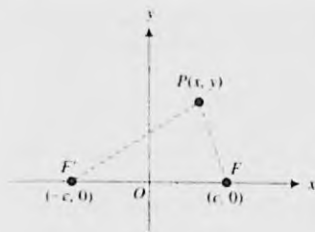


FIGURA 4

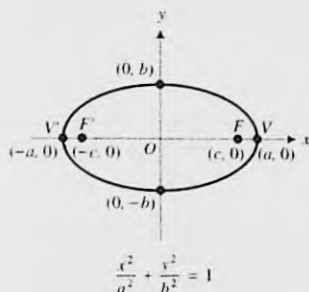


FIGURA 5

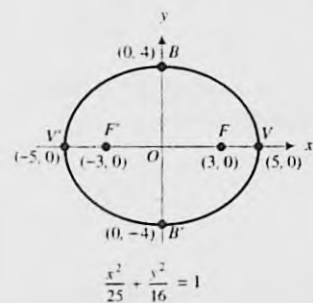


FIGURA 6

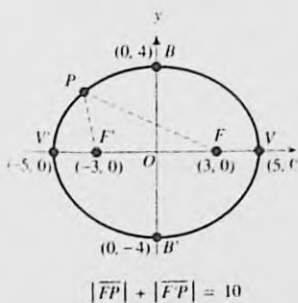


FIGURA 7

► **EJEMPLO 1** Para la elipse que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

obtenga los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y muestre los focos.

Solución Como la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el centro de la elipse está en el origen y su eje principal es el eje x . Debido a que $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, $a = 5$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices se encuentran en $V(5, 0)$ y $V'(-5, 0)$, y los extremos del eje menor están en $B(0, 4)$ y $B'(0, -4)$.

A fin de determinar los focos, se resuelve la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ para c con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$. De este modo, puesto que $c > 0$,

$$16 = 25 - c^2$$

$$c^2 = 9$$

$$c = 3$$

Por tanto, los focos se encuentran en $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.

Como una ayuda al dibujar la elipse, se determina un punto del primer cuadrante al sustituir 3 por x en la ecuación y resolverla para y . Por supuesto, cualquier otro valor de x entre 0 y 5 puede emplearse. Por la simetría se tienen puntos correspondientes en los otros tres cuadrantes. La figura 6 muestra la elipse y los focos. ◀

Observe de la definición de elipse que si P es cualquier punto de la elipse del ejemplo 1, entonces $|FP| + |F'P| = 10$. En la figura 7 se ha tomado P en el primer cuadrante.

Con objeto de trazar la elipse en la graficadora, puede hacerse lo mismo que se hizo en la sección A.5 del apéndice para las gráficas de las circunferencias. Esto es, se considera la ecuación de la elipse como cuadrática en y y se resuelve para esta variable a fin de obtener dos ecuaciones que definen a y como dos funciones de x .

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Al resolver la ecuación de la elipse del ejemplo 1 para y , primero se multiplican los dos miembros de la ecuación por 400, por lo que se tiene

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$25y^2 = 400 - 16x^2$$

$$25y^2 = 16(25 - x^2)$$

$$y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2)$$

$$y = \pm \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

En el mismo rectángulo de inspección de la graficadora se trazan las gráficas de

$$y_1 = \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad y_2 = -\frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$$

para obtener la elipse que se muestra en la figura 6.

En la sección A.9 del apéndice se explica otro método para trazar una elipse en la graficadora. Este método emplea ecuaciones paramétricas de la elipse que contienen funciones trigonométricas.

Las trayectorias de muchos cometas y las órbitas de los planetas y satélites son elipses. Algunas veces los arcos de puentes tienen forma elíptica, y también se utilizan las elipses en los engranajes de algunas máquinas. Una aplicación de la elipse en arquitectura se tiene en las llamadas *galerías del susurro*, en donde se utiliza su propiedad reflexiva. En estas galerías las bóvedas tienen secciones transversales que son arcos de elipses con focos comunes. Una persona ubicada en un foco F puede escuchar el susurro de otra colocada en el foco F' debido a que las ondas sonoras originadas por el murmurador de F' chocan contra la bóveda y son reflejadas por ésta al oyente ubicado en F . Un ejemplo famoso de estas galerías del susurro se encuentra bajo la cúpula del Capitolio en Washington D. C. Otro ejemplo más es el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City.

EJEMPLO 2 Un arco en forma de semielipse mide 48 pie de ancho en la base y tiene una altura de 20 pie. ¿Qué tan ancho es el arco a una altura de 10 pie sobre la base?

Solución La figura 8 muestra un dibujo del arco y los ejes coordenados, los cuales se han elegido de modo que el eje x yace a lo largo de la base y el origen se encuentra en el punto medio de la base. Entonces, la elipse tiene su eje principal sobre el eje x , su centro en el origen, $a = 24$ y $b = 20$. Así, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Sea $2\bar{x}$ pies la medida del ancho del arco a la altura de 10 pie sobre la base. Por tanto, el punto $(\bar{x}, 10)$ está en la elipse. De modo que

$$\begin{aligned}\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} &= 1 \\ \bar{x}^2 &= 432 \\ \bar{x} &= 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

Conclusión: A la altura de 10 pie sobre la base, el ancho del arco mide $24\sqrt{3}$ pie.

Si una elipse tiene su centro en el origen y su eje principal sobre el eje y , entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

esta ecuación se obtiene al intercambiar x y y en la ecuación

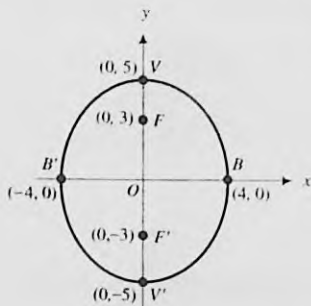
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Puesto que para una elipse $a > b$, se deduce que la elipse que tiene ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$



FIGURA 8



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

FIGURA 9

tiene su eje principal sobre el eje y . Esta elipse tiene la misma forma de la elipse del ejemplo 1. Los vértices se encuentran en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, los extremos del eje menor están en $(4, 0)$ y $(-4, 0)$, y los focos se encuentran en $(0, 3)$ y $(0, -3)$. La figura 9 muestra esta elipse. ◀

Suponga que el centro de una elipse está en el punto (h, k) en lugar del origen, y que el eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, mediante una traslación de ejes, de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la elipse es

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Como $x' = x - h$ y $y' = y - k$, se tienen las formas estándar siguientes para las ecuaciones de las elipses.

A.7.3 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las elipses

Si el centro de una elipse está en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad (1)$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad (2)$$

si el eje principal es vertical.

Al desarrollar $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ y simplificar, se pueden escribir cada una de las ecuaciones (1) y (2) en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3)$$

donde A y C tienen el mismo signo. En el ejemplo siguiente se comienza con una ecuación en esta forma y se completan los cuadrados a fin de expresarla en alguna de las formas estándar.

▶ EJEMPLO 3 Demuestre que la gráfica de la ecuación

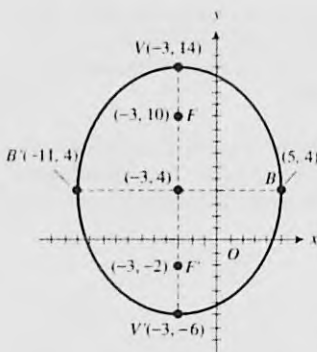
$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$$

es una elipse. Determine el centro, una ecuación del eje principal, los vértices, los extremos del eje menor y los focos. Dibuje la elipse y verifique la gráfica en la graficadora.

Solución Con objeto de escribir la ecuación dada en una de las formas estándar, se comienza por completar los cuadrados en x y y . Al hacerlo se tiene

$$25(x^2 + 6x) + 16(y^2 - 8y) = 1119$$

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1119 + 225 + 256$$



$$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 4)^2}{100} = 1$$

FIGURA 10

$$25(x + 3)^2 + 16(y - 4)^2 = 1600$$

$$\frac{25(x + 3)^2}{1600} + \frac{16(y - 4)^2}{1600} = 1$$

$$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 4)^2}{100} = 1$$

Esta ecuación es de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

donde (h, k) es $(-3, 4)$, $a^2 = 100$ y $b^2 = 64$. Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo centro se encuentra en $(-3, 4)$ y cuyo eje principal tiene la ecuación $x = -3$. Como $a = 10$ y $b = 8$, los vértices están en $V(-3, 14)$ y $V'(-3, -6)$, y los extremos del eje menor se encuentran en $B(5, 4)$ y $B'(-11, 4)$. Para determinar los focos se emplea la ecuación $b^2 = a^2 - c^2$ con $c > 0$, de donde resulta

$$64 = 100 - c^2$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$

De esta forma, los focos están en $F(-3, 10)$ y $F'(-3, -2)$. Al localizar algunos puntos más (en particular donde la elipse interseca a los ejes x y y) se obtiene la elipse que se muestra en la figura 10. ◀

En los ejemplos ilustrativos siguientes también se tienen ecuaciones de la forma (3).

▶ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Suponga que (3) es

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

la cual puede escribirse como

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -115$$

Al completar los cuadrados en x y y , se tiene

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -115 + 24 + 81$$

$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = -10$$

Puesto que el miembro derecho de esta ecuación es negativo y el miembro izquierdo es no negativo para todos los puntos (x, y) , la gráfica es el conjunto vacío. ◀

▶ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Debido a que la ecuación

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

puede expresarse como

$$6(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

su gráfica consiste del punto $(2, 3)$. ◀

Se puede demostrar en general que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (3) es una elipse, como en el ejemplo 3, un punto o el conjunto vacío. Cuando la gráfica consiste de sólo un punto o es el conjunto vacío, como en los ejemplos ilustrativos 3 y 4, se dice que la elipse es **degenerada**.

Observe que (3) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4)$$

donde $B = 0$ y $AC > 0$ (esto es, A y C tienen el mismo signo).

Las conclusiones de la discusión anterior se resumen en el teorema siguiente.

A.7.4 Teorema

Si en la ecuación general de segundo grado (4), $B = 0$ y $AC > 0$, entonces la gráfica es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

El caso degenerado de una elipse, un punto, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono pero sin contener a ninguna generatriz. Consulte la figura 11.

Si $A = C$ en (3), entonces la ecuación se transforma en

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

de la cual, al dividirse entre A , resulta

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

En la sección A.5 del apéndice se dijo que la gráfica de esta ecuación es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Esta proposición concuerda con el teorema A.7.4 debido a que una circunferencia es una forma límite de una elipse. Este hecho puede demostrarse al considerar la ecuación que relaciona a , b y c para una elipse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

De esta ecuación se observa que si $c = 0$, entonces $b^2 = a^2$, y en consecuencia, la forma estándar de la ecuación de una elipse se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 &= a^2 \end{aligned}$$

la cual es una ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio a . Además, cuando $c = 0$, los focos coinciden con el centro de la circunferencia.

EJEMPLO 4 Obtenga una ecuación de la elipse que tiene focos en $(-8, 2)$ y $(4, 2)$, para la cual la constante referida en la definición es 18. Dibuje la elipse.

Solución El centro de la elipse está a la mitad de la distancia entre los focos y es el punto $(-2, 2)$. La distancia entre los focos de la elipse es $2c$, y la distancia entre $(-8, 2)$ y $(4, 2)$ es 12. Por tanto, $c = 6$. La constante referida en



FIGURA 11

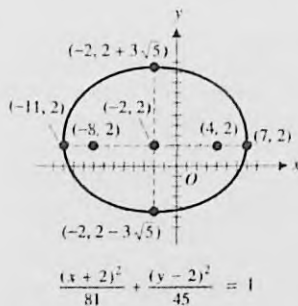


FIGURA 12

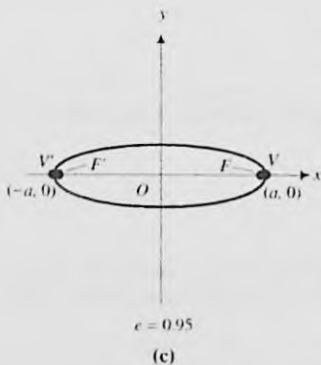
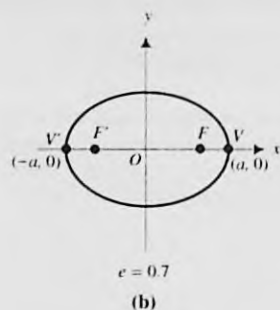
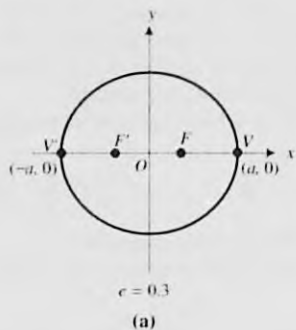


FIGURA 13

la definición es $2a$; de modo que $2a = 18$ y $a = 9$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, entonces

$$b^2 = 81 - 36$$

$$b^2 = 45$$

$$b = 3\sqrt{5}$$

El eje principal es paralelo al eje x ; en consecuencia, una ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Debido a que el punto (h, k) es el punto $(-2, 2)$, $a = 9$ y $b = 3\sqrt{5}$, la ecuación requerida es

$$\frac{(x + 2)^2}{81} + \frac{(y - 2)^2}{45} = 1$$

Esta elipse se muestra en la figura 12. ◀

Algunas elipses son casi circulares, lo cual ocurre cuando los focos están muy próximos entre sí. Otras elipses son “aplastadas” lo cual sucede cuando los vértices y los focos están muy cerca unos de otros. La forma de una elipse (su “redondez” o “aplastamiento”) está determinada por la *excentricidad*, la cual se define formalmente a continuación.

A.7.5 Definición de la excentricidad de una elipse

La **excentricidad** e de una elipse es la razón de la distancia no dirigida entre los focos a la distancia no dirigida entre los vértices; esto es,

$$e = \frac{c}{a}$$

Puesto que $c^2 = a^2 - b^2$, entonces $c < a$; por tanto, $0 < e < 1$. Cuando los focos están muy próximos entre sí, e está muy cerca de cero, y la forma de la elipse es muy parecida a una circunferencia. Vea la figura 13(a), que muestra una elipse para la cual $e = 0.3$. Si a permanece fija, entonces conforme e se incrementa, el aplastamiento de la elipse también aumenta. Las figuras 13(b) y 13(c) muestran elipses con excentricidades de 0.7 y 0.95, respectivamente, cada una con el mismo valor de a como en la figura 13(a). Las formas límite de la elipse son una circunferencia de diámetro $2a$ y un segmento de recta de longitud $2a$.

Como se prometió, ahora se demostrará que la definición de elipse como conjunto de puntos de un plano se deduce de la definición de elipse como sección cónica. Esta demostración, a veces llamada **demostración del cono de helado**, fue presentada en 1822 por el matemático belga **G. P. Dandelin** (1794–1847). Refiérase a la figura 14, la cual muestra un manto de un cono que tiene vértice en O y un plano cortante que intersecta al cono en una elipse. En el cono se encuentran inscritas las dos esferas S_1 y S_2 . La esfera S_1 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_1 , y es tangente al plano cortante en el punto F_1 . La esfera S_2 es tangente al cono a lo largo de la circunferencia C_2 , y es tangente al plano cortante en el punto F_2 . Los planos de las circunferencias C_1 y C_2 son paralelos. Se demostrará que F_1 y F_2 son los focos de la elipse al probar que si P es cualquier punto de la elipse, entonces $|\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2|$ es una constante. Para

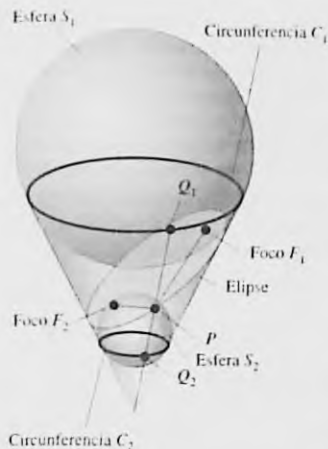


FIGURA 14

demostrar esto, se dibuja la recta que pasa por los puntos O y P de la superficie del cono. Los puntos Q_1 y Q_2 son las intersecciones de esta recta con las circunferencias C_1 y C_2 , respectivamente. Como PF_1 y PQ_1 son dos rectas tangentes a la esfera S_1 trazadas desde P , se deduce que

$$|PF_1| = |PQ_1|$$

También PF_2 y PQ_2 son dos rectas tangentes a la esfera S_2 trazadas desde P . Así,

$$|PF_2| = |PQ_2|$$

Por tanto,

$$|PF_1| + |PF_2| = |PQ_1| + |PQ_2|$$

Observe que $|PQ_1| + |PQ_2| = |Q_1Q_2|$, la cual es la distancia medida a lo largo de la superficie del cono entre los planos paralelos de las circunferencias C_1 y C_2 . Esta distancia será la misma para cualquier otra elección del punto P de la elipse. Por tanto, $|PF_1| + |PF_2|$ es una constante, y F_1 y F_2 son los focos de la elipse.

EJERCICIOS A.7

En los ejercicios 1 a 16, para la elipse que tiene la ecuación indicada, determine (a) el centro, (b) el eje principal, (c) los vértices, (d) los extremos del eje menor y (e) los focos. (f) Dibuje la elipse y muestre los focos. Verifique la gráfica en la graficadora.

- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$
- $9x^2 + 25y^2 = 900$
- $4x^2 + 9y^2 = 36$
- $9x^2 + y^2 = 9$
- $25x^2 + 4y^2 = 100$
- $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$
- $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 92 = 0$
- $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$
- $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$
- $25x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$
- $x^2 + 3y^2 - 4x - 23 = 0$
- $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$

En los ejercicios 17 y 18, determine si la gráfica de la ecuación es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

- $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
- $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

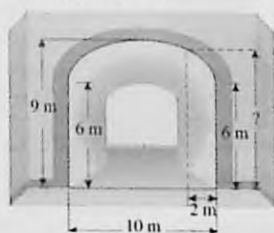
En los ejercicios 19 a 28, obtenga una ecuación de la elipse que tiene las propiedades indicadas y dibuje la elipse. Verifique la gráfica en la graficadora.

- Vértices en $(-\frac{5}{2}, 0)$ y $(\frac{5}{2}, 0)$, y un foco en $(\frac{3}{2}, 0)$.
- Focos en $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y para la cual la constante referida en la definición es 20.

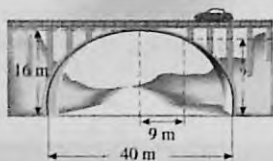
- Focos en $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y para la cual la constante referida en la definición es $6\sqrt{3}$.
- Centro en el origen, sus focos sobre el eje x , la longitud del eje mayor es 3 veces la longitud del eje menor, y pasa por el punto $(3, 3)$.
- Vértices en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, y pasa por el punto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
- Vértices en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, y pasa por el punto $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{3})$.
- Centro en $(4, -2)$, un vértice en $(9, -2)$ y un foco en $(0, -2)$.
- Un foco en $(2, -3)$, un vértice en $(2, 4)$ y el centro sobre el eje x .
- Focos en $(-1, -1)$ y $(-1, 7)$, y la longitud del semieje mayor es de 8 unidades.
- Focos en $(2, 3)$ y $(2, -7)$, y la longitud del semieje menor es dos tercios de la longitud del semieje mayor.

En los ejercicios 29 a 32, resuelva el problema verbal y no olvide escribir una conclusión.

- El techo de un vestíbulo de 10 m de ancho tiene la forma de una semielipse de 9 m de altura en el centro y 6 m de altura de las paredes laterales. Determine la altura del techo a 2 metros de cualquier pared.



30. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es de forma elíptica, con el Sol en uno de los focos y un semieje mayor de longitud de 92.96 millones de millas. Si la excentricidad de la elipse es 0.0167, determine (a) la distancia mínima de la Tierra al Sol y (b) la mayor distancia posible entre la Tierra y el Sol.
31. Suponga que la órbita de un planeta tiene la forma de una elipse con un eje mayor cuya longitud es de 500 millones de kilómetros. Si la distancia entre los focos es de 400 millones de kilómetros, obtenga una ecuación de la órbita.
32. El arco de un puente es de forma semielíptica y tiene una amplitud horizontal de 40 m y una altura de 16 m en su centro. ¿Qué altura tiene el arco a 9 m a la derecha o izquierda del centro?



33. A fin de trazar la elipse definida por la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, utilice el procedimiento siguiente y explique por qué funciona: primero determine los puntos de intersección

de la elipse con los ejes coordenados. Obtenga los focos sobre el eje x empleando un compás, con centro en uno de los puntos de intersección con el eje y y radio 3. Después clave una "chínche" en cada foco. Tome una cuerda de longitud 6 y ate cada uno de sus extremos a una chínche. Apoye un lápiz contra la cuerda y haga que se tense, deslice el lápiz manteniendo tensa la cuerda y trace la elipse.

34. Utilice un procedimiento semejante al del ejercicio 33 para trazar la elipse cuya ecuación es $16x^2 + 9y^2 = 144$. Explique por qué funciona el procedimiento.
35. Demuestre que la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

puede simplificarse y expresarse como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

36. Para la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, obtenga las coordenadas de los focos en términos de h, k, a y b .

A.8 HIPÉRBOLAS

Cuando un plano cortante de un cono es paralelo a dos generatrices, dicho plano intersecta los dos mantos del cono y la sección cónica que se obtiene es una *hipérbola*, la cual se muestra en la figura 1. La definición de hipérbola como un conjunto de puntos de un plano puede deducirse a partir de su definición como sección cónica. La demostración, es semejante a la utilizada para la elipse en la sección A.7 del apéndice, e implica una esfera en cada manto del cono.

A.8.1 Definición de hipérbola

Una *hipérbola* es un conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se denominan *focos*.

A fin de obtener una ecuación de una hipérbola se comienza, como se hizo con la elipse, considerando la distancia entre los focos como $2c$, donde $c > 0$. Después se elige el eje x como la recta que pasa por los focos F y F' . Consulte la figura 2. Los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ son los focos F y F' , respectivamente. Sea $2a$ la constante referida en la definición. Se puede demostrar que $c > a$. El punto (x, y) de la figura 2 es un punto de la hipérbola si y sólo si

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



Hipérbola

FIGURA 1

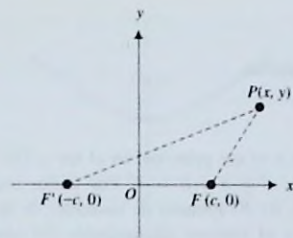


FIGURA 2

P está en la hipérbola si y sólo si

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

o, equivalentemente, sin las barras de valor absoluto,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Esta ecuación puede simplificarse al eliminar los radicales y efectuar algunas manipulaciones algebraicas. Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 43. La ecuación que resulta es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$. Así, se tiene el teorema siguiente.

A.8.2 Teorema Ecuación de una hipérbola

Si $2a$ es la constante referida en la definición, si los focos están en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y si $b^2 = c^2 - a^2$, entonces una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

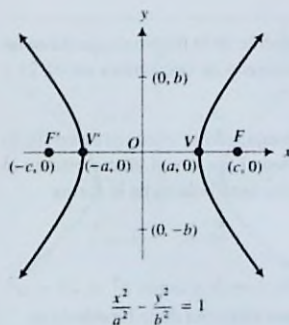


FIGURA 3

Ahora se mostrará cómo se dibuja esta hipérbola, la cual se presenta en la figura 3. Observe de la ecuación que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes x y y . Como con la elipse, la recta que pasa por los focos se denomina **eje principal**. Así, para esta hipérbola el eje x es el eje principal. Los puntos donde la hipérbola intersecta al eje principal se llaman **vértices** y el punto que se encuentra a la mitad de la distancia entre los vértices recibe el nombre de **centro**. Para esta hipérbola los vértices están en $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ y el centro se encuentra en el origen. El segmento $V'V$ del eje principal se denomina **eje transverso** y su longitud es $2a$ unidades.

Al sustituir 0 por x en la ecuación de la hipérbola se obtiene la ecuación $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la hipérbola no intersecta al eje y . Sin embargo, el segmento de recta que tiene sus extremos en los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**, y su longitud es $2b$ unidades. Si se resuelve la ecuación de la hipérbola para y en términos de x , se tiene

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

De esta ecuación se concluye que si $|x| < a$, no existe valor real para y . Por lo que no existen puntos (x, y) de la hipérbola para los cuales $-a < x < a$. También se observa que si $|x| > a$, entonces a y b le corresponden dos valores reales. Así, la hipérbola tiene dos **ramas**. Una rama contiene al vértice $V(a, 0)$ y se extiende indefinidamente hacia la derecha de V . La otra rama contiene al vértice $V'(-a, 0)$ y se extiende indefinidamente hacia la izquierda de V' .

Como en el caso de la elipse, debido a que la hipérbola también tiene un centro se le llama **cónica central**.

► **EJEMPLO 1** Determine los vértices y focos de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

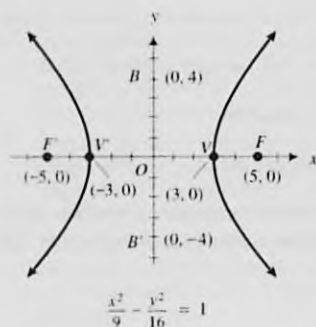


FIGURA 4

Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

Solución Como la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

el centro de la hipérbola está en el origen y el eje principal es el eje x . Debido a que $a^2 = 9$ y $b^2 = 16$, entonces $a = 3$ y $b = 4$. Por tanto, los vértices se encuentran en $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$. El número de unidades de la longitud del eje transversal es $2a = 6$, y el número de unidades del eje conjugado es $2b = 8$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, con $c > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 16 &= c^2 - 9 \\ c^2 &= 16 + 9 \\ c^2 &= 25 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

En consecuencia, los focos están en $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$. La hipérbola dibujada junto con los focos se muestra en la figura 4. ◀

De la definición de la hipérbola, si P es cualquier punto de la hipérbola del ejemplo 1, entonces $||\overline{F'P}| - |\overline{FP}|| = 6$. Consulte las figuras 5(a) y (b); en (a) P está en el segundo cuadrante y $|\overline{F'P}| - |\overline{FP}| = 6$; en (b) P está en el cuarto cuadrante y $|\overline{FP}| - |\overline{F'P}| = 6$.

▶ **EJEMPLO 2** Obtenga una ecuación de la hipérbola que tiene un foco en $(5, 0)$ y los extremos de su eje conjugado se encuentran en $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Solución Como los extremos del eje conjugado se encuentran en $(0, 2)$ y $(0, -2)$, $b = 2$, el eje principal coincide con el eje x , y el centro está en el origen. En consecuencia, una ecuación de esta hipérbola es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Debido a que un foco se encuentra en $(5, 0)$, $c = 5$, y como $b^2 = c^2 - a^2$, entonces $a^2 = 25 - 4$. Así, $a = \sqrt{21}$ y una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Si en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

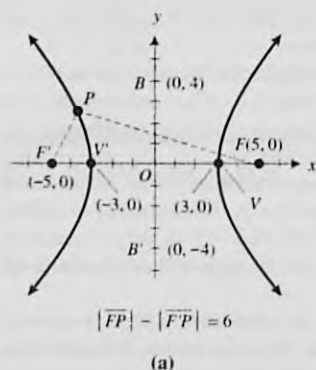
se intercambian x y y , se obtiene

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

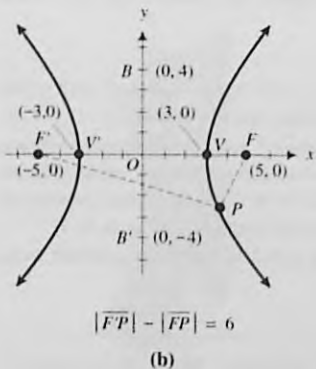
la cual es la ecuación de una hipérbola que tiene su centro en el origen y su eje principal coincide con el eje y .

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La ecuación

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$



(a)



(b)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

FIGURA 5

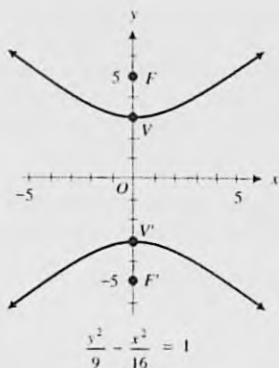


FIGURA 6

puede obtenerse a partir de la del ejemplo 1 al intercambiar x y y . La gráfica de esta ecuación es una hipérbola que tiene su centro en el origen, el eje y como su eje principal, sus vértices en $V(0, 3)$ y $V'(0, -3)$ y sus focos en $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$. La figura 6 muestra la hipérbola y sus focos. ◀

Como se hizo con las circunferencias y con las elipses en las secciones A.5 y A.6, respectivamente, se puede trazar una hipérbola en la graficadora. Primero se define y como dos funciones de x , las cuales se obtienen al resolver la ecuación de la hipérbola para y . Sin embargo, como con la elipse, es fácil trazar la gráfica de la hipérbola a partir de sus ecuaciones paramétricas, el método se explica en la sección A.9 del apéndice.

En la ecuación estándar de una elipse, se sabe que $a > b$. Sin embargo, para una hipérbola no existe una desigualdad general que relacione a a y b . Por ejemplo, en el ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 4$, $a < b$; pero en el ejemplo 2, donde $a = \sqrt{21}$ y $b = 2$, $a > b$. Además, a puede ser igual a b , en este caso la hipérbola se denomina **equilátera**. La hipérbola equilátera cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 = 1$$

se conoce como **hipérbola unitaria**.

Refiérase a la figura 7, la cual muestra la hipérbola que tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

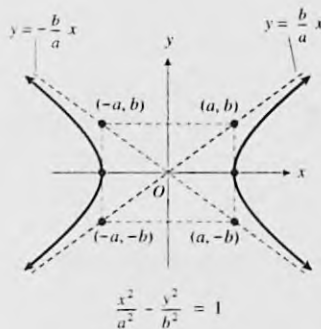


FIGURA 7

Las rectas diagonales punteadas son las **asíntotas** de la hipérbola. En las secciones 1.7 y 3.7, se estudiaron asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una gráfica, y se presentaron las definiciones formales, las cuales implican el concepto de *límite*. Sin embargo, intuitivamente puede establecerse que si la distancia no dirigida entre una gráfica y una recta se hace más pequeña (sin llegar a ser cero) conforme $|x|$ o $|y|$ se hacen cada vez más grandes, entonces la recta es una asíntota de la gráfica.

Observe en la figura 7 que las diagonales del rectángulo cuyos vértices se encuentran en (a, b) , $(a, -b)$, $(-a, b)$ y $(-a, -b)$ pertenecen a las asíntotas de la hipérbola. Este rectángulo se denomina **rectángulo auxiliar**; sus lados tienen longitudes de $2a$ y $2b$. Los vértices de la hipérbola son los puntos de intersección del eje principal y el rectángulo auxiliar. Una gráfica bastante buena de una hipérbola puede obtenerse dibujando primero el rectángulo auxiliar. Las asíntotas se tienen al prolongar las diagonales del rectángulo. Después, por cada vértice se dibuja una rama de la hipérbola empleando las asíntotas como guías. Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, la circunferencia que tiene su centro en el origen y pasa por los vértices del rectángulo auxiliar también pasa por los focos de la hipérbola.

▶ **EJEMPLO 3** Determine los vértices de la hipérbola cuya ecuación es

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

Solución La ecuación dada es equivalente a

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

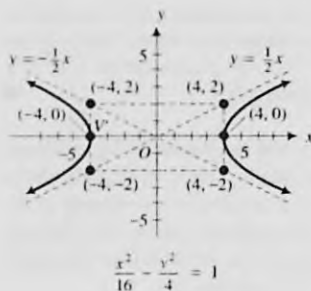


FIGURA 8

Por tanto, la hipérbola tiene su centro en el origen, y su eje principal es el eje x . Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 4$ y $b = 2$. Los vértices se encuentran en $V(4, 0)$ y $V'(-4, 0)$, y los lados del rectángulo auxiliar tienen longitudes de $2a = 8$ y $2b = 4$. La figura 8 muestra el rectángulo auxiliar y las asíntotas. Estas asíntotas se utilizan como guías para dibujar la hipérbola, la cual se muestra en la figura. ◀

Se puede utilizar un truco nemotécnico para obtener las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, para la hipérbola que tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se sustituye el miembro derecho por cero, obteniéndose

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Al factorizar, esta ecuación se transforma en

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

que es equivalente a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x \end{aligned}$$

las cuales son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola dada.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Una ecuación de la hipérbola del ejemplo 3 es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

A fin de obtener las ecuaciones de las asíntotas se sustituye el miembro derecho por cero, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 0 \\ \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = 0 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Suponga que el centro de una hipérbola está en (h, k) y que su eje principal es paralelo a uno de los ejes coordenados. Entonces, por medio de una traslación de ejes, de modo que el punto (h, k) sea el nuevo origen, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical. Si se sustituye x' por $x - h$ y y' por $y - k$, se obtienen las siguientes formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas.

A.8.3 Teorema Formas estándar de las ecuaciones de las hipérbolas

Si el centro de una hipérbola se encuentra en (h, k) y la distancia entre los vértices es $2a$, entonces una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es horizontal, y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

si el eje principal es vertical.

Al desarrollar $(x - h)^2$ y $(y - k)^2$ y simplificar, se puede escribir cada una de estas ecuaciones en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

donde A y C tienen signos opuestos. El ejemplo siguiente presenta una ecuación de esta forma.

► EJEMPLO 4 Muestre que la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$

es una hipérbola. Obtenga el centro, una ecuación del eje principal y los vértices. Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

Solución Se comienza completando los cuadrados en x y y . Así,

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = -36$$

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1$$

Esta ecuación es la de una hipérbola cuyo centro está en $(1, -2)$ y cuyo eje principal es la recta vertical que tiene ecuación $x = 1$. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, entonces $a = 3$ y $b = 2$. Los vértices se encuentran en el eje principal a 3 unidades arriba y debajo del centro; ellos están en $V(1, 1)$ y $V'(1, -5)$. El rectángulo auxiliar tiene lados de longitudes $2a = 6$ y $2b = 4$; éste se muestra en la figura 9 junto con las asíntotas y la hipérbola. ◀

En el ejemplo ilustrativo siguiente se tiene otra ecuación de la forma (1).

► EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 La ecuación

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 156 = 0$$

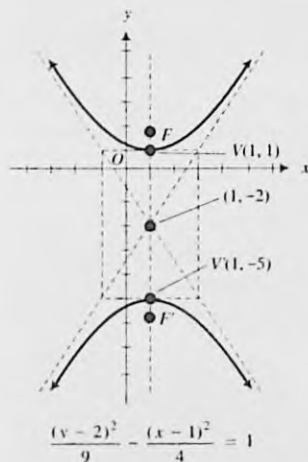


FIGURA 9

puede escribirse como

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 156$$

y al completar los cuadrados en x y y se tiene

$$4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) = 156 + 36 - 192$$

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 3(y - 4)^2 = 0$$

$$[(x + 3) - (y - 4)][(x + 3) + (y - 4)] = 0$$

$$x + 3 - \sqrt{3}(y - 4) = 0 \quad y \quad x + 3 + (y - 4) = 0$$

las cuales son ecuaciones de dos rectas que pasan por el punto $(-3, 4)$.

Se puede demostrar en general que la gráfica de cualquier ecuación de la forma (1) es una hipérbola o dos rectas que se intersectan. Los resultados del ejemplo 4 y del ejemplo ilustrativo 3 son casos particulares de este hecho.

La ecuación (1) es el caso especial de la ecuación general de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

donde $B = 0$ y $AC < 0$ (es decir, A y C tienen signo opuesto).

El teorema siguiente resume las conclusiones de la discusión anterior.

A.8.4 Teorema

Si en la ecuación general de segundo grado (2), $B = 0$ y $AC < 0$, entonces la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se intersectan.

El caso degenerado de la hipérbola, dos rectas que se intersectan, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice y dos generatrices del cono, como se muestra en la figura 10.



Dos rectas que se intersectan

FIGURA 10

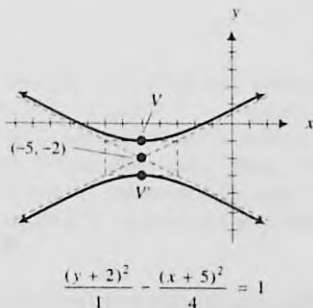


FIGURA 11

EJEMPLO 5 Los vértices de una hipérbola se encuentran en $(-5, -3)$ y $(-5, -1)$, y los extremos de su eje conjugado están en $(-7, -2)$ y $(-3, -2)$. Obtenga una ecuación de la hipérbola y las ecuaciones de las asíntotas. Dibuje la hipérbola y las asíntotas.

Solución La distancia entre los vértices es $2a$; por tanto, $2a = 2ya = 1$. La longitud del eje conjugado es $2b$; de modo que $2b = 4$ y $b = 2$. Debido a que el eje principal es vertical, una ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

El centro (h, k) está a la mitad de la distancia entre los vértices y, por tanto, se encuentra en el punto $(-5, -2)$. En consecuencia, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y + 2)^2}{1} - \frac{(x + 5)^2}{4} = 1$$

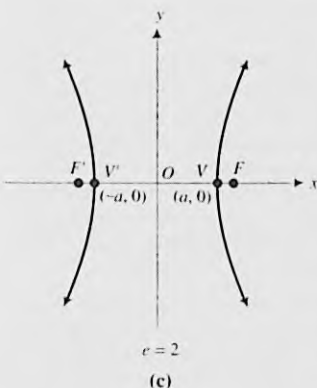
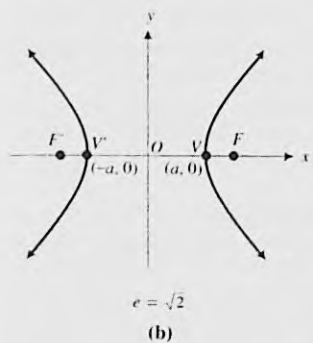
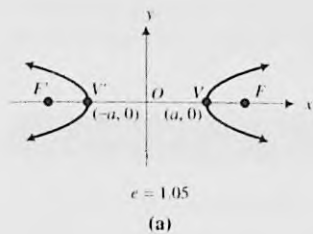


FIGURA 12

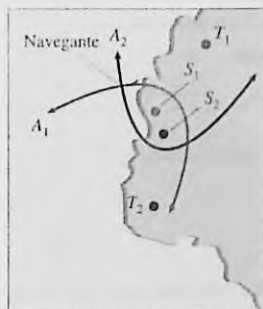


FIGURA 13

Al sustituir el miembro derecho por cero, a fin de obtener las ecuaciones de las asíntotas, se tiene

$$\left(\frac{y+2}{1} - \frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{y+2}{1} + \frac{x+5}{2}\right) = 0$$

$$y+2 = \frac{1}{2}(x+5) \quad \text{y} \quad y+2 = -\frac{1}{2}(x+5)$$

La hipérbola y las asíntotas se muestran en la figura 11. ◀

Como con la elipse, la forma de una hipérbola está determinada por su excentricidad, definida de igual manera que para la elipse, esto es, si e es la **excentricidad** de una hipérbola, entonces

$$e = \frac{c}{a}$$

Sin embargo, para una hipérbola $e > 1$. Esto es una consecuencia de que $c > a$, debido a que para una hipérbola

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (3)$$

A partir de esta ecuación, cuando $a = b$, se obtiene $c = \sqrt{2}a$. Por lo que la excentricidad de una hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$. Consulte la figura 12(b). Si e se aproxima a 1, mientras que a permanece fija, entonces c se aproxima a a y, de la ecuación (3), b se aproxima a 0, por lo que la forma de la hipérbola se hace “flaca” en torno a su eje principal. La figura 12(a) muestra una hipérbola con $e = 1.05$ y el mismo valor de a como en la figura 12(b). Si e se incrementa conforme a permanece fija, entonces c y b se incrementan, y la forma de la hipérbola se hace “gorda” en torno a su eje principal. Refiérase a la figura 12(c), la cual presenta una hipérbola con $e = 2$ y el mismo valor de a como en las figuras 12(a) y 12(b).

La propiedad de la hipérbola dada en su definición constituye la base de varios sistemas de navegación. Estos sistemas están constituidos por una red de pares de radiotransmisores en posiciones fijas y a una distancia conocida entre sí. Los radiotransmisores envían señales de radio que son recibidas por un navegante. La diferencia de tiempo de llegada de las dos señales determinan la diferencia $2a$ de las distancias con relación al navegante. Así, se sabe que la posición del navegante se encuentra en algún punto a lo largo de un arco de una hipérbola cuyos focos están en las posiciones de los radiotransmisores. Se determina un arco, y no ambos, debido al retraso de la señal de los radiotransmisores que integran el sistema. El procedimiento se repite para un par diferente de radiotransmisores y se determina otro arco de hipérbola que proporciona la posición del navegante. El punto de intersección de los dos arcos hiperbólicos es la posición real del navegante. Por ejemplo, en la figura 13 suponga que un par de radiotransmisores se localizan en los puntos T_1 y S_1 y las señales desde este par determinan el arco hiperbólico A_1 . Otro par de radiotransmisores ubicados en los puntos T_2 y S_2 determinan, a partir de sus señales, el arco hiperbólico A_2 . Entonces, la intersección de A_1 y A_2 es la posición del navegante.

La hipérbola posee una propiedad de reflexión que se emplea en el diseño de ciertos telescopios. Las hipérbolas también se utilizan en la guerra para localizar la artillería enemiga mediante el ruido de sus disparos, este método se denomina *localización acústica*. Algunos cometas se desplazan en órbitas hiperbólicas. Si una cantidad varía inversamente con respecto a

otra, tales como la presión y el volumen en la ley de Boyle para un gas ideal ($PV = k$), la gráfica correspondiente a esta variación es una hipérbola, como se verá en la sección A.10 del apéndice.

EJERCICIOS A.8

En los ejercicios 1 a 6, para la hipérbola que tiene la ecuación indicada, determine (a) el centro, (b) el eje principal, y (c) los vértices. (d) Dibuje la hipérbola y muestre los focos.

- $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
- $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$
- $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
- $9x^2 - 4y^2 = 36$
- $25y^2 - 4x^2 = 100$

En los ejercicios 7 a 20, para la hipérbola cuya ecuación se indica, obtenga (a) el centro, (b) el eje principal, y (c) los vértices. (d) Dibuje la hipérbola y muestre el rectángulo auxiliar y las asíntotas.

- $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
- $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$
- $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{49} = 1$
- $25y^2 - 36x^2 = 900$
- $4x^2 - 9y^2 = 144$
- $x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$
- $9y^2 - 4x^2 + 32x - 36y - 64 = 0$
- $9x^2 - 16y^2 + 54x - 32y - 79 = 0$
- $9y^2 - 25x^2 - 50x - 72y - 106 = 0$
- $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$
- $2x^2 - y^2 + 12x + 8y - 6 = 0$
- $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$
- $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$

En los ejercicios 21 a 26, obtenga las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola del ejercicio indicado.

- | | |
|------------------|------------------|
| 21. Ejercicio 7 | 22. Ejercicio 10 |
| 23. Ejercicio 13 | 24. Ejercicio 16 |
| 25. Ejercicio 19 | 26. Ejercicio 18 |

En los ejercicios 27 a 36, obtenga una ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones señaladas y dibújela.

- Vértices en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y eje conjugado de longitud 6.
- Focos en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, y un vértice en $(0, 4)$.
- Centro en el origen, sus focos sobre el eje y , y pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 7)$.
- Extremos del eje conjugado en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, y un foco en $(5, 0)$.
- Un foco en $(26, 0)$ y como asíntotas las rectas $12y = \pm 5x$.
- Centro en $(3, -5)$, un vértice en $(7, -5)$ y un foco en $(8, -5)$.

- Centro en $(-2, -1)$, un vértice en $(-2, 11)$ y un foco en $(-2, 14)$.
- Focos en $(3, 6)$ y $(3, 0)$, y pasa por el punto $(5, 3 + \frac{6}{3}\sqrt{5})$.
- Focos en $(-1, 4)$ y $(7, 4)$, y la longitud del eje transversal es $\frac{4}{3}$.
- Un foco en $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, las asíntotas se intersectan en $(-3, 1)$ y una asíntota pasa por el punto $(1, 7)$.
- Los vértices de una hipérbola se encuentran en $(-3, -1)$ y $(-1, -1)$ y la distancia entre los focos es $2\sqrt{5}$. Obtenga (a) una ecuación de la hipérbola, y (b) las ecuaciones de las asíntotas.
- Los focos de una hipérbola están en $(2, 7)$ y $(2, -7)$, y la distancia entre los vértices es $8\sqrt{3}$. Obtenga (a) una ecuación de la hipérbola, y (b) ecuaciones de las asíntotas.
- Obtenga una ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta elipse.
- Obtenga una ecuación de la elipse cuyos focos están en los vértices de la hipérbola $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de esta hipérbola.
- El costo de producción de un artículo es \$12 menos en un punto A que un punto B , y la distancia entre A y B es de 100 km. Suponga que la ruta de entrega del producto es una línea recta y que el costo de entrega es de 20 centavos por unidad por kilómetro, determine la curva en cualquier punto al cual pueda surtirse el artículo desde A o B al mismo costo. *Sugerencia:* considere los puntos A y B en $(-50, 0)$ y $(50, 0)$, respectivamente.
- Dos estaciones LORAN (*long-range navigation*, es decir, *navegación de largo alcance*) A y B están situadas en una línea recta este-oeste y A está a 80 mi al este de B . Un avión vuela en una línea recta ubicada a 60 mi al norte de la recta que pasa por A y B . Se envían señales simultáneamente desde A y B , y la señal de A llega al avión 350 μ s (350 microsegundos) antes que la señal de B . Si las señales viajan a razón de 0.2 mi/ μ s, localice la posición del avión por medio de la definición de una hipérbola.

- Demuestre que la ecuación

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

puede simplificarse y expresarse como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$

- Para una hipérbola la excentricidad e es mayor que 1, y para una elipse $0 < e < 1$. Explique por qué la excentricidad de una parábola es igual a 1.

A.9 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

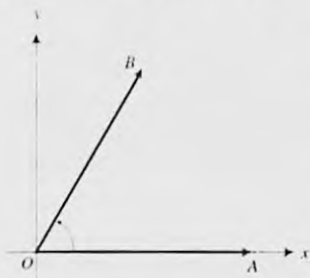


FIGURA 1

Es posible que haya estudiado trigonometría en algún curso anterior al de Cálculo; sin embargo, en esta sección se presenta una breve revisión de las funciones trigonométricas debido a su importancia en Cálculo.

En geometría, un **ángulo** se define como la unión de dos rayos, denominados **lados**, que tienen un origen o extremo común, llamado **vértice**. Cualquier ángulo es congruente a algún ángulo cuyo vértice esté en el origen y tenga un lado, denominado **lado inicial**, que coincida con la parte positiva del eje x . De dicho ángulo se dice que está en la **posición estándar**. La figura 1 muestra un ángulo AOB en la posición estándar con OA como lado inicial. El otro lado, OB , recibe el nombre de **lado terminal**. El ángulo AOB puede generarse al rotar el lado OA hasta el lado OB , y bajo tal rotación el punto A se desplaza, sobre la circunferencia cuyo centro está en O y tiene radio $|\overline{OA}|$, hasta el punto B .

Al tratar con ángulos de triángulos, a menudo la medida de un ángulo se da en grados. Sin embargo, en Cálculo se estudian las funciones trigonométricas de números reales, y éstas se definen en términos de *medidas en radianes*.

La longitud de un arco de una circunferencia se emplea para definir la medida en radianes de un ángulo.

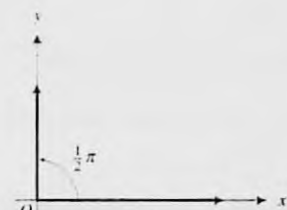
A.9.1 Definición de medida en radianes

Sea AOB un ángulo en posición estándar y $|\overline{OA}| = 1$. Si s unidades es la longitud de un arco de la circunferencia recorrido por un punto A conforme el lado inicial se rota hasta el lado terminal OB , la **medida en radianes**, t , del ángulo AOB está dada por

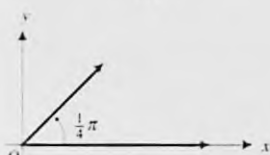
$t = s$ si la rotación se efectúa en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj

y

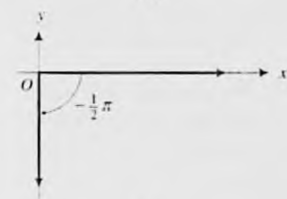
$t = -s$ si la rotación se efectúa en el mismo sentido del giro de las manecillas del reloj



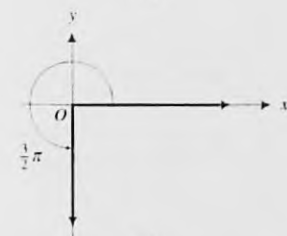
(a)



(b)



(c)



(d)

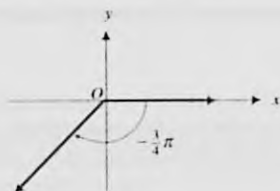
FIGURA 2

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Del hecho de que la medida de la longitud de la circunferencia unitaria es 2π , puede determinarse la medida en radianes de los ángulos de las figuras 2(a)–(f), éstas son $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi$ y $\frac{7}{2}\pi$, respectivamente. ◀

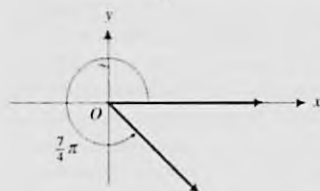
En la definición A.9.1, puede haber más de una revolución completa en la rotación de OA , como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** La figura 3(a) muestra un ángulo cuya medida en radianes es $\frac{5}{2}\pi$ y la figura 3(b) presenta un ángulo cuya medida en radianes es $-\frac{13}{4}\pi$. ◀

Un ángulo formado por una revolución completa, de modo que OA coincida con OB , tiene una medida en grados de 360 y una medida en radianes de 2π . En consecuencia, se tiene la siguiente correspondencia entre medidas en grados y medidas en radianes (donde el símbolo \sim indica que las mediciones dadas son para el mismo ángulo o para ángulos congruentes):



(e)

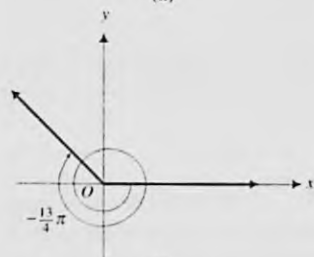


(f)

FIGURA 2



(a)



(b)

FIGURA 3

$$360^\circ \sim 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ \sim \pi \text{ rad}$$

De esto se deduce que

$$1^\circ \sim \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} \sim \frac{180^\circ}{\pi} \\ \approx 57^\circ 18'$$

Observe que el símbolo \approx antes de $57^\circ 18'$ indica que 1 rad y aproximadamente $57^\circ 18'$ son medidas para el mismo ángulo o para ángulos congruentes.

A partir de esta correspondencia la medida de un ángulo puede convertirse de un sistema de unidades a otro.

► **EJEMPLO 1** Obtenga: (a) la medida en radianes equivalente a 162° ; (b) la medida en grados equivalente a $\frac{5}{12}\pi$.

Solución

$$(a) 162^\circ \sim 162 \cdot \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$$

$$(b) \frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$162^\circ \sim \frac{9}{10}\pi \text{ rad}$$

$$\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim 75^\circ$$

La tabla 1 proporciona las medidas correspondientes en grados y radianes de ciertos ángulos.

A continuación se definirán las funciones *seno* y *coseno* de cualquier número real.

A.9.2 Definición de seno y coseno de un número real

Suponga que t es un número real. Coloque un ángulo que mida t radianes en posición estándar y sea P la intersección del lado terminal del ángulo y la circunferencia unitaria cuyo centro es el origen. Si P es el punto (x, y) , entonces la función *seno* está definida por

$$\text{sen } t = y$$

y la función *coseno* está definida por

$$\text{cos } t = x$$

De esta definición, $\text{sen } t$ y $\text{cos } t$ están definidas para cualquier valor de t . Por tanto, el dominio del seno y del coseno es el conjunto de todos los números reales. La figura 4 muestra el punto $(\text{cos } t, \text{sen } t)$ cuando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, mientras que la figura 5 presenta el punto $(\text{cos } t, \text{sen } t)$ cuando $-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$.

Tabla 1

Medida en grados	Medida en radianes
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

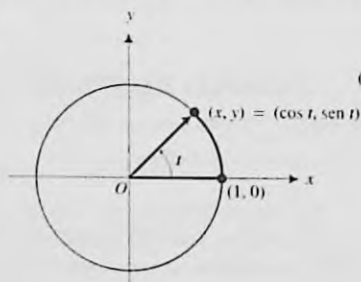


FIGURA 4

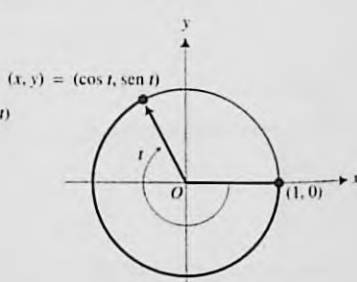


FIGURA 5

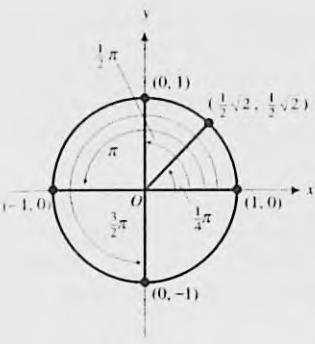


FIGURA 6

El valor más grande que estas funciones pueden tener es 1 y el valor más pequeño es -1. Se demostrará después que las funciones seno y coseno toman todos los valores entre -1 y 1, y de este hecho se deduce que el contradominio de las dos funciones es [-1, 1].

Para ciertos valores de t , el seno y el coseno se pueden obtener fácilmente a partir de una figura. En la figura 6 se observa que $\text{sen } 0 = 0$ y $\text{cos } 0 = 1$, $\text{sen } \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\text{cos } \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\text{sen } \frac{1}{2}\pi = 1$ y $\text{cos } \frac{1}{2}\pi = 0$, $\text{sen } \pi = 0$ y $\text{cos } \pi = -1$, $\text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1$ y $\text{cos } \frac{3}{2}\pi = 0$. La tabla 2 contiene estos valores y algunos otros que se utilizan con frecuencia.

Una ecuación de la circunferencia unitaria que tiene centro en el origen es $x^2 + y^2 = 1$. Como $x = \text{cos } t$ y $y = \text{sen } t$, se infiere que

$$\text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1 \tag{1}$$

Observe que $\text{sen}^2 t$ y $\text{cos}^2 t$ significan $(\text{sen } t)^2$ y $(\text{cos } t)^2$, respectivamente. La ecuación (1) es una identidad debido a que es válida para cualquier número real t . Esta identidad se denomina **identidad pitagórica fundamental** y muestra la relación entre los valores de seno y coseno, además, puede emplearse para calcular uno de ellos cuando el otro se conoce.

Las figuras 7 y 8 presentan ángulos que tienen una medida negativa de $-t$ radianes y ángulos correspondientes que tienen una medida positiva de t radianes. En estas figuras observe que

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t \quad \text{y} \quad \text{cos}(-t) = \text{cos } t$$

Estas ecuaciones se cumplen para cualquier número real t porque los puntos donde los lados terminales de los ángulos (que tienen medidas de t y $-t$ radianes) intersectan a la circunferencia unitaria tienen abscisas iguales y ordenadas que difieren sólo en signo. En consecuencia, estas ecuaciones son identidades. A partir de estas identidades se infiere que el seno es una función impar y el coseno es una función par.

De la definición A.9.2 se pueden obtener las siguientes identidades:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t \quad \text{y} \quad \text{cos}(t + 2\pi) = \text{cos } t \tag{2}$$

La propiedad del seno y del coseno establecida en las ecuaciones (2) recibe el nombre de **periodicidad**.

A.9.3 Definición de función periódica

Se dice que una función f es **periódica** si existe un número real positivo p tal que siempre que x esté en el dominio de f , entonces $x + p$ también estará en el dominio de f y

$$f(x + p) = f(x)$$

Al valor más pequeño del número real positivo p se le llama **periodo** de f .

Compare esta definición con las ecuaciones (2). Ya que puede demostrarse que 2π es el menor valor del número real positivo p que tiene la propiedad de que $\text{sen}(t + p) = \text{sen } t$ y $\text{cos}(t + p) = \text{cos } t$, el seno y el coseno son funciones periódicas con periodo 2π ; es decir, siempre que el valor de la va-

Tabla 2

t	$\text{sen } t$	$\text{cos } t$
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

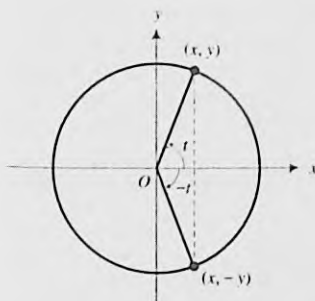


FIGURA 7

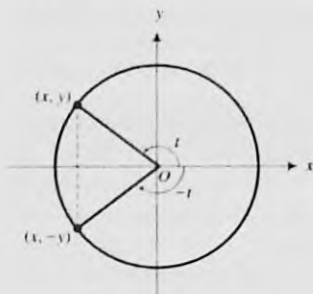


FIGURA 8

variable independiente t se incremente en 2π , el valor de cada una de las funciones se repetirá. Debido a la periodicidad del seno y del coseno, estas funciones tienen aplicaciones importantes en relación con fenómenos que se repiten periódicamente, tales como el movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, vibraciones, oscilación de péndulos, ciclos en los negocios y ritmos biológicos.

► **EJEMPLO 2** Utilice la periodicidad de las funciones seno y coseno así como los valores de $\sin t$ y $\cos t$, donde $0 \leq t < 2\pi$, para determinar el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones: (a) $\sin \frac{17}{4}\pi$; (b) $\cos \frac{7}{3}\pi$; (c) $\sin \frac{15}{2}\pi$; (d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$.

Solución

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sin \frac{17}{4}\pi &= \sin\left(\frac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi\right) & \text{(b)} \quad \cos \frac{7}{3}\pi &= \cos\left(\frac{1}{3}\pi + 2\pi\right) \\
 &= \sin \frac{1}{4}\pi & &= \cos \frac{1}{3}\pi \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} & &= \frac{1}{2} \\
 \text{(c)} \quad \sin \frac{15}{2}\pi &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi\right) & \text{(d)} \quad \cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) &= \cos\left[\frac{5}{6}\pi + (-1)2\pi\right] \\
 &= \sin \frac{3}{2}\pi & &= \cos \frac{5}{6}\pi \\
 &= -1 & &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

A continuación se definirán las otras cuatro funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.

A.9.4 Definición de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante de un número real

Las funciones **tangente** y **secante** están definidas por

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

para todos los números reales tales que $\cos t \neq 0$.

Las funciones **cotangente** y **cosecante** están definidas por

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

para todos los números reales tales que $\sin t \neq 0$.

Las funciones tangente y secante no están definidas cuando $\cos t = 0$. Por tanto, el dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto los números de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. De manera semejante, como $\cot t$ y $\csc t$ no están definidas cuando $\sin t = 0$, el dominio de las funciones cotangente y cosecante es el conjunto de los números reales excepto los números de la forma $k\pi$, donde k es cualquier número entero.

Es posible demostrar que la tangente y la cotangente son funciones periódicas con periodo π ; es decir,

$$\tan(t + \pi) = \tan t \quad \text{y} \quad \cot(t + \pi) = \cot t$$

Además, las funciones secante y cosecante son periódicas con periodo 2π ; por tanto,

$$\sec(t + 2\pi) = \sec t \quad \text{y} \quad \csc(t + 2\pi) = \csc t$$

Al emplear la identidad pitagórica fundamental (1) y la definición A.9.4, se obtienen otras dos identidades importantes. Una de estas identidades se obtiene al dividir los miembros de (1) entre $\cos^2 t$, y la otra se deduce al dividir ambos miembros de (1) entre $\sin^2 t$. Así,

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{y} \quad \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

Estas dos identidades también se llaman identidades pitagóricas.

Otras tres identidades importantes que se obtienen a partir de la definición A.9.4 son las siguientes:

$$\sin t \csc t = 1 \quad \cos t \sec t = 1 \quad \tan t \cot t = 1$$

Estas tres identidades, las tres identidades pitagóricas y las dos identidades de la definición A.9.4 que definen a la tangente y la cotangente constituyen las **ocho identidades trigonométricas fundamentales**. Éstas, así como otras fórmulas de trigonometría, se resumen al final del libro.

Se han definido las funciones trigonométricas con dominios de números reales. Sin embargo, existen aplicaciones importantes de las funciones trigonométricas para las cuales los dominios son conjuntos de ángulos. Para esto, se define una función trigonométrica de un ángulo θ como la función correspondiente del número real t , donde t es la medida en radianes de θ .

A.9.5 Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo

Si θ es un ángulo cuya medida es t radianes, entonces

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin t & \cos \theta &= \cos t & \tan \theta &= \tan t \\ \cot \theta &= \cot t & \sec \theta &= \sec t & \csc \theta &= \csc t \end{aligned}$$

Cuando se considera una función trigonométrica de un ángulo, con frecuencia se utiliza la medida del ángulo en lugar de θ . Por ejemplo, si la medida en grados del ángulo θ es 60 (o, equivalentemente, la medida en radianes de θ es $\frac{1}{2}\pi$), entonces en lugar de $\sin \theta$ puede escribirse $\sin 60^\circ$ o $\sin \frac{1}{2}\pi$. Observe que cuando la medida de un ángulo se presenta en grados, el símbolo correspondiente de grados se escribe. Sin embargo, cuando dicho símbolo no se expresa, se considera la medida del ángulo en radianes. Por ejemplo, $\cos 2^\circ$ significa el coseno del ángulo cuya medida en grados es 2 , mientras que $\cos 2$ denota el coseno del ángulo cuya medida en radianes es 2 . Esto es consistente con el hecho de que el coseno de un ángulo que tiene una medida de 2 radianes es igual al coseno del número real 2 .

Ahora se explicará cómo las ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas pueden emplearse para trazar elipses e hipérbolas en la graficadora.

A fin de trazar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t$$

A fin de demostrar que estas ecuaciones representan la elipse, se elimina el parámetro t de las ecuaciones. Primero se escriben las ecuaciones como

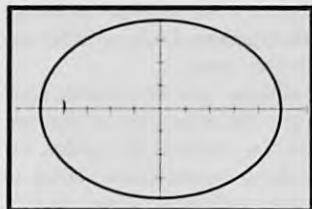
$$\frac{x}{a} = \cos t \quad y \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

Al elevar al cuadrado los dos miembros de cada una de las ecuaciones y sumando, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la cual es la ecuación (3).



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$$x = 5 \cos t \quad y = 4 \sin t$$

FIGURA 9

EJEMPLO 3 Trace la elipse del ejemplo 1 de la sección A.7 del apéndice empleando ecuaciones paramétricas.

Solución Una ecuación cartesiana de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de la elipse son

$$x = 5 \cos t \quad y = 4 \sin t$$

En la graficadora, en modo paramétrico, se permite que t tome todos los números del intervalo cerrado $[0, 2\pi]$. La figura 9 muestra la gráfica trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ con $t_{\text{step}} = 0.05$. Compare esta gráfica con la de la figura 6 de la sección A.7 del apéndice, la cual se obtuvo a mano.

Con objeto de trazar la elipse cuyo eje principal es horizontal, se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t + h \quad y = b \sin t + k$$

En el ejercicio 34, se le pedirá que demuestre que éstas son ecuaciones paramétricas de la elipse representada por la ecuación cartesiana

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje principal es vertical, se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = b \cos t + h \quad y = a \sin t + k$$

A fin de trazar la hipérbola cuya ecuación cartesiana es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

se utilizan las ecuaciones paramétricas

$$x = a \sec t + h \quad y = b \tan t + k$$

donde t está en el intervalo $[0, 2\pi]$. Este método se basa en la identidad $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$. Refiérase al ejercicio 43. Si la hipérbola tiene la ecuación cartesiana

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

entonces se emplean las ecuaciones paramétricas

$$x = b \tan t + h \quad y = a \sec t + k$$

Consulte el ejercicio 44.

EJEMPLO 4 Trace la hipérbola del ejemplo 4 de la sección A.8 del apéndice empleando ecuaciones paramétricas.

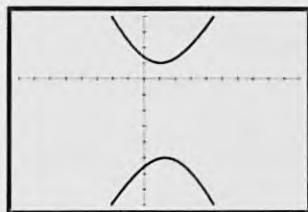
Solución Una ecuación cartesiana en forma estándar de esta hipérbola es

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1$$

Las ecuaciones paramétricas de esta hipérbola son

$$x = 2 \tan t + 1 \quad y = 3 \sec t - 2$$

La figura 10 muestra la gráfica de estas ecuaciones paramétricas trazada en el rectángulo de inspección de $[-8, 10]$ por $[-8, 4]$ para t en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ con $t_{\text{step}} = 0.05$. Compare esta gráfica con la de la figura 9 de la sección A.8 del apéndice, la cual se obtuvo a mano.



$[-8, 10]$ por $[-8, 4]$

$$x = 2 \tan t + 1 \quad y = 3 \sec t - 2$$

FIGURA 10

EJERCICIOS A.9

En los ejercicios 1 y 2, obtenga la medida equivalente en radianes.

1. (a) 60° (b) 135° (c) 210° (d) -150°
 (e) 20° (f) 450° (g) -75° (h) 100°
2. (a) 45° (b) 120° (c) 240° (d) -225°
 (e) 15° (f) 540° (g) -48° (h) 2°

En los ejercicios 3 y 4, obtenga la medida equivalente en grados.

3. (a) $\frac{1}{4}\pi$ rad (b) $\frac{2}{3}\pi$ rad (c) $\frac{11}{6}\pi$ rad
 (d) $-\frac{1}{2}\pi$ rad (e) $\frac{1}{2}\pi$ rad (f) 3π rad
 (g) -2 rad (h) $\frac{1}{12}\pi$ rad
4. (a) $\frac{1}{6}\pi$ rad (b) $\frac{2}{3}\pi$ rad (c) $\frac{3}{4}\pi$ rad
 (d) -5π rad (e) $\frac{1}{2}\pi$ rad (f) -5 rad
 (g) $\frac{11}{12}\pi$ rad (h) 0.2 rad

En los ejercicios 5 a 12, determine el valor de función exacto.

5. (a) $\sin \frac{1}{6}\pi$ (b) $\cos \frac{1}{4}\pi$
 (c) $\sin(-\frac{3}{2}\pi)$ (d) $\cos \frac{1}{3}\pi$
6. (a) $\cos \frac{1}{3}\pi$ (b) $\sin \frac{1}{4}\pi$
 (c) $\cos(-\frac{1}{2}\pi)$ (d) $\sin(-2\pi)$
7. (a) $\cos \frac{5}{6}\pi$ (b) $\sin \frac{3}{4}\pi$
 (c) $\cos 3\pi$ (d) $\sin(-5\pi)$
8. (a) $\sin \frac{4}{3}\pi$ (b) $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$
 (c) $\sin 7\pi$ (d) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
9. (a) $\tan \frac{1}{3}\pi$ (b) $\cot \frac{1}{4}\pi$
 (c) $\sec(-\pi)$ (d) $\csc \frac{1}{2}\pi$
10. (a) $\cot \frac{1}{6}\pi$ (b) $\tan \frac{1}{4}\pi$
 (c) $\csc(-\frac{3}{2}\pi)$ (d) $\sec \pi$

11. (a) $\sec(-\frac{1}{6}\pi)$ (b) $\csc \frac{1}{4}\pi$
 (c) $\tan \frac{1}{6}\pi$ (d) $\cot(-\frac{1}{4}\pi)$
12. (a) $\csc(-\frac{1}{3}\pi)$ (b) $\sec \frac{5}{6}\pi$
 (c) $\tan \frac{1}{4}\pi$ (d) $\cot \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 13 a 20, utilice la periodicidad de las funciones seno, coseno, secante y cosecante así como los valores de $\sin t$, $\cos t$, $\sec t$ y $\csc t$, cuando $0 \leq t < 2\pi$, para calcular el valor de función exacto.

13. (a) $\sin \frac{9}{4}\pi$ (b) $\cos \frac{9}{4}\pi$
 (c) $\sec \frac{9}{4}\pi$ (d) $\csc \frac{9}{4}\pi$
14. (a) $\sin \frac{17}{6}\pi$ (b) $\cos \frac{17}{6}\pi$
 (c) $\sec \frac{17}{6}\pi$ (d) $\csc \frac{17}{6}\pi$
15. (a) $\sin(-\frac{7}{3}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{7}{3}\pi)$
 (c) $\sec(-\frac{7}{3}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{7}{3}\pi)$
16. (a) $\sin(-\frac{5}{3}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{5}{3}\pi)$
 (c) $\sec(-\frac{5}{3}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{5}{3}\pi)$
17. (a) $\sin 8\pi$ (b) $\cos 10\pi$
 (c) $\sec 7\pi$ (d) $\csc 9\pi$
18. (a) $\sin \frac{7}{12}\pi$ (b) $\cos \frac{5}{2}\pi$
 (c) $\sec \frac{11}{2}\pi$ (d) $\csc \frac{9}{2}\pi$
19. (a) $\sin(-\frac{7}{2}\pi)$ (b) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
 (c) $\sec(-\frac{11}{2}\pi)$ (d) $\csc(-\frac{9}{2}\pi)$
20. (a) $\sin(-8\pi)$ (b) $\cos(-10\pi)$
 (c) $\sec(-7\pi)$ (d) $\csc(-9\pi)$

En los ejercicios 21 a 24, utilice la periodicidad de las funciones tangente y cotangente así como los valores de $\tan t$ y $\cot t$, cuando $0 \leq t < \pi$, para calcular el valor de función exacto.

21. (a) $\tan \frac{7}{4}\pi$ (b) $\cot \frac{7}{4}\pi$
 (c) $\tan(-\frac{5}{6}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{5}{6}\pi)$
22. (a) $\tan \frac{4}{3}\pi$ (b) $\cot \frac{4}{3}\pi$
 (c) $\tan(-\frac{1}{6}\pi)$ (d) $\cot(-\frac{1}{6}\pi)$
23. (a) $\tan \frac{11}{3}\pi$ (b) $\cot \frac{11}{3}\pi$
 (c) $\tan(-5\pi)$ (d) $\cot(-\frac{9}{2}\pi)$
24. (a) $\tan(-\frac{11}{4}\pi)$ (b) $\cot(-\frac{11}{4}\pi)$
 (c) $\tan 11\pi$ (d) $\cot \frac{15}{2}\pi$

En los ejercicios 25 a 30, obtenga todos los valores de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

25. (a) $\sin t = 1$ (b) $\cos t = -1$
 (c) $\tan t = 1$ (d) $\sec t = 1$
26. (a) $\sin t = -1$ (b) $\cos t = 1$
 (c) $\tan t = -1$ (d) $\csc t = 1$

27. (a) $\sin t = 0$ (b) $\cos t = 0$
 (c) $\tan t = 0$ (d) $\cot t = 0$
28. (a) $\sin t = \frac{1}{2}$ (b) $\cos t = -\frac{1}{2}$
 (c) $\cot t = 1$ (d) $\sec t = 2$
29. (a) $\sin t = -\frac{1}{2}$ (b) $\cos t = \frac{1}{2}$
 (c) $\cot t = -1$ (d) $\csc t = 2$
30. (a) $\sin t = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 (c) $\tan t = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (d) $\cot t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

31. ¿Para qué valores de t en $[0, 2\pi)$, (a) $\tan t$ no está definido, (b) $\csc t$ no está definido?
32. ¿Para qué valores de t en $[0, \pi)$, (a) $\cot t$ no está definido, (b) $\sec t$ no está definido?
33. ¿Para qué valores de t en $[\pi, 2\pi)$, (a) $\cot t$ no está definido, (b) $\sec t$ no está definido?
34. Demuestre que la elipse cuya ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos t + h \quad y = b \sin t + k$$

En los ejercicios 35 a 42, escriba las ecuaciones paramétricas que definen la elipse del ejercicio indicado de la sección A.7, y utilícelas para trazar la elipse.

35. Ejercicio 1 36. Ejercicio 2
 37. Ejercicio 3 38. Ejercicio 4
 39. Ejercicio 9 40. Ejercicio 10
 41. Ejercicio 11 42. Ejercicio 14
43. Demuestre que la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = a \sec t + h \quad y = b \tan t + k$$

44. Demuestre que la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = b \tan t + h \quad y = a \sec t + k$$

En los ejercicios 45 a 52, escriba las ecuaciones paramétricas que definen la hipérbola del ejercicio indicado de la sección A.8, y utilícelas para trazar la hipérbola.

45. Ejercicio 1 46. Ejercicio 2
 47. Ejercicio 3 48. Ejercicio 4
 49. Ejercicio 13 50. Ejercicio 14
 51. Ejercicio 17 52. Ejercicio 18

A.10 ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES Y ROTACIÓN DE EJES



Parábola

FIGURA 1

En las secciones A.7 y A.8 se dijo que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

es una elipse o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC > 0$, y es una hipérbola o un caso degenerado si $B = 0$ y $AC < 0$.

Ahora se considerará (1) donde $B = 0$ y $AC = 0$. En tal caso $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambas, ya que si los tres números A , B y C son cero, entonces (1) no sería una ecuación de segundo grado. Suponga que en (1) $B = 0$, $A = 0$ y $C \neq 0$. Por tanto, (1) se transforma en

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

Si $D \neq 0$, en la sección A.6 se indicó que la gráfica de esta ecuación es una parábola, la tercera sección cónica. La parábola se obtiene como una sección cónica si el plano cortante es paralelo a una y sólo una generatriz del cono. Consulte la figura 1.

En la sección A.4 del apéndice, se definió la parábola como un conjunto de puntos de un plano. La demostración de que esta definición se deduce de su definición como sección cónica es semejante a la efectuada para la elipse. Sin embargo, para la parábola se necesita sólo una esfera tangente al plano cortante en el foco y tangente al cono a lo largo de una circunferencia. La intersección del plano de la circunferencia y del plano cortante es la directriz de la parábola.

Los casos degenerados de la parábola, que ocurren si $D = 0$ en (2), son dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

▶ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** La gráfica de la ecuación

$$4y^2 - 9 = 0$$

consiste de dos rectas paralelas: $2y - 3 = 0$ y $2y + 3 = 0$. La gráfica de

$$9y^2 + 6y + 1 = 0$$

es una recta debido a que la ecuación es equivalente a $(3y + 1)^2 = 0$. Como

$$2y^2 + y + 1 = 0$$

no tiene soluciones reales, entonces su gráfica es el conjunto vacío. ◀

Una discusión similar a la anterior se puede realizar si, en (1), $B = 0$, $C = 0$ y $A \neq 0$. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente.

A.10.1 Teorema

En la ecuación general de segundo grado (1), si $B = 0$ y si $A = 0$ y $C \neq 0$, o $C = 0$ y $A \neq 0$, entonces su gráfica es una de las siguientes: una parábola, dos rectas paralelas, una recta o el conjunto vacío.

El caso degenerado de una parábola, una recta, se obtiene como una sección cónica si el plano cortante contiene al vértice del cono y a sólo una generatriz, como se ilustra en la figura 2. La parábola degenerada que consiste de dos rectas paralelas no puede obtenerse como una sección plana



Línea recta

FIGURA 2

de un cono a menos que se considere un cilindro circular recto como un cono degenerado con su vértice en el infinito. Entonces, un plano paralelo a las generatrices del cilindro que contenga dos de éstas produce las dos rectas paralelas.

A partir de los teoremas de las secciones A.7 y A.8 del apéndice y del teorema anterior de esta sección, se puede concluir que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables, cuando $B = 0$, es una cónica o una cónica degenerada. El tipo de cónica puede determinarse a partir del producto de A y C . De este modo se tiene el teorema siguiente.

A.10.2 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada.

Si es una cónica, entonces la gráfica es

- (i) una *parábola* si $A = 0$ o $C = 0$, esto es, $AC = 0$;
- (ii) una *elipse* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$;
- (iii) una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

► **EJEMPLO 1** Identifique la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

- (a) $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 4 = 0$
- (b) $x^2 + 4y^2 = 0$
- (c) $2x^2 + 12x - 5y + 28 = 0$
- (d) $x^2 - 4 = 0$
- (e) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 4y - 2 = 0$
- (f) $x^2 - 4y^2 = 0$

Solución En cada inciso, se tiene una ecuación de segundo grado en dos variables. Por tanto, la gráfica es una cónica o una cónica degenerada. Del teorema A.10.2, el producto AC determina la cónica.

- (a) Como $A = 9$ y $C = 1$, $AC = 9 > 0$. En consecuencia, la gráfica es elipse o una elipse degenerada. Al completar los cuadrados, la ecuación puede escribirse como

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

de modo que la gráfica es una elipse.

- (b) Como el único par ordenado que satisface la ecuación es $(0, 0)$, la gráfica es el origen, una elipse degenerada.
- (c) Puesto que $C = 0$, $AC = 0$. Por lo que la gráfica es una parábola o una parábola degenerada. Si se completan los cuadrados, se puede escribir la ecuación como

$$(x + 3)^2 = \frac{5}{2}(y - 2)$$

la cual es la ecuación de una parábola.

- (d) Debido a que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ equivale a la ecuación $(x - 2)(x + 2) = 0$, su gráfica consiste de las dos rectas paralelas $x = 2$ y $x = -2$, una parábola degenerada.
- (e) Como $A = 3$ y $C = -2$, $AC = -6 < 0$. Por tanto, la gráfica es una hipérbola, o una hipérbola degenerada. La ecuación es equivalente a

$$\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{6} = 1$$

cuya gráfica es una hipérbola.

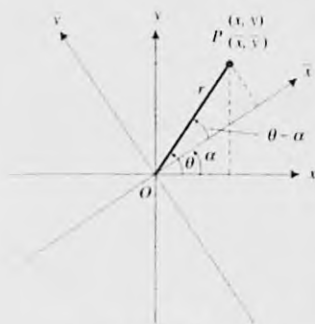


FIGURA 3

- (f) La ecuación es equivalente a $(x - 2y)(x + 2y) = 0$; de modo que su gráfica consiste de las dos rectas que se intersectan $x = 2y$ y $x = -2y$, una hipérbola degenerada. ◀

Ahora se estudiará la gráfica de la ecuación de segundo grado en dos variables cuando $B \neq 0$, esto es, una ecuación que tiene un término en xy . Esta ecuación se transforma en otra que no contiene término en xy al rotar los ejes coordenados. Mientras que una traslación de ejes proporciona un nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes son paralelos a los ejes x y y originales, una rotación de ejes origina un sistema coordenado que, en general, sus ejes *no* son paralelos a los del sistema original.

Suponga que se tienen dos sistemas de coordenadas cartesianos rectangulares con el mismo origen. Sea uno de los sistemas el sistema xy y el otro el sistema $\bar{x}\bar{y}$. Además suponga que el eje \bar{x} forma un ángulo α con el eje x . Vea la figura 3. Por supuesto, el eje \bar{y} también formará un ángulo α con el eje y . En tal caso se dice que el sistema de coordenadas xy se ha *rotado* un ángulo α para formar el sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{y}$. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) con respecto al sistema coordenado original tendrá coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) con respecto al nuevo sistema. A continuación se obtendrán las relaciones entre estos dos conjuntos de coordenadas.

En la figura 3, r denota la distancia no dirigida $|OP|$ y θ el ángulo medido a partir del eje x hasta el segmento de recta OP . De la figura se observa que

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (3)$$

También de la figura se tiene

$$\bar{x} = r \cos(\theta - \alpha) \quad \bar{y} = r \sin(\theta - \alpha)$$

Al emplear las identidades de coseno y seno de la diferencia estas dos ecuaciones se transforman en

$$\bar{x} = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha$$

y

$$\bar{y} = r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha$$

Si se sustituye de la ecuación (3) en las ecuaciones anteriores, resulta

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (4)$$

Al resolver las ecuaciones (4) simultáneamente para x y y en términos de \bar{x} y \bar{y} (refiérase al ejercicio 38), se obtiene

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \quad y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \quad (5)$$

Este resultado se establece de manera formal en el teorema siguiente.

A.10.3 Teorema Fórmulas para la rotación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado y (\bar{x}, \bar{y}) es una representación de P después de que los ejes se han rotado un ángulo α , entonces

- (i) $x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha$ $y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$
 (ii) $\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ $\bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$

► **EJEMPLO 2** Dada la ecuación

$$xy = 1$$

(a) Obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x y y y después de que estos se han rotado un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad. (b) Dibuje la gráfica y muestre los dos sistemas de ejes.

Solución

(a) Con $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en (i) del teorema A.10.3, se obtiene

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$$

Al sustituir estas expresiones para x y y en la ecuación $xy = 1$, resulta

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

(b) Esta es una ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son las bisectrices de los cuadrantes del sistema $\bar{x}\bar{y}$. Así, la gráfica de la ecuación $xy = 1$ es una hipérbola equilátera que se encuentra en los cuadrantes primero y tercero, y sus asíntotas son los ejes x y y . Refiérase a la figura 4, la cual muestra la gráfica requerida. ◀

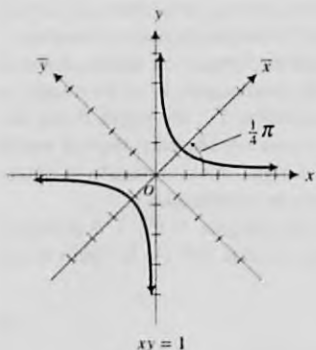


FIGURA 4

Del teorema A.10.1 se sabe que cuando $B = 0$ y A y C no son ambas cero, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, es una cónica o una cónica degenerada. Ahora se demostrará que si $B \neq 0$, entonces cualquier ecuación de la forma (1) puede transformarse, mediante una adecuada rotación de ejes, en una ecuación de la forma

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \quad (6)$$

donde \bar{A} y \bar{C} no son simultáneamente cero.

Si se rota el sistema xy un ángulo α , entonces para obtener una ecuación de la gráfica de (1) con respecto al sistema $\bar{x}\bar{y}$, se sustituye x por $\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha$ y por $\bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$. De esto resulta

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \quad (7)$$

donde

$$\bar{A} = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$\bar{B} = -2A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\bar{C} = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

Se desea obtener un ángulo α de modo que la rotación transforme (1) en una ecuación de la forma (6). Si se considera la expresión para \bar{B} igual a cero se tiene

$$B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (C - A)(2 \sin \alpha \cos \alpha) = 0$$

o, equivalentemente, mediante identidades trigonométricas,

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0$$

Como $B \neq 0$, entonces se obtiene

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Así, se ha demostrado que una rotación de ejes mediante un ángulo α que satisfaga esta ecuación, transformará (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, donde $B \neq 0$, en una ecuación de la forma (6). Ahora debe demostrarse que \bar{A} y \bar{C} en (6) no son ambas cero. Para demostrar esto, observe que (7) se obtiene a partir de (1) al rotar los ejes un ángulo α . También (1) puede obtenerse de (7) al rotar los ejes un ángulo $-\alpha$; es decir, en sentido contrario. Si \bar{A} y \bar{C} en (7) fuesen simultáneamente cero, entonces las sustituciones

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad \text{y} \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

en esa ecuación daría como resultado la ecuación

$$\bar{D}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \bar{E}(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + \bar{F} = 0$$

Esta ecuación es de primer grado; y en consecuencia, diferente de (1) debido a que se supuso que al menos $B \neq 0$. Por tanto, se ha demostrado el teorema siguiente.

A.10.4 Teorema

Si $B \neq 0$, entonces la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede transformarse en la ecuación

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

donde \bar{A} y \bar{C} no son ambas cero, al rotar los ejes un ángulo α para el cual

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

De los teoremas A.10.2 y A.10.4, se infiere que la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables es una cónica o una cónica degenerada. Para determinar qué tipo de cónica es la gráfica de una ecuación particular, se examina la expresión $B^2 - 4AC$. Se utiliza el hecho de que A , B y C de (1), y \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} de (7) satisfacen la ecuación

$$B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} \quad (8)$$

lo cual puede demostrarse al sustituir las expresiones para \bar{A} , \bar{B} y \bar{C} , dadas después de la ecuación (7), en el miembro derecho de (8). Se le pedirá que haga esto en el ejercicio 37.

La expresión $B^2 - 4AC$ se denomina **discriminante** y la ecuación (8) establece que el discriminante de la ecuación cuadrática general en dos variables es **invariante** bajo la rotación de ejes.

Si el ángulo de rotación se elige de modo que $\bar{B} = 0$, entonces (8) se transforma en

$$B^2 - 4AC = -4\bar{A}\bar{C} \quad (9)$$

Excepto para casos degenerados, al aplicar el teorema A.10.2, la gráfica de la ecuación

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

es una parábola si $\bar{A}\bar{C} = 0$, una elipse si $\bar{A}\bar{C} > 0$ y una hipérbola si $\bar{A}\bar{C} < 0$; o, equivalentemente, una parábola si $-4\bar{A}\bar{C} = 0$, una elipse si $-4\bar{A}\bar{C} < 0$ y una hipérbola si $-4\bar{A}\bar{C} > 0$. A partir de estos hechos y de la ecuación (9) se deduce que, excepto para casos degenerados, la gráfica de (1), la ecuación general de segundo grado en dos variables, es una parábola, una elipse o una hipérbola, dependiendo de si el discriminante $B^2 - 4AC$ es cero, negativo o positivo, respectivamente. De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

A.10.5 Teorema

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. Si la gráfica es una cónica, entonces es

- (i) una *parábola* si $B^2 - 4AC = 0$;
- (ii) una *elipse* si $B^2 - 4AC < 0$;
- (iii) una *hipérbola* si $B^2 - 4AC > 0$.

► **EJEMPLO 3** (a) Identifique la gráfica de la ecuación

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

(b) Simplifique la ecuación mediante una rotación de ejes. (c) Dibuje la gráfica de la ecuación y muestre los dos sistemas de ejes.

Solución

(a) De la ecuación, $A = 17$, $B = -12$ y $C = 8$. Por tanto,

$$B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4(17)(8)$$

Como $B^2 - 4AC < 0$, del teorema A.10.5, la gráfica es una elipse o una elipse degenerada.

(b) Con el fin de eliminar el término en xy , se debe elegir un ángulo α tal que

$$\begin{aligned} \cot 2\alpha &= \frac{A - C}{B} \\ &= \frac{17 - 8}{-12} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Existe un ángulo de medida 2α en el intervalo $(0, \pi)$ para el cual $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Por tanto, α está en el intervalo $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Para aplicar las fórmulas de rotación de ejes, no es necesario determinar α una vez que se obtienen $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$. Estas funciones pueden determinarse a partir del valor de $\cot 2\alpha$ por medio de las identidades trigonométricas

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Como $\cot 2\alpha = -\frac{3}{4}$ y $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, se infiere que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$. De modo que,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \quad \quad = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Al sustituir $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ y $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ en la ecuación dada, se obtiene

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

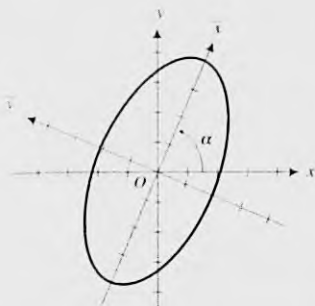
Si se simplifica esta ecuación se obtiene

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Por tanto, la gráfica es una elipse cuyo eje mayor mide 8 unidades y su eje menor mide 4 unidades.

(c) A fin de dibujar la elipse se aplica la información obtenida en el inciso (b). La figura 5 muestra esta elipse y los dos sistemas de ejes.



$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

FIGURA 5

► **EJEMPLO 4** Trace la gráfica de la ecuación del ejemplo 3.

Solución La ecuación define a y como dos funciones de x . Para determinar estas funciones se considera la ecuación como cuadrática en y y se escribe como

$$8y^2 - 12xy + (17x^2 - 80) = 0$$

De la fórmula cuadrática con $a = 8$, $b = -12x$ y $c = 17x^2 - 80$, se tiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12x) \pm \sqrt{(-12x)^2 - 4(8)(17x^2 - 80)}}{2(8)} \\ &= \frac{12x \pm 4\sqrt{160 - 25x^2}}{16} \\ &= \frac{3x \pm \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \end{aligned}$$

En el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$ se trazan las gráficas de

$$y_1 = \frac{3x + \sqrt{160 - 25x^2}}{4} \quad y \quad y_2 = \frac{3x - \sqrt{160 - 25x^2}}{4}$$

con el propósito de obtener la elipse de la figura 5.

EJERCICIOS A.10

En los ejercicios 1 a 4, identifique la gráfica de la ecuación así como el tipo de cónica o cónica degenerada.

1. (a) $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 31 = 0$
 (b) $4x^2 + y^2 + 8x - 14y - 47 = 0$

- (c) $y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$
 (d) $x^2 - 16y^2 = 0$

2. (a) $2x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$
 (b) $2x^2 - 3y^2 + 16x + 12y + 38 = 0$

(c) $16y^2 + 24y + 9 = 0$

(d) $4x^2 + 16x - 3y + 19 = 0$

3. (a) $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 23 = 0$

(b) $4x^2 - 5y^2 + 16x + 10y + 111 = 0$

(c) $2x^2 - 16x - 5y + 22 = 0$

(d) $9x^2 + 30x + 29 = 0$

4. (a) $5y^2 + 4x + 10y - 3 = 0$

(b) $3x^2 + 7y^2 - 6x + 28y + 37 = 0$

(c) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 6y + 15 = 0$

(d) $4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 55 = 0$

En los ejercicios 5 a 8, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes x y y después de rotarlos un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

5. $xy = 8$

6. $xy = -4$

7. $x^2 - y^2 = 8$

8. $y^2 - x^2 = 16$

En los ejercicios 9 a 16, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) elimine el término en xy mediante una rotación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

9. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$

10. $4xy + 3x^2 = 4$

11. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$

12. $x^2 + xy + y^2 = 3$

13. $xy + 16 = 0$

14. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$

15. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$

16. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

En los ejercicios 17 a 26, (a) identifique la gráfica de la ecuación, (b) simplifique la ecuación mediante una rotación y una traslación de ejes, y (c) dibuje la gráfica y muestre los dos conjuntos de ejes.

17. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$

18. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$

19. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$

20. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

21. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$

22. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$

23. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$

24. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$

25. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12 = 0$

26. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$

En los ejercicios 27 a 34, trace la gráfica de la ecuación del ejercicio indicado.

27. Ejercicio 9

28. Ejercicio 10

29. Ejercicio 11

30. Ejercicio 12

31. Ejercicio 17

32. Ejercicio 18

33. Ejercicio 21

34. Ejercicio 22

35. Demuestre que la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ es parte de una parábola al rotar los ejes un ángulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad. *Sugerencia:* elimine los radicales de la ecuación antes de aplicar las fórmulas para rotación de ejes.

36. Dada la ecuación $(a^2 + b^2)xy = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$, obtenga una ecuación de la gráfica con respecto a los ejes \bar{x} y \bar{y} después de rotar los ejes un ángulo de $\tan^{-1}(b/a)$ rad.

37. Demuestre que para la ecuación general de segundo grado en dos variables, el discriminante $B^2 - 4AC$ es invariante bajo una rotación de ejes.

38. Obtenga las ecuaciones (5) al resolver las ecuaciones (4) para x y y en términos de \bar{x} y \bar{y} . *Sugerencia:* para despejar x , multiplique los dos miembros de la primera ecuación por $\cos \alpha$ y los dos miembros de la segunda ecuación por $\sin \alpha$, después reste los miembros correspondientes de las ecuaciones resultantes. Utilice un procedimiento similar para despejar y .

39. La rotación de ejes no hace ningún cambio en la gráfica ni en la posición de la gráfica en el plano. Explique cuándo la rotación de ejes es una ventaja para dibujar la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables y cuándo es una desventaja.

A.11 FRACCIONES PARCIALES

Usted ya sabe cómo combinar dos o más expresiones racionales a fin de obtener una expresión racional mediante adición o sustracción. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$$

En ocasiones es necesario invertir el proceso, es decir, representar una expresión racional simple como una suma de dos o más cocientes simples, denominados **fracciones racionales**. En Cálculo se necesita hacer esto a

fin de efectuar la operación de integración de algunas funciones racionales. Con frecuencia se emplean sistemas de ecuaciones para descomponer una expresión racional en fracciones parciales.

Considere una función racional H definida por

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Se asumirá que se tiene una **fracción propia**, esto es, una fracción para la cual el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Si se tiene una función racional para la cual el grado del numerador no es menor que el grado del denominador entonces se tiene una **fracción impropia**, y en este caso se divide el numerador entre el denominador hasta que se obtenga una fracción propia. Por ejemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

En general, se tratará un método para descomponer una fracción propia de la forma $P(x)/Q(x)$ en dos o más fracciones parciales. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen al factorizar $Q(x)$ en un producto de factores lineales y cuadráticos. En ocasiones puede ser difícil encontrar estos factores. Sin embargo, un teorema de álgebra establece que un polinomio con coeficientes reales puede expresarse como un producto de polinomios lineales o cuadráticos con coeficientes reales.

Después de que $Q(x)$ se ha factorizado como un producto de factores lineales o cuadráticos, el método para determinar las fracciones parciales depende de la naturaleza de estos factores. Se considerarán varios casos en forma separada.

Caso 1: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales, y ninguno se repite. Esto es,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

donde ningún par de factores es idéntico. En este caso se escribe

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

donde A_1, A_2, \dots, A_n son constantes a determinar. Observe que esta ecuación es una identidad debido a que es verdadera para todos los valores de x tales que ningún denominador es cero. El ejemplo ilustrativo siguiente muestra un método para determinar los valores de A_i .

 **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** A fin de descomponer la fracción

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6}$$

en fracciones parciales, se factoriza el denominador y se obtiene

$$\frac{7x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} \quad (1)$$

La ecuación (1) es una identidad para todos los valores de x diferentes de -2 y 3 . Al multiplicar los dos miembros de la ecuación por el MCD_n (mínimo común denominador), resulta

$$7x - 1 = A(x - 3) + B(x + 2)$$

Esta ecuación también es una identidad y es verdadera para todos los valores de x incluyendo a -2 y 3 . Ahora se determinarán las constantes A y B . Al sustituir 3 por x en la ecuación anterior, se tiene

$$20 = 5B \Leftrightarrow B = 4$$

Si se sustituye -2 por x en la misma ecuación, se obtiene

$$-15 = -5A \Leftrightarrow A = 3$$

Con estos valores de A y B , se tiene de (1)

$$\frac{7x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{3}{x + 2} + \frac{4}{x - 3}$$

Observe que esta ecuación es equivalente a la ecuación con que se inició esta sección. ◀

▶ EJEMPLO 1 Descomponga la fracción

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

en fracciones parciales.

Solución Al factorizar el denominador se obtiene

$$\frac{x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)}$$

De modo que

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1} \quad (2)$$

La ecuación (2) es una identidad para todos los valores de x diferentes de 0 , 2 y -1 . Si se multiplican los miembros de la ecuación por el MCD_n, resulta

$$x - 1 = A(x - 2)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 2)$$

Esta ecuación es una identidad que es verdadera para todos los valores de x , incluso para 0 , 2 y -1 . A fin de determinar las constantes, primero se sustituye 0 por x y se obtiene

$$-1 = -2A \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Al reemplazar 2 por x , resulta

$$1 = 6B \Leftrightarrow B = \frac{1}{6}$$

Si se sustituye -1 por x , se tiene

$$-2 = 3C \Leftrightarrow C = -\frac{2}{3}$$

Con estos valores para A , B y C , de (2) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{6(x-2)} - \frac{2}{3(x+1)} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Caso 2: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y algunos se repiten.

Suponga que se tiene $(ax + b)^p$ como un factor de $Q(x)$. Entonces se dice que $ax + b$ es un factor p -múltiple (o de multiplicidad p) de $Q(x)$, y a este factor le corresponderá la suma de p fracciones parciales

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(ax+b)^{p-1}} + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

donde A_1, A_2, \dots, A_p son constantes a determinar. El ejemplo 2 ilustra este caso y el método para determinar cada A_i .

▶ EJEMPLO 2 Descomponga la fracción

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se escribe la fracción dada como la suma de fracciones parciales siguiente:

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} \quad (3)$$

Al multiplicar ambos miembros de (3) por el MCDn, resulta

$$x^4 + x^2 + 16x - 12 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3 \quad (4)$$

Se sustituye 0 por x en esta ecuación y se obtiene

$$-12 = 4C \Leftrightarrow C = -3$$

Si se reemplaza 2 por x en (4) resulta

$$40 = 8E \Leftrightarrow E = 5$$

Con estos valores de C y E en (4) y desarrollando las potencias de los binomios, se tiene

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 16x - 12 &= Ax^2(x^2 - 4x + 4) + Bx(x^2 - 4x + 4) - 3(x^2 - 4x + 4) + Dx^3(x-2) + 5x^3 \\ x^4 + x^2 + 16x - 12 &= (A+D)x^4 + (-4A+B-2D+5)x^3 + (4A-4B-3)x^2 + (4B+12)x - 12 \end{aligned}$$

Como esta ecuación es una identidad, los coeficientes del miembro izquierdo deben ser iguales a los coeficientes correspondientes del miembro derecho. Por tanto, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + D = 1 \\ -4A + B - 2D + 5 = 0 \\ 4A - 4B - 3 = 1 \\ 4B + 12 = 16 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación, $B = 1$. Al sustituir B por 1 en la tercera ecuación y resolver para A , se obtiene $A = 2$. Con $A = 2$ en la primera ecuación resulta $D = -1$. La segunda ecuación se emplea para verificar los valores encontrados:

$$\begin{aligned} -4A + B - 2D + 5 &= -4(2) + 1 - 2(-1) + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores de las constantes son

$$A = 2 \quad B = 1 \quad C = -3 \quad D = -1 \quad E = 5$$

Con estos valores, de (3) se tiene

$$\frac{x^4 + x^2 + 16x - 12}{x^3(x-2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} \quad \blacktriangleleft$$

Caso 3: Todos los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos y ninguno se repite.

Al factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ del denominador le corresponde la fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

▶ EJEMPLO 3 Descomponga la fracción

$$\frac{x^2 - x - 5}{x^3 + x^2 - 2}$$

en fracciones parciales.

Solución Se pretende factorizar el denominador empleando división sintética para dividir $x^3 + x^2 - 2$ entre expresiones lineales de la forma $x - r$, donde r es un factor entero de -2 . La división entre $x - 1$ es como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$. La fracción dada se escribe como una suma de fracciones parciales en la forma siguiente:

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \quad (5)$$

Al multiplicar ambos miembros por el MCDn, se tiene

$$x^2 - x - 5 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \quad (6)$$

Se calcula C al sustituir 1 por x en (6), obteniéndose

$$-5 = 5C \Leftrightarrow C = -1$$

Si se reemplaza C por -1 en (6) y se multiplica en el miembro derecho, resulta

$$x^2 - x - 5 = (A - 1)x^2 + (B - A - 2)x + (-B - 2)$$

Al igualar los coeficientes de potencias de x iguales se tiene el sistema

$$\begin{cases} A - 1 = 1 \\ B - A - 2 = -1 \\ -B - 2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto,

$$A = 2 \quad \text{y} \quad B = 3$$

Si se sustituyen estos valores de A y B en (5), se obtiene

$$\frac{x^2 - x - 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$

Caso 4: Los factores de $Q(x)$ son lineales y cuadráticos, y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

Si $ax^2 + bx + c$ es un factor cuadrático de multiplicidad p de $Q(x)$, entonces al factor $(ax^2 + bx + c)^p$ le corresponde la suma de las siguientes p fracciones parciales:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

► **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Si el denominador contiene el factor $(x^2 - 5x + 2)^3$, se tiene en correspondencia a este factor la suma de las fracciones parciales

$$\frac{Ax + B}{x^2 - 5x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - 5x + 2)^3}$$

► **EJEMPLO 4** Descomponga la fracción

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2}$$

en fracciones parciales.

Solución La fracción dada se escribe como la suma de fracciones parciales siguiente:

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 3x - 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{E}{x} \quad (7)$$

Al multiplicar los dos miembros por el MCDn resulta

$$3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 = x(Ax + B)(x^2 - 3x - 2) + x(Cx + D) + E(x^2 - 3x - 2)^2 \quad (8)$$

Si se sustituye 0 por x en esta ecuación, se obtiene

$$4 = 4E \Leftrightarrow E = 1$$

Con $E = 1$ en (8) y multiplicando los polinomios se tiene

$$\begin{aligned} 3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4 &= Ax^4 - 3Ax^3 - 2Ax^2 + Bx^3 - 3Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Dx + x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 4x^2 + 12x \\ &= (A + 1)x^4 + (-3A + B - 6)x^3 + (-2A - 3B + C + 5)x^2 + (-2B + D + 12)x + 4 \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias de x correspondientes se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A + 1 = 3 \\ -3A + B - 6 = -12 \\ -2A - 3B + C + 5 = 4 \\ -2B + D + 12 = 11 \end{cases}$$

Si se resuelve este sistema resulta

$$A = 2 \quad B = 0 \quad C = 3 \quad D = -1 \quad E = 1$$

Al reemplazar estos valores en (7) se tiene

$$\frac{3x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 11x + 4}{x(x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{2x}{x^2 - 3x - 2} + \frac{3x - 1}{(x^2 - 3x - 2)^2} + \frac{1}{x} \quad \blacktriangleleft$$

Observe que en cada uno de los ejemplos, el número de constantes a determinar es igual al grado del denominador de la fracción original que se descompone en fracciones parciales. Este hecho siempre ocurre.

EJERCICIOS A.11

En los ejercicios 1 a 10, descomponga la fracción en fracciones parciales.

1. $\frac{12}{x^2 - 4}$

2. $\frac{1}{2x^2 - x}$

3. $\frac{x - 1}{x^2 + x}$

4. $\frac{x + 15}{x^2 - 9}$

5. $\frac{x + 5}{x^2 - 4x + 3}$

6. $\frac{3x}{x^2 + x - 2}$

7. $\frac{x + 12}{3x^2 - 5x - 2}$

8. $\frac{3x - 7}{4x^2 + 3x - 1}$

9. $\frac{3x^2 + 3x - 12}{6x^3 + 5x^2 - 6x}$

10. $\frac{2x^2 - 11x - 9}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

En los ejercicios 11 a 14, exprese la fracción impropia como la suma de un polinomio y fracciones parciales.

11. $\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4}$

12. $\frac{x^3 + 5}{x^2 - 1}$

13. $\frac{4x^3 - 8x^2 - 10x + 30}{2x^2 + x - 6}$

14. $\frac{6x^3 + x^2 - 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$

En los ejercicios 15 a 38, descomponga la fracción en fracciones parciales.

15. $\frac{3x^2 + 13x - 10}{x^3 - 2x^2}$

16. $\frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3}$

17. $\frac{x^2 - 11x + 6}{(x + 2)(x^2 - 4x + 4)}$

19. $\frac{3x + 15}{(2x^2 - x - 1)^2}$

21. $\frac{x^3 + 6x - 4}{(x - 2)^3}$

23. $\frac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x}$

25. $\frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8}$

27. $\frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

29. $\frac{11x^2 + 11x + 8}{2x^3 + 8x^2 + 3x + 12}$

31. $\frac{3x^2 - 4x}{(x^2 + 1)(x^2 - x - 1)}$

33. $\frac{x + 6}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$

35. $\frac{x^3 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$

37. $\frac{x^4 + x^3 - 5x^2 - 14x - 1}{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4}$

38. $\frac{11x - 28}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2}$

18. $\frac{x^2 + 11}{(x - 5)(x^2 + 2x + 1)}$

20. $\frac{9x^3 - 8x^2 - 4x + 48}{(x^2 - 4)^2}$

22. $\frac{x^2 + 2}{(x - 3)^3}$

24. $\frac{3x + 8}{x^3 + 4x}$

26. $\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + 1}$

28. $\frac{3x^2 - 9x + 8}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$

30. $\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x}$

32. $\frac{4x - 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$

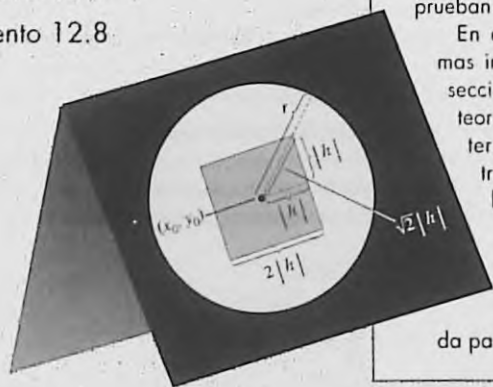
34. $\frac{3x^4 + 4}{x^4 + 4x^2 + 4}$

36. $\frac{x^4 + 2x^2 - 2x - 4}{(x^2 + 3)^3}$

Secciones suplementarias

VISIÓN PRELIMINAR

- Suplemento 1.5
- Suplemento 1.7
- Suplemento 1.10
- Suplemento 2.8
- Suplemento 4.5
- Suplemento 5.1
- Suplemento 8.2
- Suplemento 8.5
- Suplemento 8.8
- Suplemento 12.3
- Suplemento 12.4
- Suplemento 12.8



Estas secciones, designadas mediante el número de la sección del cuerpo principal del texto, contienen discusiones teóricas y algunas de las demostraciones más difíciles.

En el suplemento 1.5 se presenta un ejemplo sobre límites de mayor sofisticación, también se dan aquí las demostraciones de los teoremas 1.5.5, 1.5.12, 1.5.13 y 1.5.16. La prueba del teorema 1.7.4 se efectúa en la sección suplementaria 1.7, mientras que en el suplemento 1.10 se demuestra el teorema de estricción.

La regla de la cadena, teorema 2.8.1, se prueba en la sección suplementaria 2.8.

En el suplemento 4.5 se demuestran dos teoremas importantes acerca de la integral indefinida: la integral de una suma de funciones y la integral de una función como la suma de dos integrales que se obtienen al dividir el intervalo de integración en dos subintervalos.

Los teoremas 5.1.5 y 5.1.7, que tratan sobre las funciones inversas y sus derivadas, respectivamente, se prueban en la sección suplementaria 5.1.

En el suplemento 8.2 se demuestran dos teoremas importantes sobre sucesiones monótonas. En la sección suplementaria 8.5 se presenta la prueba del teorema 8.5.4 acerca del residuo de una serie alternante, mientras que en el suplemento 8.8 se tratan las demostraciones de dos teoremas sobre series de potencias.

Los suplementos del capítulo 12 presentan las demostraciones de algunos teoremas acerca de las derivadas parciales, la diferenciabilidad y el criterio de la segunda derivada para funciones de dos variables.

SUPLEMENTO 1.5

► **EJEMPLO 6** Utilice la definición de límite para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Solución Como x^2 está definida para todos los números, entonces cualquier intervalo abierto que contenga a 2 satisfará el primer requerimiento de la definición 1.5.1. Se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \text{si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x^2 - 4| < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x - 2||x + 2| < \epsilon \end{aligned} \quad (4)$$

Observe en la conclusión de (4) que, además del factor $|x - 2|$, se tiene el factor $|x + 2|$. De modo que, para demostrar (4) se debe imponer una restricción a δ con el fin de obtener una desigualdad que contenga al factor $|x + 2|$. Dicha restricción consiste en elegir el intervalo abierto requerido por la definición 1.5.1 de modo que este intervalo sea $(1, 3)$, lo cual implica que $\delta \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \delta \text{ y } \delta \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 < |x - 2| < 1 \\ \Rightarrow & -1 < x - 2 < 1 \\ \Rightarrow & 3 < x + 2 < 5 \\ \Rightarrow & |x + 2| < 5 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \delta \text{ y } \delta \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 < |x - 2| < \delta \text{ y } |x + 2| < 5 \\ \Rightarrow & |x - 2||x + 2| < \delta \cdot 5 \end{aligned}$$

Recuerde que la proposición (4) es el objetivo, por lo que debe pedirse que

$$\delta \cdot 5 \leq \epsilon \Leftrightarrow \delta \leq \epsilon/5$$

De esta forma, se han impuesto dos restricciones a δ : $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \epsilon/5$. Para que ambas restricciones se cumplan debe tomarse δ como el menor de los dos números 1 y $\epsilon/5$; esto se puede escribir con símbolos como $\delta = \min(1, \epsilon/5)$. Si se utiliza esta δ , entonces se tiene el siguiente argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \delta \\ \Rightarrow & |x - 2| < \frac{\epsilon}{5} \text{ y } |x + 2| < 5 \\ \Rightarrow & |x - 2||x + 2| < \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 \\ \Rightarrow & |x^2 - 4| < \epsilon \end{aligned}$$

En consecuencia, se ha demostrado que para cualquier $\epsilon > 0$ la elección de $\delta = \min(1, \epsilon/5)$ hace verdadera la siguiente proposición:

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \text{ entonces } |x^2 - 4| < \epsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

1.5.5 Teorema 4 de límites Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Demostración Se probará el teorema con el signo más. Sean

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (5)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad (6)$$

lo que se desea demostrar es que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

De la definición 1.5.1, para cualquier $\epsilon > 0$ se debe probar que existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon \quad (7)$$

Como el límite (5) existe, entonces de la definición de límite se infiere que para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$$

De manera semejante, de (6), para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Ahora considere δ como el menor de los números δ_1 y δ_2 . Por tanto, $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$. De este modo,

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$$

y

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon$$

En consecuencia, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

De esta forma se ha obtenido la proposición (7), por tanto se ha demostrado que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Se deja como ejercicio la demostración del teorema 4 de límites con el signo menos (refiérase al ejercicio 9 de esta sección suplementaria).

La demostración del teorema 6 de límites (1.5.7) es más sofisticada que la de los teoremas de límites 1-5. Los pasos de la demostración se indican en los ejercicios 11 y 12 de esta sección suplementaria.

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Demostración Se probará el teorema para $a > 0$. La demostración para $a < 0$ se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 14 de esta sección suplementaria).

Como $1/x$ está definido para todo x diferente de cero, entonces el intervalo abierto requerido por la definición 1.5.1 puede ser cualquier intervalo que contenga a a pero que no contenga a 0. Se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon \quad (8)$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{a - x}{ax} \right| \\ &= \frac{|x - a|}{|a||x|} \\ &= |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} \quad (\text{ya que } a > 0) \end{aligned}$$

la proposición (8) es equivalente a

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \epsilon \quad (9)$$

En la conclusión de (9), además del factor $|x - a|$ se tiene como factor el cociente $\frac{1}{a|x|}$. Por tanto, para demostrar (9) es necesario restringir δ de modo que se obtenga una desigualdad la cual contenga al cociente $\frac{1}{a|x|}$. Al elegir el intervalo abierto requerido en la definición 1.5.1 como el intervalo $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a)$, el cual contiene a a pero no al cero, se deduce que $\delta \leq \frac{1}{2}a$. Entonces

$$\begin{aligned} &0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \leq \frac{1}{2}a \\ \Rightarrow &|x - a| < \frac{1}{2}a \\ \Rightarrow &-\frac{1}{2}a < x - a < \frac{1}{2}a \\ \Rightarrow &\frac{1}{2}a < x < \frac{3}{2}a \\ \Rightarrow &\frac{1}{2}a < |x| < \frac{3}{2}a \quad (\text{porque } a > 0) \\ \Rightarrow &\frac{2}{3a} < \frac{1}{|x|} < \frac{2}{a} \\ \Rightarrow &\frac{2}{3a^2} < \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Ahora bien,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \quad (11)$$

Puesto que el objetivo consiste en obtener $|x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \epsilon$, la proposición (11) indica que debe requerirse $\delta \cdot \frac{2}{a^2} \leq \epsilon$, esto es, $\delta \leq \frac{1}{2} a^2 \epsilon$. De este modo, con las dos restricciones sobre δ , se elige $\delta = \min(\frac{1}{2} a, \frac{1}{2} a^2 \epsilon)$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \frac{|x - a|}{|a||x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \quad (\text{puesto que } a > 0)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a - x}{ax} \right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \quad (\text{de (10)})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \frac{1}{2} a^2 \epsilon \cdot \frac{2}{a^2} \quad (\text{debido a que } \delta \leq \frac{1}{2} a^2 \epsilon)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon$$

Así, se ha demostrado que para cualquier $\epsilon > 0$, si $\delta = \min(\frac{1}{2} a, \frac{1}{2} a^2 \epsilon)$, entonces la proposición siguiente es verdadera:

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon$$

la cual es la proposición (8). ■

En la demostración del teorema 1.5.13 se utiliza la siguiente fórmula, donde n es cualquier número entero positivo:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (12)$$

Esta fórmula se deduce de

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1}$$

y

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n$$

al restar los términos de la segunda ecuación de los de la primera.

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Demostración Se demostrará el teorema si $a > 0$ y n es un número entero positivo. El caso cuando $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 15 de esta sección suplementaria).

Como $\sqrt[n]{x}$ está definido para todo número no negativo, el intervalo abierto requerido en la definición 1.5.1 puede ser cualquier intervalo abierto que contenga a a y tenga un número no negativo como extremo izquierdo. Se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < \epsilon \quad (13)$$

A fin de expresar $\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right|$ en términos de $|x - a|$ se utiliza (12),

$$\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| = \left| \frac{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}} \right|$$

Si se aplica (12) al numerador, se tiene

$$\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| = |x - a| \cdot \left| \frac{1}{x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}} \right|$$

Al considerar

$$|\phi(x)| = |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|$$

en la ecuación anterior se obtiene

$$\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| = |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \quad (14)$$

De modo que la proposición (13) equivale a

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon \quad (15)$$

En la conclusión de (15), además del factor $|x - a|$ se tiene como factor la fracción $\frac{1}{|\phi(x)|}$. En consecuencia, para demostrar (15) se necesita restringir δ de modo que se tenga una desigualdad que contenga esta fracción. Si se elige el intervalo indicado en la definición 1.5.1 como el intervalo $(0, 2a)$, se requiere que $\delta \leq a$. Entonces

$$\begin{aligned} & 0 < |x - a| < \delta \text{ y } \delta \leq a \\ \Rightarrow & |x - a| < a \\ \Rightarrow & -a < x - a < a \\ \Rightarrow & 0 < x < 2a \\ \Rightarrow & a^{(n-1)/n} < |\phi(x)| \quad (\text{puesto que } x > 0) \\ \Rightarrow & \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora bien,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{y} \quad \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \quad (17)$$

El objetivo consiste en obtener $|x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon$. Así, la proposición

$$(17) \text{ indica que se debe requerir } \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \leq \epsilon, \text{ esto es, } \delta \leq a^{(n-1)/n} \epsilon.$$

De modo que se elige $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n} \epsilon)$. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|}$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \quad (\text{de (14)})$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \quad (\text{de (16)})$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < a^{(n-1)/n} \epsilon \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \quad (\text{debido a que } \delta \leq a^{(n-1)/n} \epsilon)$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < \epsilon$$

Así, se ha probado que para cualquier $\epsilon > 0$, si $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n} \epsilon)$, entonces

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \right| < \epsilon$$

la cual es la proposición (13). ■

1.5.16 Teorema

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$

Demostración Se supondrá que $L_1 \neq L_2$, y se probará que esta suposición conduce a una contradicción. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, de la definición 1.5.1 se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - L_1| < \epsilon \quad (18)$$

Además, puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |f(x) - L_2| < \epsilon \quad (19)$$

Ahora bien, al expresar $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ y aplicar la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \end{aligned} \quad (20)$$

Así, de (18), (19) y (20) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |L_1 - L_2| < \epsilon + \epsilon \quad (21)$$

Si δ es la menor de δ_1 y δ_2 , entonces $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$, y (21) afirma que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |L_1 - L_2| < 2\epsilon \quad (22)$$

Sin embargo, si $\epsilon = \frac{1}{2} |L_1 - L_2|$, entonces (22) afirma que existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Es claro que $|L_1 - L_2|$ no es menor que sí mismo. De modo que se tiene una contradicción, por lo que la suposición hecha al principio es falsa. En consecuencia, $L_1 = L_2$, con lo que se ha demostrado el teorema. ■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 1.5

En los ejercicios 1 a 8, demuestre, aplicando la definición 1.5.1, que el número indicado es el límite.

- $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$
- $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x) = 10$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 7$
- $\lim_{x \rightarrow -3} (5 - x - x^2) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (6x^2 - 13x + 5) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 - 13x + 12) = 3$

9. Utilice la definición 1.5.1 para demostrar que si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$$

10. Demuestre el teorema 5 de límites aplicando el teorema 4 de límites e inducción matemática.

11. Emplee la definición 1.5.1 para demostrar que si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

Sugerencia: para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$. Primero demuestre que existe una $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x)| < 1 + |L|$, aplicando la definición 1.5.1 a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ con $\epsilon = 1$ y $\delta = \delta_1$, y después utilice la desigualdad del triángulo. Luego, pruebe que existe una $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x)| < \epsilon / (1 + |L|)$ aplicando la definición 1.5.1 a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Si se toma δ como la menor de δ_1 y δ_2 , el teorema se demuestra.

12. Demuestre el teorema 6 de límites: si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Sugerencia: sea

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M] + L \cdot M.$$

Aplice el teorema 5 de límites y el resultado del ejercicio 11 de esta sección suplementaria.

13. Demuestre el teorema 7 de límites aplicando el teorema 6 de límites e inducción matemática.

14. Demuestre el teorema 1.5.12 si $a < 0$.

15. Demuestre el teorema 1.5.13 si $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar.

SUPLEMENTO 1.7

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es un número real, y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de cero, entonces

- (i) si $c > 0$ y si $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

- (ii) si $c > 0$ y si $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

- (iii) si $c < 0$ y si $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

- (iv) si $c < 0$ y si $f(x) \rightarrow 0$ a través de valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si " $x \rightarrow a$ " se sustituye por " $x \rightarrow a^{+}$ " o " $x \rightarrow a^{-}$ ".

Demostración del inciso (i) Con el propósito de probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

se debe demostrar que para cualquier $N > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \frac{g(x)}{f(x)} > N \quad (7)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$, si se toma $\epsilon = \frac{1}{2}c$ en la definición 1.5.1, se infiere que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } |g(x) - c| < \frac{1}{2}c \\ \Leftrightarrow \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } -\frac{1}{2}c < g(x) - c < \frac{1}{2}c \\ \Leftrightarrow \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } \frac{1}{2}c < g(x) < \frac{3}{2}c \end{aligned}$$

De modo que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } g(x) > \frac{1}{2}c \quad (8)$$

Ahora bien, puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |f(x)| < \epsilon$$

Debido a que $f(x)$ se aproxima a cero a través de valores positivos de $f(x)$, las barras del valor absoluto no son necesarias y pueden ser eliminadas; en consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } 0 < f(x) < \epsilon \quad (9)$$

De las proposiciones (8) y (9) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{\epsilon}$$

Por tanto, si $\epsilon = c/(2N)$ y $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{c/(2N)} = N$$

la cual es la proposición (7). De este modo se ha probado el inciso (i).

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 1.7

- Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$ usando la definición 1.7.1.
- Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2}{(x-4)^2} = -\infty$ empleando la definición 1.7.2.
- Demuestre el inciso (ii) del teorema 11 de límites (1.7.3).
- Demuestre el inciso (ii) del teorema 12 de límites (1.7.4).
- Demuestre el inciso (iii) del teorema 12 de límites (1.7.4).
- Demuestre el inciso (iv) del teorema 12 de límites (1.7.4).
- Demuestre el teorema 1.7.5.
- Demuestre el teorema 1.7.6.
- Demuestre el teorema 1.7.7.
- Utilice la definición 1.7.1 para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{5-x}{3+x} \right| = +\infty$$

SUPLEMENTO 1.10

1.10.1 Teorema de estricción

Suponga que las funciones f , g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a y posiblemente no definidas en a mismo. Además suponga que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x de I para la cual $x \neq a$. También suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ existen y son iguales a L . Entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe y es igual a L .

Demostración A fin de demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ se debe probar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |g(x) - L| < \epsilon \quad (19)$$

Se sabe que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

de modo que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon \\ \Leftrightarrow \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

y existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } |h(x) - L| < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ entonces } L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \end{aligned} \quad (21)$$

Sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, por lo que $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$. Por tanto, de la proposición (20) se deduce que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) \quad (22)$$

y del enunciado (21) se infiere que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } h(x) < L + \epsilon \quad (23)$$

Por hipótesis se sabe que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (24)$$

De las proposiciones (22), (23) y (24), se tiene que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |g(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

la cual es la proposición (19). En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \quad \blacksquare$$

SUPLEMENTO 2.8

Un paso importante de la demostración de la regla de la cadena consiste en introducir una nueva función F que posee ciertas propiedades útiles. Este procedimiento de “inventar” una función es común para los matemáticos.

2.8.1 Teorema La regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x y además

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (15)$$

Demostración Sea x_1 cualquier número real del dominio de g tal que g es diferenciable en x_1 y f es diferenciable en $g(x_1)$. Considere la función F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{si } t \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{si } t = g(x_1) \end{cases} \quad (16)$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow g(x_1)} F(t) = \lim_{t \rightarrow g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

De (7) de la sección 2.1, la función del miembro derecho de la ecuación anterior es igual a $f'(g(x_1))$. Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1)) \quad (17)$$

Pero de (16),

$$f'(g(x_1)) = F(g(x_1))$$

Al sustituir de esta ecuación en (17) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow g(x_1)} F(t) = F(g(x_1))$$

Por tanto, F es continua en $g(x_1)$. Además, de (16),

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \quad \text{si } t \neq g(x_1)$$

Si se multiplican ambos miembros de esta ecuación por $t - g(x_1)$, resulta

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \quad \text{si } t \neq g(x_1) \quad (18)$$

Observe que (18) se cumple aún si $t = g(x_1)$ debido a que el miembro izquierdo sería

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

mientras que el miembro derecho sería

$$F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$$

Por tanto, la estipulación en (18) de que $t \neq g(x_1)$ no es necesaria, de modo que se puede escribir

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \quad (19)$$

Ahora bien, sea h la función compuesta $f \circ g$, de este modo

$$h(x) = f(g(x)) \quad (20)$$

Entonces, de (7) de la sección 2.1, si el límite existe

$$h'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Al sustituir de (20) en el miembro derecho de esta ecuación se tiene

$$h'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \quad (21)$$

si el límite existe. Al considerar $t = g(x)$ en (19), se infiere que para toda x del dominio de g tal que $g(x)$ pertenezca al dominio de f ,

$$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$$

Si se sustituye de esta ecuación en (21) se obtiene

$$h'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

y si el límite existe, entonces

$$h'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} F(g(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \quad (22)$$

Como F es continua en $g(x_1)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \quad (23)$$

Pero de (16),

$$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$$

Al sustituir de esta ecuación en (23) se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \quad (24)$$

Además, como g es diferenciable en x_1 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$$

Si se sustituye de esta ecuación y de 24 en (22), y se reemplaza $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, se tiene

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

la cual es la proposición (15) con x_1 en lugar de x . De esta manera se ha demostrado la regla de la cadena. ■

SUPLEMENTO 4.5

4.5.11 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Demostración Las funciones f y g son integrables en $[a, b]$; por tanto, sean

$$\int_a^b f(x) dx = M \quad \text{y} \quad \int_a^b g(x) dx = N$$

A fin de probar que $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = M + N$, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$ y si $\|\Delta\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(w_i) + g(w_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x \quad \text{y} \quad N = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(w_i) \Delta_i x$$

se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta_1$ y $\|\Delta\| < \delta_2$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \sum_{i=1}^n g(w_i) \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por tanto, si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$, para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(w_i)\Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (13)$$

Por la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^n g(w_i)\Delta_i x - N \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(w_i)\Delta_i x - N \right| \end{aligned} \quad (14)$$

De las desigualdades (13) y (14) resulta

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(w_i)\Delta_i x \right) - (M + N) \right| < \epsilon \quad (15)$$

Del teorema 4.4.4,

$$\sum_{i=1}^n f(w_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(w_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^n [f(w_i) + g(w_i)] \Delta_i x$$

Así, al sustituir de esta ecuación en (15) se puede concluir que para cualquier $\epsilon > 0$, para todas las particiones Δ y para cualquier w_i de $[x_{i-1}, x_i]$, si $\|\Delta\| < \delta$, donde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(w_i) + g(w_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Esto demuestra que $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \blacksquare$$

4.5.12 Teorema

Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

donde $a < c < b$.

Demostración Sea Δ una partición de $[a, b]$. Forme la partición Δ' de $[a, b]$ de la manera siguiente: si c es uno de los puntos de la partición de Δ (esto es, $c = x_i$ para alguna i) entonces Δ' es exactamente la misma que Δ . Si c no es uno de los puntos de la partición de Δ pero está contenido en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la partición Δ' tiene como puntos todos los puntos de Δ y, además, al punto c . Por tanto, los subintervalos de la partición Δ' son los mismos que los de Δ , con la excepción del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que se ha dividido en los dos subintervalos $[x_{i-1}, c]$ y $[c, x_i]$.

Si $\|\Delta'\|$ y $\|\Delta\|$ son las normas de Δ' y Δ , respectivamente, entonces

$$\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$$

Ahora bien, si en la partición Δ' el intervalo $[a, c]$ se divide en r subintervalos y el intervalo $[c, b]$ se divide en $(n - r)$ subintervalos, entonces del primer intervalo, de a a c , se obtiene una suma de Riemann de la forma

$$\sum_{i=1}^r f(w_i) \Delta_i x$$

y del otro, de c a b , resulta una suma de Riemann de la forma

$$\sum_{i=r+1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

Al emplear la definición de la integral definida y las propiedades de la notación sigma resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta_i x \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^r f(w_i) \Delta_i x + \sum_{i=r+1}^n f(w_i) \Delta_i x \right] \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(w_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(w_i) \Delta_i x \end{aligned}$$

Como $0 < \|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$, se puede sustituir $\|\Delta\| \rightarrow 0$ por $\|\Delta'\| \rightarrow 0$, obteniéndose

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta'\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(w_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\| \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(w_i) \Delta_i x$$

Si se aplica la definición de la integral definida al miembro derecho de la ecuación anterior se tiene

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \blacksquare$$

SUPLEMENTO 5.1

En la sección 5.1 se pospusieron las demostraciones de dos teoremas para este suplemento, y la demostración de otro más para los ejercicios suplementarios. El primero de estos teoremas es el teorema de la función inversa para funciones crecientes.

5.1.5 Teorema (Teorema de la función inversa)

Suponga que la función f es continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces

- (i) f tiene una inversa f^{-1} definida en $[f(a), f(b)]$;
- (ii) f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$;
- (iii) f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (i) Si f es continua en $[a, b]$ y si k es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces, por el teorema del valor intermedio (1.9.8), existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$. Por tanto, el contradominio de f es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Como f es creciente en $[a, b]$, f es uno a uno, por lo que f tiene una inversa f^{-1} . Debido a que el dominio de f^{-1} es el contradominio de f , f^{-1} está definida en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (ii) Para probar que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ se debe demostrar que

$$\text{si } y_1 < y_2 \text{ entonces } f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

donde y_1 y y_2 son dos números de $[f(a), f(b)]$. Como f^{-1} está definida en $[f(a), f(b)]$, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) &= f^{-1}(f(x_1)) & y & f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2)) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) &= x_1 & y & f^{-1}(y_2) = x_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Si $x_2 < x_1$, entonces, como f es creciente en $[a, b]$, $f(x_2) < f(x_1)$ o equivalentemente, $y_2 < y_1$. Pero $y_1 < y_2$; por tanto x_2 no puede ser menor que x_1 .

Si $x_2 = x_1$, entonces, puesto que f es una función, $f(x_1) = f(x_2)$ o, equivalentemente, $y_1 = y_2$, pero esto también contradice el hecho de que $y_1 < y_2$. Por tanto, $x_2 \neq x_1$.

Así, si x_2 no es menor que x_1 y $x_2 \neq x_1$, se infiere que $x_1 < x_2$; en consecuencia, de las dos ecuaciones de (8), $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. De esta manera se ha demostrado que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$.

Demostración de (iii) A fin de probar que f^{-1} es continua en el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$ se debe demostrar que si r es cualquier número del intervalo abierto $(f(a), f(b))$, entonces f^{-1} es continua en r , f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y además f^{-1} es continua por la izquierda en $f(b)$.

Se demostrará que f^{-1} es continua en cualquier número r del intervalo abierto $(f(a), f(b))$ mostrando que el teorema 1.8.6 se cumple en r . Se desea probar que para cualquier $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, para el cual $f^{-1}(r) - \epsilon$ y $f^{-1}(r) + \epsilon$ estén en $[a, b]$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon$$

Sea $f^{-1}(r) = s$. Entonces $f(s) = r$. Como, de (i), f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$, se concluye que $a < s < b$. Por tanto,

$$a \leq s - \epsilon < s < s + \epsilon \leq b$$

Debido a que f es creciente en $[a, b]$,

$$f(a) \leq f(s - \epsilon) < r < f(s + \epsilon) \leq f(b) \quad (9)$$

Sea δ el menor de los dos números $r - f(s - \epsilon)$ y $f(s + \epsilon) - r$; así, $\delta \leq r - f(s - \epsilon)$ y $\delta \leq f(s + \epsilon) - r$ o, equivalentemente,

$$f(s - \epsilon) \leq r - \delta \text{ y } r + \delta \leq f(s + \epsilon) \quad (10)$$

Si $|y - r| < \delta$ entonces $-\delta < y - r < \delta$ o, de manera equivalente,

$$r - \delta < y < r + \delta$$

De esta desigualdad y de (9) y (10), se tiene que

$$\text{si } |y - r| < \delta \text{ entonces } f(a) \leq f(s - \epsilon) < y < f(s + \epsilon) \leq f(b)$$

Puesto que f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$, de lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} & \text{si } |y - r| < \delta \quad \text{entonces } f^{-1}(f(s - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(s + \epsilon)) \\ \Leftrightarrow & \text{si } |y - r| < \delta \quad \text{entonces } s - \epsilon < f^{-1}(y) < s + \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } |y - r| < \delta \quad \text{entonces } -\epsilon < f^{-1}(y) - s < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } |y - r| < \delta \quad \text{entonces } |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto, f^{-1} es continua en el intervalo abierto $(f(a), f(b))$.

En el ejercicio 1 de esta sección suplementaria se le pedirán las demostraciones de que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y continua por la izquierda en $f(b)$. ■

Se le pedirá que demuestre los incisos (i)–(iii) del teorema de la función inversa para funciones decrecientes en los ejercicios suplementarios 2–4, respectivamente.

Ahora se enunciará el otro teorema cuya demostración se aplazó.

5.1.7 Teorema

Suponga que la función f es continua y monótona en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea $y = f(x)$. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x de $[a, b]$, entonces la derivada de la función inversa f^{-1} , definida por $x = f^{-1}(y)$, está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Demostración Como f es continua y monótona en $[a, b]$, entonces por los teoremas 5.1.5 y 5.1.6, f tiene una inversa que es continua y monótona en $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$).

Si x es un número de $[a, b]$, sea Δx un incremento de x , $\Delta x \neq 0$, tal que $x + \Delta x$ pertenece también a $[a, b]$. Entonces el incremento correspondiente de y está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{11}$$

$\Delta y \neq 0$ ya que $\Delta x \neq 0$ y f es monótona en $[a, b]$; esto es

$$f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{o} \quad f(x + \Delta x) > f(x) \quad \text{en } [a, b]$$

Si x está en $[a, b]$ y $y = f(x)$, entonces y pertenece a $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$). También, si $x + \Delta x$ está en $[a, b]$, entonces $y + \Delta y$ pertenecerá a $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$) debido a que $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ por (11). Así,

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$$

A partir de estas dos ecuaciones se tiene

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \tag{12}$$

De la definición de derivada,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

Si se sustituye de (11) y (12) en la ecuación anterior resulta

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

y como $\Delta x \neq 0$, entonces

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad (13)$$

Antes de obtener el límite de (13) se demostrará que con la hipótesis de este teorema $\Delta x \rightarrow 0$ equivale a $\Delta y \rightarrow 0$. Primero se probará que $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$. De (12),

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)]$$

Puesto que f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$ (o $[f(b), f(a)]$), el límite del miembro derecho de la ecuación anterior es cero. Así,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0 \quad (14)$$

Ahora se demostrará que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. De (11),

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

Como f es continua en $[a, b]$, entonces el límite del miembro derecho de la ecuación anterior es cero, y por tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

A partir de esta ecuación y de (14) se infiere que

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{sí y sólo sí} \quad \Delta y \rightarrow 0$$

De esta proposición y aplicando el teorema concerniente al límite de un cociente a (13), se tiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \quad (15)$$

Debido a que f es diferenciable en $[a, b]$, el límite del denominador de la ecuación anterior es $f'(x)$ o, equivalentemente, $\frac{dy}{dx}$. De esta forma,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \blacksquare$$

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 5.1

- Suponga que la función f es continua y creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$, y considerando válidos los teoremas 5.1.5(i) y 5.1.5(ii) demuestre que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y que es continua por la izquierda en $f(b)$.
- Demuestre el teorema 5.1.6(i).
- Demuestre el teorema 5.1.6(ii).
- Demuestre el teorema 5.1.6(iii).

SUPLEMENTO 8.2

8.2.10 Teorema

Una sucesión monótona acotada es convergente.

Demostración Se demostrará el teorema para el caso cuando la función monótona es creciente. Considere la sucesión $\{a_n\}$.

Como $\{a_n\}$ es acotada, entonces existe una cota superior para la sucesión. Por el axioma de completitud, $\{a_n\}$ tiene una mínima cota superior, sea B esta cota. Entonces si ϵ es un número positivo, $B - \epsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión debido a que $B - \epsilon < B$ y B es la mínima cota superior de la sucesión. Así, para algún número entero positivo N ,

$$B - \epsilon < a_N \quad (9)$$

Como B es la mínima cota superior de $\{a_n\}$, por la definición 8.2.6 se deduce que

$$a_n \leq B \quad \text{para todo número entero positivo } n \quad (10)$$

Debido a que $\{a_n\}$ es creciente, de la definición 8.2.5(i), se tiene

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para todo número entero positivo } n$$

y por tanto,

$$\text{si } n \geq N \text{ entonces } a_N \leq a_n$$

De esta proposición y de (9) y (10) se infiere que

$$\text{si } n \geq N \text{ entonces } B - \epsilon < a_N \leq a_n \leq B < B + \epsilon$$

de donde,

$$\text{si } n \geq N \text{ entonces } B - \epsilon < a_n < B + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{si } n \geq N \text{ entonces } -\epsilon < a_n - B < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{si } n \geq N \text{ entonces } |a_n - B| < \epsilon$$

Pero por la definición 8.2.2, esta proposición es la condición para que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = B$. En consecuencia, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

Cuando demuestre el teorema para el caso en que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente, considere la sucesión $\{-a_n\}$, la cual será creciente, y después aplique el resultado anterior. Se deja como ejercicio detallar esta demostración (consulte el ejercicio suplementario 1). ■

8.2.13 Teorema

Una sucesión monótona convergente es acotada.

Demostración Se hará la demostración para el caso cuando la sucesión monótona es creciente. Considere la sucesión $\{a_n\}$.

A fin de probar que $\{a_n\}$ es acotada, debe demostrarse que la sucesión tiene una cota superior y una cota inferior. Como $\{a_n\}$ es una sucesión creciente, su primer elemento sirve como cota inferior. Sólo falta determinar una cota superior.

Debido a que $\{a_n\}$ es convergente, la sucesión tiene un límite; sea L este límite. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, y así, por la definición 8.1.2, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y

$$\begin{aligned} & \text{si } n \geq N \text{ entonces } |a_n - L| < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } n > N \text{ entonces } -\epsilon < a_n - L < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \text{si } n > N \text{ entonces } L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \end{aligned}$$

Puesto que $\{a_n\}$ es creciente, se deduce de la proposición anterior que

$$a_n < L + \epsilon \quad \text{para todos los enteros positivos } n$$

Por tanto, $L + \epsilon$ servirá como una cota superior de la sucesión $\{a_n\}$.

Como demuestre el teorema para el caso en que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente, haga lo sugerido en la demostración del teorema 8.2.10. Considere la sucesión $\{-a_n\}$, la cual será creciente, y aplique el resultado anterior. En el ejercicio suplementario 2 se le pedirá que detalle esta demostración. ■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 8.2

- Utilice el hecho de que el teorema 8.2.10 se cumple para una sucesión creciente y demuestre que el teorema se cumple cuando $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente. *Sugerencia:* considere la sucesión $\{-a_n\}$
- Demuestre el teorema 8.2.13 cuando $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de manera semejante a la empleada en el ejercicio 1.

SUPLEMENTO 8.5

8.5.4 Teorema

Considere la serie alternante $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ [o $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$], donde $a_n > 0$ y $a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n , y suponga que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Si R_k es el residuo que se obtiene al aproximar la suma de la serie mediante la suma de los primeros k términos, entonces $|R_k| < a_{k+1}$.

Demostración La serie dada converge por el criterio de las series alternantes. Suponga que los términos impares de la serie son positivos y que los términos pares son negativos. Entonces de (3), de la demostración del teorema 8.5.2, la sucesión $\{s_{2n}\}$ es creciente. De modo que si S es la suma de la serie dada, entonces

$$s_{2k} < s_{2k+2} < S \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (11)$$

A fin de probar que la sucesión $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente, se escribe

$$s_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

Como $a_{n+1} < a_n$, entonces cada cantidad entre paréntesis es positivo. Por tanto, puesto que $a_1 > 0$,

$$s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2n-1} > \dots$$

En consecuencia, la sucesión $\{s_{2n-1}\}$ es decreciente. Así,

$$S < s_{2k+1} < s_{2k-1} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (12)$$

Como $S < s_{2k+1}$,

$$S - s_{2k} < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (13)$$

De (11), $s_{2k} < S$. De modo que,

$$0 < S - s_{2k} \quad \text{para toda } k \geq 1$$

Por tanto, de esta desigualdad y (13),

$$0 < S - s_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (14)$$

De (11), $-S < -s_{2k}$. De donde,

$$s_{2k-1} - S < s_{2k-1} - s_{2k} = a_{2k} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (15)$$

De (12),

$$0 < s_{2k-1} - S \quad \text{para toda } k \geq 1$$

Entonces, de esta desigualdad y de (15),

$$0 < s_{2k-1} - S < a_{2k} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (16)$$

Como de la definición 8.5.3, $R_k = S - s_k$, entonces (14) puede escribirse como

$$0 < R_{2k} < a_{2k+1} \quad \text{para toda } k \geq 1 \quad (17)$$

y (16) puede expresarse como

$$0 < -R_{2k-1} < a_{2k} \quad \text{para toda } k \geq 1$$

Al combinar esta desigualdad y (17) se tiene

$$|R_k| < a_{k+1} \quad \text{para toda } k \geq 1$$

por lo que el teorema queda demostrado. ■

SUPLEMENTO 8.8

8.8.1 Teorema

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ es una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ también tiene a R como radio de convergencia.

Demostración Sea x cualquier número del intervalo abierto $(-R, R)$. Entonces $|x| < R$. Elija un número x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$. Como $|x_1| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ es convergente. En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$. De modo que si se toma $\epsilon = 1$ en la definición 3.7.1, entonces existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } n > N \text{ entonces } |c_n x_1^n| < 1$$

Sea M el mayor de los números $|c_1 x_1|$, $|c_2 x_1^2|$, $|c_3 x_1^3|$, \dots , $|c_N x_1^N|$. Entonces

$$|c_n x_1^n| \leq M \quad \text{para todos los enteros positivos } n \quad (7)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |n c_n x^{n-1}| &= \left| n c_n \cdot \frac{x^{n-1}}{x_1^{n-1}} \cdot x_1^n \right| \\ &= n \frac{|c_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \end{aligned}$$

De la ecuación anterior y de (7),

$$|n c_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (8)$$

Si se aplica el criterio de la razón a la serie

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1} \quad (9)$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)|x|^n}{|x_1|^n} \cdot \frac{|x_1|^{n-1}}{n|x_1|^{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la serie (9) es absolutamente convergente; de modo que de (8) y el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ también es absolutamente convergente. Como x es cualquier número de $(-R, R)$, se infiere que si el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ es R' , entonces $R' \geq R$.

Para completar la demostración se debe probar que R' no puede ser mayor que R . Suponga que $R' > R$, y sea x_2 un número tal que $R < |x_2| < R'$. Puesto que $|x_2| > R$, se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2^n \quad \text{es divergente} \quad (10)$$

Debido a que $|x_2| < R'$, se infiere que $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x_2^{n-1}$ es absolutamente convergente. Además,

$$|x_2| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x_2^{n-1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} |n c_n x_2^n|$$

y del teorema 8.3.6,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n c_n x_2^n| \quad \text{es convergente} \quad (11)$$

Si n es cualquier número entero positivo, entonces

$$|c_n x_2^n| \leq n |c_n x_2^{n-1}| = |n c_n x_2^{n-1}|$$

De esta desigualdad, de la proposición (11) y del criterio de comparación se concluye que $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n x_2^n|$ es convergente. Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_2^n$ es convergente, lo cual contradice la proposición (10). En consecuencia, la suposición de que $R' > R$ es falsa. Por tanto, R' no puede ser mayor que R ; y como se mostró que $R' \geq R$, se deduce que $R' = R$, lo cual demuestra el teorema. ■

8.8.3 Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$. Si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (12)$$

entonces $f'(x)$ existe para toda x del intervalo abierto $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$$

Demostración Sean x y a dos números diferentes del intervalo abierto $(-R, R)$. La fórmula de Taylor (fórmula (2) de la sección 8.1), con $n = 1$, es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(z)}{2!} (x - a)^2$$

De esta fórmula con $f(x) = x^n$ se infiere que para cada entero positivo n ,

$$x^n = a^n + n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (z_n)^{n-2} (x - a)^2 \quad (13)$$

donde z_n se encuentra entre a y x para todo entero positivo n . De (12),

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x^n - a^n) \end{aligned}$$

Al dividir entre $x - a$ (ya que $x \neq a$) y emplear (13), se tiene de la ecuación anterior

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [n a^{n-1} (x - a) + \frac{1}{2} n(n-1) (z_n)^{n-2} (x - a)^2]$$

Así,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} + \frac{1}{2} (x - a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n (z_n)^{n-2} \quad (14)$$

Como a está en $(-R, R)$, del teorema 8.8.1 se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1}$ es absolutamente convergente.

Debido a que tanto a como x pertenecen a $(-R, R)$, entonces existen algún número $K > 0$ tal que $|a| < K < R$ y $|x| < K < R$. Así, del teorema 8.8.2,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n K^{n-2}$$

es absolutamente convergente. Entonces, puesto que

$$|n(n-1)c_n(z_n)^{n-2}| < |n(n-1)c_n K^{n-2}| \quad (15)$$

para cada z_n se puede concluir, por el criterio de comparación, que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(z_n)^{n-2}$$

es absolutamente convergente.

De (14),

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{2} (x - a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(z_n)^{n-2} \right| \quad (16)$$

Sin embargo, si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ es absolutamente convergente, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

Si se aplica esto al miembro derecho de (16) se obtiene

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{2} |x - a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |c_n| |z_n|^{n-2}$$

De esta desigualdad y de (15) resulta

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{2} |x - a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |c_n| K^{n-2} \quad (17)$$

donde $0 < K < R$. Como la serie del miembro derecho de (17) es absolutamente convergente, entonces el límite del miembro derecho, conforme x se aproxima a a , es cero. Por tanto, de (17) y del teorema de restricción, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} \\ \Leftrightarrow f'(a) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n a^{n-1} \end{aligned}$$

y puesto que a puede ser cualquier número del intervalo abierto $(-R, R)$, el teorema se ha demostrado. ■

SUPLEMENTO 12.3

12.3.3 Teorema

Suponga que f es una función de las dos variables x y y , definida en un disco abierto $B((x_0, y_0); r)$ y que f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en B . Además suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B . Entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

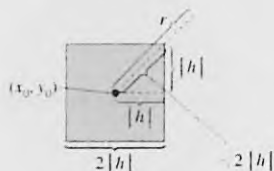


FIGURA 1

Demostración Considere un cuadrado que tenga su centro en (x_0, y_0) y que la longitud de sus lados sea $2|h|$, con la condición de que $0 < 2|h| < r$. Entonces todos los puntos interiores y de los lados del cuadrado están en el disco abierto B (refiérase a la figura 1). Así, los puntos $(x_0 + h, y_0 + h)$, $(x_0 + h, y_0)$ y $(x_0, y_0 + h)$ están en B . Se define Δ como

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad (13)$$

Considere la función G definida por

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) \quad (14)$$

Entonces

$$G(x + h) = f(x + h, y_0 + h) - f(x + h, y_0)$$

Por lo que (13) puede escribirse como

$$\Delta = G(x_0 + h) - G(x_0) \quad (15)$$

De (14),

$$G'(x) = f_x(x, y_0 + h) - f_x(x, y_0) \quad (16)$$

Ahora bien, como $f_x(x, y_0 + h)$ y $f_x(x, y_0)$ están definidas en B , entonces $G'(x)$ existe si x está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a x_0 y $x_0 + h$. En consecuencia, G es continua si x pertenece a este intervalo cerrado. Por el teorema del valor medio, existe un número c_1 entre x_0 y $x_0 + h$ tal que

$$\frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = G'(c_1)$$

de donde

$$G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(c_1)$$

Al sustituir de esta ecuación en (15) se tiene

$$\Delta = hG'(c_1)$$

De esta ecuación y reemplazando x por c_1 en (16) se obtiene

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0 + h) - f_x(c_1, y_0)] \quad (17)$$

Ahora, si g es la función definida por

$$g(y) = f_x(c_1, y) \quad (18)$$

se puede expresar (17) como

$$\Delta = h[g(y_0 + h) - g(y_0)] \quad (19)$$

De (18),

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y) \quad (20)$$

Como $f_{xy}(c_1, y)$ está definida en B , entonces $g'(y)$ existe si y está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a y_0 y $y_0 + h$; en consecuencia, g es continua si y pertenece a este intervalo. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número d_1 entre y_0 y $y_0 + h$ tal que

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1)$$

Si se sustituye de esta ecuación en (19) se obtiene $\Delta = h^2g'(d_1)$; por lo que de (20),

$$\Delta = h^2f_{xy}(c_1, d_1) \quad (21)$$

para algún punto (c_1, d_1) del disco abierto B . Ahora considere la función ϕ definida por

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \quad (22)$$

de modo que $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$. Por tanto, (13) puede expresarse como

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \quad (23)$$

De (22),

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y) \quad (24)$$

Puesto que, por hipótesis, cada término del miembro derecho de (24) existe en B , entonces ϕ' existe si y está en el intervalo cerrado que tiene como extremos a y_0 y $y_0 + h$. Por tanto, ϕ es continua en ese intervalo. De este modo, por el teorema del valor medio, existe un número d_2 entre y_0 y $y_0 + h$ tal que

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_2)$$

De esta ecuación y de (23) y (24),

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_2) - f_y(x_0, d_2)] \quad (25)$$

Ahora considere la función χ definida como

$$\chi(x) = f_y(x, d_2) \quad (26)$$

y escriba (25) como

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)] \quad (27)$$

De (26),

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_2) \quad (28)$$

y por el teorema del valor medio existe un número c_2 entre x_0 y $x_0 + h$ tal que

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_2)$$

De esta ecuación y de (27) y (28),

$$\Delta = h^2f_{yx}(c_2, d_2)$$

Con esta expresión para Δ y (21) se tiene

$$h^2f_{xy}(c_1, d_1) = h^2f_{yx}(c_2, d_2)$$

y como $h \neq 0$, entonces se puede dividir entre h^2 , lo cual proporciona

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \quad (29)$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) pertenecen a B .

Debido a que c_1 y c_2 están entre x_0 y $x_0 + h$, se tiene $c_1 = x_0 + \epsilon_1 h$, donde $0 < \epsilon_1 < 1$, y $c_2 = x_0 + \epsilon_2 h$, donde $0 < \epsilon_2 < 1$. De manera similar, como d_1 y d_2 están entre y_0 y $y_0 + h$, se tiene $d_1 = y_0 + \epsilon_3 h$, donde $0 < \epsilon_3 < 1$, y $d_2 = y_0 + \epsilon_4 h$, donde $0 < \epsilon_4 < 1$. Al efectuar estas sustituciones en (29) resulta

$$f_{xy}(x_0 + \epsilon_1 h, y_0 + \epsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \epsilon_2 h, y_0 + \epsilon_4 h)$$

Puesto que f_{xy} y f_{yx} son continuas en B , si se toma el límite de los dos miembros de esta ecuación conforme h tiende a cero, se obtiene

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

SUPLEMENTO 12.4

12.4.4 Teorema

Sea f una función de x y y y tal que $D_1 f$ y $D_2 f$ existen en un disco abierto $B(P_0, r)$, donde P_0 es el punto (x_0, y_0) . Si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en P_0 , entonces f es diferenciable en P_0 .

Demostración Consulte la figura 1, donde el punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está en el disco $B(P_0, r)$. Entonces

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Si se suma y resta $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ en el miembro derecho de esta ecuación se obtiene

$$\Delta f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] \quad (9)$$

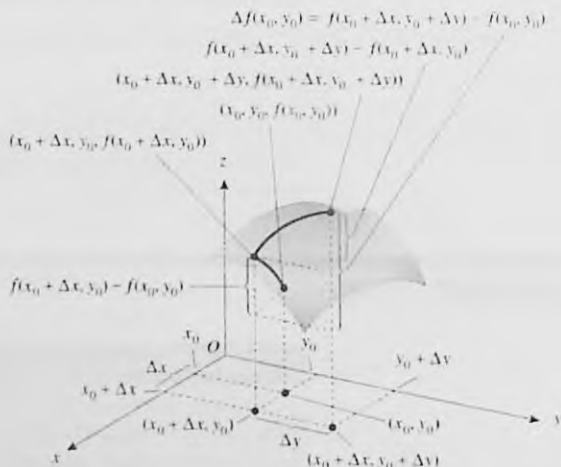


FIGURA 1

En el plano $y = y_0$, y es constante y x varía. Como $D_1 f$ existe en el plano $y = y_0$, se sabe por el teorema del valor medio que existe algún número c entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ tal que

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = D_1 f(c, y_0)$$

de donde

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x)D_1 f(c, y_0) \quad (10)$$

En el plano $x = x_0 + \Delta x$, x es constante y y varía. Puesto que $D_2 f$ existe en el plano $x = x_0 + \Delta x$, el teorema del valor medio afirma que existe algún punto d entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ tal que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = (\Delta y)D_2 f(x_0 + \Delta x, d)$$

Si se sustituye de esta ecuación y de (10) en (9) resulta

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta x)D_1 f(c, y_0) + (\Delta y)D_2 f(x_0 + \Delta x, d) \quad (11)$$

Debido a que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está en $B(P_0; r)$, c está entre x_0 y $x_0 + \Delta x$, y como $D_1 f$ es continua en P_0 , entonces

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} D_1 f(c, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \quad (12)$$

y como d está entre y_0 y $y_0 + \Delta y$, y $D_2 f$ es continua en P_0 , entonces

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} D_2 f(x_0 + \Delta x, d) = D_2 f(x_0, y_0) \quad (13)$$

Si

$$\epsilon_1 = D_1 f(c, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \quad (14)$$

y

$$\epsilon_2 = D_2 f(x_0 + \Delta x, d) - D_2 f(x_0, y_0) \quad (15)$$

entonces de (12) y (13) se obtiene, respectivamente,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2 = 0 \quad (16)$$

Al sustituir de (14) y (15) en (11) se tiene

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta x [D_1 f(x_0, y_0) + \epsilon_1] + \Delta y [D_2 f(x_0, y_0) + \epsilon_2]$$

de donde

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

De esta ecuación y (16), se cumple la definición 12.4.2; de modo que f es diferenciable en (x_0, y_0) . ■

SUPLEMENTO 12.8

12.8.5 Teorema Criterio de la segunda derivada

Sea f una función de dos variables tal que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en algún disco abierto $B((a, b); r)$. Además suponga que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(i) f tiene un valor mínimo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tiene un valor máximo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ no es un extremo relativo, pero f tiene un punto silla en $(a, b, f(a, b))$ si

$$D(a, b) < 0$$

(iv) No se puede concluir nada acerca de los extremos si

$$D(a, b) = 0$$

Demostración del inciso (i) Con el fin de simplificar la notación se define

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Dado que $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, se desea demostrar que $f(a, b)$ es un valor mínimo relativo de la función. Puesto que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en $B(a, b; r)$, entonces D también es continua en B . Por tanto, existe un disco abierto $B'(a, b; r')$, donde $r' \leq r$, tal que $D(x, y) > 0$ y $f_{xx}(x, y) > 0$ para todo punto (x, y) de B' . Sean h y k constantes, no ambas cero, tales que el punto $(a + h, b + k)$ esté en B' . Entonces las dos ecuaciones

$$x = a + ht \quad \text{y} \quad y = b + kt \quad 0 \leq t \leq 1$$

definen todos los puntos del segmento rectilíneo de (a, b) a $(a + h, b + k)$, y todos estos puntos están en B' . Sea F la función de una variable definida por

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) \quad (5)$$

Por la fórmula de Taylor (fórmula (2) de la sección 8.1),

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(z)}{2!}t^2$$

donde z está entre 0 y t . Si $t = 1$ en esta ecuación, se tiene

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(z) \quad (6)$$

donde $0 < z < 1$. Como $F(0) = f(a, b)$ y $F(1) = f(a + h, b + k)$, entonces de (6) se obtiene

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(z) \quad (7)$$

donde $0 < z < 1$.

A fin de calcular $F'(t)$ y $F''(t)$ a partir de (5) se utiliza la regla de la cadena, obteniéndose

$$F'(t) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \quad (8)$$

y

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + hk f_{yx} + hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + ht, b + kt)$. Del teorema 12.3.3, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todo (x, y) de B' . Así,

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} \quad (9)$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + ht, b + kt)$. Al sustituir 0 por t en (8) y z por t en (9) resulta

$$F'(0) = hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) \\ = 0$$

y

$$F''(z) = h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy}$$

donde cada segunda derivada parcial se evalúa en $(a + hz, b + kz)$ y donde $0 < z < 1$. Si se sustituyen estos valores de $F'(0)$ y $F''(z)$ en (7) se obtiene

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy}) \quad (10)$$

Los términos entre paréntesis del miembro derecho de (10) pueden escribirse como

$$h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy} = f''_{xx} \left[h^2 + 2hk \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} + \left(k \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} \right)^2 - \left(k \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} \right)^2 + k^2 \frac{f''_{yy}}{f''_{xx}} \right]$$

Así, de (10),

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{f''_{xx}}{2} \left[\left(h + \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} k \right) + \frac{f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2}{f''_{xx}{}^2} k^2 \right] \quad (11)$$

Como $f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy}{}^2$ evaluado en $(a + hz, b + kz)$ es igual a

$$D(a + hz, b + kz) > 0$$

entonces la expresión entre corchetes del miembro derecho de (11) es positivo. Además, puesto que $f''_{xx}(a + hz, b + kz) > 0$, entonces de (11),

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$$

En consecuencia se ha demostrado que

$$f(a + h, b + k) > f(a, b)$$

para cada punto $(a + h, b + k)$ de B' diferente de (a, b) . Por tanto, por la definición 12.7.1(ii), $f(a, b)$ es un valor mínimo relativo de f . ■

EJERCICIOS PARA EL SUPLEMENTO 12.8

1. Demuestre el inciso (ii) del teorema 12.8.5.
2. Demuestre el inciso (iii) del teorema 12.8.5.

TABLAS Y FORMULARIOS

TABLA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$
4. $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\operatorname{sen} u) = \cos u D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\operatorname{sen} u D_x u$
10. $D_x(\tan u) = \sec^2 u D_x u$
11. $D_x(\cot u) = -\operatorname{csc}^2 u D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \tan u D_x u$
13. $D_x(\operatorname{csc} u) = -\operatorname{csc} u \cot u D_x u$
14. $D_x(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$
16. $D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$
17. $D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$
19. $D_x(\operatorname{csc}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$
20. $D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u D_x u$
21. $D_x(\operatorname{cosh} u) = \operatorname{senh} u D_x u$
22. $D_x(\operatorname{tanh} u) = \operatorname{sech}^2 u D_x u$
23. $D_x(\operatorname{coth} u) = -\operatorname{csch}^2 u D_x u$
24. $D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tanh} u D_x u$
25. $D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \operatorname{coth} u D_x u$

TABLA DE INTEGRALES

Algunas formas elementales

1. $\int du = u + C$
2. $\int a du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas racionales que contienen $a + bu$

6. $\int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} [a + bu - a \ln|a + bu|] + C$
7. $\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2}(a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu| \right] + C$
8. $\int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right] + C$
9. $\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right] + C$
10. $\int \frac{u du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu} \right] + C$

11. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$
12. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$
13. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$

Formas que contienen $\sqrt{a+bu}$

14. $\int u\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
15. $\int u^2\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{105b^3} (15b^2u^2-12abu+8a^2)(a+bu)^{3/2} + C$
16. $\int u^n\sqrt{a+bu} du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)} \int u^{n-1}\sqrt{a+bu} du$
17. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
18. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu} + C$
19. $\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$
20. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C & \text{si } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C & \text{si } a < 0 \end{cases}$
21. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$
22. $\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
23. $\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^{n-1}}$

Formas que contienen $a^2 \pm u^2$

24. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
25. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{si } |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{si } |u| > a \end{cases}$
26. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{si } |u| < a \\ -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & \text{si } |u| > a \end{cases}$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

En las formulas 27 a 38, se puede sustituir

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| \text{ por } \operatorname{cosh}^{-1} \frac{u}{a}$$

$$\ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{a}{u}$$

$$27. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$28. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$29. \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$30. \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$31. \int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$32. \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$33. \int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$34. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$$

$$35. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$36. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

$$37. \int (u^2 \pm a^2)^{3/2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm 5a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$38. \int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$

$$39. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$40. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$41. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$42. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$= \sqrt{a^2 - u^2} - a \operatorname{cosh}^{-1} \frac{a}{u} + C$$

43. $\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2} \, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$
44. $\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$
45. $\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$
 $= -\frac{1}{a} \operatorname{cosh}^{-1} \frac{a}{u} + C$
46. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$
47. $\int (a^2 - u^2)^{3/2} \, du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$
48. $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que contienen $2au - u^2$

49. $\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
50. $\int u \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{2u^2 - au - 5a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
51. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2} \, du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
52. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2} \, du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
53. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
54. $\int \frac{u \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
55. $\int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$
56. $\int \frac{du}{u \sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$
57. $\int \frac{du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C$
58. $\int \frac{u \, du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a \sqrt{2au - u^2}} + C$

Formas que contienen funciones trigonométricas

59. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$
60. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$
61. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$
62. $\int \cot u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
63. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} u \right) \right| + C$
64. $\int \operatorname{csc} u \, du = \ln |\operatorname{csc} u - \cot u| + C = \ln \left| \tan \frac{1}{2} u \right| + C$

65. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
66. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
67. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
68. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
69. $\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$
70. $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$
71. $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u + C$
72. $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$
73. $\int \sec^n u \, du = -\frac{1}{n}\sec^{n-1}u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}u \, du$
74. $\int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n}\csc^{n-1}u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}u \, du$
75. $\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}u - \int \tan^{n-2}u \, du$
76. $\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}u - \int \cot^{n-2}u \, du$
77. $\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}u \, du$
78. $\int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2}u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}u \, du$
79. $\int \sin mu \sin nu \, du = -\frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$
80. $\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$
81. $\int \sin mu \cos nu \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$
82. $\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C$
83. $\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C$
84. $\int u^2 \sin u \, du = 2u \sin u + (2 - u^2) \cos u + C$
85. $\int u^2 \cos u \, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \sin u + C$
86. $\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$
87. $\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du$
88. $\int \sin^m u \cos^n u \, du = \frac{\sin^{m-1}u \cos^{n+1}u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2}u \cos^n u \, du$
 $= \frac{\sin^{m+1}u \cos^{n-1}u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2}u \, du$

Formas que contienen funciones trigonométricas inversas

89. $\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
90. $\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
91. $\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \ln \sqrt{1+u^2} + C$
92. $\int \cot^{-1} u \, du = u \cot^{-1} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C$
93. $\int \sec^{-1} u \, du = u \sec^{-1} u - \ln |u + \sqrt{u^2-1}| + C$
 $= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C$
94. $\int \csc^{-1} u \, du = u \csc^{-1} u + \ln |u + \sqrt{u^2-1}| + C$
 $= u \csc^{-1} u + \cosh^{-1} u + C$

Formas que contienen funciones exponenciales y logarítmicas

95. $\int e^u \, du = e^u + C$
96. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
97. $\int u e^u \, du = e^u(u-1) + C$
98. $\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du$
99. $\int u^n a^u \, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C$
100. $\int \frac{e^u \, du}{u^n} = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u \, du}{u^{n-1}}$

$$101. \int \frac{a^u du}{u^n} = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u du}{u^{n-1}}$$

$$102. \int \ln u du = u \ln u - u + C$$

$$103. \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$104. \int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$$

$$105. \int e^{au} \operatorname{sen} nu du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C$$

$$106. \int e^{au} \cos nu du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C$$

Formas que contienen funciones hiperbólicas

$$107. \int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$$

$$108. \int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$$

$$109. \int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$$

$$110. \int \coth u du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$$

$$111. \int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$$

$$112. \int \operatorname{csch} u du = \ln \left| \tanh \frac{1}{2} u \right| + C$$

$$113. \int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$$

$$114. \int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$$

$$115. \int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$116. \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$117. \int \operatorname{senh}^2 u du = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \frac{1}{2} u + C$$

$$118. \int \cosh^2 u du = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \frac{1}{2} u + C$$

$$119. \int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$$

$$120. \int \coth^2 u du = u - \coth u + C$$

$$121. \int u \operatorname{senh} u du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C$$

$$122. \int u \cosh u du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C$$

$$123. \int e^{au} \operatorname{senh} nu du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu) + C$$

$$124. \int e^{au} \cosh nu du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu) + C$$

FÓRMULAS DE ÁLGEBRA

Productos notables

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Factorización de polinomios

$$ax + ay + az = a(x + y + z)$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Exponentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$$

$$a^0 = 1 \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Radicales

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Desigualdades

si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

si $a < b$, entonces $a - c < b - c$

si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$

si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

si $b > 0$, $|x| < b$ equivale a $-b < x < b$

si $b > 0$, $|x| > b$ equivale a $x < -b$ o $x > b$

si $b > 0$, $x^2 < b$ equivale a $-\sqrt{b} < x < \sqrt{b}$

si $b > 0$, $b < x^2$ equivale a $x < -\sqrt{b}$ o $x > \sqrt{b}$

Logaritmos

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n \log_b u$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\text{cambio de base})$$

$$\ln x = \log_e x$$

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_n C_n b^n$$

$$\text{donde } {}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

La siguiente simbología se emplea para las medidas:

r : radio h : altura b : base a : base C : longitud de la circunferencia
 A : área S : área de la superficie B : área de la base V : volumen

$$\text{Círculo: } A = \pi r^2; C = 2\pi r$$

$$\text{Triángulo: } A = \frac{1}{2} bh$$

$$\text{Rectángulo y paralelogramo: } A = bh$$

$$\text{Trapecio: } A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

$$\text{Cilindro circular recto: } V = \pi r^2 h; S = 2\pi r h$$

$$\text{Cono circular recto: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h; S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

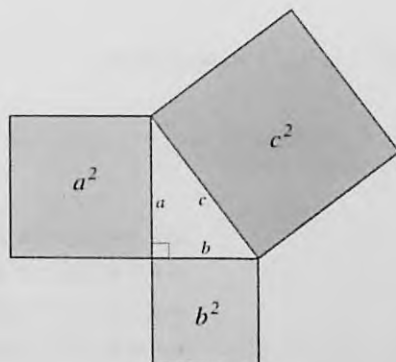
$$\text{Esfera: } V = \frac{4}{3} \pi r^3; S = 4\pi r^2$$

$$\text{Prisma (con bases paralelas): } V = Bh$$

$$\text{Pirámide: } V = \frac{1}{3} Bh$$

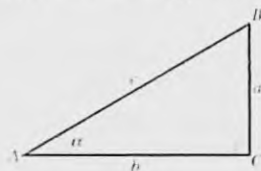
Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los lados perpendiculares y c es la longitud de la hipotenusa, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2$$



FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA

Funciones trigonométricas



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

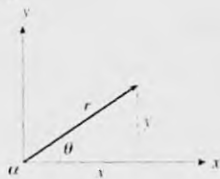
$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cot} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{c}{a}$$



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tan} \theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{r}{y}$$



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y_0}{r}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x_0}{r}$$

$$\operatorname{tan} \theta = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{x_0}{y_0}$$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{r}{x_0}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{r}{y_0}$$

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\operatorname{sen} x \operatorname{csc} x = 1$$

$$\operatorname{cos} x \operatorname{sec} x = 1$$

$$\operatorname{tan} x \operatorname{cot} x = 1$$

$$\operatorname{tan} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{cot} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tan}^2 x = \operatorname{sec}^2 x$$

$$1 + \operatorname{cot}^2 x = \operatorname{csc}^2 x$$

Identidades de sumas y diferencias

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v + \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v - \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{cos}(u + v) = \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{cos}(u - v) = \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{tan}(u + v) = \frac{\operatorname{tan} u + \operatorname{tan} v}{1 - \operatorname{tan} u \operatorname{tan} v}$$

$$\operatorname{tan}(u - v) = \frac{\operatorname{tan} u - \operatorname{tan} v}{1 + \operatorname{tan} u \operatorname{tan} v}$$

Identidades para ángulos dobles y semiángulos

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u$$

$$\operatorname{cos} 2u = \operatorname{cos}^2 u - \operatorname{sen}^2 u$$

$$\operatorname{cos} 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$$

$$\operatorname{cos} 2u = 2 \operatorname{cos}^2 u - 1$$

$$\operatorname{tan} 2u = \frac{2 \operatorname{tan} u}{1 - \operatorname{tan}^2 u}$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \operatorname{cos} 2u}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 u = \frac{1 + \operatorname{cos} 2u}{2}$$

$$\operatorname{tan}^2 u = \frac{1 - \operatorname{cos} 2u}{1 + \operatorname{cos} 2u}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t = \frac{1 - \operatorname{cos} t}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 \frac{1}{2} t = \frac{1 + \operatorname{cos} t}{2}$$

$$\operatorname{tan} \frac{1}{2} t = \frac{1 - \operatorname{cos} t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\operatorname{tan} \frac{1}{2} t = \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{cos} t}$$

Identidades para el producto, suma y diferencia de senos y cosenos

$$\operatorname{sen} u \operatorname{cos} v = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\operatorname{cos} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\operatorname{cos} u \operatorname{cos} v = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(u + v) + \operatorname{cos}(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(u - v) - \operatorname{cos}(u + v)]$$

$$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{s+t}{2} \right) \cos \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

$$\cos s + \cos t = 2 \cos \left(\frac{s+t}{2} \right) \cos \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos \left(\frac{s+t}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

$$\cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{s+t}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{s-t}{2} \right)$$

Algunas fórmulas de reducción

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) = \cos x$$

$$\cos \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan \left(\frac{1}{2}\pi - x \right) = \cot x$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) = \cos x$$

$$\cos \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) = -\operatorname{sen} x$$

$$\tan \left(\frac{1}{2}\pi + x \right) = -\cot x$$

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

Leyes de los senos y de los cosenos

En estas fórmulas a , b y c representan las medidas de los lados de un triángulo; α , β y γ denotan las medidas de los ángulos opuestos a los lados de medidas a , b y c , respectivamente.

Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Leyes de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

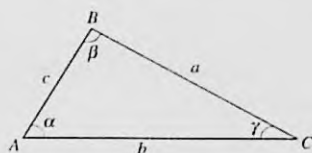


Tabla de valores especiales de las funciones trigonométricas

θ radianes o número real x	θ grados	$\operatorname{sen} \theta$ o $\operatorname{sen} x$	$\cos \theta$ o $\cos x$	$\tan \theta$ o $\tan x$	$\csc \theta$ o $\csc x$	$\sec \theta$ o $\sec x$	$\cot \theta$ o $\cot x$
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	Indefinido	1	Indefinido	0
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido	0

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tanh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{cosh} x} \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{cosh} x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{cosh} x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{tanh} x = \frac{1}{\operatorname{coth} x}$$

$$\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$1 - \operatorname{tanh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$1 - \operatorname{coth}^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$

$$\operatorname{cosh}(-x) = \operatorname{cosh} x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \operatorname{cosh} y + \operatorname{cosh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{cosh}(x + y) = \operatorname{cosh} x \operatorname{cosh} y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \operatorname{cosh} x$$

$$\operatorname{cosh} 2x = \operatorname{cosh}^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\operatorname{cosh} 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$$

$$\operatorname{cosh} 2x = 2 \operatorname{cosh}^2 x - 1$$

$$\operatorname{cosh} x + \operatorname{senh} x = e^x$$

$$\operatorname{cosh} x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$$

$$\operatorname{tanh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{para cualquier número real}$$

$$\operatorname{cosh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{tanh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad |x| > 1$$

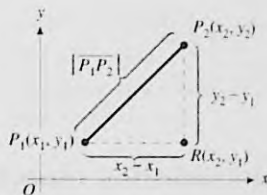
FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por

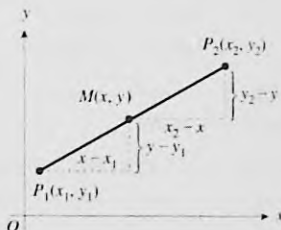
$$d(P_1P_2) = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Fórmulas del punto medio

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, entonces

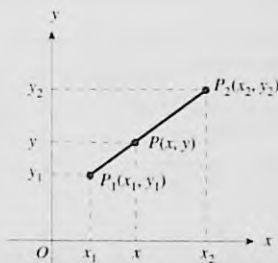
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Fórmulas del punto de división de un segmento en una razón dada

Si $P(x, y)$ es el punto que divide al segmento dirigido P_1P_2 en la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$, entonces

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad r \neq -1$$



Área de un triángulo

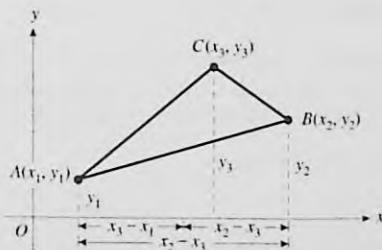
$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Observación:

El área será positiva sólo si se recorren los vértices del triángulo en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) sean colineales consiste en que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Gráfica de una ecuación y lugares geométricos

Problemas fundamentales de la geometría analítica

1. Interpretar geoméricamente una ecuación, es decir, construir la gráfica correspondiente
2. Determinar la ecuación de una figura geométrica, o de la condición que deben cumplir los puntos de la misma.

Principio fundamental de la geometría analítica

Las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación si y sólo si ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación.

Gráfica de una ecuación

La gráfica o lugar geométrico de una ecuación en R_2 es el conjunto de todos los puntos en R_2 , cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación.

Construcción de curvas

Determine:

- (a) las intersecciones en los ejes coordenados,
- (b) la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen,
- (c) la extensión de la curva (dominio y contradominio),
- (d) las asíntotas verticales u horizontales que la curva pueda tener.
- (e) las coordenadas de un número suficiente de puntos a fin de obtener a una gráfica adecuada.

Pruebas de simetría

La gráfica de una ecuación en x y y es

- (i) simétrica con respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación;
- (ii) simétrica con respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ en la ecuación;
- (iii) simétrica con respecto al origen si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación.



RECTA

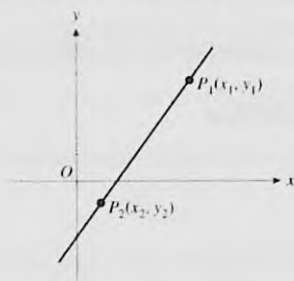
Pendiente de una recta

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta no vertical, entonces la pendiente de la recta es m , y está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

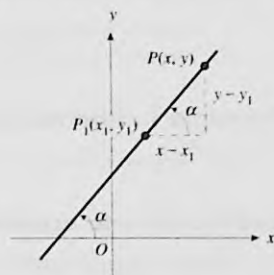
Ecuación de una recta

Forma de los dos puntos



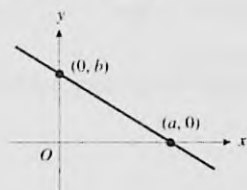
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad x_1 \neq x_2$$

Forma de punto pendiente



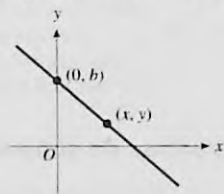
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma simétrica



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a \neq 0 \quad y \quad b \neq 0$$

Forma pendiente-intercepción



$$y = mx + b$$

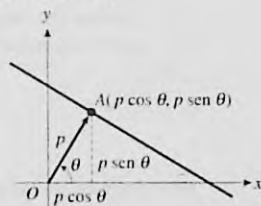
Forma general

$$Ax + By + C = 0$$

Forma de determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Forma normal



$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

Ángulo formado por dos rectas

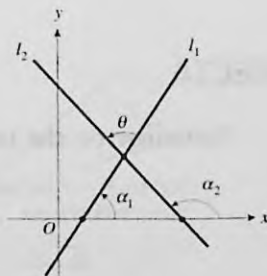
$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad m_1 m_2 \neq -1$$

Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas:

$$m_1 = m_2$$

Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares:

$$m_1 m_2 = -1$$



CIRCUNFERENCIA

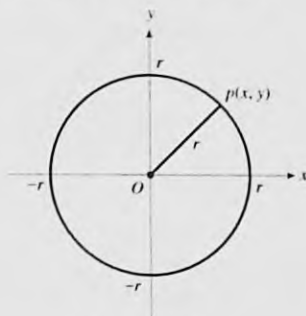
Forma centro-radio (canónica o estándar)

Constantes

Radio: r

Abscisa del centro: h

Ordenada del centro: k

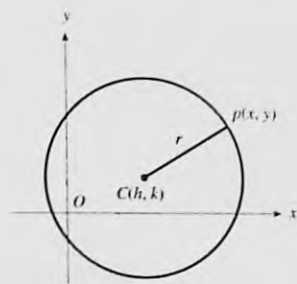


Ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Coordenadas del centro:

$C(0, 0)$, el origen



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$C(h, k)$

Forma general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Caso 1: $D^2 + E^2 - 4F > 0$

La circunferencia tiene centro en $(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + 4F}$

Caso 2: $D^2 + E^2 - 4F = 0$

La circunferencia es el punto $(-\frac{1}{2}D, -\frac{1}{2}E)$

Caso 3: $D^2 + E^2 - 4F < 0$

La circunferencia es el conjunto vacío

PARÁBOLA

Formas canónicas o estándar

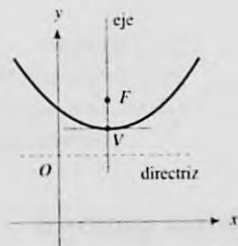
Constantes

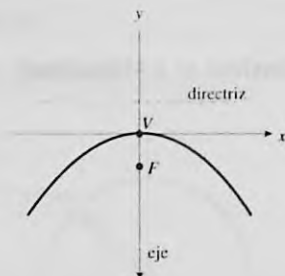
Distancia entre el vértice y el foco: p

Longitud del lado recto: $|4p|$

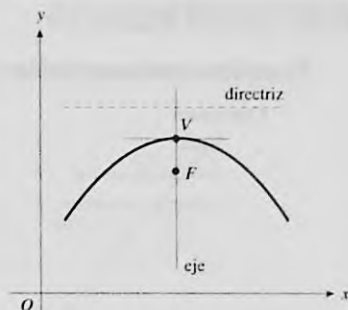
Eje paralelo al eje x

p positiva

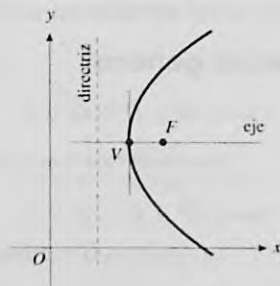
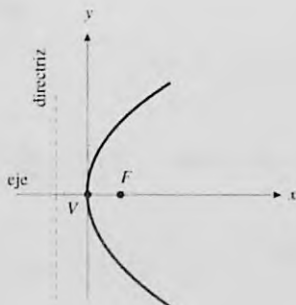
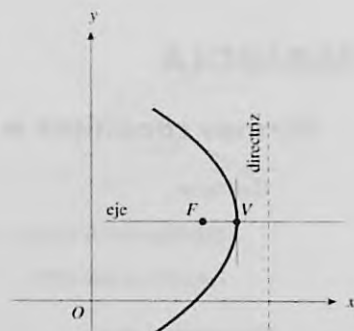
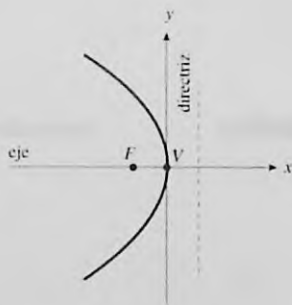


p negativa

Ecuación: $x^2 = 4py$
 Coordenadas del vértice: $V(0, 0)$
 Coordenadas del foco: $F(0, p)$
 Ecuación de la directriz: $y = -p$



$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
 $V(h, k)$
 $F(h, k + p)$
 $y = k - p$

Eje paralelo al eje y p positiva p negativa

Ecuación: $y^2 = 4px$
 Coordenadas del vértice: $V(0, 0)$
 Coordenadas del foco: $F(p, 0)$
 Ecuación de la directriz: $x = -p$

$(y - h)^2 = 4p(x - h)$
 $V(h, k)$
 $F(h + p, k)$
 $x = h - p$

Forma general

- (1) $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, eje paralelo al eje y
 (2) $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, eje paralelo al eje x

ELIPSE

Formas canónicas o estándar

Constantes

- Longitud del eje mayor: $2a$
- Longitud del eje menor: $2b$
- Distancia entre los focos: $2c$

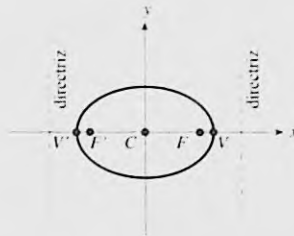
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$

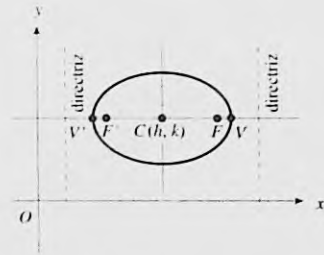
Relaciones

- $c < a$
- $a > b$
- $c^2 = a^2 - b^2$

Eje principal horizontal

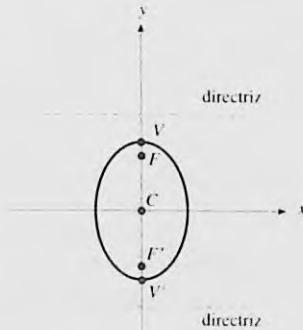


- Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Coordenadas de los vértices: $V(a, 0), V'(-a, 0)$
- Coordenadas de los focos: $F(c, 0), F'(-c, 0)$
- Coordenadas del centro: $C(0, 0)$
- Ecuaciones de las directrices: $x = \pm \frac{a}{e}$

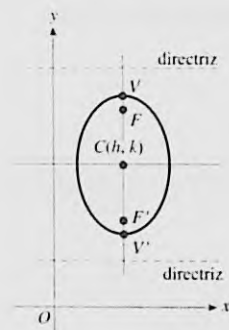


- Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
- Coordenadas de los vértices: $V(h+a, k), V'(h-a, k)$
- Coordenadas de los focos: $F(h+c, k), F'(h-c, k)$
- Coordenadas del centro: $C(h, k)$
- Ecuaciones de las directrices: $x = h \pm \frac{a}{e}$

Eje principal vertical



- Ecuación: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
- Coordenadas de los vértices: $V(0, a), V'(0, -a)$
- Coordenadas de los focos: $F(0, c), F'(0, -c)$
- Coordenadas del centro: $C(0, 0)$
- Ecuaciones de las directrices: $y = \pm \frac{a}{e}$



- Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
- Coordenadas de los vértices: $V(h, k+a), V'(h, k-a)$
- Coordenadas de los focos: $F(h, k+c), F'(h, k-c)$
- Coordenadas del centro: $C(h, k)$
- Ecuaciones de las directrices: $y = k \pm \frac{a}{e}$

Forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad AC > 0$$

HIPÉRBOLA

Formas canónicas o estándar

Constantes

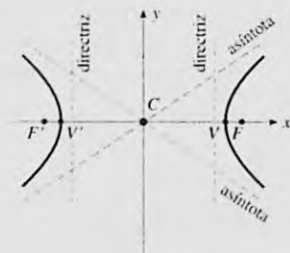
Longitud del eje transverso:	$2a$
Longitud del eje conjugado:	$2b$
Distancia entre los focos:	$2c$
Excentricidad:	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$
Longitud del lado recto:	$\frac{2b^2}{a}$

Relaciones

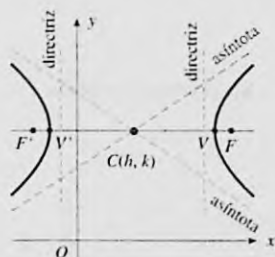
$$c > a$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Eje principal horizontal



Ecuación:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(a, 0), V(-a, 0)$
Coordenadas de los focos:	$F(c, 0), F(-c, 0)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$
Ecuaciones de las directrices:	$x = \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

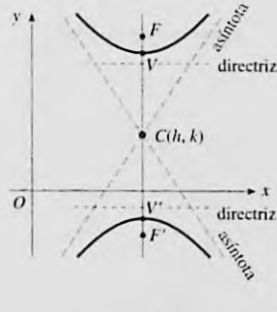


Ecuación:	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(h+a, k), V(h-a, k)$
Coordenadas de los focos:	$F(h+c, k), F(h-c, k)$
Coordenadas del centro:	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$x = h \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$

Eje principal vertical



Ecuación:	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(0, a), V(0, -a)$
Coordenadas de los focos:	$F(0, c), F(0, -c)$
Coordenadas del centro:	$C(0, 0)$
Ecuaciones de las directrices:	$y = \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$



Ecuación:	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Coordenadas de los vértices:	$V(h, k+a), V(h, k-a)$
Coordenadas de los focos:	$F(h, k+c), F(h, k-c)$
Coordenadas del centro:	$C(h, k)$
Ecuaciones de las directrices:	$x = k \pm \frac{a}{e}$
o bien:	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$

Forma general

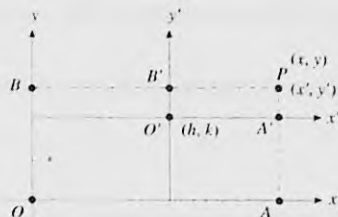
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad AC < 0$$

TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

Traslación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado, y (x', y') es la representación de P después de que los ejes son trasladados a un nuevo origen que tiene coordenadas (h, k) con respecto a los ejes dados, entonces

$$x' = x - h \quad y' = y - k$$

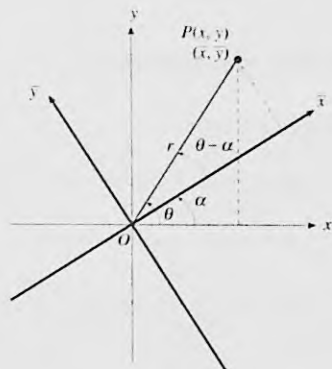


Rotación de ejes

Si (x, y) representa un punto P con respecto a un conjunto de ejes dado y (\bar{x}, \bar{y}) es una representación de P después de que los ejes han sido rotados un ángulo α , entonces

$$(i) \begin{cases} x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \\ y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$



ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuando A y C no son ambos cero, es una cónica o una cónica degenerada. Si es una cónica, entonces la gráfica es

- (i) una *parábola* si $A = 0$ o $C = 0$, esto es $AC = 0$;
- (ii) una *elipse* si A y C tienen el mismo signo, es decir, $AC > 0$,
- (iii) una *hipérbola* si A y C tienen signos opuestos, esto es, $AC < 0$.

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, o bien, una cónica degenerada. Si la gráfica es una cónica, entonces es

- (i) una *parábola* si $B^2 - 4AC = 0$;
- (ii) una *elipse* si $B^2 - 4AC < 0$;
- (iii) una *hipérbola* si $B^2 - 4AC > 0$.

COORDENADAS POLARES

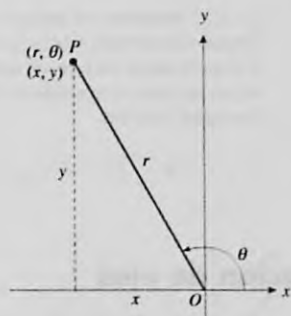
Transformaciones de coordenadas

Coordenadas polares a cartesianas

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Coordenadas cartesianas a polares

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



Criterios de simetría

Una gráfica polar es

- simétrica con respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, -\theta)$ o por $(-r, \pi - \theta)$;
- simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$ si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(r, \pi - \theta)$ o por $(-r, -\theta)$;
- simétrica con respecto al polo si se obtiene una ecuación equivalente cuando (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta)$ o por $(r, \pi + \theta)$.

Ecuaciones polares de rectas y circunferencias

C, a y b son constantes

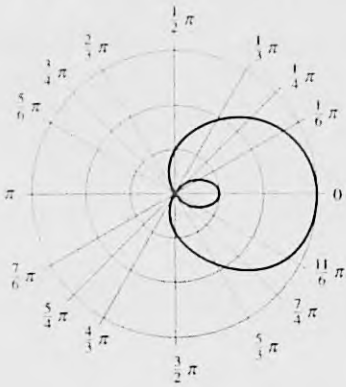
$\theta = C$	Recta que contiene al polo; forma un ángulo de C radianes con el eje polar.
$r \operatorname{sen} \theta = b$	Recta paralela al eje polar; arriba del eje polar si $b > 0$, debajo del eje polar si $b < 0$.
$r \cos \theta = a$	Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$; a la derecha del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a > 0$, a la izquierda del eje $\frac{1}{2}\pi$ si $a < 0$.
$r = C$	Circunferencia; centro en el polo; radio C .
$r = 2a \cos \theta$	Circunferencia; radio $ a $; tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$; centro en el eje polar o en su prolongación.
$r = 2b \operatorname{sen} \theta$	Circunferencia; radio $ b $; tangente al eje polar; centro en el eje $\frac{1}{2}\pi$ o en su prolongación.

Tipos de caracoles

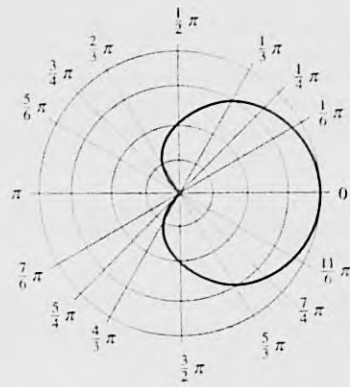
De la ecuación $r = a + b \cos \theta$, donde $a > 0$ y $b > 0$:

- | | |
|---------------------------|--|
| (a) $0 < \frac{a}{b} < 1$ | Caracol con lazo. Consulte la figura (i). |
| (b) $\frac{a}{b} = 1$ | Cardioide. Refiérase a la figura (ii). |
| (c) $1 < \frac{a}{b} < 2$ | Caracol con hendidura. Consulte la figura (iii). |
| (d) $2 \leq \frac{a}{b}$ | Caracol convexo (sin hendidura). Refiérase a la figura (iv). |

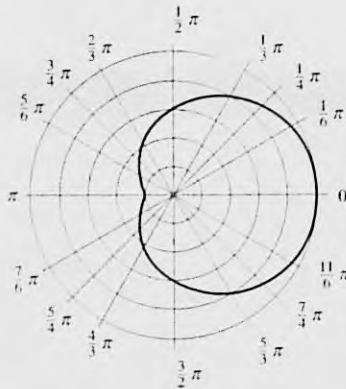
Tipos de caracoles (continuación)



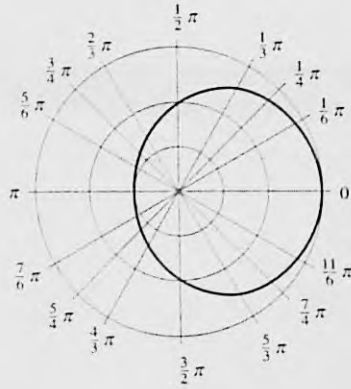
$0 < \frac{a}{b} < 1$
caracol con lazo
(i)



$\frac{a}{b} = 1$
cardioide
(ii)



$1 < \frac{a}{b} < 2$
caracol con hendidura
(iii)



$2 < \frac{a}{b}$
caracol convexo
(iv)

Simetría y dirección de un caracol

$a > 0$ y $b > 0$

- $r = a + b \cos \theta$ Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha.
- $r = a - b \cos \theta$ Simetría con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda.
- $r = a + b \sin \theta$ Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba
- $r = a - b \sin \theta$ Simetría con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo.

Ecuaciones polares de las cónicas

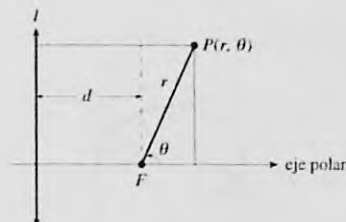
Una sección cónica puede definirse como un conjunto de puntos P en un plano tal que la razón entre la distancia no dirigida a P desde un punto fijo y la distancia no dirigida a P desde una recta fija que contenga al punto fijo, es una constante positiva e . Además si $e = 1$, la cónica es una parábola; si $0 < e < 1$, es una elipse, y si $e > 1$, es una hipérbola.

Suponga que se tiene una cónica para la cual e y d son, respectivamente, la excentricidad y la distancia no dirigida entre el foco y la directriz correspondiente.

- (i) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es perpendicular al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta}$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, el cual está en el polo, se encuentra a su derecha, y se toma el signo menos cuando la directriz está a la izquierda del foco.



- (ii) Si un foco de la cónica está en el polo y la directriz correspondiente es paralela al eje polar, entonces una ecuación de la cónica es

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta}$$

donde el signo más se toma cuando la directriz correspondiente al foco, el cual está en el polo, se encuentra arriba, y se toma el signo menos cuando la directriz está debajo del foco.

ALFABETO GRIEGO

A, α	alfa	I, i	iota	P, ρ	ro
B, β	beta	K, κ	kapa	Σ , σ	sigma
Γ , γ	gama	Λ , λ	lambda	T, τ	tau
Δ , δ	delta	M, μ	mu	Y, ν	ípsilon
E, ϵ	épsilon	N, ν	nu	Φ , ϕ	fi
Z, ζ	zeta	Ξ , ξ	xí	X, χ	ji
H, η	eta	O, o	ómicon	Ψ , ψ	psi
Θ , θ	theta	Π , π	pi	Ω , ω	omega

PUESTAS DE LOS EJERCICIOS IMPARES

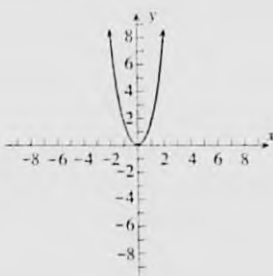
EJERCICIOS 1.1 (página 10)

1. (a) dominio: $[4, +\infty)$; (b) dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (c) dominio: $[-2, 2]$; (d) no es función
 3. (a) dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) no es función; (c) dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) dominio: $(-\infty, +\infty)$
 5. (a) 5; (b) -5; (c) -1; (d) $2a + 1$; (e) $2x + 1$; (f) $4x - 1$; (g) $4x - 2$; (h) $2x + 2h - 1$; (i) $2x + 2h - 2$; (j) 2
 7. (a) -5; (b) -6; (c) -3; (d) 30; (e) $2h^2 + 9h + 4$; (f) $8x^3 + 10x^2 - 3$; (g) $2x^4 - 7x^2$; (h) $2x^2 + (4h + 5)x + (2h^2 + 5h - 3)$; (i) $2x^2 + 5x + (2h^2 + 5h - 6)$; (j) $4x + 2h + 5$
 9. (a) $\sqrt{x + 18}$; (b) $|x|$; (c) x^2 ; (d) $|x + 3|$; (e) $|x^2 - 3|$; (f) $\frac{1}{\sqrt{x + h + 9} + \sqrt{x + 9}}$

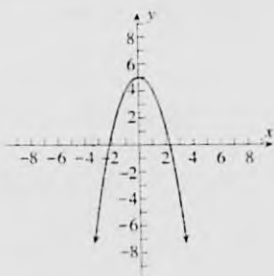
11. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $(-\infty, +\infty)$



13. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $[0, +\infty)$



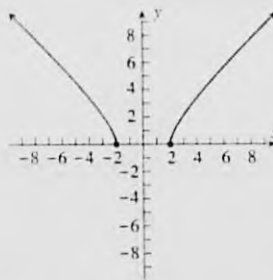
15. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $(-\infty, 5]$



17. dominio: $[1, +\infty)$;
 contradominio: $[0, +\infty)$



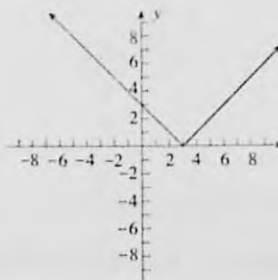
19. dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$;
 contradominio: $[0, +\infty)$



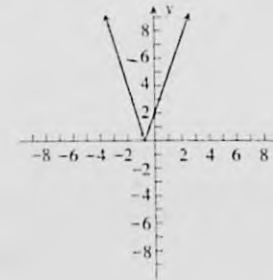
21. dominio: $[-3, 3]$;
 contradominio: $[0, 3]$



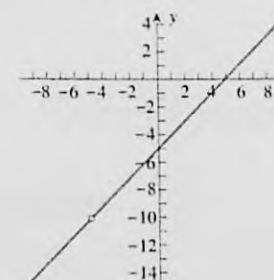
23. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $[0, +\infty)$



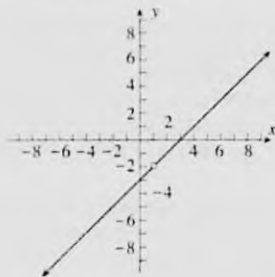
25. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $[0, +\infty)$



27. dominio: $\{x \mid x \neq -5\}$;
 contradominio: $\{y \mid y \neq -10\}$



29. dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$;
contradominio: $\{y \mid y \neq -2\}$



31. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $\{-2, 2\}$



33. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $\{y \mid y \neq 3\}$



35. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $[-4, +\infty)$



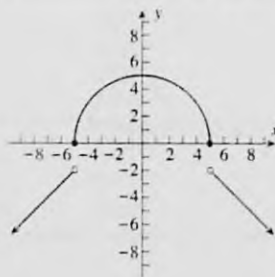
37. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, +\infty)$



39. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, 6)$



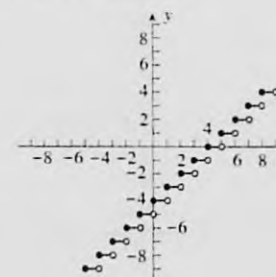
41. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $(-\infty, -2) \cup [0, 5]$



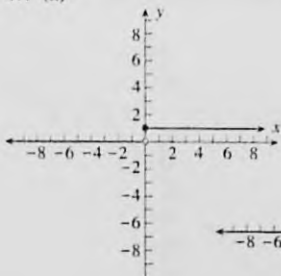
43. dominio: $\{x \mid x \neq 2\}$;
contradominio: $[0, +\infty)$



45. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
contradominio: $\{\text{enteros}\}$

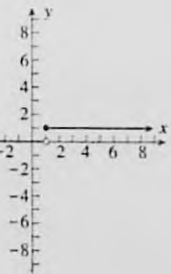


47. (a)



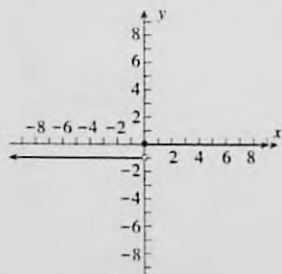
(b) $U(x - 1)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



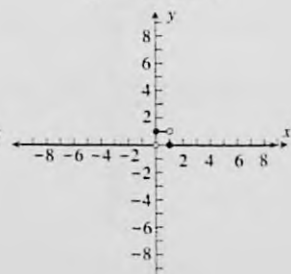
(c) $U(x) - 1$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$



(d) $U(x) - U(x - 1)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



49. (a)


 (b) $x \operatorname{sgn} x$

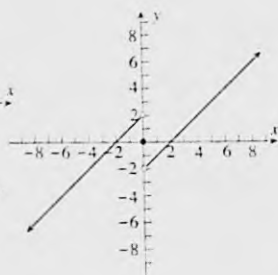
$$= \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x \end{cases} = |x|$$


 (c) $2 - x \operatorname{sgn} x$

$$= \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$


 (d) $x - 2 \operatorname{sgn} x$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$



$$51. f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$55. (a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

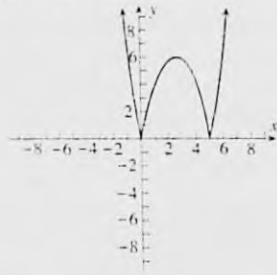
(b)



$$53. f_1(x) = x, f_2(x) = -x, \text{ o, } f_1(x) = |x|, f_2(x) = -|x|$$

$$57. (a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < 0 \\ 5x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

(b)


 59. dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $[0, 1)$


$$61. N: f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2; \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$V: f(x) = |x| \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1$$

EJERCICIOS 1.2 (página 19)

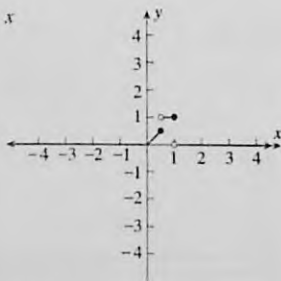
1. (a) $x^2 + x - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $-x^2 + x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x^3 - 5x^2 - x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\frac{x-5}{x^2-1}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$; (e) $\frac{x^2-1}{x-5}$, dominio: $\{x \mid x \neq 5\}$

3. (a) $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (b) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$;
 (c) $\frac{x + 1}{x^2 - x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$; (d) $\frac{x^2 + x}{x - 1}$, dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$;
 (e) $\frac{x - 1}{x^2 + x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$;
5. (a) $\sqrt{x} + x^2 - 1$, dominio: $[0, +\infty)$; (b) $\sqrt{x} - x^2 + 1$, dominio: $[0, +\infty)$; (c) $\sqrt{x}(x^2 - 1)$, dominio: $[0, +\infty)$;
 (d) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$, dominio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; (e) $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$
7. (a) $x^2 + 3x - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 3x + 3$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$,
 dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\frac{x^2 + 1}{3x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq \frac{2}{3}\}$; (e) $\frac{3x - 2}{x^2 + 1}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$
9. (a) $\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; (b) $\frac{-x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$;
 (c) $\frac{x}{x^2 - x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 2\}$; (d) $\frac{x - 2}{x^2 + x}$, dominio: $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$;
 (e) $\frac{x^2 + x}{x - 2}$, dominio: $\{x \mid x \neq 2\}$; 11. 15 13. $\frac{5}{3}$
15. (a) $x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x + 5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 4$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $x + 14$,
 dominio: $(-\infty, +\infty)$; 17. (a) $x^2 - 6$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 10x + 24$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 10$,
 dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $x^4 - 2x^2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; 19. (a) $\sqrt{x^2 - 4}$, dominio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (b) $x - 4$,
 dominio: $[2, +\infty)$; (c) $\sqrt{\sqrt{x - 2} - 2}$, dominio: $[6, +\infty)$; (d) $x^4 - 4x^2 + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$
21. (a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$; (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, dominio: $(0, +\infty)$; (c) x , dominio: $\{x \mid x \neq 0\}$; (d) $\sqrt[4]{x}$, dominio: $[0, +\infty)$
23. (a) $|x + 2|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $|x| + 2$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $|x|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $|x + 2| + 2$,
 dominio: $(-\infty, +\infty)$; 25. (a) $|x|$, dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) x , dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $\sqrt[4]{x}$, dominio: $[0, +\infty)$;
 (d) $\sqrt[4]{-x}$, dominio: $(-\infty, 0]$; 27. $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $g(x) = x^2$; o, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$
29. $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x - 2}$; o, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3$, $g(x) = x - 2$
31. $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2 + 4x - 5$; o, $f(x) = (x - 5)^4$, $g(x) = x^2 + 4x$ 33. (a) par; (b) ninguno de los dos tipos
35. (a) impar; (b) par 37. (a) impar; (b) par 39. (a) impar; (b) par; (c) par
41. (a) $\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$ (c) impar 43. (a) $\begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ (c) impar 45. No

51. $\text{sgn}(U(x)) = U(\text{sgn}(x)) = U(x)$; vea la figura de la respuesta del ejercicio 47(a) de la sección 1.1

53. (a) impar; (b) par; (c) par

$$55. (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ o si } 1 < x \\ x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



57. $2x - 3, -2x + 3$

59. La función definida por $f(x) = 0$

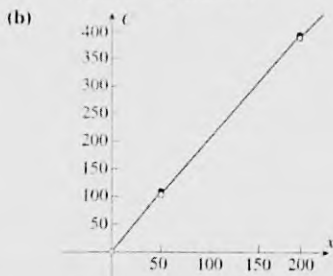
EJERCICIOS 1.3 (página 25)

1. (a) w trabajadores, P dólares: $P(w) = 67.5w$; (b) \$1012.50

3. (a) x pie, P : $P(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$; (b) 1s

5. (a) x libras, C dólares.

$$C(x) = \begin{cases} 2.2x & \text{si } 0 < x \leq 50 \\ 2.1x & \text{si } 50 < x \leq 200 \\ 2.05x & \text{si } 200 < x \end{cases}$$



(c) \$110, 107.10, 109.20, 111.30,
420, 414.10, 418.20, 422.30

9. (a) $f(t) = \frac{2000000}{(t^2 + 7t + 100)^2}$; (b) 78

11. (a) El área de la superficie del globo después de t segundos es $36\pi t^2 \text{ cm}^2$; (b) $576\pi \text{ cm}^2 = 1810 \text{ cm}^2$

13. (a) x metros, A metros cuadrados. $A(x) = 120x - x^2$; (b) $[0, 120]$; (c) $60 \text{ m} \times 60 \text{ m}$

15. (a) x metros, A metros cuadrados. $A(x) = 120x - \frac{1}{2}x^2$; (b) $[0, 240]$; (c) $120 \text{ m} \times 60 \text{ m}$

17. (a) x pulgadas., V pulgadas cúbicas. $V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$; (b) $[0, 4]$; (c) 1.7 pulg, 91 pulg³

19. (a) x pulgadas., V pulgadas cúbicas. $V(x) = 4x^3 - 54x^2 + 180x$; (b) $[0, 6]$; (c) 2.21 pulg, 177 pulg³

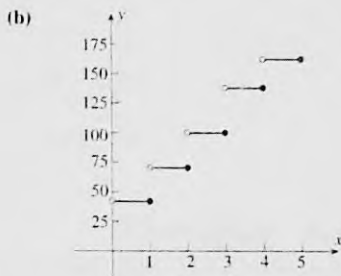
21. (a) r pulgadas, C dólares. $C(r) = k\left(\frac{120}{r} + 4\pi r^2\right)$, donde Sk/pulg^2 es el costo del material para la tapa y el fondo;

(b) $\{r \mid r > 0\}$; (c) 1.68 pulg 23. (a) x pulgadas, A pulgadas cuadradas. $A(x) = 3x + \frac{48}{x} + 30$; (b) $(0, +\infty)$;
(c) 6 pulg \times 9 pulg

25. (a) x pulgadas, V pulgadas cúbicas. $V(x) = \frac{1}{16}x(100 - x)^2$; (b) $[20, 100]$; (c) 33 pulg \times 17 pulg \times 17 pulg

27. (a) $f(x) = \frac{9}{390000}x(5000 - x)$; (b) 17.6 personas por día; (c) 2500

7. (a) x minutos, y centavos; $y(x) = 10 - 30[|-x|]$



(c) 40¢, 70¢, \$1, \$1, \$1.30, \$1.60

EJERCICIOS 1.4 (página 37)

(Nota: cualquier valor para δ más pequeño que los indicados también es correcto.) 1. 0.1 3. 0.23 5. 0.005 7. 0.01 9. 0.005

11. 0.01 13. 0.015 15. 0.268 17. 0.082 19. 0.095 21. 0.183 23. 0.084 25. 0.23 27. 0.01 29. 0.015 31. $\frac{1}{14}$ 33. $\frac{2}{15}$

35. $\frac{1}{15}$ 37. dentro de 1 min 39. dentro de 0.01 pie 41. dentro de $\frac{2}{7}$ pulg 43. dentro de $\frac{1}{8}$ s

EJERCICIOS 1.5 (página 47)

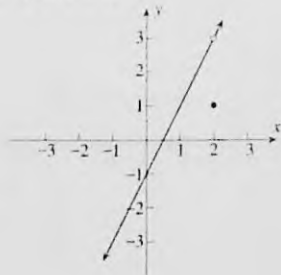
11. 8 13. 7 15. 5.0 17. $\frac{1}{2}$ 19. $-\frac{1}{22}$ 21. $\frac{3}{2}$ 23. $\frac{2}{3}$ 25. (a) 0.3333, 0.2857, 0.2564, 0.2506, 0.2501, 0.2000, 0.2222, 0.2439,

0.2494, 0.2499; (b) $\frac{1}{4}$ 27. (a) 0.2500, 0.2000, 0.1549, 0.1441, 0.1430, 0.1429; 0, 0.0769, 0.1304, 0.1416, 0.1427, 0.1428;

(b) $\frac{1}{7}$ 29. (a) 0.1716, 0.1690, 0.1671, 0.1667, 0.1667, 0.1623, 0.1644, 0.1662, 0.1666, 0.1667; (b) $\frac{1}{6}$ 31. 14 33. -6

35. $\frac{16}{7}$ 37. 12 39. $\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{30}$ 41. $\frac{1}{2}$ 43. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ 45. -1 49. 0/0 no está definido; 2 51. 0/0 no está definido; $\frac{1}{6}$

53. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$; $f(2) = 1$

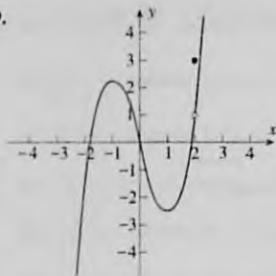


55. (a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$; (b) 0, 3, 2; (c) 0, 3, 6

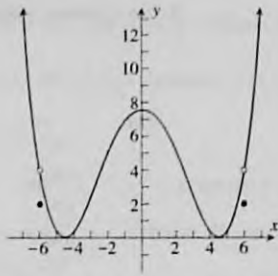
57. (a) $f(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x = -4 \\ 7 & \text{si } x = 3 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } x \in [-5, -4) \cup (-4, 3) \cup (3, 5] \end{cases}$;

(b) 5, 4, 6, 3; (c) 3, 4, 4, 3

59.



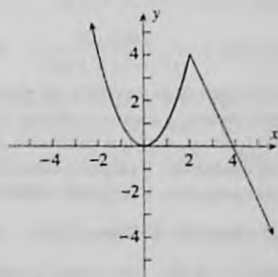
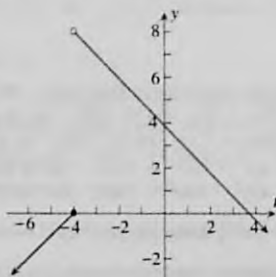
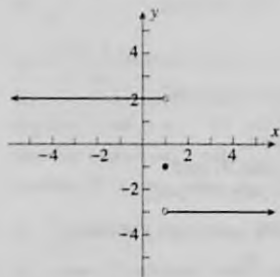
61.


EJERCICIOS 1.6 (página 53)

 1. (a) -3; (b) 2; (c) no existe
 porque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

 3. (a) 8; (b) 0; (c) no existe
 porque $\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)$

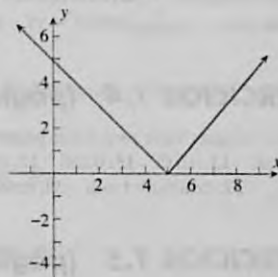
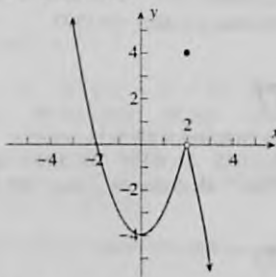
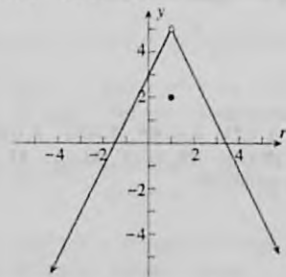
5. (a) 4; (b) 4; (c) 4



7. (a) 5; (b) 5; (c) 5

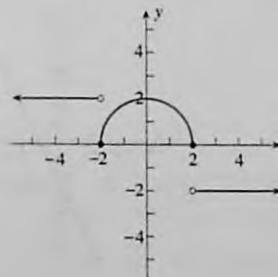
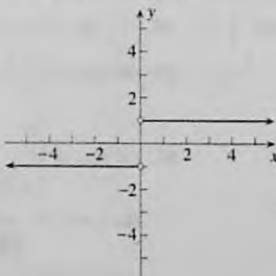
9. (a) 0; (b) 0; (c) 0

11. (a) 0; (b) 0; (c) 0

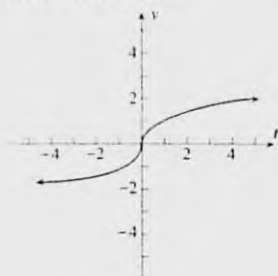
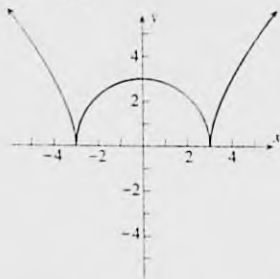


13. (a) -4; (b) -4; (c) -4

 15. (a) 1; (b) -1; (c) no existe
 porque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

 17. (a) 2; (b) 0; (c) no existe
 porque $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$;
 (d) 0; (e) -2; (f) no existe
 porque $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$


19. (a) 0; (b) 0; (c) 0


 21. (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0;
(e) 0; (f) 0


23. (a) -2; (b) 2; (c) no existe

25. (a) 2; (b) 1; (c) no existe

27. (a) -1; (b) 1; (c) no existe


 29. -6 31. $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$

 35. (a) 0; (b) 3; (c) 0; (d) no existe; (e) 5; (f) 5; (g) 5; (h) 2; (i) 2;
(j) 2; (k) 0

39. (a) 110; (b) 105; (c) 420; (d) 410 41. (a) 40; (b) 70; (c) 70; (d) 160

 43. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$,

$$(c) f(x)g(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}; (d) 4$$

37.



EJERCICIOS 1.7 (página 65)

 1. (a) 1, 2, 10, 100, 1000, 10000; (c) $+\infty$ 3. (a) 1, 4, 100, 10000, 1000000, 100000000; 1, 4, 100, 10000, 1000000, 100000000; (c) $+\infty$ 5. (a) -4, -7, -31, -301, -3001, -30,001; (c) $-\infty$ 7. (a) -2, -5, -29, -299, -2999, -29999; (c) $-\infty$ 9. (a) 5, 9, 41, 401, 4001, 40001; (c) $+\infty$ 11. (a) 2.3, 4.3, 20.3, 200.3, 2000.5, 20037; (c) $+\infty$

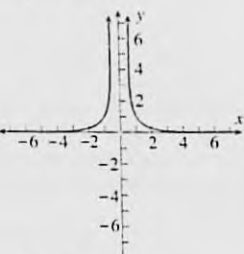
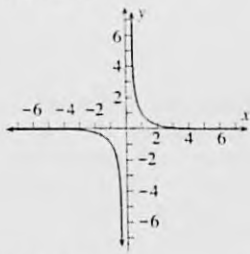
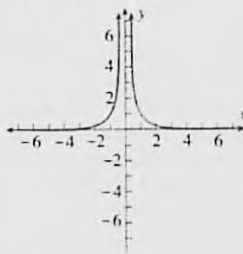
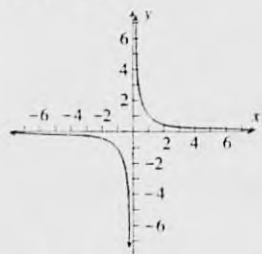
 13. $+\infty$ 15. $-\infty$ 17. $-\infty$ 19. $+\infty$ 21. $-\infty$ 23. $+\infty$ 25. $+\infty$ 27. $-\infty$ 29. $-\infty$ 31. $-\infty$

 33. (b) $-\frac{5}{2}$; (c) $-\frac{5}{2}$; (d) $-\infty$; (e) $+\infty$

 35. (a) $x = 0$;

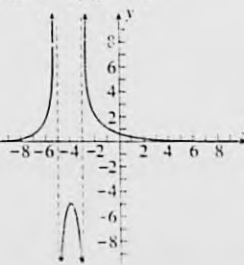
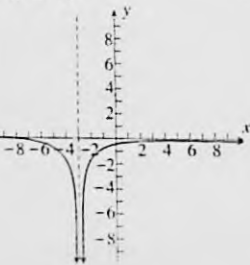
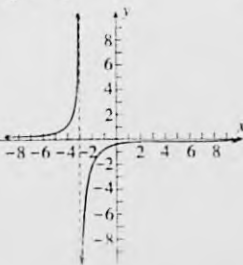
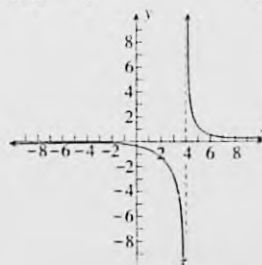
 (b) $x = 0$;

 (c) $x = 0$;

 (d) $x = 0$

 37. $x = 4$

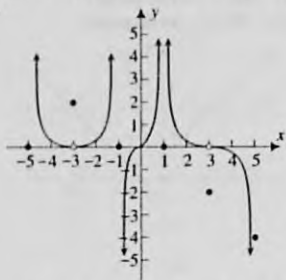
 39. $x = -3$

 41. $x = -3$

 43. $x = -5$, $x = -3$


45. (a) 0; (b) $-\infty$; (c) $+\infty$; (d) 0; (e) $+\infty$; (f) $+\infty$; (g) $+\infty$; (h) 1; (i) $-\infty$; (j) 0

47. 49. $+\infty$



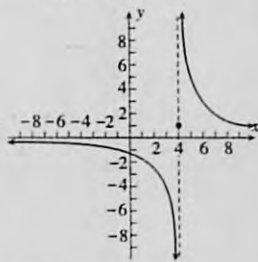
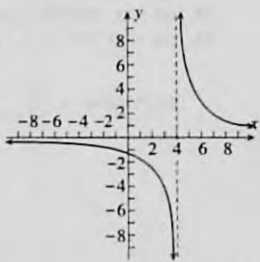
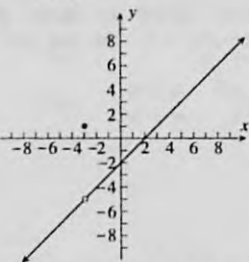
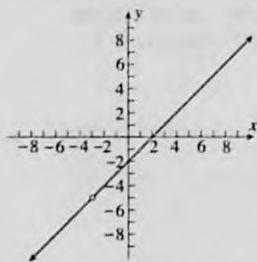
EJERCICIOS 1.8 (página 74)

1. -3 ; $f(-3)$ no existe

3. -3 ; $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) \neq g(-3)$

5. 4 ; $h(4)$ no existe

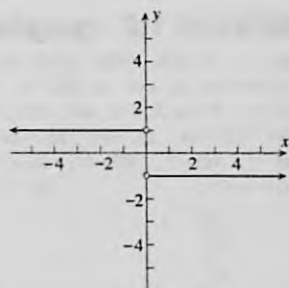
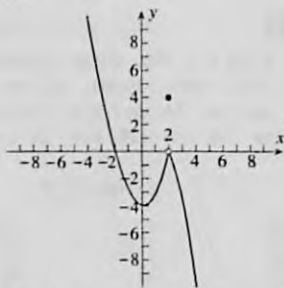
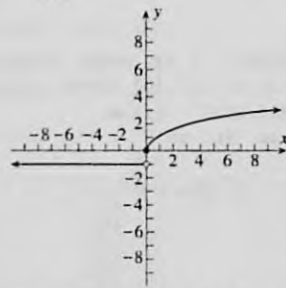
7. 4 ; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ no existe



9. 0 ; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe

11. 2 ; $\lim_{t \rightarrow 2} g(t) \neq g(2)$

13. 0 ; $f(0)$ no existe



15. (a) removable; (b) 4 17. (a) removable; (b) 6 19. (a) removable; (b) $\frac{1}{6}$ 21. (a) removable; (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

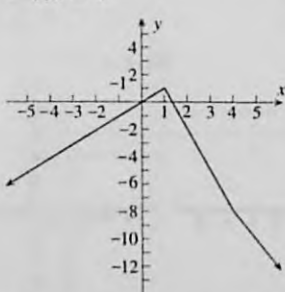
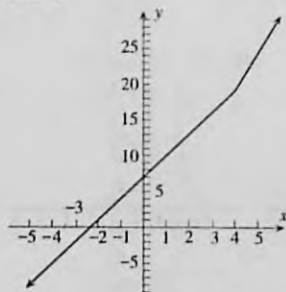
23. (a) removable; (b) $\frac{1}{12}$ 25. (a) removable; (b) 1 27. (a) esencial 29. todos los números reales

31. todos los números reales distintos de 3 33. todos los números reales distintos de -2 y 2

35. todos los números reales distintos de 2 37. todos los números reales distintos de -1 y 3 39. (a) todos los números reales

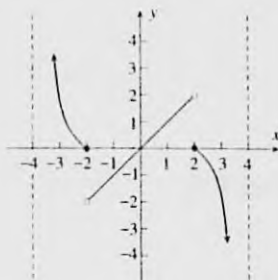
41. $k = 5$

43. $c = -3, k = 4$



45. (a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, esencial; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$, removable: defina $f(1) = 5$; (c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ no existe, esencial

47.



49. $\lim_{x \rightarrow 50^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 50^+} f(x)$; 200 ; $\lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 200^+} f(x)$

51. $\lim_{x \rightarrow n^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow n^+} g(x)$ para cualquier número entero positivo n

59. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \end{cases}; g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } a \leq x \end{cases}$

EJERCICIOS 1.9 (página 83)

1. (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$, continua en todos los números de $(-3, 3)$;

(b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 16}$, continua en todos los números de $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

3. (a) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, continua en todos los números de $(2, +\infty)$;

(b) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, continua en todos los números positivos diferentes de 4

5. $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{|x|-1}}$, continua en todos los números de $(-2, -1) \cup (1, 2)$

 7. todos los números reales distintos de -5 ; continua en $(3, 7)$, $(-5, +\infty)$, $[-10, -5]$; discontinua en $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $[-5, +\infty)$

 9. todos los números reales distintos de 1 y -1 ; continua en $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0]$, $(1, +\infty)$; discontinua en $[0, 1]$, $(-\infty, -1]$

 11. $(-\infty, -3] \cup [3, \pm\infty)$; continua en $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$, $(-\infty, -3]$, $[3, +\infty)$; discontinua en $(-3, 3)$

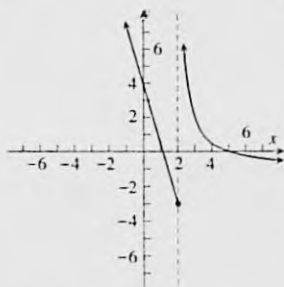
 13. todos los números reales distintos de 1 ; continua en $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$; discontinua en $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$

 15. $[-2, 2]$; continua en $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $(-2, 2]$, $[-2, 2)$; discontinua en $(-\infty, -2]$ y $(2, +\infty)$

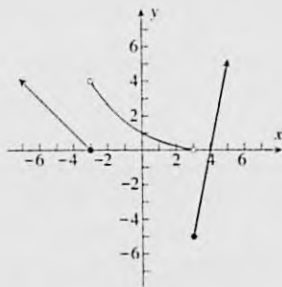
 17. (a) $[-3, 3]$; (b) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ 19. (a) $(2, +\infty)$; (b) $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ 21. $[-2, -1) \cup (1, 2]$

 23. $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup (2, +\infty)$

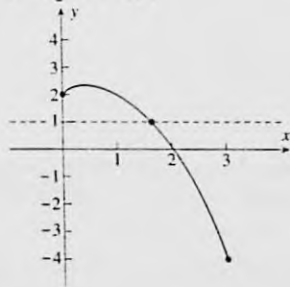
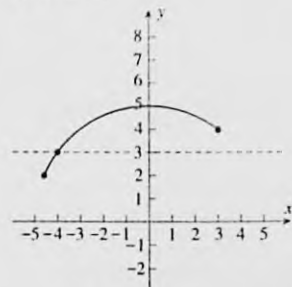
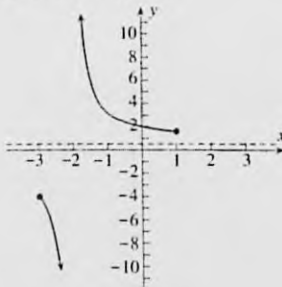
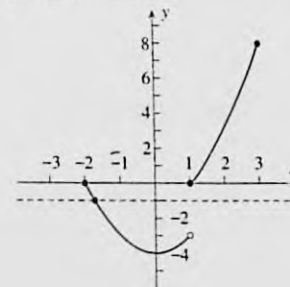
25.



27.



35. $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$


 37. $c = -4$

 39. f es discontinua en -2

 41. f es discontinua en 1

 43. $-2.67, 0.52, 2.15$

 45. $-1, 1.17$

 49. $[0, c)$

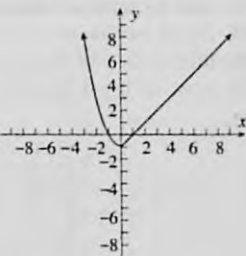
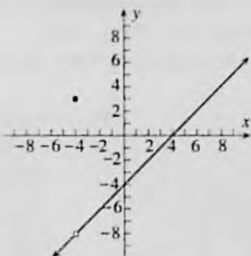
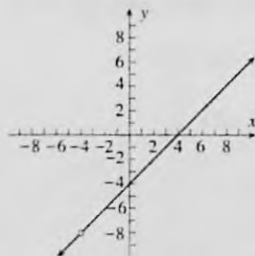
55. no

EJERCICIOS 1.10 (página 92)

1. 4 3. $\frac{9}{7}$ 5. $\frac{3}{5}$ 7. $\frac{1}{9}$ 9. 0 11. 0 13. 12 15. $\frac{1}{2}$ 17. 0 19. 3 21. $+\infty$ 23. 0
 25. -1 29. 0 31. -4 33. 1 35. 0 45. no existe

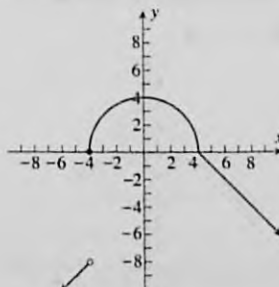
EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 1 (página 95)

1. (a) 3; (b) 0; (c) -5; (d) $-x^2 + 2x + 3$; (e) $4 - x^4$; (f) $-2x - h$
 3. (a) $\sqrt{x+2} + x^2 - 4$, dominio: $[-2, +\infty)$; (b) $\sqrt{x+2} - x^2 + 4$, dominio: $[-2, +\infty)$;
 (c) $\sqrt{x+2}(x^2 - 4)$, dominio: $[-2, +\infty)$; (d) $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$, dominio: $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$;
 (e) $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2}}$, dominio: $(-2, +\infty)$; (f) $\sqrt{x^2 - 2}$, dominio: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$; (g) $x - 2$, dominio: $(-2, +\infty)$;
 5. (a) $\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (b) $\frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (c) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, dominio: $(0, +\infty)$; (d) $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$,
 dominio: $(0, +\infty)$; (e) $\sqrt{x^5}$, dominio: $(0, +\infty)$; (f) $\frac{1}{x}$, dominio: $(0, +\infty)$; (g) $\frac{1}{|x|}$, dominio:
 7. $x \neq 0$ (a) impar; (b) par; (c) ninguno de los dos tipos; (d) impar
 9. (a) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[-4, +\infty)$;
 (c) dominio: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; (d) dominio: $[-4, 4]$, contradominio: $[0, 4]$;
 (e) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; (f) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, 5]$
 11. (a) dominio: $\{x \mid x \neq -4\}$; (b) dominio: $(-\infty, +\infty)$; (c) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $\{y \mid y \neq -8\}$
 13. (a) dominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[3, +\infty)$ (c) dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $[-1, +\infty)$



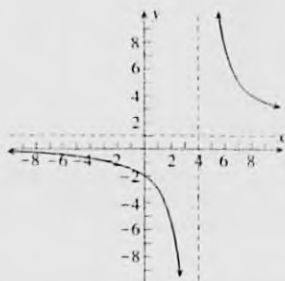
(Nota para los ejercicios 15–25: cualquier valor de δ menor que los indicados también es correcto).

15. (a) 0.025; (c) 0.025 17. (a) 0.1; (c) 0.1 19. (a) 0.074; (b) 0.06 21. $\frac{1}{3} \in$ 23. $\frac{1}{3} \in$ 25. $\frac{1}{4} \in$
 27. 9 29. -6 31. $\sqrt[3]{2}$ 33. $-\frac{1}{6}$ 35. $-\frac{5}{2}$ 37. $\frac{1}{3}$ 39. $\frac{3}{10}$ 41. $-\infty$
 43. (a) 8; (b) 8; (c) 8; 45. (a) -1; (b) 1; (c) no existe 47. (a) -8; (b) 0; (c) no existe

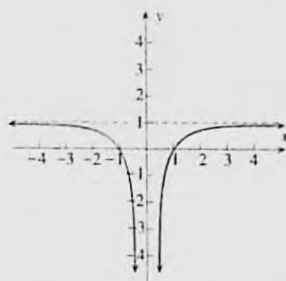


49. (a) $+\infty$; (b) $-\infty$ 51. (a) $+\infty$; (b) $-\infty$ 53. (a) $+\infty$; (b) $-\infty$ 55. $\frac{1}{3}$ 57. $\frac{5}{2}$ 59. 0 61. $\frac{1}{3}$

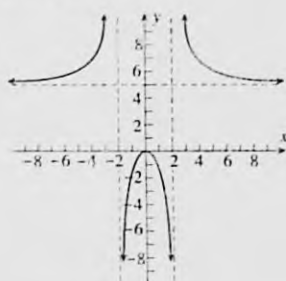
63. $x = 4$



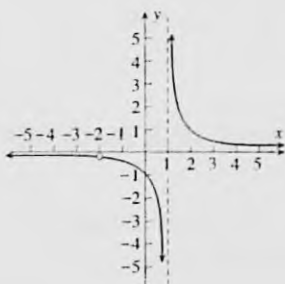
65. $x = 0$



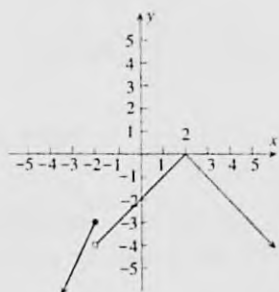
67. $x = 2, x = -2$



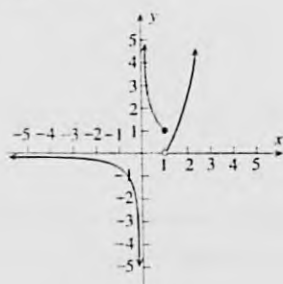
69. $-2, 1$; $f(-2)$ y $f(1)$ no existen



71. -2 ; $\lim_{t \rightarrow -2} g(x)$ no existe



73. $0, 1$; $h(0)$ no existe,
 $\lim_{t \rightarrow 1} h(x)$ no existe



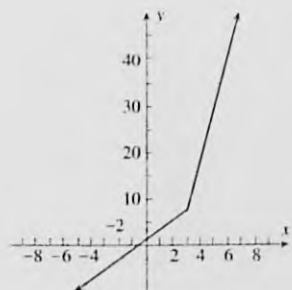
75. removible; $\frac{6}{5}$ 77. esencial 79. removible; -1 81. removible; 6

83. (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2}$, continua en todos los números de $(-5, 5)$;

(b) $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - |x|}}$, continua en todos los números de $(-3, -2) \cup (2, 3)$;

(c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1, \text{ continua en todos los números reales diferentes de } -1 \text{ y } 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

85. $a = 10, b = -23$



87. (b) todos los valores de a ;

(c) en todos los números reales que no son enteros

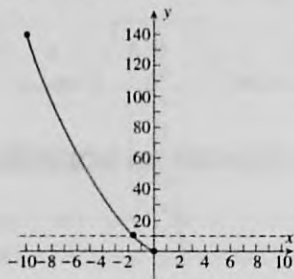
89. (a) $[-5, 5]$; (b) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

91. (a) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

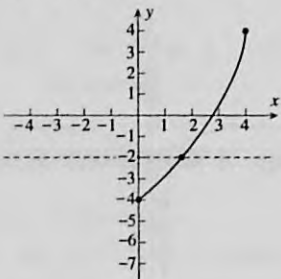
(b) $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$



93. $2 - \sqrt{13} = -1.6056$

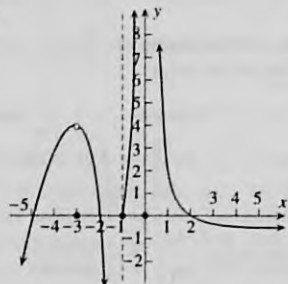


95. $-1 + \sqrt{7} = 1.6458$

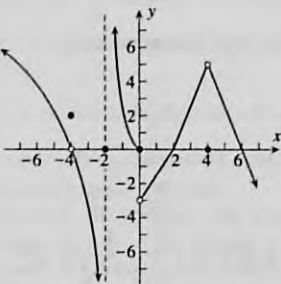


97. (a) 0;
 (b) $-\infty$;
 (c) 3;
 (d) $-\infty$;
 (e) $+\infty$;
 (f) 1;
 (g) 4;
 (h) -3, removible, $f(-3) = 0$;
 -2, esencial; 0, removible,
 $f(0) = 3$; 2, esencial;
 3, esencial

99.



101.

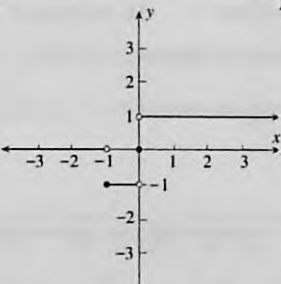


103. (a) corte cuadrados de x pulgadas del lado, $V = (14 - 2x)(18 - 2x)x$; (b) $[0, 7]$; (c) 2.60 pulg, 293 pulg³

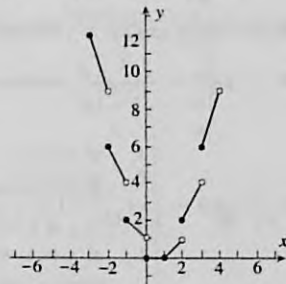
105. (a) x pulgadas de ancho, $A = 82 + 8x + \frac{200}{x}$; (b) $(0, +\infty)$; (d) 9 m de ancho por 18 m de largo

$$107. F(x) = \begin{cases} -1 \cdot 0 = 0 & \text{si } x < -1 \\ -1 \cdot 1 = -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

F es discontinua en -1 y 0 porque los límites por la izquierda y por la derecha son distintos en esos puntos

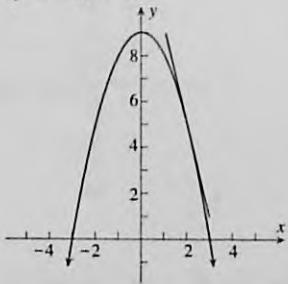


109. 0 111. (a) s ; (b) sí

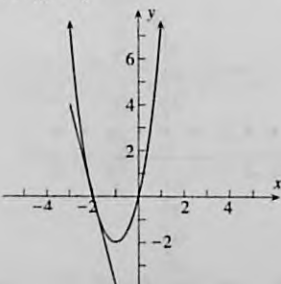


EJERCICIOS 2.1 (página 107)

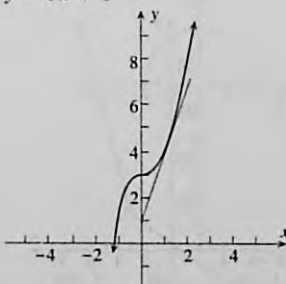
1. $y = -4x + 13$



3. $y = -4x - 8$



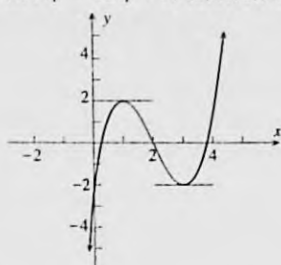
5. $y = 3x + 1$



7. (a) $6x_1 - 12$; (b) (2, 4)



9. (a) $3x_1^2 - 12x_1 + 9$; (b) (1, 2), (3, -2)



11. tangente: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; normal: $y = -4x + 14$

15. tangente: $y = -x + 3$; normal: $y = x - 1$

17. (a) y (c) 5.30, 5.27, 5.24, 5.21, 5.18, 5.15, 5.12, 5.09, 5.06, 5.03, 4.70, 4.73, 4.76, 4.79, 4.82, 4.85, 4.88, 4.91, 4.94, 4.97; (b) y (d) 5

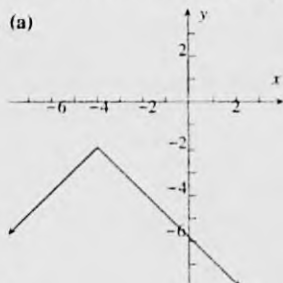
19. (a) y (c) -0.2516, -0.2514, -0.2513, -0.2511, -0.2509, -0.2508, -0.2506, -0.2505, -0.2503, 0.2502, -0.2485, -0.2486, -0.2488, -0.2489, -0.2491, -0.2492, -0.2494, -0.2495, -0.2497, -0.2498; (b) y (d) $-\frac{1}{4}$

21. $-\frac{1}{2}$ 23. 1 25. 0 27. 0 29. -1 31. 0 33. 7 35. $5 - 4x$ 37. $-3x^2$

39. $\frac{-13}{(3r-2)^2}$ 41. $3 - \frac{12}{x^3}$ 43. $-\frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}$ 45. $y = 8x - 5$ 47. $4x - 4y = 1$ 51. $g(a)$ 53. $2a$

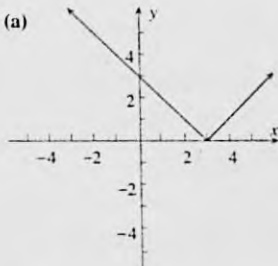
EJERCICIOS 2.2 (página 116)

1. (a)



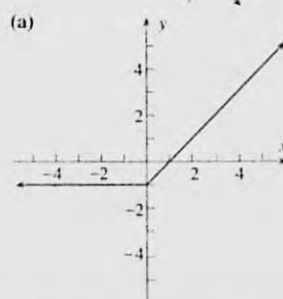
- (b) sí;
(c) 1, -1;
(d) no

3. (a)



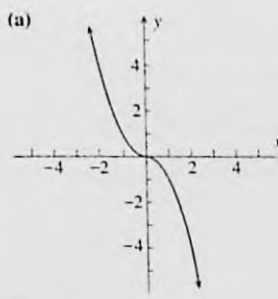
- (b) sí;
(c) -1, 1;
(d) no

5. (a)



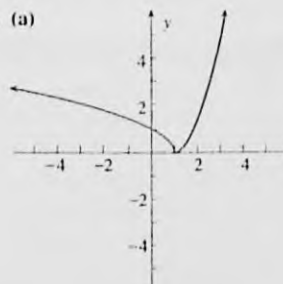
- (b) sí;
(c) 0, 1;
(d) no

7. (a)



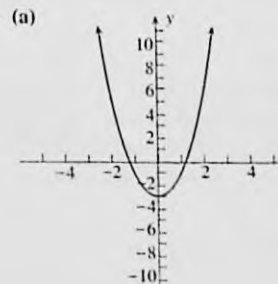
- (b) sí;
(c) 0, 0;
(d) sí

9. (a)



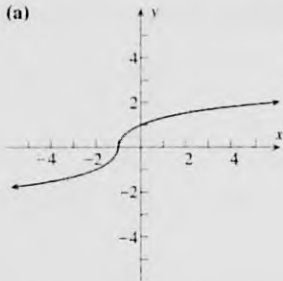
- (b) sí;
(c) no existe, 0;
(d) no

11. (a)



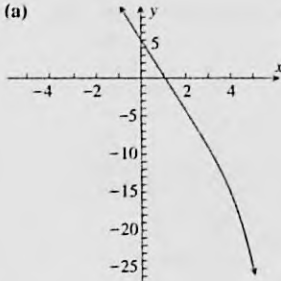
- (b) sí;
(c) 8, 8;
(d) sí

13. (a)



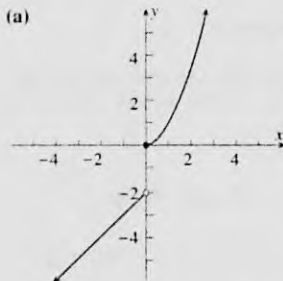
- (b) sí;
(c) ninguno de los dos existe;
(d) no

15. (a)



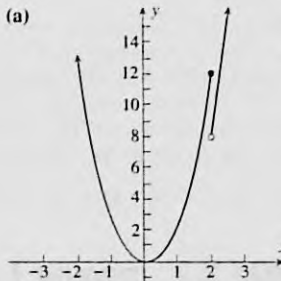
- (b) sí;
(c) $-6, -6$;
(d) sí

17. (a)



- (b) no;
(c) 1, 0;
(d) no

19. (a)



- (b) no;
(c) 12, 12;
(d) no

21. (a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0; \\ -x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

23. (a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq -1 \\ -x^{1/3} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ x^{1/3} & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

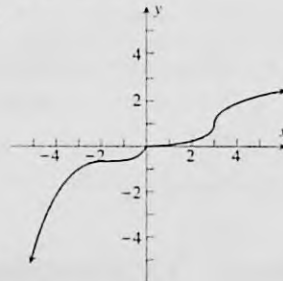
25. (a) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- (b) 2; (c) 1; (d) 1;
(e) -1; (f) -1;
(g) 1; (h) -1, 0, 1

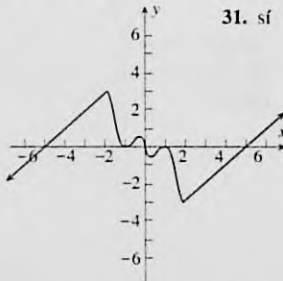
- (b) $\frac{1}{2}$; (c) $-\frac{1}{3}$;
(d) $-\infty$; (e) $+\infty$;
(f) $\frac{1}{3}$; (g) 1; (h) -1, 0, 1

- (b) -2; (c) -2;
(d) 0; (e) 0;
(f) -2; (g) 1; (h) 1

27.

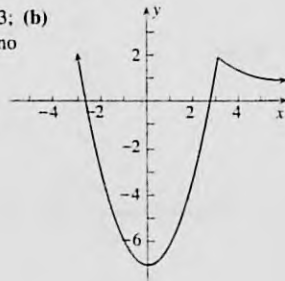


29.

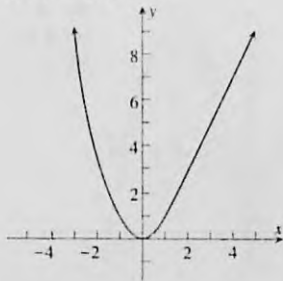


31. sí

33. (a) 3; (b) (c) no



35. $a = 2, b = -1$



37. (a) $f(x) = \begin{cases} 15x & \text{si } 0 \leq x \leq 150 \\ 22.5x - 0.05x^2 & \text{si } 150 < x \leq 250 \end{cases}$; (c) no

39. (a) $f(x) = \begin{cases} 600x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 900x - 15x^2 & \text{si } 20 < x \leq 60 \end{cases}$; (c) no

43. (a) 0; (b) 1; (c) no existe
47. (a) 0 para todos los números reales; (b) 0 si $x \neq 0$

EJERCICIOS 2.3 (página 122)

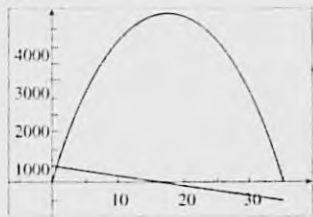
1. todos son 5 3. (a) -0.250019 , -0.250016 , -0.250012 , -0.250009 , -0.250006 , -0.250005 , -0.250004 , -0.250002 , -0.250001 , -0.250000 ; los mismos 10 números; $-\frac{1}{4}$ 9. (a) 2; (b) $y = 2x - 3$ 11. (a) 4; (b) $y = 4x - 13$
 13. (a) $-\frac{5}{3} = -1.6667$; (b) $y = -\frac{5}{3}x - \frac{16}{3} = -1.6667x - 5.3333$ 15. (a) 0.4; (b) $y = 0.4x - 0.4$
 17. (a) 1.3818; (b) $y = 1.3818x - 0.5403$ 19. (a) -0.8317 ; (b) $y = -0.8317x + 1.2591$
 23. (b) y (d) $x > 0$; (c) y (e) $x < 0$ 25. (b) y (d) $x < 0$; (c) y (e) $x > 0$ 27. (a) 100 29. (b) 0

EJERCICIOS 2.4 (página 131)

1. 7 3. $-2 - 2x$ 5. $3x^2 - 6x + 5$ 7. $x^7 - 4x^3$ 9. $t^3 - t$ 11. $4\pi r^2$
 13. $2x + 3 - \frac{2}{x^3}$ 15. $16x^3 + \frac{1}{x^5}$ 17. $-\frac{6}{x^3} - \frac{20}{x^5}$ 19. $3\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x$ 21. $70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$
 23. $-18y^2(7 - 3y^3)$ 25. $10x^4 - 24x^3 + 12x^2 + 2x - 3$ 27. $-\frac{1}{(x-1)^2}$ 29. $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ 31. $\frac{5(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$
 33. $\frac{48y^2}{(y^3+8)^2}$ 35. $\frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$ 37. $f'(x) = 30x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 10x - 8$; $f''(x) = 120x^3 + 36x^2 - 12x + 10$; $f'''(x) = 360x^2 + 72x - 12$; $f^{(4)}(x) = 720x + 72$; $f^{(5)}(x) = 720$; $f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geq 6$ 39. $-10t^{-6}$
 41. $2 + 6x^{-4}$ 43. $y = 12x - 20$ 45. $y = -\frac{1}{20}x - \frac{24}{5}$ 47. $y = 2x - 3$ 49. $x + 8y + 2 = 0$; $x + 8y - 2 = 0$
 51. $28x - y = 99$; $4x - y = 3$ 55. $2(3x + 2)(6x^2 + 2x - 3)$ 57. $3(2x^2 + x + 1)^2(4x + 1)$

EJERCICIOS 2.5 (página 142)

1. $v(t) = 6t$, 18 3. $v(t) = -\frac{1}{4t^2}$, -1 5. $v(t) = 6t^2 - 2t$, 8 7. $v(t) = \frac{8}{(4+t)^2}$; $\frac{1}{2}$
 9. $t < -3$, se mueve hacia la derecha; $-3 < t < 1$, se mueve hacia la izquierda; $t > 1$, se mueve hacia la derecha; cambia de dirección cuando $t = -3$ y $t = 1$
 11. $t < -2$, se mueve hacia la derecha; $-2 < t < \frac{1}{2}$, se mueve hacia la izquierda; $t > \frac{1}{2}$, se mueve hacia la derecha; cambia de dirección cuando $t = -2$ y $t = \frac{1}{2}$
 13. $t < -3$, se mueve hacia la izquierda; $-3 < t < 3$, se mueve hacia la derecha; $t > 3$, se mueve hacia la izquierda; cambia de dirección cuando $t = -3$ y $t = 3$
 17. (a) $s = -16t^2 + 256$; (b) -32 pie/s; -64 pie/s²; (c) 4 s; (d) -128 pie/s²
 19. (a) $s = -16t^2 - 48t + 160$; (b) -80 pie/s; -96 pie/s²; (c) 2 s; (d) -112 pie/s²
 21. (a) $s = -16t^2 + 560t$; (b) y (c) 17.5 s, 4900 pie; (d) 240 pie/s, -240 pie/s²; (e) 240 pie/s, 240 pie/s²; (f) 560 pie/s²
 23. $\frac{3}{2}$ s; $\frac{7}{4}$ pie; $-\frac{1}{4}$ pie/s



27. $v = 3t^2 - 18t + 15$; $a = 6t - 18$; cuando $0 < t < 1$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es decreciente, y la rapidez es decreciente; cuando $1 < t < \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21})$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es decreciente, y la rapidez es creciente; cuando $\frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}) < t < 3$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es decreciente, y la rapidez es creciente; cuando $3 < t < 5$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad es creciente, y la rapidez es decreciente; cuando $5 < t < \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21})$, la partícula está a la izquierda del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es creciente, y la rapidez es creciente; cuando $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) < t$, la partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la derecha, la velocidad es creciente, y la rapidez es creciente
 31. (a) 44 pie; (b) -22 pie/s; (c) 22 pie/s; 33. (a) 8.25 m/s; (b) 12.96 m/s; 35. 160 cm/s;

EJERCICIOS 2.6 (página 150)

1. (a) 8.6; (b) 8.3; (c) 8.1; (d) 8.05; (e) 8 3. (a) 65 000 000k; (b) 32 000 000k 5. (a) $2\pi r$; (b) 2π 7. $\frac{5}{32}\pi x^2$
 9. (a) $1.2 - 0.24t$; (b) 101.12°, 0.48°/día; (c) 100.52°, -0.72° /día; (d) 101.6° en 5 días 11. (a) $9\pi \mu\text{m}^3/\mu\text{m}$; (b) $16\pi \mu\text{m}^3/\mu\text{m}$
 13. (a) $12\pi \mu\text{m}^2/\mu\text{m}$; (b) $16\pi \mu\text{m}^2/\mu\text{m}$ 15. (a) $-2.9^\circ/\text{hr}$; (b) $-3^\circ/\text{hr}$ 17. (a) 18 750 litros/min; (b) 17 500 litros/min
 19. (a) $C'(x) = 3 + 2x$; (b) \$83; (c) \$84 21. (a) $R'(x) = 600 - \frac{3}{20}x^2$; (b) \$540; (c) \$536.95
 23. (a) 53.6 millones por año; (b) 23.1%; (c) 56.8 millones por año; (d) 18.7%
 25. (a) 920 personas por año; (b) 6.1%; (c) 1400 personas por año; (d) 6.4%
 27. (a) es ventajoso; (b) no es ventajoso; (c) 90; 29. $y'(-1) = 5$, $y'(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$
 31. (a) 3.2 m/min; (b) 16 m/min; (c) 16 m/min

EJERCICIOS 2.7 (página 160)

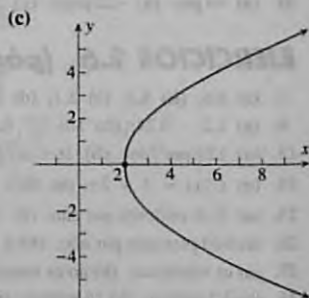
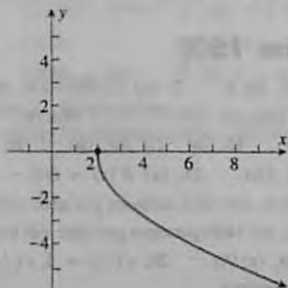
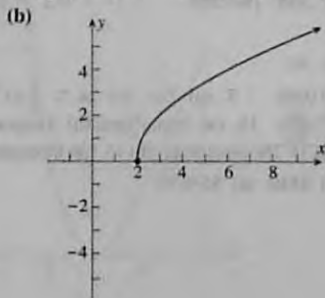
3. $3 \cos x$ 5. $\sec^2 x - \csc^2 x$ 7. $2(\cos t - t \sin t)$ 9. $x \cos x$ 11. $4 \cos 2x$ 13. $-x^2 \sin x$
 15. $3 \sec x (2 \tan^2 x + 1)$ 17. $-\sin y \cot y - \cos y \csc^2 y$
 19. $-\frac{2(z+1)\sin z + 2 \cos z}{(z+1)^2}$ 21. $\frac{1}{\cos x - 1}$ 23. $\frac{1 - 4 \sec t + \sec^2 t}{\cos t (\cos t - 4)^2}$ 25. $\frac{2 \cos y}{(1 - \sin y)^2}$
 27. $(1 - \cos x)(x + \cos x) + (1 - \sin x)(x - \sin x)$ 29. $-\frac{5 \csc t \cot t}{(\csc t + 2)^2}$ 31. 1 33. $-\frac{2}{\pi}$ 35. π^2 37. 2
 39. $\sqrt{2}$ 41. $-\frac{10}{3}$
 43. (a) 0.0226, 0.2674, 0.4559, 0.4956, 0.4995, 0.8188, 0.6915, 0.5424, 0.5043, 0.5006; (b) $\frac{1}{2}$
 45. (a) 2.2305, 2.0203, 2.0020, 2.0002, 2.0000; 1.8237, 1.9803, 1.9980, 1.9998, 2.0000; (b) 2
 47. (a) -0.4771, -0.4886, -0.4977, -0.4989, -0.4998; -0.5224, -0.5113, -0.5023, -0.5011, -0.5002; (b) $-\frac{1}{2}$
 49. (a) 0.4929, 0.5736, 0.6468, 0.6567, 0.6647; 0.9116, 0.7770, 0.6872, 0.6768, 0.6687; (b) $\frac{2}{3}$
 51. (a) $x - y = 0$; (b) $x - 2y + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = 0$; (c) $x + y - \pi = 0$
 53. (a) $x - y = 0$; (b) $4x - 2y + 2 - \pi = 0$; (c) $4x - 2y - 2 + \pi = 0$
 55. (a) $4 \cos t$; (b) $v(0) = 4$, $v(\frac{1}{3}\pi) = 2$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $v(\frac{2}{3}\pi) = -2$, $v(\pi) = -4$
 57. (a) $3 \sin t$; (b) $v(0) = 0$, $v(\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 3$, $v(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\pi) = 0$
 59. (a) $\frac{1}{9}\sqrt{2}W$; (b) $2W$

EJERCICIOS 2.8 (página 170)

1. $6(2x + 1)^2$ 3. $8(x + 2)(x^2 + 4x - 5)^3$ 5. $2(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)(8t^3 - 21t^2 + 2)$
 7. $\frac{-4x}{(x^2 + 4)^3}$ 9. $-12(\sin 3x + \cos 4x)$ 11. $2 \sec 2x \tan^3 2x$ 13. $2 \sec^2 x \tan x (2 \tan^2 x + 1)$
 15. $4 \cot t \csc^2 t$ 17. $\frac{18(x-7)}{(x+2)^3}$ 19. $6t \sin(6t^2 - 2)$ 21. $6(\tan^2 x - x^2)^2 (\tan x \sec^2 x - x)$
 23. $-12 \cos 3x \sin(\sin 3x)$ 25. $y = 24x - 39$ 27. (a) $v = \frac{3}{2}\pi \cos \frac{1}{4}\pi t$, $a = -\frac{3}{8}\pi^2 \sin \frac{1}{4}\pi t$; (c) $A = 6$, $p = 8$, $f = \frac{1}{8}$
 29. (a) $v = -8\pi \sin \pi(2t - \frac{1}{3})$, $a = -16\pi^2 \cos \pi(2t - \frac{1}{3})$; (c) $A = 4$, $p = 1$, $f = 1$
 31. (a) $-bk \sin(kt + c)$; (b) $-bk^2 \cos(kt + c)$ 33. (a) $v = 5\pi \cos \pi t - 3\pi \sin \pi t$, $a = -5\pi^2 \sin \pi t - 3\pi^2 \cos \pi t$
 35. (a) $v = -20 \sin 4t$, $a = -80 \cos 4t$ 39. (a) $\frac{1}{28}$; (b) $\frac{4}{7}$ 41. -0.6 rad/s
 43. (a) $6000 \cos \frac{12}{5}\pi = 5824 \text{ volts/s}$; (b) $6000\pi = 18850 \text{ volts/s}$ 45. decrece 16.6 juguetes por mes
 47. (a) $3x^4$; (b) $6x^5$ 53. (b) $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

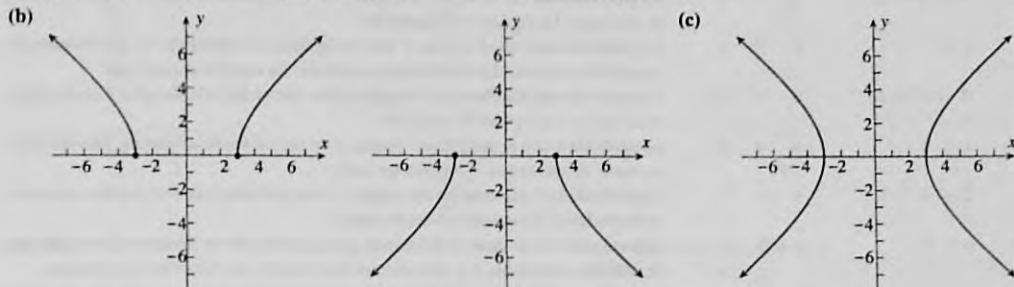
EJERCICIOS 2.9 (página 180)

1. $x^{-1/2}(2 - \frac{5}{2}x^{-1})$ 3. $\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ 5. $\frac{-2}{(5-3x)^{1/3}}$ 7. $\frac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$ 9. $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ 11. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{r}} \csc^2 \sqrt{3r}$
 13. $\frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}(1 - \sin t)^{3/2}}$ 15. $\frac{-1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\sqrt{9-x}}$ 17. $-\frac{x}{y}$ 19. $\frac{8y-3x^2}{3y^2-8x}$ 21. $-\frac{y^2}{x^2}$
 23. $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ 25. $\frac{x-xy^2}{x^2y-y}$ 27. $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x-y)-1}$ 29. $\frac{\tan x \sec^2 x}{\cot y \csc^2 y}$ 31. $\frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}$
 33. $y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$ 35. $y = -\frac{4}{9}x + \frac{22}{9}$ 37. $(1, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
 39. (a) $f_1(x) = 2\sqrt{x-2}$, dominio: $x \geq 2$; $f_2(x) = -2\sqrt{x-2}$, dominio: $x \geq 2$;



(d) $f_1'(x) = (x - 2)^{-1/2}$, dominio: $x > 2$; $f_2'(x) = -(x - 2)^{-1/2}$, dominio: $x > 2$; (e) $\frac{2}{y}$; (f) $x - y - 1 = 0, x + y - 1 = 0$

41. (a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, dominio: $|x| \geq 3$; $f_2(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$, dominio: $|x| \geq 3$;



(d) $f_1'(x) = x(x^2 - 9)^{-1/2}$, dominio: $|x| > 3$; $f_2'(x) = -x(x^2 - 9)^{-1/2}$, dominio: $|x| > 3$; (e) $\frac{x}{y}$;

(f) $5x + 4y + 9 = 0$; $5x - 4y + 9 = 0$

47. (a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) para ningún valor de t 49. (a) 50 centavos por litro; (b) 25 51. 100 53. 2.7 km/min

57. $\frac{2x(x^2 - 4)}{|x^2 - 4|}$ 59. $f'(x) = 3x|x|$; $f''(x) = 6|x|$

61. (a) $-0.1957h$ pie/s; (b) $0.14454h$ pie/s; (c) $0.1035h$ pie/s; (d) $0.0430h$ pie/s

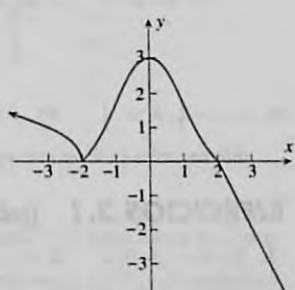
63. $\sqrt{3}x - y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$; $\sqrt{3}x + y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

EJERCICIOS 2.10 (página 187)

1. -3 3. -2 5. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 7. $-\frac{3}{4}$ 9. $\frac{9}{5}$ pie/s 11. $\frac{1}{2\pi}$ pie/min 13. $\frac{5}{8\pi}$ m/min 15. $\frac{25}{3}$ pie/s
 17. 0.001π cm³/día 19. 0.004π cm²/día 21. $\frac{6}{25\pi}$ m/min 23. 1800 lb/pie² por min 25. 128π cm²/s 27. 14 pie/s
 29. \$1020 por semana 31. 875 unidades por mes 33. decrece a la tasa de 55 playeras por semana
 37. 22 m³/min 39. $\frac{1}{194}(3\sqrt{97} + 97)$ pie/s = 0.65 pie/s 41. $\frac{2000}{9}$ pie/s 43. $\frac{2}{25}$ rad/s

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 2 (página 192)

1. $15x^2 - 14x + 2$ 3. $\frac{x}{2} - \frac{8}{x^3}$ 5. $x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$ 7. $60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$ 9. $\frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$
 11. $4(2s^3 - 3s + 7)^3(6s^2 - 3)$ 13. $x(4x^2 - 13)(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}$
 15. $(x + 1)\sin x + x \cos x$ 17. $\frac{2 \sec^2 4t}{\sqrt{\tan 4t}}$ 19. $-3 \sin 3w \cos(\cos 3w) - \cos w \cos 3w + 3 \sin w \sin 3w$
 21. $\frac{8x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$ 23. $\frac{(1 + x) \sec^2 x - \tan x}{(1 + x)^2}$ 25. $\frac{8x}{3y^2 - 8y}$ 27. $\frac{y - \sec^2 x}{\sec^2 y - x}$
 29. (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
 (b) -4; (c) 4; (d) 0;
 (e) -2; (f) -2;
 (g) -2; (h) -2, 0
 33. $y = 9x - 17$ 35. $x - 2y + 9 = 0$; $27x - 54y - 7 = 0$
 37. $5x - 4y - 6 = 0$; $4x + 5y - 13 = 0$ 39. (-1, 0)
 41. $-3(3 - 2t)^{-5/2}$ 43. $x < -3$ o $x > -1$



45. se mueve hacia la derecha: $t < -2$ y $t > 1$; se mueve hacia la izquierda: $-2 < t < 1$; invierte la dirección: $t = -2, 1$

	s	v	a	Conclusión
$0 \leq t < 1$	+	-	+	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es creciente. La rapidez es decreciente.
$t = 1$	0	0	+	La partícula está en el origen, y está cambiando su dirección de movimiento de izquierda a derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$1 < t < 2$	+	+	+	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$t = 2$	+	+	0	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad no varía; de modo que la rapidez no varía.
$2 < t < 3$	+	+	-	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la derecha. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$t = 3$	+	0	-	La partícula está a la derecha del origen, y está cambiando su dirección de movimiento de derecha a izquierda. La velocidad es decreciente. La velocidad es creciente.
$3 < t < 4$	+	-	-	La partícula está a la derecha del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$t = 4$	0	-	-	La partícula está en el origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$4 < t$	-	-	-	La partícula está a la izquierda del origen, y se mueve hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.

49. $t = 2^{-1} 3^{-4/3}$; $s = \frac{3}{4} \sqrt[3]{3} + 1$; $v = 3^{5/3}$ 51. (a) $s = 200 - 16t^2$; (b) -32 pie/s, -96 pie/s; (c) 3.54 s; (d) 113 pie/s

53. (a) $s = -16t^2 + 96t + 112$; (b) y (c) 3 s, 256 pie; (d) y (e) 7 s; (f) 32 pie/s, -32 pie/s; (g) ambos 32 pie/s; (h) -128 pie/s

55. (a) $v = -2 \sin 2t + 4 \cos 2t$, $a = -4 \cos 2t - 8 \sin 2t$

57. (a) $f(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } 0 \leq x \leq 800 \\ 360x - 0.2x^2 & \text{si } 800 < x \leq 1800 \end{cases}$; (c) no 59. (a) 8.005; (b) 8 61. (a) 3312.2; (b) 3212.5

63. $-\frac{1}{3}$ 65. $\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$ 67. $\frac{1}{2}$ 69. $2(|x+1| - |x|) \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x}{|x|} \right)$

71. (a) $v = \frac{5}{6} \pi \cos \frac{1}{6} \pi t$, $a = -\frac{5}{36} \pi^2 \sin \frac{1}{6} \pi t$; (c) $A = 5$, $p = 12$, $f = \frac{1}{12}$

73. (a) $v = -6 \sin(3t + \frac{1}{3} \pi) + 12 \cos(3t - \frac{1}{6} \pi)$, $a = -18 \cos(3t + \frac{1}{3} \pi) - 36 \sin(3t - \frac{1}{6} \pi)$

77. (a) $C'(x) = 2x + 40$; (b) \$80; (c) \$81 79. 648 peces por semana 81. 12.4 nudos

83. $\frac{512}{625\pi}$ pulg/s = 0.26 pulg/s 85. 9.6 pie/s

87. (a) (b) continua en 3; 89. (a) (b) 0; (c) no diferenciable en 3 (c) 0

91. $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ 97. $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ 101. no; si $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = x + 1$, entonces f y g son diferenciables en 0; sin embargo $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ y $f \circ g$ no es diferenciable en 0

EJERCICIOS 3.1 (página 206)

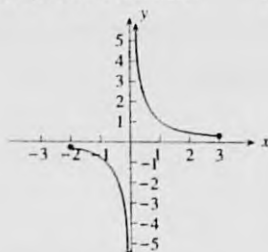
1. $\frac{1}{3}$, -5 3. 0, 2 5. $-1 + \sqrt{10}$, $-1 - \sqrt{10}$ 7. 2, -1 , $\frac{1}{5}$ 9. (a) -5 , $-\frac{1}{4}$, -3 11. (a) -2 , 2, 0

13. (a) $2 + 2\sqrt{2}$, $2 - 2\sqrt{2}$ 15. $\frac{1}{8}(2k+1)\pi$, donde k es cualquier número entero 17. $\frac{1}{3}k\pi$, donde k es cualquier número entero

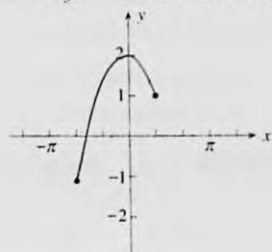
19. mín. abs.: $f(2) = -2$



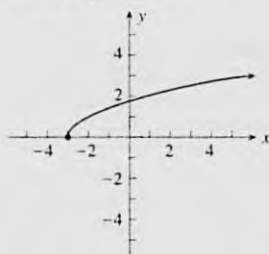
21. no hay extremos absolutos



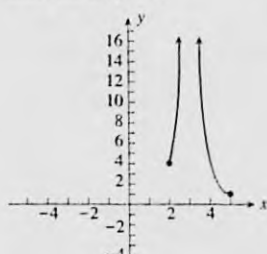
23. mín. abs.: $f(-\frac{2}{3}\pi) = -1$; máx. abs.: $f(0) = 2$



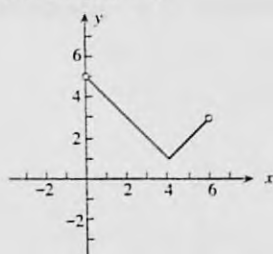
25. mín. abs.: $f(-3) = 0$



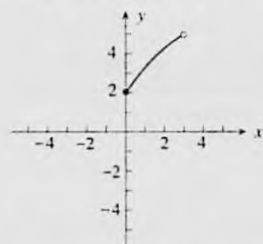
27. mín. abs.: $h(5) = 1$



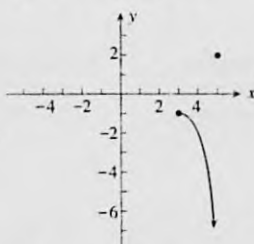
29. mín. abs.: $f(4) = 1$



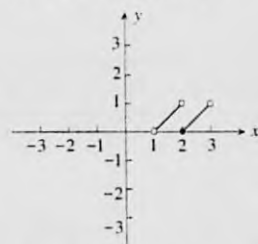
31. mín. abs.: $g(0) = 2$



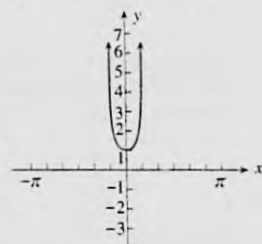
33. máx. abs.: $f(5) = 2$



35. mín. abs.: $f(2) = 0$



37. mín. abs.: $g(0) = 1$



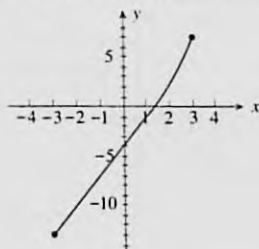
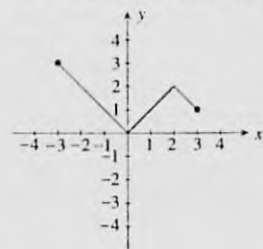
39. (a) mín. abs.: $f(-2) = 0$; máx. abs.: $f(-4) = 144$ (b) mín. abs.: $f(-2) = f(2) = 0$; máx. abs.: $f(-3) = 25$

41. mín. abs.: $f(-\frac{1}{2}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{2}\pi) = 2$ 43. mín. abs.: $g(-1) = -1$; máx. abs.: $g(2) = \frac{1}{2}$

45. mín. abs.: $f(-1) = 0$; máx. abs.: $f(1) = \sqrt[3]{4}$ 47. mín. abs.: $f(-3) = -46$; máx. abs.: $f(-1) = -10$

49. mín. abs.: $g(0) = 2$; máx. abs.: $g(\frac{1}{2}\pi) = 2\sqrt{2}$ 51. mín. abs.: $f(0) = 3$; máx. abs.: $f(2) = 5$

53. mín. abs.: $f(0) = 0$; máx. abs.: $f(-3) = 3$ 55. mín. abs.: $F(-3) = -13$; máx. abs.: $F(3) = 7$ 59. no



EJERCICIOS 3.2 (página 213)

1. (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$ 15. 225 17. 30 19. 6, 6 21. P está a $20/\sqrt{39} \approx 3.2$ km de B 23. radio: $3\sqrt{2}$ pulg., altura: $6\sqrt{2}$ pulg.

25. (a) $\sqrt{50} - 6\sqrt{41}$ unidades $= (\sqrt{41} - 3)$ unidades ≈ 3.4 unidades; (b) $\sqrt{50} + 6\sqrt{41}$ unidades $= (\sqrt{41} + 3)$ unidades ≈ 9.4 unidades

27. $\frac{2}{3}k$ 29. el ancho es $48\sqrt{3}$ cm; el grosor es $48\sqrt{6}$ cm

31. (a) El radio de la circunferencias es $\frac{5}{\pi + 4}$ pie y la longitud del lado del cuadrado es $\frac{10}{\pi + 4}$ pie;

(b) El radio de la circunferencia es $\frac{5}{\pi}$ pie y no hay cuadrado

33. $\frac{1}{4}\pi$ 35. 7 produce A; 8 produce B

EJERCICIOS 3.3 (página 221)

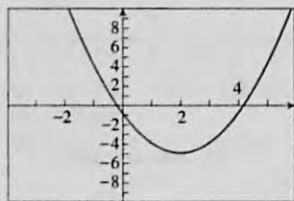
1. 2 3. $\frac{1}{3}\pi$ 5. (b) (i), (ii), (iii) se satisfacen (c) $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6})$

7. (b) (i) no se satisface 9. (b) (ii) no se satisface 11. $\frac{1}{2}$

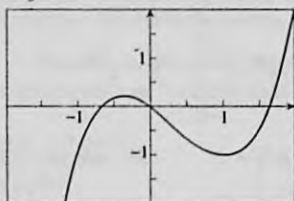
13. $\frac{8}{27}$ 15. 0 17. 4 19. $\cos c = \frac{2}{\pi}$; $c = 0.8807$ 21. (i) no se satisface 23. (ii) no se satisface

EJERCICIOS 3.4 (página 229)

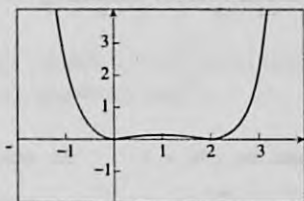
1. extremos: $f(2) = -5$, mín. rel.;
creciente: $[2, +\infty)$;
decreciente: $(-\infty, 2]$



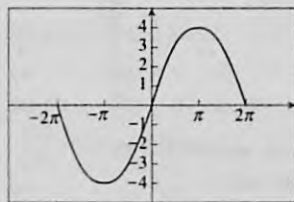
3. extremos: $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, máx. rel.;
 $f(1) = -1$, mín. rel.; creciente:
 $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $[1, +\infty)$; decreciente:
 $[-\frac{1}{3}, 1]$



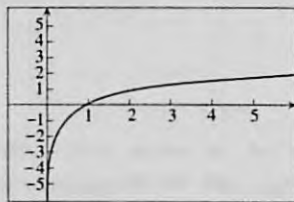
5. extremos: $f(0) = 0$, mín. rel.;
 $f(1) = \frac{1}{4}$, máx. rel.; $f(2) = 0$,
mín. rel.; creciente: $[0, 1]$, $[2, +\infty)$;
decreciente: $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$



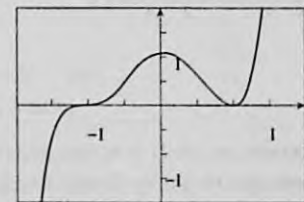
7. extremos: $f(-\pi) = -4$, mín. rel.;
 $f(\pi) = 4$, máx. rel.; creciente: $[-\pi, \pi]$;
decreciente: $[-2\pi, -\pi]$, $[\pi, 2\pi]$



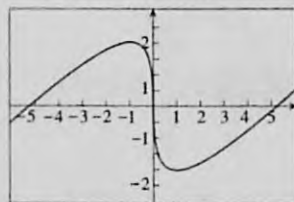
9. extremos: no tiene extremos
relativos; creciente: $(0, +\infty)$;
decreciente: en ninguna parte



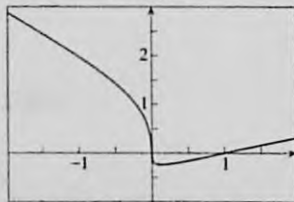
11. extremos: $f(\frac{1}{5}) = \frac{3456}{3125}$, máx. rel.;
 $f(1) = 0$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, \frac{1}{5})$,
 $[1, +\infty)$; decreciente: $[\frac{1}{5}, 1]$



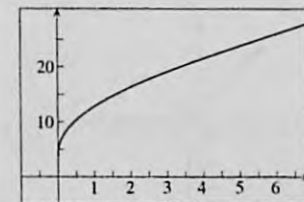
13. extremos: $f(-1) = 2$, máx. rel.;
 $f(1) = -2$, mín. rel.; creciente:
 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; decreciente: $[-1, 1]$



15. extremos: $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$, mín. rel.;
creciente: $[\frac{1}{8}, +\infty)$;
decreciente: $(-\infty, \frac{1}{8}]$



17. extremos: no tiene extremos relativos;
creciente: $[0, +\infty)$; decreciente en
ninguna parte



19. extremos: $f(0) = 2$, máx. rel.; $f(3) = -25$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$; decreciente: $[0, 3]$

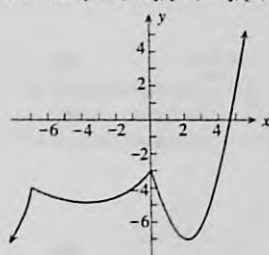
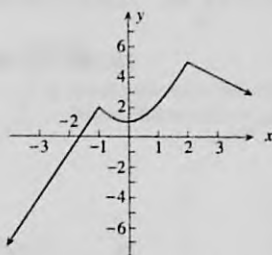
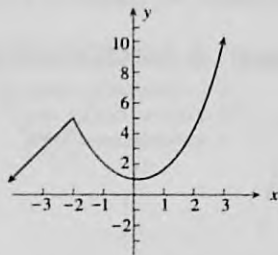
21. extremos: $f(-2) = -\frac{1}{15}$, máx. rel.; $f(-1) = -\frac{23}{15}$, mín. rel.; $f(1) = \frac{53}{15}$, máx. rel.; $f(2) = \frac{31}{15}$, mín. rel.;
creciente: $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[-2, -1]$, $[1, 2]$

23. extremos: $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, mín. rel.; creciente: $(-\infty, 0]$, $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$; decreciente: $(0, \sqrt[3]{2}]$

25. extremos: $f(2) = 4$, máx. rel.; creciente: $(-\infty, 2]$; decreciente: $[2, 3]$

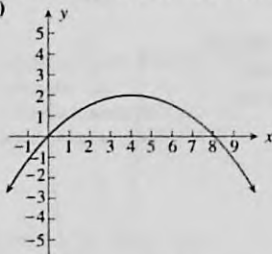
27. extremos: $f(4) = 2$, máx. rel.; creciente: $(-\infty, 4]$; decreciente: $[4, +\infty)$

29. extremos: $f(-\frac{1}{4}\pi) = f(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$, máx. rel.; $f(0) = \frac{1}{2}$, mín. rel.; (los extremos del intervalo no pueden ser extremos relativos);
 creciente: $[-\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{8}\pi), (-\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{4}\pi), [0, \frac{1}{8}\pi), (\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi]$; decreciente: $[-\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{8}\pi), (-\frac{1}{8}\pi, 0), [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi), (\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
31. extremos: $f(4) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$, máx. rel.; creciente: $(-4, 4]$; decreciente: $(-\infty, -4), [4, +\infty)$
33. extremos: $f(-2) = 5$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.;
 creciente: $(-\infty, -2], [0, +\infty)$; decreciente: $[-2, 0]$
35. extremos: $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; $f(2) = 5$, máx. rel.;
 creciente: $(-\infty, -1], [0, 2]$; decreciente: $[-1, 0], [2, +\infty)$
37. extremos: $f(-9) = -8$, mín. rel.; $f(-7) = -4$, máx. rel.; $f(-4) = -5$, mín. rel.;
 $f(0) = -3$, máx. rel.; $f(2) = -7$, mín. rel.;
 creciente: $[-9, -7], [-4, 0], [2, +\infty)$; decreciente: $[-\infty, -9], [-7, -4], [0, 2]$

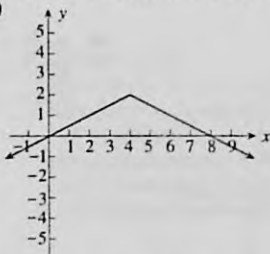


39. números críticos: $-3, 1, 3$; creciente: $(-\infty, -3], [1, 3]$; decreciente: $[-3, 1], [3, +\infty)$; extremos: máx. rel.: $-3, 3$; mín. rel.: 1
41. números críticos: $0, 2$; creciente: $(-\infty, 0], [2, +\infty)$; decreciente: $[0, 2]$; extremos: máx. rel.: 0 ; mín. rel.: 2
43. números críticos: $1, -2, 0, 2$; creciente: $[-2, 0], [1, +\infty)$; decreciente: $(-\infty, -2], [0, 1]$; extremos: máx. rel.: 0 ; mín. rel.: $-2, 1$

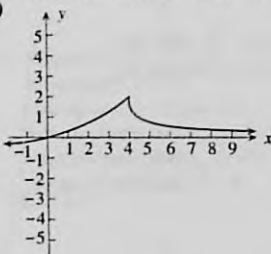
45. (a)



(b)



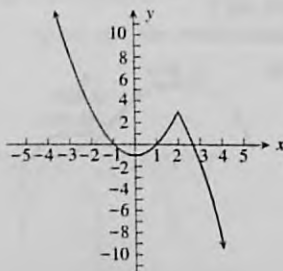
(c)



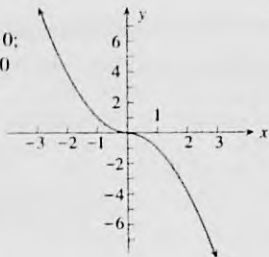
47. $a = -3, b = 7$ 49. $a = -2, b = 9, c = -12, d = 7$ 57. no

EJERCICIOS 3.5 (página 240)

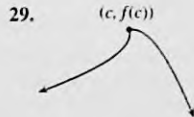
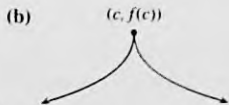
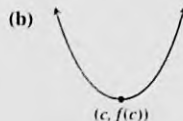
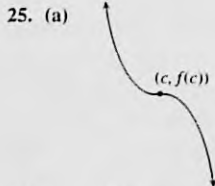
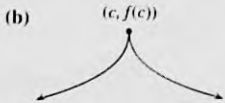
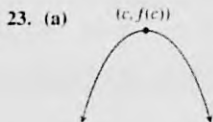
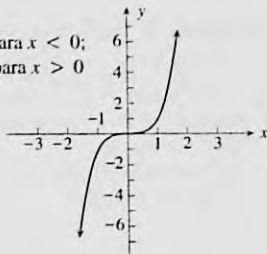
- punto de inflexión: $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$; cóncava hacia abajo para $x < -\frac{1}{2}$; cóncava hacia arriba para $x > -\frac{1}{2}$
- puntos de inflexión: $(0, 0), (4, -256)$; cóncava hacia arriba para $x < 0$ y $x > 4$; cóncava hacia abajo para $0 < x < 4$
- puntos de inflexión: $(-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})$; cóncava hacia arriba para $x < -1$ y $x > 1$; cóncava hacia abajo para $-1 < x < 1$
- puntos de inflexión: $(-\frac{1}{3}\pi, 0), (0, 0), (\frac{1}{3}\pi, 0)$; cóncava hacia arriba para $-\frac{1}{3}\pi < x < 0$, y $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; cóncava hacia abajo para $-\frac{1}{2}\pi < x < -\frac{1}{3}\pi$ y $0 < x < \frac{1}{3}\pi$
- punto de inflexión: $(0, 0)$; cóncava hacia abajo para $x < 0$; cóncava hacia arriba para $x > 0$
- punto de inflexión: $(1, 0)$; cóncava hacia abajo para $x < 1$; cóncava hacia arriba para $x > 1$
- punto de inflexión: $(-2, 0)$; cóncava hacia arriba para $x < -2$; cóncava hacia abajo para $x > -2$
- punto de inflexión: $(0, 0)$; cóncava hacia abajo para $-\pi < x < 0$; cóncava hacia arriba para $0 < x < \pi$
- no tiene puntos de inflexión;
 cóncava hacia arriba para $x < 2$;
 cóncava hacia abajo para $x > 2$



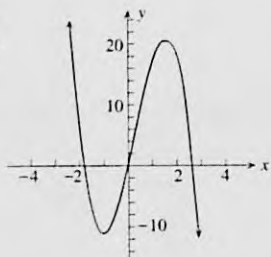
19. $(0, 0)$;
 cóncava hacia arriba para $x < 0$;
 cóncava hacia abajo para $x > 0$



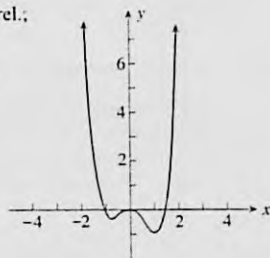
21. $(0, 0)$;
 cóncava hacia abajo para $x < 0$;
 cóncava hacia arriba para $x > 0$



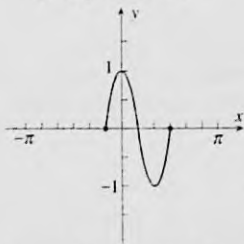
31. $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$, máx. rel.;
 $f(-1) = -11$, mín. rel.;



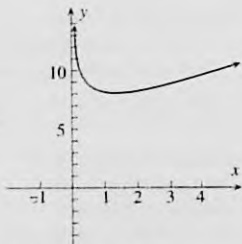
33. $g(-\frac{3}{4}) = -\frac{99}{256}$, mín. rel.;
 $g(0) = 0$, máx. rel.;
 $g(1) = -\frac{5}{6}$, mín. rel.



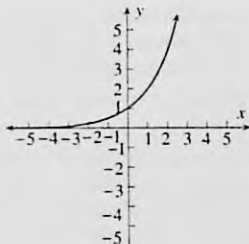
35. $f(\frac{1}{3}\pi) = -1$, mín. rel.;
 $f(0) = 1$, máx. rel.



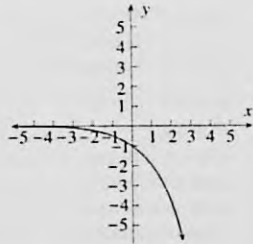
37. $f(1) = 8$, mín. rel.



39. (a)

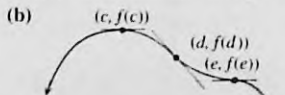
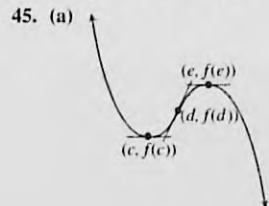


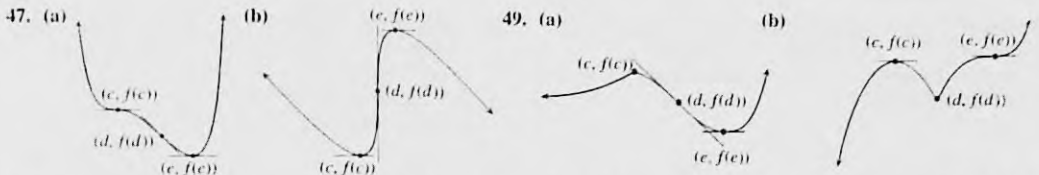
- (b)



41. (a) $(k\pi, 0)$ donde k es cualquier entero; (b) 1

43. $\csc(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = 1$, donde k es cualquier entero, mín. rel.; $\csc(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = -1$, donde k es cualquier entero, máx. rel.

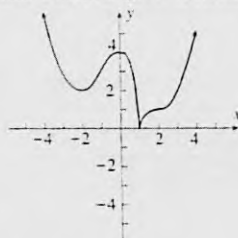
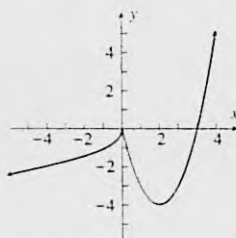
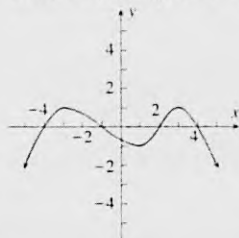




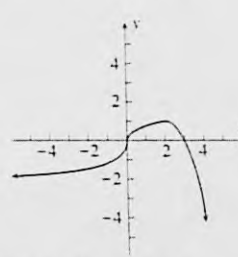
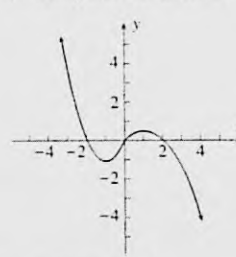
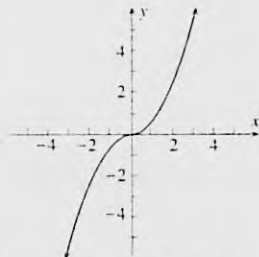
51. $a = -1, b = 3$ 53. $a = 2, b = -6, c = 0, d = 3$ 55. f tiene un mín. rel. en $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y un máx. rel. en $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 57. f es continua; f' y f'' no necesariamente son continuos 59. a los 10:40 A.M.

EJERCICIOS 3.6 (página 245)

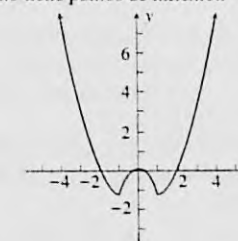
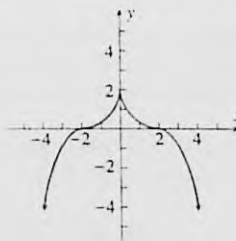
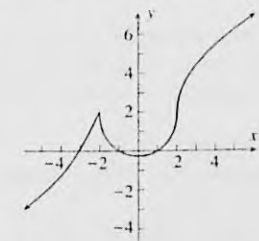
1. puntos de inflexión: $-1, 2$;
 cóncava hacia arriba: $(-1, 2)$;
 cóncava hacia abajo: $x < -1, x > 2$
3. no tiene puntos de inflexión;
 cóncava hacia arriba: $x < 0, x > 0$
5. puntos de inflexión: $-1, 2$;
 cóncava hacia arriba: $x < -1, x > 2$;
 cóncava hacia abajo: $(-1, 1), (1, 2)$



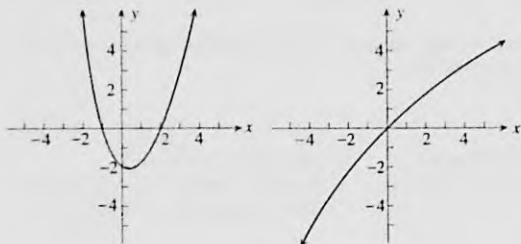
7. creciente: $(-\infty, +\infty)$; no tiene extremos
 cóncava hacia arriba: $x > 0$;
 cóncava hacia abajo: $x < 0$
9. creciente: $[-1, 1]$;
 decreciente: $x \leq -1, x \geq 1$;
 extremos: $x = -1$, mín. rel.;
 $x = 1$, máx. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < 0$;
 cóncava hacia abajo: $x > 0$;
 no tiene puntos de inflexión
11. creciente: $x \leq 2$;
 decreciente: $x \geq 2$;
 extremos: $x = 2$, máx. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < 0$;
 cóncava hacia abajo: $x > 0$;
 punto de inflexión: $x = 0$



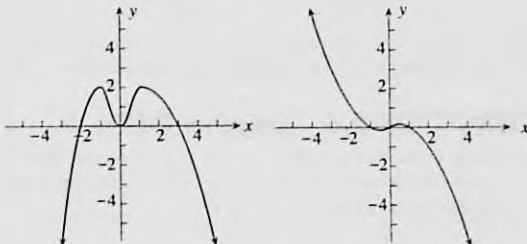
13. creciente: $x \leq -2, x \geq 0$;
 decreciente: $[-2, 0]$; extremos: $x = -2$,
 máx. rel.; $x = 0$, mín. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < -2, (-2, 2)$;
 cóncava hacia abajo: $x > 2$;
 punto de inflexión: $x = 2$
15. creciente: $x \leq -2$;
 decreciente: $x \geq 0$;
 extremos: $x = 0$, máx. rel.;
 cóncava hacia arriba: $(-2, 0), (0, 2)$;
 cóncava hacia abajo: $x < -2, x < 2$;
 punto de inflexión: $x = -2, x = 2$
17. creciente: $[-1, 0], x \geq 1$;
 decreciente: $x \leq -1, [0, 1]$;
 extremos: $x = -1$, mín. rel.;
 $x = 0$, máx. rel.; $x = 1$, mín. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < -1, x > 1$;
 cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$;
 no tiene puntos de inflexión



19. creciente: $x \leq -1, x \geq 2$; decreciente: $[-1, 2]$;
 extremos: $x = -1$, máx. rel.; $x = 2$, mín. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x > 0$; cóncava hacia abajo: $x < 0$;
 punto de inflexión.: $x = 0$

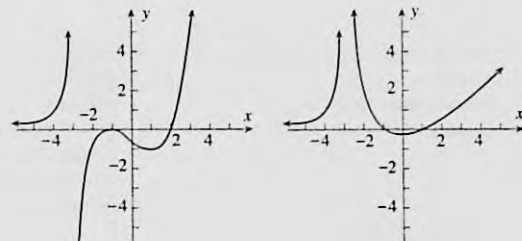
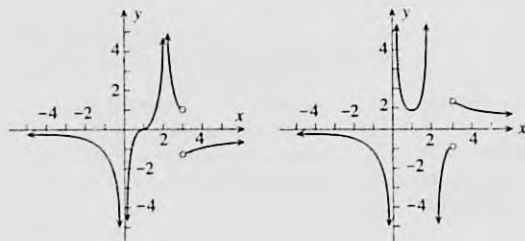


21. creciente: $[-2, 3]$; decreciente: $x \leq -2, x \geq 3$;
 extremos: $x = -2$, mín. rel.; $x = 3$, máx. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < -1, (0, 1)$;
 cóncava hacia abajo: $(-1, 0), x > 1$;
 puntos de inflexión.: $x = -1, x = 1$

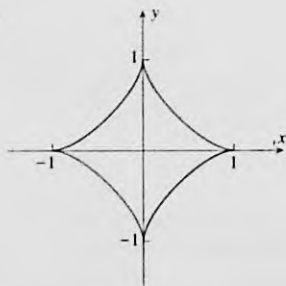


23. creciente: $[1, 3]$; decreciente: $x \leq 1, x \geq 3$;
 extremos: $x = 1$, mín. rel.; $x = 3$, máx. rel.;
 cóncava hacia arriba: $(0, 2), x > 3$;
 cóncava hacia abajo: $x < 0, (2, 3)$;
 puntos de inflexión.: $x = 0, x = 2$

25. creciente: $x \leq -3, x \geq 2$; decreciente: $[-3, 2]$;
 extremos: $x = -3$, máx. rel.; $x = 2$, mín. rel.;
 cóncava hacia arriba: $x < -3, (-3, -1), x > 1$;
 cóncava hacia abajo: $(-1, 1)$; punto de inflexión.: $x = 1$



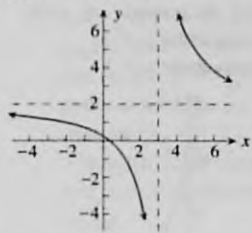
31.



EJERCICIOS 3.7 (página 258)

1. 4, 1, 0.25, 0.1111, 0.0625, 0.0400, 0.0004, 0.000004; 4, 1, 0.25, 0.1111, 0.0625, 0.0400, 0.0004, 0.000004; (a)-(e) 0
 3. 1, 0, 1250, 0.0156, 0.0046, 0.0020, 0.0010, 10^{-6} , 10^{-9} ; -1, -0.1250, -0.0156, -0.0046, -0.0020, -0.0010, -10^{-6} , -10^{-9} ; (a)-(e) 0
 5. 0, -1.5, -2.4, -2.823, -2.919, -2.953, -2.970, -2.9997, -2.999997; 0, -1.5, -2.4, -2.823, -2.919, -2.953, -2.970, -2.9997, -2.999997; (a)-(e) -3
 7. 3, 2.273, 2.158, 2.015, 2.0015, 2.00015, 2.000015; 1.4, 1.769, 1.857, 1.985, 1.9985, 1.99985, 1.999985; (a)-(e) 2
 9. 0.75, 0.1944, 0.1100, 0.0101, 0.001001, 0.0001, 0.00001; -0.25, -0.1389, -0.0900, -0.0099, -0.0010, -0.0001, -0.00001; (a)-(e) 0
 11. $\frac{2}{5}$ 13. $-\frac{2}{5}$ 15. $\frac{7}{3}$ 17. 0 19. $+\infty$ 21. $\frac{1}{2}$ 23. $+\infty$ 25. $-\infty$ 27. 1 29. -1 31. 0 33. $-\infty$

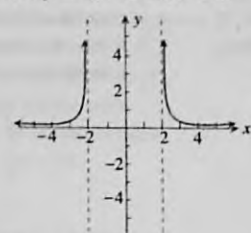
35. $y = 2, x = 3$



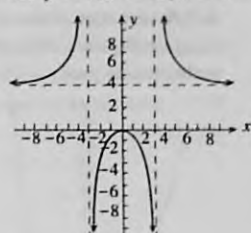
37. $y = 1, x = 0$



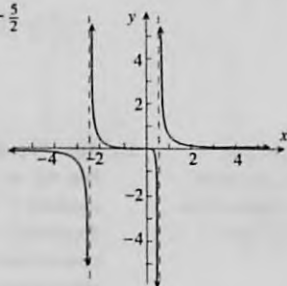
39. $y = 0, x = -2, x = 2$



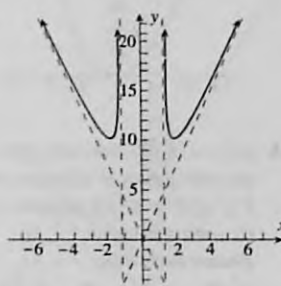
41. $y = 4, x = -3, x = 3$



43. $y = 0, x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}$



45. $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$
 $y = -4x, y = 4x$



47. $x = 1, y = x + 1$

49. $x = 3, y = x + 3$

51. $x = -2, y = x - 6$

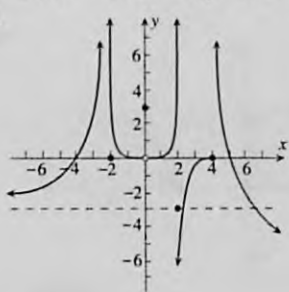
53. $x = 0, y = x + 2$

55. (a) 1; (b) 0; (c) 1;

(d) $-\infty$; (e) 3; (f) $+\infty$;

(g) 1; (h) -2

57.



69. 0

EJERCICIOS 3.8 (página 266)

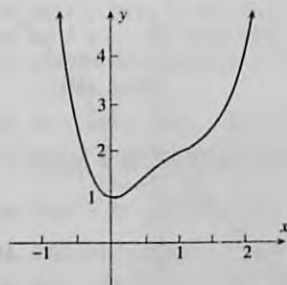
1. $f(0) = 1$, mfn. rel.: $(\frac{1}{2}, \frac{23}{16})$,

(1, 2), puntos de inflexión:

 decreciente: $(-\infty, 0]$;

 creciente: $[0, +\infty)$; cóncava hacia

 arriba: $x < \frac{1}{2}, x > 1$;

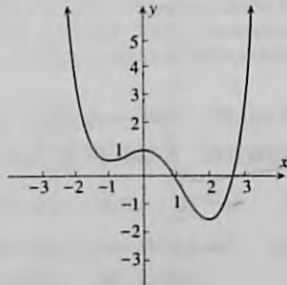
 cóncava hacia abajo: $(\frac{1}{2}, 1)$


3. $f(-1) = \frac{7}{12}$, mfn. rel.; $f(0) = 1$, máx. rel.;

 $f(2) = -\frac{5}{3}$, mfn. rel.; puntos de inflexión: $x =$
 $\frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$; decreciente: $(-\infty, -1), [0, 2]$;

 creciente: $[-1, 0], [2, +\infty)$; cóncava hacia arriba:

 $x < \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}), x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$; cóncava hacia

 abajo: $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$


5. $f(0) = 2$, mfn. rel.;

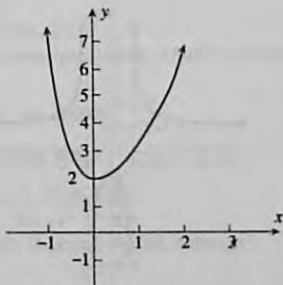
no tiene puntos de inflexión.;

 decreciente: $(-\infty, 0]$;

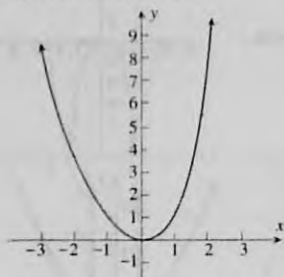
 creciente: $[0, +\infty)$;

cóncava hacia arriba en

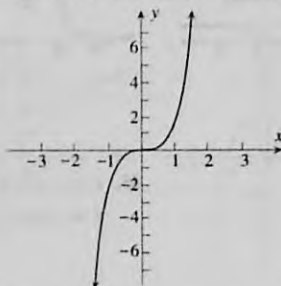
todas partes



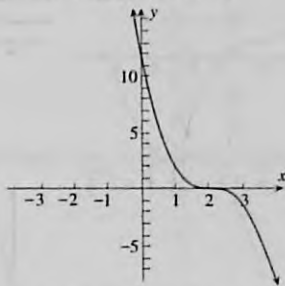
7. $f(0) = 0$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; decreciente: $(-\infty, 0]$; creciente: $[0, +\infty)$; cóncava hacia arriba en todas partes



9. no tiene extremos relativos; $(0, 0)$ punto de inflexión; creciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba: $(0, +\infty)$



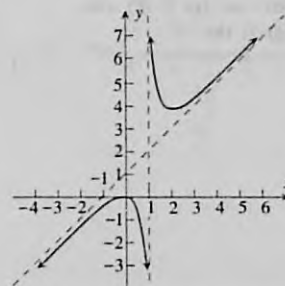
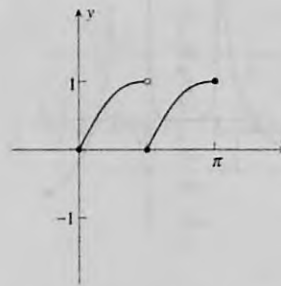
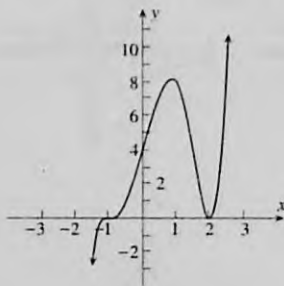
11. no tiene extremos relativos; $(2, 0)$ punto de inflexión; decreciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < 2$; cóncava hacia abajo: $x > 2$



13. $f(\frac{4}{3}) = \frac{26244}{3125}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión: $(-1, 0)$, $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$; creciente: $(-\infty, \frac{4}{3}]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[\frac{4}{3}, 2]$; cóncava hacia abajo: $x < -1$, $(\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}), \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6}))$; cóncava hacia arriba $(-1, \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}))$, $x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$

15. $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $[0, \frac{1}{2}\pi]$, $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; cóncava hacia abajo: $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$

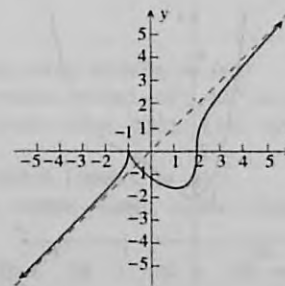
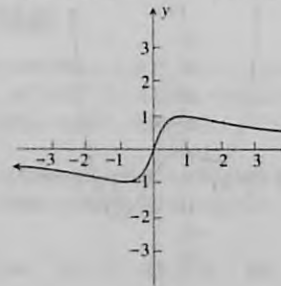
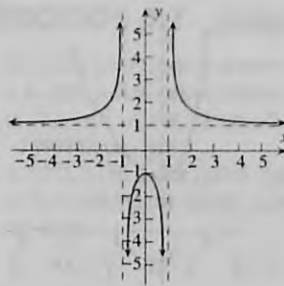
17. $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(2) = 4$, mín. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$; decreciente: $[0, 1)$ y $(1, 2)$; cóncava hacia abajo: $x < 1$; cóncava hacia arriba: $x > 1$; $x = 1$ y $y = x + 1$ son asíntotas



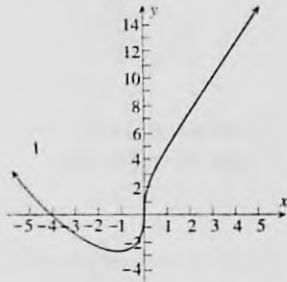
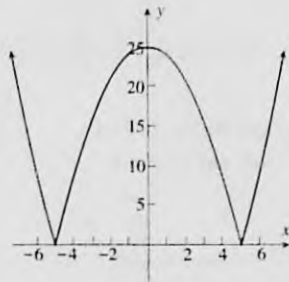
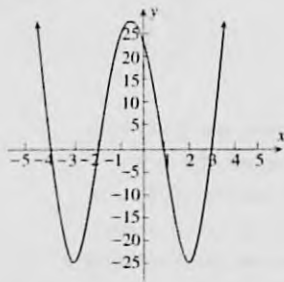
19. $f(0) = -1$, máx. rel.; no tiene puntos de inflexión; creciente: $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0]$; decreciente: $[0, 1)$ y $(1, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < -1$, $x > 1$; cóncava hacia abajo: $-1 < x < 1$; $y = -1$, $x = -1$, $y = 1$ son asíntotas

21. $f(-1) = -1$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, puntos de inflexión; decreciente: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; creciente: $[-1, 1]$; cóncava hacia abajo: $x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \sqrt{3}$; cóncava hacia arriba: $-\sqrt{3} < x < 0$, $x > \sqrt{3}$; $y = 0$ es una asíntota

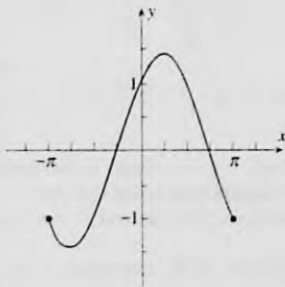
23. $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; punto de inflexión: $(2, 0)$; decreciente: $[-1, 1]$; creciente: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $x > 2$; cóncava hacia arriba: $x < -1$, $(-1, 2)$; $y = x$ es una asíntota



25. $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{29} - \frac{1}{2}$,
 $x_3 = -\frac{1}{6}(\sqrt{87} + 3)$; $x_4 = \frac{1}{6}(\sqrt{87} - 3)$;
 $f(x_1) = f(x_2) = -25$,
 mín. rel.; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{441}{16}$, máx. rel.;
 puntos de inflexión: $(x_3, -\frac{59}{36})$, $(x_4, -\frac{59}{36})$;
 creciente: $[x_1, -\frac{1}{2}]$, $[x_2, +\infty)$; decreciente:
 $(-\infty, x_1]$, $(-\frac{1}{2}, x_2]$; cóncava hacia arriba:
 $x < x_3$, $x > x_4$; cóncava hacia abajo:
 (x_3, x_4)



31. $f(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.;
 $f(-\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.;
 $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, puntos de inflexión;
 creciente: $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$;
 decreciente: $[-\pi, -\frac{3}{4}\pi]$, $[\frac{1}{4}\pi, \pi]$;
 cóncava hacia abajo: $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$;
 cóncava hacia arriba: $(-\pi, -\frac{1}{4}\pi)$,
 $(\frac{3}{4}\pi, \pi)$



EJERCICIOS 3.9 (página 272)

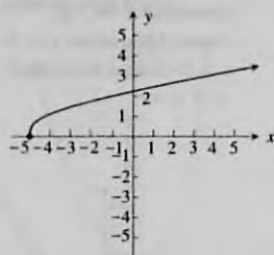
1. altura, $60/\sqrt[3]{225\pi} \approx 6.73$ pulg.; radio $\sqrt[3]{15/\pi} \approx 1.68$ pulg. 5. 45 m por 60 m 7. 12 pulg por 4 pulg por 6 pulg. 9. 90 km/hr
 11. 1.44 s 13. $2x - y + 1 = 0$ 15. 1 mes; 7.5% 17. 40 unidades 19. \$ 1500 21. $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ unidades; $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$
 23. radio de la semicircunferencia, $\frac{32}{4+\pi}$ pie; altura del rectángulo, $\frac{32}{4+\pi}$ pie 25. $5\sqrt{5}$ pie 27. $\sqrt{2}$ 29. $2\sqrt{2}$ 31. $\frac{1}{2}\pi$

EJERCICIOS 3.10 (página 286)

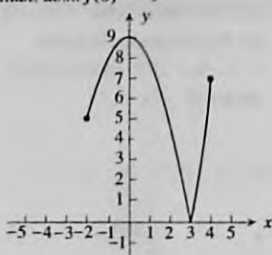
1. 4.1179 3. -1.1673 5. 2.649 7. 0.507 9. -1.128 11. 1.73205 13. 1.81712 15. 0.7391 17. 0.8767
 19. (a) $1 + 2(x - 1)$; (c) f : 0.81, 0.9801, 1, 1.0201, 1.21; aproximación: 0.8, 0.98, 1.02, 1.2
 21. (a) $2 + (x - 1)$; (c) f : 1.897, 1.98997, 2, 2.00998, 2.0976; aproximación: 1.9, 1.99, 2, 2.01, 2.1
 23. (a) $0.54030 - 0.84147(x - 1)$; (c) f : 0.6216, 0.54869, 0.54030, 0.53186, 0.4536; aproximación: 0.6244, 0.54871, 0.54030, 0.53189, 0.4562
 25. $dy = 2$, $\Delta = 2.25$ 27. $dy = \frac{1}{12} \approx .083$, $\Delta y = .080$ 29. (a) 0.0309; (b) 0.03; (c) 0.0009
 31. (a) $\frac{1}{42} \approx 0.0238$; (b) $\frac{1}{40} = 0.025$; (c) $-\frac{1}{840} \approx -0.0012$ 33. (a) -0.875; (b) -1.5; (c) 0.625
 35. $3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2) dx$ 37. $x(5x + 6)(2x + 3)^{-1/2} dx$ 39. $\frac{(1 - 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{cos} x) dx}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}$
 41. $2 \tan x \sec^2 x (2 \tan^2 x + 1) dx$ 43. (a) 6.75 cm^3 ; (b) 0.3 cm^2 45. $\frac{12}{5}\pi \text{ m}^3$ 47. $0.4\pi \text{ cm}^2$ 49. $0.9\pi \text{ cm}^3$
 51. 4% 53. 10 pie^3 57. 2.0288, 4.9132 59. 3.14159

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 3 (página 289)

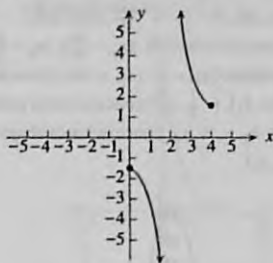
1. mín. abs.: $f(-5) = 0$



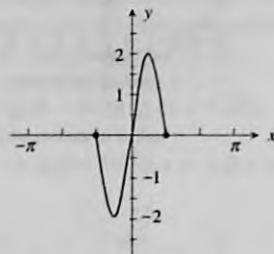
3. mín. abs.: $f(3) = 0$;
 máx. abs.: $f(0) = 9$



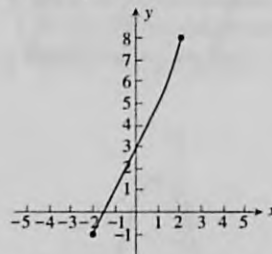
5. no tiene extremos absolutos



7. mín. abs.: $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$;
 máx. abs.: $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$



9. mín. abs.: $f(-2) = -1$;
 máx. abs.: $f(2) = 8$



11. (a) mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$;
 máx. abs.: $f(3) = 9$

(b) mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$;
 máx. abs.: $f(-4) = 100$

13. mín. abs.: $f(-1) = -0.301$;
 máx. abs.: $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$

15. $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$

17. $-\frac{13}{4}$ 19. 1.269, 1.872

23. $f(1)$ no existe

 25 y 37. $f(-2) = 0$, máx. rel.; $f(0) = -4$, mín. rel.; $(-1, -2)$, punto de inflexión; creciente: $(-\infty, -2]$ y $[0, +\infty)$; decreciente: $[-2, 0]$; cóncava hacia abajo $x < -1$; cóncava hacia arriba $x > -1$

 27 y 39. no tiene extremos relativos; punto de inflexión: $(3, 1)$; creciente: $(-\infty, +\infty)$; cóncava hacia abajo: $x < 3$; cóncava hacia arriba: $x > 3$

 29 y 41. no tiene extremos relativos; punto de inflexión: $(0, 0)$; decreciente: $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; cóncava hacia abajo: $(0, \frac{1}{2}\pi)$; cóncava hacia arriba: $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$

 31 y 43. $f(-1) = 0$, mín. rel.; $f(0) = 9$, máx. rel.; $f(3) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión en: $x = \pm \frac{3}{5}\sqrt{5}$; decreciente: $(-\infty, -1]$ y $[0, 3]$; creciente: $[-1, 0]$ y $[3, +\infty)$; cóncava hacia arriba: $x < -\frac{3}{5}\sqrt{5}$ y $x > \frac{3}{5}\sqrt{5}$; cóncava hacia abajo: $-\frac{3}{5}\sqrt{5} < x < \frac{3}{5}\sqrt{5}$

33. $f(\frac{8}{3}) = \frac{839808}{3125}$, máx. rel.;

$f(4) = 0$, mín. rel.; puntos de inflexión:

$x = -2, x = \frac{1}{3}(8 \pm 3\sqrt{6})$;

creciente: $(-\infty, \frac{8}{3}]$, $[4, +\infty)$;

decreciente: $[\frac{8}{3}, 4]$;

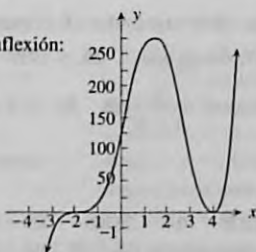
cóncava hacia arriba:

$-2 < x < \frac{1}{3}(8 - 3\sqrt{6})$,

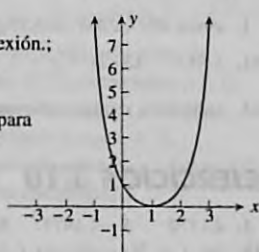
$x > \frac{1}{3}(8 + 3\sqrt{6})$;

cóncava hacia abajo: $x < -2$,

$\frac{1}{3}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{3}(8 + 3\sqrt{6})$



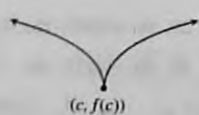
35. $f(1) = 0$, mín. rel.;
 no tiene puntos de inflexión;
 decreciente: $(-\infty, 1]$;
 creciente: $[1, +\infty)$;
 cóncava hacia arriba: para
 toda x



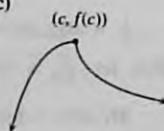
45. (a)



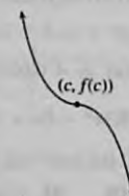
(b)



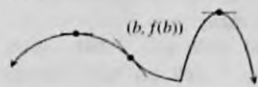
(c)



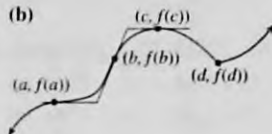
(d)



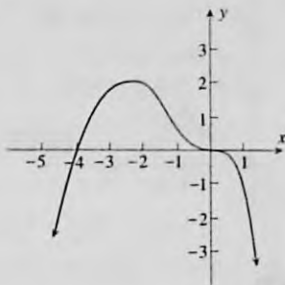
47. (a)



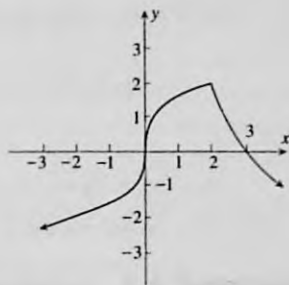
(b)



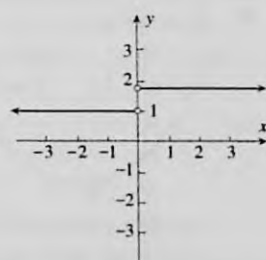
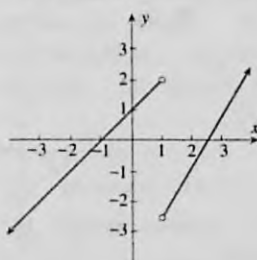
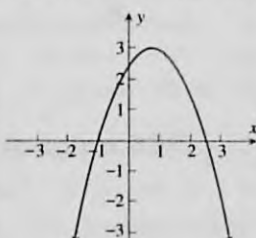
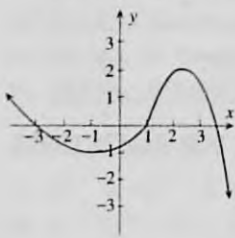
49. creciente: $(-\infty, -2]$; decreciente: $(-2, +\infty)$;
 máx. rel.: $x = -2$;
 cóncava hacia arriba: $(-1, 0)$;
 cóncava hacia abajo: $x < -1, x > 0$;
 puntos de inflexión: $x = -1, 0$



51. creciente: $(-\infty, 2]$; decreciente: $[2, +\infty)$;
 máx. rel.: $x = 2$, cóncava hacia arriba:
 $x < 0, x > 2$; cóncava hacia abajo: $(0, 2)$;
 punto de inflexión: $x = 0$



53. creciente: $(-\infty, -3], [1, 3.5]$; decreciente: $[-3, 1], [3.5, +\infty)$;
 máx. rel.: $x = -3, x = 3.5$; mín. rel.: $x = 1$;
 cóncava hacia arriba: $(-1, 2.5)$; cóncava hacia abajo:
 $x < -1, x > 2.5$; puntos de inflexión.: $x = -1, x = 2.5$


 57. 3 59. $-\infty$ 61. 0

$$67. x_1 = \frac{1}{16}(9 - \sqrt{561}), x_2 = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{561}),$$

$$x_3 = -\frac{1}{8}(\sqrt{137} + 5), x_4 = \frac{1}{8}(\sqrt{137} - 5);$$

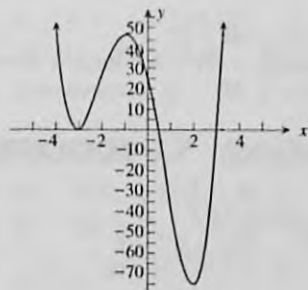
 creciente: $[-3, x_1], [x_2, +\infty)$; mín relativo.:

$$f(-3) = 0, f(x_2) = -75.1; \text{ máx. rel.: } f(x_1) = 48.1;$$

 cóncava hacia arriba: $x < x_3, x > x_4$;

 cóncava hacia abajo: (x_3, x_4) ; puntos de inflexión.:

$$x = x_3, x = x_4$$

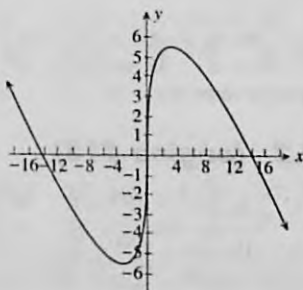


$$63. x = 2, x = -2, y = 5 \quad 65. x = 3, y = x + 3$$

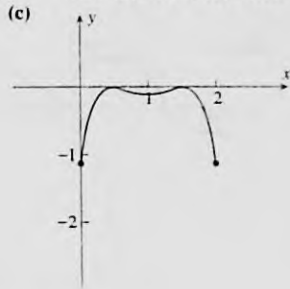
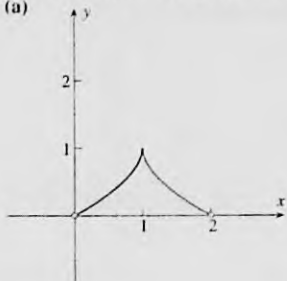
69. creciente: $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$; decreciente: $(-\infty, -2\sqrt{2}), [2\sqrt{2}, +\infty)$;

$$\text{mín. rel.: } f(-2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2};$$

$$\text{máx. rel.: } f(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

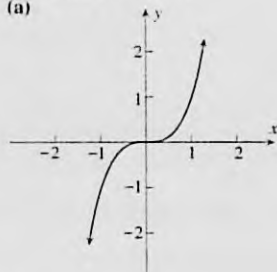
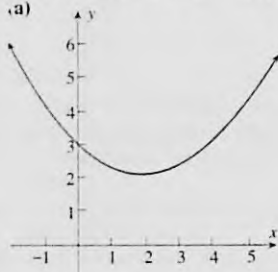
 cóncava hacia arriba: $x < 0$; cóncava hacia abajo: $x > 0$
 punto de inflexión.: $(0, 0)$


71. $\sqrt{A^2 + B^2}$ 73. $a = 2, b = -6, c = 3$ 79. 900 81. 12 km del punto sobre la orilla más proximo a A
 83. \$2000 85. \$1800 87. 1500 89. 25 radios; \$525 91. $\frac{125}{8}$ m 93. $\frac{512}{27} \pi$ pulg³
 95. el radio es $\frac{3}{2}r$ cm y la altura es $3h$ cm 99. el alambre debe cortarse a la mitad 101. 1000; \$11 103. -0.482
 105. 4.4934 107. 1, f : 0.9998, 0.999998, 1, 0.999998, 0.9998; aproximación: 1, 1, 1, 1 109. (a) -0.16; (b) -0.64
 111. 2π pulg³ 113. 1% 117. (a)

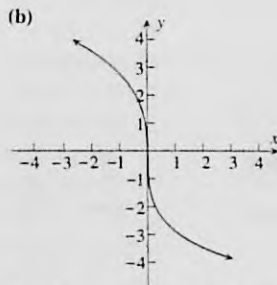
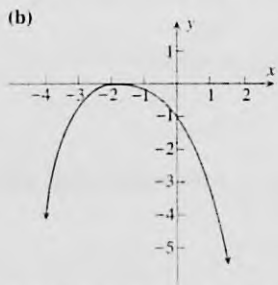
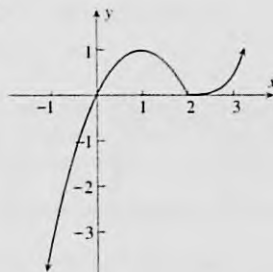


EJERCICIOS 4.1 (página 307)

1. $\frac{3}{5}x^5 + C$ 3. $-\frac{1}{2x^2} + C$ 5. $2t^{5/2} + C$ 7. $3x^{2/3} + C$ 9. $\frac{9}{5}t^{10/3} + C$ 11. $\frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$
 13. $\frac{8}{5}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$ 15. $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ 17. $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$
 19. $\frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + C$ 21. $\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$ 23. $-3 \cos t - 2 \sin t + C$ 25. $\sec x + C$
 27. $-4 \csc x + 2 \tan x + C$ 29. $-2 \cot \theta - 3 \tan \theta + \theta + C$
 31. (a) 33. (a)



35.



37. $y = x^2 - 3x + 2$ 39. $3y = -2x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ 41. $12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27$
 43. $C(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$ 45. (a) $C(x) = 3x^2 + 8$; (b) \$800 47. (a) $R(x) = 15x - 2x^2$; (b) $p = 15 - 2x$
 49. 117π m³ 53. $g'(x)$ no existe en $x = 0$

EJERCICIOS 4.2 (página 318)

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4y)^{3/2} + C$ 3. $\frac{3}{8}(x^2 - 9)^{4/3} + C$ 5. $\frac{1}{33}(x^3 - 1)^{11} + C$ 7. $\frac{1}{32(1 - 2y^4)^4} + C$
 9. $\frac{3}{11}(x - 2)^{11/3} + C$ 11. $\frac{2}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$ 13. $-\frac{2}{5}(1 - r)^{-5} + \frac{1}{3}(1 - r)^{-6} + C$
 15. $-\frac{3}{4}(3 - 2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3 - 2x)^{7/2} + C$

17. $\frac{1}{4}\sin 4\theta + C$ 19. $-2\cos x^3 + C$ 21. $\frac{1}{3}\tan 5x + C$ 23. $-\frac{1}{6}\csc 3y^2 + C$ 25. $\frac{1}{6}(2 + \sin x)^6 + C$
 27. $-2\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$ 29. $-\frac{1}{2}(1 + \cos x)^{3/3} + C$ 31. $-\frac{1}{8}\cos^3 t + C$ 33. $\frac{1}{2}\tan 2x - \frac{1}{2}\cot 2x + C$
 35. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$ 37. $\frac{3}{4}(3 - y)^{4/3} - 18(3 - y)^{1/3} + C$ 39. $\frac{3}{2}(r^{1/3} + 2)^5 + C$
 41. $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$ 43. $\cos(\cos x) + C$ 45. $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x + 4} + \frac{38}{5}$ 47. $p = \frac{4x + 22}{x + 5}$
 49. $\frac{1}{6}\text{coulombs}$ 51. 5325 53. $3.1\mu\text{m}^3$ 55. (a) $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C$; (b) $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + \bar{C}$; (c) $C = \frac{1}{8} + \bar{C}$
 57. (a) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C$; (b) $\frac{2}{3}(\sqrt{x} - 1)^3 + \bar{C}$; (c) $C = -\frac{2}{3} + \bar{C}$
 59. (a) $\sin^2 x + C_1$; (b) $-\cos^2 x + C_2$; (c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C_3$; (d) $C_2 = C_1 + 1$; $C_3 = C_1 + \frac{1}{2}$

EJERCICIOS 4.3 (página 326)

1. $y = 2x^2 - 5x + C$ 3. $y = x^3 + x^2 - 7x + C$ 5. $y = \frac{-2}{3x^2 + C}$ 7. $2\sqrt{1 + u^2} = 3v^2 + C$
 9. $\tan x - \tan y + y = C$ 11. $y = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$ 13. $s = -\frac{1}{9}(\sin 3t + \cos 3t) + C_1t + C_2$
 15. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$ 17. $4\sin 3x + 6\cos 2y + 7 = 0$ 19. $u = 3v^4 + 4v^3 + 2v^2 + 2v$
 21. $s = \frac{1}{3}(2t + 4)^{3/2} - \frac{8}{3}$ 23. $v = 2 + 5t - t^2$; $s = 2t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$
 25. $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 4$; $s = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 4t + 1$ 27. $v = -2\sqrt{2}\sin(2t - \frac{1}{4}\pi)$; $s = \sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$
 29. $1600s = v^2 + 1200$ 31. $5x^2 + 4s = v^2 + 12$
 33. A los t s su posición es s cm a la derecha del origen, donde $s = (-3\cos 3\pi t + 3)/\pi$.
 (a) $s = (\frac{9}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5})/\pi = 0.1824$; (b) $s = 3/\pi = 0.9549$; (c)-(d) $s = (\frac{15}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5})/\pi = 0.6598$
 35. (a) 0.625 s; (b) 6.25 pie; (c) 1.25 s; (e) 20.0 pie/s 37. (a) 5.89 s; (b) 188 pie/s 39. (a) 3.39 s; (b) 98.5 pie/s;
 41. (a) 3.54 s; (b) 113 pie/s 43. (a) $s = -4.9t^2 + 150t + 2$; (b) 523.6 m; (c) 3.79 s; 26.8 s
 45. $\frac{15}{231}\text{rad/s} = 0.06\text{rad/s}$ 47. 1.62m/s^2 49. (a) 3.47 s; (b) 48.2 m 51. $20\text{m/s} = 72\text{km/h}$ 53. $x^2 + 2y^2 = C$

EJERCICIOS 4.4 (página 337)

1. 51 3. 147 5. 2025 7. $\frac{73}{12}$ 9. $\frac{63}{4}$ 11. $\frac{7}{12}$ 13. 10 400 15. $2^n - 1$ 17. $\frac{100}{101}$
 19. $n^2 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$ 21. $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas 23. $\frac{5}{3}$ unidades cuadradas 25. 9 unidades cuadradas
 27. $\frac{17}{4}$ unidades cuadradas 29. $\frac{27}{2}$ unidades cuadradas 31. $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ unidades cuadradas 33. 9 unidades cuadradas
 35. 15 unidades cuadradas 37. 1.0349 unidades cuadradas 39. 1.8530 unidades cuadradas 41. 1.5912 unidades cuadradas

EJERCICIOS 4.5 (página 350)

1. $\frac{247}{32}$ 3. 1.14 5. $\frac{\pi}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ 7. (a) 0.2672; (b) 0.3 9. (a) 2.6725; (b) 2.6339 11. 2
 13. π 15. 6 17. 12 19. 10 21. $\frac{5}{2}$ 23. 28 25. $\frac{\pi}{2}$ 27. 0 29. (a) 12; (b) 49; (c) -5
 31. 15 33. 0 35. -21 37. $-\frac{3}{2}$ 39. $4 + \pi$ 41. $\frac{33}{2}\pi$ 49. $\int_0^2 x^2 dx$ 51. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

EJERCICIOS 4.6 (página 359)

1. \geq 3. \leq 5. $[0, 0.125]$ 7. $[2, 2\sqrt{3}]$ 9. $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\sqrt{3}]$ 11. $[0, 1.5]$ 13. $[0, \frac{25}{32}]$ 15. $[2, 2.5]$
 17. $[-2, \frac{2}{3}]$ 19. $[-\frac{2}{3}\pi, 0]$ 21. 1.15 23. 1.55 25. 2.58 27. 0 29. 2.66 31. 0.66
 41. $\frac{1}{2}$, ocurre en $x = \frac{1}{2}$ 43. $\frac{2}{\pi} \approx \sin 0.69$ 45. $v = 32$; 32 47. π

EJERCICIOS 4.7 (página 370)z

1. 12 3. 36 5. $\frac{3}{2}$ 7. $\frac{3}{16}$ 9. $\frac{134}{3}$ 11. -8 13. 1 15. $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$ 17. $2 - \sqrt[3]{2}$ 19. $\frac{104}{5}$
 21. $\frac{29}{2}$ 23. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 25. $\frac{256}{15}$ 27. $\frac{5}{6}$ 29. $\frac{6215}{12}$ 31. 0 33. $\frac{3}{2}$ 35. $\sqrt{4 + x^6}$ 37. $-\sqrt{\sin x}$
 39. $\frac{2}{3 + x^2}$ 41. $3x^2\sqrt[3]{x^6 + 1}$ 43. 1 45. 6, ocurre en $x = \sqrt{3}$ 47. 27 49. $\sqrt{2 - \frac{3}{4}(\sin \frac{\pi}{3})} = 1.2873$ 59. $\frac{11\pi}{5}$

EJERCICIOS 4.8 (página 379)

1. $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas 3. $\frac{22}{3}$ unidades cuadradas 5. $\frac{52}{3}$ unidades cuadradas 7. $\frac{343}{6}$ unidades cuadradas
 9. 1 unidad cuadrada 11. 1 unidad cuadrada 13. $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas 15. $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas
 17. $\frac{1}{6}$ unidades cuadradas 19. $\frac{12}{5}$ unidades cuadradas 21. $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas 23. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ unidades cuadradas
 25. $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas 27. $\frac{27}{10}$ unidades cuadradas 29. $\frac{64}{3}$ unidades cuadradas 31. $\frac{253}{12}$ unidades cuadradas
 33. $\frac{37}{12}$ unidades cuadradas 35. $(\sqrt{2} - 1)$ unidades cuadradas 37. $\frac{7}{3}$ unidades cuadradas
 39. (a) $\pm\sqrt{2} = 1.4142$; (c) $\frac{56}{15}\sqrt{2}$ unidades cuadradas = 5.2797 unidades cuadradas
 41. (a) ± 1.4045 ; (c) 2.2032 unidades cuadradas 43. (a) 1.3146; (c) 3.7545 unidades cuadradas
 45. (a) 1.1274; (c) 2.8079 unidades cuadradas 47. 12 unidades cuadradas 49. $\frac{128}{5}$ unidades cuadradas
 51. 64 unidades cuadradas 53. $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades cuadradas 55. $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades cuadradas
 57. $\frac{16}{3}p^2$ unidades cuadradas 59. 32 61. $m = \frac{3}{2}K$ 63. El dominio de $A(h)$ es $[0, r]$

EJERCICIOS 4.9 (página 389)

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas 3. $\frac{127}{7}\pi$ unidades cúbicas 5. 64π unidades cúbicas 7. $\frac{704}{5}\pi$ unidades cúbicas
 9. $\frac{384}{7}\pi$ unidades cúbicas 11. $\frac{3456}{35}\pi$ unidades cúbicas 13. $\frac{256}{15}\pi$ unidades cúbicas 15. $\frac{128}{5}\pi$ unidades cúbicas
 17. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúbicas 19. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$ unidades cúbicas 21. π unidades cúbicas 23. $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades cúbicas
 25. $(4\pi - \frac{1}{2}\pi^2)$ unidades cúbicas 27. $(\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\pi^2)$ unidades cúbicas 29. $\frac{1250}{3}\pi$ unidades cúbicas 31. $\frac{64}{5}\pi$ unidades cúbicas
 33. $\frac{261}{32}\pi$ unidades cúbicas 35. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúbicas 37. $(\frac{8}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi)$ unidades cúbicas 39. 2
 41. 15.15 unidades cúbicas 43. 39.69 unidades cúbicas 45. 2.822 unidades cúbicas 47. 6.923 unidades cúbicas
 49. 20.28 unidades cúbicas 51. $32\sqrt{2}$ unidades cúbicas 53. $\frac{1372}{3}\sqrt{3}\text{cm}^3$ 55. $\frac{686}{3}\text{cm}^3$ 57. $\frac{8}{3}r^3$ unidades cúbicas
 59. 396.9 unidades cúbicas 61. $\frac{2}{3}r^3\text{cm}^3$ 63. $180\pi\text{cm}^3$

EJERCICIOS 4.10 (página 396)

- 1-11. Vea las respuestas de los ejercicios 5-15 de la sección 4.9 13. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cúbicas 15. $\frac{3}{10}\pi$ unidades cúbicas
 17. $\frac{5}{6}\pi$ unidades cúbicas 19. $\frac{49}{30}\pi$ unidades cúbicas 21. 16π unidades cúbicas 23. $\frac{512}{15}\pi$ unidades cúbicas
 25. $\frac{32}{15}\pi p^3$ unidades cúbicas 27. $\frac{8}{5}\pi$ unidades cúbicas 29. $\frac{11}{10}\pi$ unidades cúbicas 31. $\frac{152}{15}\pi$ unidades cúbicas
 33. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúbicas 35. $\frac{32}{15}\pi$ unidades cúbicas 37. $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\pi$ unidades cúbicas
 39. π unidades cúbicas 41. 20.37 unidades cúbicas 43. 62.67 unidades cúbicas 45. 2.038 unidades cúbicas
 47. 7.707 unidades cúbicas 49. 6.763 unidades cúbicas 51. $\frac{224}{3}\pi$ unidades cúbicas 53. $\sqrt[3]{2744}$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 4 (página 398)

1. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ 3. $\frac{2}{15}(x^5 - 1)^{3/2} + C$ 5. $\frac{1}{3}\sqrt{2s+3}(s-3) + C$ 7. $\frac{1}{3}\tan 3\theta - \theta + C$
 9. $5\sin x - 3\sec x + C$ 11. $\frac{56}{3}$ 13. $\frac{11}{4}$ 15. $\frac{5}{4}$ 17. $\frac{1}{2}$ 19. $\frac{652}{15}$ 21. $4 - \frac{1}{2}\pi$ 23. $y^2 = \frac{1}{2x^{-1} + C} + 1$
 25. $y = \frac{1}{15}(2x-1)^{3/2} + C_1x + C_2$ 27. $y = 10x - 2x^2 - 9$ 29. (a) $R(x) = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$; (b) $p = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 12$
 31. (a) $V = \frac{2}{3}(L+1)^{3/2} + \frac{1}{3}L^2 + \frac{24}{3}$; (b) 64cm^3 33. 1.46cm^3 35. \$5
 37. $v = 3\sin 2t + 3$; $s = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$
 39. A los t s su posición es s cm a la derecha del origen, donde $s = \frac{3\sin 2\pi t}{2\pi}$.
 (a) $s = 0.4541$; (b) y (c) $s = -0.4541$; (d) $s = \frac{3}{2\pi} \approx 0.4775$
 41. (a) $25\sqrt{3}s = 43$ s; (b) $800\sqrt{3}\text{pie/s} = 1400\text{pie/s}$ 43. (a) $\frac{3}{2}$ s; (b) 100 pie; (c) 4 s; (d) -80pie/s
 45. (a) 1500 m/s; (b) 45 000 m 47. $(11 + \sqrt{187})s = 25$ s; $88(14 + \sqrt{187})\text{pie} = 2400\text{pie}$; $(88 + 8\sqrt{187})\text{pie/s} = 200\text{pie/s}$
 49. $\sqrt[3]{2} - 5$ 53. $[0, \pi]$ 55. $\frac{313}{36}$ 57. $-(3x^2 - 4)^{3/2}$ 59. $\frac{1}{x}$ 61. 0 63. $\frac{42304}{175}$ 67. $\frac{46}{3}$ unidades cuadradas
 69. $\frac{224}{3}$ unidades cuadradas 71. 36 unidades cuadradas 73. 21.88 unidades cuadradas 75. 0.9678 unidades cuadradas
 77. $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas 79. $2\sqrt{2}$ unidades cuadradas 81. $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades cuadradas 83. $\frac{1}{6}\pi$ unidades cúbicas
 85. π unidades cúbicas 87. π unidades cúbicas 89. 250π unidades cúbicas 91. 1024 unidades cúbicas
 93. 3π unidades cúbicas 95. $\frac{25}{6}\pi$ unidades cúbicas 97. $558\pi\text{cm}^3$ 99-101. 44.96 unidades cúbicas
 103. 1.535 unidades cúbicas 105. 25.17 unidades cúbicas 107. 90pie^3 109. $\frac{832}{3}\pi$ unidades cúbicas
 111. $\frac{1}{4}\pi^2$ unidades cúbicas 113. 12; $c = \sqrt{3}$ 119. $\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$

EJERCICIOS 5.1 (página 416)

1. (a) uno a uno; (b) no es uno a uno; (c) uno a uno 3. (a) uno a uno; (b) uno a uno; (c) no es uno a uno
 5. (a) uno a uno; (b) uno a uno; (c) uno a uno
 7. (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 7)$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) no tiene inversa
 9. (a) $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, dominio: $[0, +\infty)$, contradominio: $[3, +\infty)$ 11. (a) $F^{-1}(x) = x^3 - 1$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$; (b) no tiene inversa
 13. (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{12}x^5$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$;
 (b) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$, dominio: $\{x \mid x \neq 1\}$, contradominio: $\{y \mid y \neq -1\}$
 15. (a) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$, dominio: $[5, +\infty)$, contradominio: $[0, +\infty)$; (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)$, dominio: $[0, 8]$, contradominio: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
 17. $F^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$, dominio: $[0, 3]$, contradominio: $[0, 3]$ 25. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{1}{10}$ 27. (a) $\frac{1}{12}$; (b) $\frac{1}{21}$ 29. (a) -2 ; (b) $-\frac{1}{4}$
 31. (a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $-\frac{1}{4}$ 33. 0.09426 35. $\sqrt{\frac{1}{840}(1 + \sqrt{21})} \approx 0.08152$ 37. 1.334 39. $\frac{1}{3}$ 41. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$
 43. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ 45. $f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{3-2x}$ 47. $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x-32)$ 49. $v(m) = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}$ 51. (b) 6; (c) $\frac{1}{6}$
 55. -1 59. (b) $f_1(x) = x^2 + 4, x \geq 0$; $f_2(x) = x^2 + 4, x \leq 0$; (c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}, x \geq 4$
 61. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 & \text{si } 81 < x \end{cases}$ 63. $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{5}$ 65. $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3\pi^2}$

EJERCICIOS 5.2 (página 428)

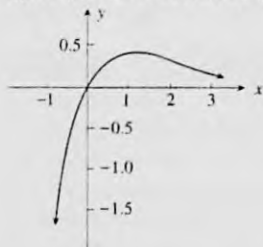
5. $\frac{5}{4+5x}$ 7. $\frac{5}{8+10x}$ 9. $\frac{6}{3r+1}$ 11. $\frac{6 \ln(3r+1)}{3r+1}$ 13. $-\frac{2x}{12-3x^2}$ 15. $5 \cot 5y$ 17. $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$
 19. $2 \sec 2x$ 21. $\frac{\sec^2 x}{2 \tan x}$ 23. $-\frac{17}{2(2w-5)(3w+1)}$ 25. $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ 27. $\frac{1-2x-x^2}{3(x+1)(x^2+1)}$ 29. $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$
 31. $-\frac{xy+y}{xy+x}$ 33. $x+y$ 35. $\frac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x}$
 39. 41. 43. 45.
 49. $x - 2y = 2 - 2 \ln 2$ 51. $x + y = 1$ 53. $-\frac{1}{2}$ 55. (a) \$5 por cada \$1 de cambio en el presupuesto; (b) \$688

EJERCICIOS 5.3 (página 435)

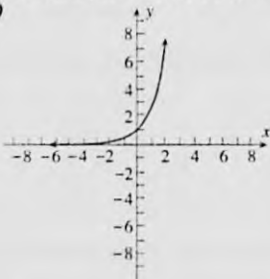
1. $\frac{3x^2}{x^3+1}$ 3. $-\frac{3 \sec 3x}{\cos 3x}$ 5. $4 \sec 4x$ 7. $\frac{4-x^2}{x(x^2+4)}$ 9. $2x(x+1)^6(x-1)^2(6x^2-2x-1)$
 11. $\frac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3-30x^2-6x+16)$ 13. $\frac{8x^9-4x^7+15x^2+10}{5(x^7+1)^{6/5}}$ 15. $-\frac{1}{2} \ln |3-2x| + C$
 17. $\frac{1}{5} \ln |5x^3-1| + C$ 19. $\ln |\ln y| + C$ 21. $\frac{1}{5} \ln(1-\cos 5x) + C$ 23. $\ln(1+\sin 2x) + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$
 25. $x^2 + 4 \ln |x^2-4| + C$ 27. $\frac{1}{3} \ln^3(3x) + C$ 29. $\ln |\ln^2(x) + \ln x| + C$ 31. $\ln |\sec(\ln x)| + C$ 33. $\frac{3}{2} \ln 2$
 35. $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{7}$ 37. $4 + \ln 2$ 39. $\frac{1}{2} \ln 3$ 41. $\frac{1}{2} \ln(4+2\sqrt{3})$ 43. $\frac{1}{\ln 4}$ 47. $\frac{1}{4} \ln 5 \approx 0.40236$
 49. $2000 \ln 2 \text{ lb/pie}^2 \approx 1386 \text{ lb/pie}^2$ 51. $\ln 4$ unidades cuadradas ≈ 1.38629 unidades cuadradas 53. $\pi(11+8 \ln 2)$ unidades cúbicas ≈ 51.97821 unidades cúbicas

EJERCICIOS 5.4 (página 446)

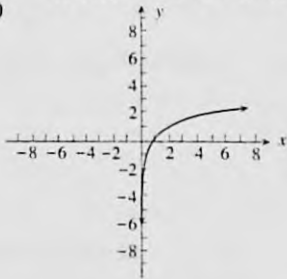
1. (a) 2.665; (b) 2.565 3. (a) 15.15; (b) 5.616 5. $5e^{5x}$ 7. $-6xe^{-3x^2}$ 9. $-e^{\cos x} \sin x$ 11. $e^{2x} \cos e^x + e^x \sin e^x$
13. $\frac{e^{\sqrt{x}} \sec^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ 15. $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ 17. $2x$ 19. $2e^{2x} \sec e^{2x} \tan e^{2x} + 2e^{2 \sec x} \sec x \tan x$ 21. $-e^{y-x}$
23. $-\frac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}$ 25. $-\frac{1}{3}e^{2-5x} + C$ 27. $e^x - e^{-x} + C$ 29. $\frac{1}{6(1 - 2e^{3x})} + C$ 31. $e^x - 3 \ln(e^x + 3) + C$
33. e^2 35. 2 37. $\frac{1}{2}$ 39. $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ 41. (a) 1; (b) 0; (c) e ; (d) no, pero $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$ 43. $(e^2 - 1)$ unidades cuadradas
45. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$ 47. $(e^3 + \frac{1}{2})$ pie ≈ 20.586 pie 49. $(-9.17 \text{ lb}/\text{pie}^2)$ por s
51. 0.006 53. \$10 000; \$33 834 cientos \approx \$3 383 382 55. (b) 2.7181459; 2.7184177; 2.7182818
61. Consulte la figura adjunta. (a) y (b) $f(1) = e^{-1}$ es un máx. rel.; (c) $(-\infty, 1]$; (d) $[1, +\infty)$; (e) $\{x \mid x > 2\}$; (f) $\{x \mid x < 2\}$;
(g) La pendiente de la recta tangente a f en $x = 2$ es $-e^{-2}$

**EJERCICIOS 5.5 (página 454)**

1. $5 \ln 3 \cdot 3^{5x}$ 3. $4^{3x^2} \cdot \ln 4 \cdot 6t$ 5. $4^{\sin 2x} \cdot 2 \ln 4 \cdot \cos 2x$ 7. $2^{5x} 3^{4x^2} (5 \ln 2 + 8x \ln 3)$ 9. $\frac{1}{x^2} \log_{10} \frac{e}{x}$ 11. $\frac{\log_a e}{2x \sqrt{\log_a x}}$
13. $3^{t^2} \sec 3^{t^2} \tan 3^{t^2} \cdot 2t \ln 3$ 15. $x^{\sqrt{x} - (1/2)} (1 + \frac{1}{2} \ln x)$ 17. $z^{\cos z - 1} (\cos z - z \ln z \sin z)$
19. $(\sin x)^{\tan x} [1 + \ln(\sin x) \cdot \sec^2 x]$ 21. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C$ 23. $\frac{a^t e^t}{1 + \ln a} + C$ 25. $\frac{10^{t^3}}{3 \ln 10} + C$
27. $\frac{6e^x}{\ln 6} + C$ 29. $\frac{(\ln|x|)^2}{\ln 2} + C$ 31. (a) 0.62133; (b) 1.7712 33. (a) 3.3219; (b) 0.43429 35. 2.999
45. (a) 61 ventas por día; (b) 2.26 ventas por día 49. (a) $y = 200 \cdot 2^{t/10}$; (b) \$12 800; (c) \$877 por año
51. (a)

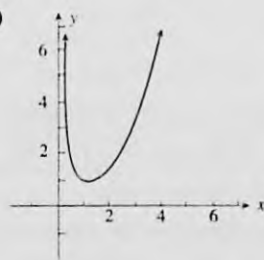


(b)



53. $\left(\frac{-4}{\ln 5} - 1\right)$ unidades cuadradas 55. $\pi\left(\frac{12}{\ln 5} - 1\right)$ unidades cúbicas 57. 0.73306 unidades cuadradas

59. (a)



- (b) $f(1) = 1$ es un mínimo relativo;
(c) $[1, +\infty)$; (d) $(0, 1]$;
(e) La gráfica es cóncava hacia arriba en todo su dominio:
 $(0, +\infty)$;
(f) no tiene puntos de inflexión

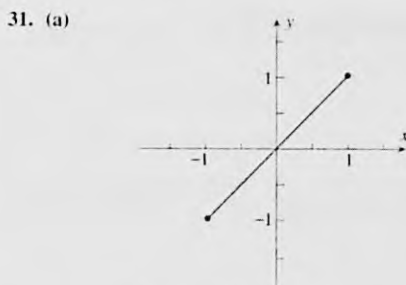
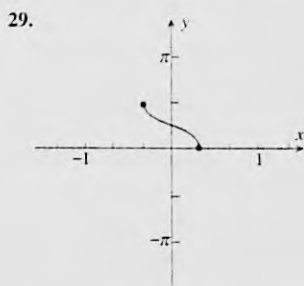
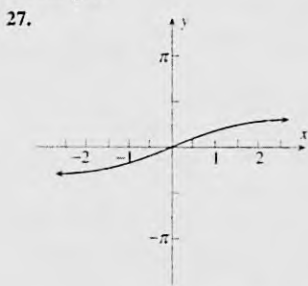
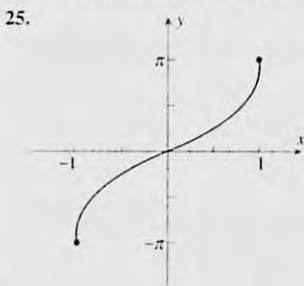
67. dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$; extremo en $f(0) = 0$; no acotada en $x = 1$; decreciente en todos los intervalos del dominio; punto de inflexión en $(e^{-2}, -\frac{1}{2} \ln 5)$; cóncava hacia arriba en $[0, e^{-2}]$ y $(1, +\infty)$; cóncava hacia abajo en $[e^{-2}, 1)$

EJERCICIOS 5.6 (página 467)

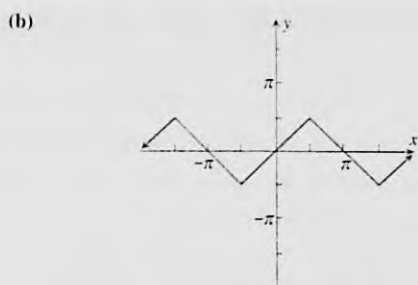
1. (a) $y = 40\,000(1.5)^{t/20}$; (b) 64 000; (c) 2023 3. (a) $i = 40(0.375)^{100t}$; (b) 5.625 amperes 5. 506 7. 10.6
 9. 123 456 11. 29,15 años 13. (a) \$5256.355; (b) \$5256.357; (c) 5.127% 15. 15.8 años 17. 43.9 g
 19. 11.6 kg 21. hace 6 600 años 23. 70 25. (a) 1 min 42 s; (b) 42.1°
 27. (a) $y = 60 - 60(0.75)^{t/20}$; (c) 35; (d) 55 29. 0.34134 31. 0.84270 33. $\ln \left| \ln \frac{a}{y} \right| + kt = C$

EJERCICIOS 5.7 (página 482)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ 3. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{7}{6}\pi$
 5. (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) $-\frac{1}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}\pi$; (d) $-\frac{1}{2}\pi$; (e) 0 7. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) 3
 9. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $-2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) -3 11. (a) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (b) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $-\sqrt{5}$; (e) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$
 13. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{6}\pi$ 15. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{2}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$
 17. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{3}\pi$ 19. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{4}{3}\pi$; (d) $\frac{4}{3}\pi$
 21. (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$ 23. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$



dominio: $[-1, 1]$;
 contradominio: $[-1, 1]$



dominio: $(-\infty, +\infty)$;
 contradominio: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

33. (a) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; (b) $\frac{2}{1+4x^2}$ 35. (a) $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; (b) 0 37. (a) $-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\frac{2}{4+x^2}$
 39. (a) $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$; (b) $2\sqrt{4-x^2}$ 41. (a) $\tan^{-1} x$; (b) $\frac{3}{\sqrt{4e^{6x}-1}}$
 43. (a) $t = -\frac{1}{4\pi} \sin^{-1} \frac{y}{2} + \frac{1}{8} + \frac{n}{2}$, para cualquier entero $n \geq 0$ o $t = \frac{1}{4\pi} \sin^{-1} \frac{y}{2} - \frac{1}{8} + \frac{k}{2}$, para cualquier entero $k \geq 1$;
 (b) $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}$
 45. recta tangente: $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{3}$; recta normal: $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$
 47. $\sqrt{10}$ pie \approx 3.16 pie 49. $\frac{1264}{1624}$ rad/s \approx 0.078 rad/s 51. $\frac{52}{3}$ km/min 53. 8 pie/s 55. $\frac{6}{x\sqrt{x^2-64}}$

EJERCICIOS 5.8 (página 488)

1. $\frac{1}{2} \sin^{-1} 2x + C$ 3. $\frac{1}{12} \tan^{-1} \frac{1}{4}x + C$ 5. $\frac{1}{16} \sec^{-1} \frac{1}{4}x + C$ 7. $\frac{1}{6} \sin^{-1} \frac{3}{4}r^2 + C$ 9. $\frac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{7}} + C$
 11. $2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$ 13. $\frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C$ 15. $\sin^{-1} \frac{x-1}{4} + C$ 17. $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \ln 2$
 19. $\frac{1}{3}\pi$ 21. $\tan^{-1} e - \frac{1}{4}\pi$ 23. $\frac{1}{4}\pi$ 25. $-\sqrt{5} - \sin^{-1} \frac{2}{3} + 3 = 0.0342044$
 27. $\frac{21}{2} + \frac{5}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \sqrt{2} (\tan^{-1} \sqrt{2} - \pi) = 10.3273$ 29. π unidades cuadradas 31. $\frac{1}{3}\pi$ unidades cuadradas

EJERCICIOS 5.9 (página 501)

1. (a) 0; (b) 1; (c) $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) = 1.175$; (d) $\frac{1}{2}(e^{-1} - e) = -1.175$
 3. (a) $\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} = 0.9640$; (b) $\frac{e^{-2} - e^2}{e^{-2} + e^2} = -0.9640$; (c) $\frac{5}{4}$; (d) $\frac{5}{4}$
 5. (a) $\frac{2}{e^2 + e^{-2}} = 0.2658$; (b) $\frac{2}{e^{-2} + e^2} = 0.2658$; (c) $\frac{e^{-1} + e}{e^{-1} - e} = -1.313$; (d) $\frac{12}{5}$
 13. (a) $2x \cosh x^2$; (b) $-8 \operatorname{sech}^2 4w \tanh 4w$ 15. (a) $\frac{1}{x^2} \operatorname{csch}^2 \frac{1}{x}$; $\frac{1}{\operatorname{senh} x \cosh x} = 2 \operatorname{csch} 2x$; $x > 0$
 17. (a) $2 \operatorname{sech} 2x$; (b) $(\cosh x)^x [\ln(\cosh x) + x \tanh x]$ 19. $\frac{1}{3} \operatorname{senh}^5 x + C$ 21. $-\frac{1}{3} \coth x^3 + C$
 23. $\frac{1}{4} \ln^2(\cosh 2x) + C$ 27. $\frac{4}{3} = 0.8$ 29. $2(\cosh 2 - \cosh 1) = 4.438$ 31. $\frac{1}{6}(\tanh^6 3 - \tanh^6 2) = 0.02800$
 33. (a) 0; (b) $\frac{1}{2} \ln 3$ 35. (a) $\ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$; (b) $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \ln 3$ 41. (a) $\frac{4}{\sqrt{16x^2 + 1}}$; (b) $\frac{2x}{1-x^4}$, $|x| > 1$
 43. (a) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 1}}$, $\tan x > 1$; (b) $-\operatorname{csc} x$ 45. (a) $\frac{6z(\coth^{-1} z^2)^2}{1-z^4}$; (b) $\frac{e^x}{\cos e^x}$ 47. $\operatorname{senh}^{-1} x$
 49. $\operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{2} + C = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + C$ 51. $\frac{1}{2} \cosh^{-1} x^2 + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) + C$
 53. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + e^t}{2 - e^t} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{2} \tanh^{-1}(\frac{1}{2} e^t) + C, & \text{si } e^t < 2 \\ \frac{1}{2} \coth^{-1}(\frac{1}{2} e^t) + C, & \text{si } e^t > 2 \end{cases}$ 55. $\cosh^{-1} \frac{5}{2} - \cosh^{-1} \frac{3}{2} = 0.6044$
 57. $\tanh^{-1} \frac{1}{2} - \tanh^{-1}(-\frac{1}{2}) = 1.099$ 59. $\frac{1}{3}(\cosh^{-1} \frac{7}{3} - \cosh^{-1} \frac{4}{3}) = 0.2319$ 63. 105 unidades cuadradas
 65. (a) $v = e^{-t/2}(\frac{5}{2} \operatorname{senh} t + \cosh t)$; $a = e^{-t/2}(2 \cosh t + \frac{1}{4} \operatorname{senh} t)$ 69. $4000(31 - 20 \operatorname{senh} 1) = 29\,983$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 5 (página 504)

1. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$, contradominio: $(-\infty, +\infty)$ 3. no tiene inversa
 5. $f^{-1}(x) = \frac{4}{3-x}$, dominio: $\{x|x \neq 3\}$, contradominio: $\{y|y \neq 0\}$ 7. $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ 9. $\frac{1}{4}$ 11. $\frac{1}{12}$
 13. (a) $-3 \tan 3x$, $\cos 3x > 0$; (b) $\frac{4x}{x^2 + 1}$ 15. (a) $4e^{4t} \cos e^{4t}$; (b) $2^{\tan t} \cdot \ln 2 \cdot \sec^2 t$ 17. (a) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$; (b) $\frac{-e^{\cot^{-1} x}}{1+x^2}$
 19. (a) $6 \operatorname{senh}^2(2w) \cosh(2w)$; (b) $\operatorname{senh}(2w^3)6w^2$ 21. (a) $-\operatorname{sech}(\tan x) \tanh(\tan x) \sec^2 x$; (b) $\operatorname{sech}^2(\sec x) \tan x \sec x$
 23. $\frac{4}{(1-x^2) \ln 10}$ 25. $(\operatorname{sen} t)^{2t}(2 \ln(\operatorname{sen} t) + 2t \cot t)$ 27. $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ 29. $-2 \operatorname{sech}(2x)$
 31. $x^2(x^2 + 1)(x-1)^3(11x^3 - 7x^2 + 7x - 3)$ 33. (a) 4.7288; (b) 8.8250 35. $\frac{3}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C$
 37. $\frac{1}{3}(e^{3x} + \frac{2^{3x}}{\ln 2}) + C$ 39. $\frac{2e^x}{\ln 2} + C$ 41. $2 \operatorname{sen}^{-1} x^2 + C$ 43. $\frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x+1}{3} + C$ 45. $\frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{sen}^{-1} 2\sqrt{2} e^{-x} + C$
 47. $w - \frac{\tanh 3w}{3} + C$ 49. $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$ 51. $\frac{3}{2} \ln 2$ 53. $1 + 5 \ln \frac{3}{4}$ 55. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2$
 57. $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) - 1$ 59. $\frac{-ye^x - e^y - 1}{e^x + xe^y + 1}$ 61. (a) $\ln(2 + \sqrt{3})$; (b) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$ 63. $y = (2 \ln 2 + 1)x - 4 \ln 2$
 65. $v = e^t - e^{-t} + 1$; $s = e^t + e^{-t} + t$ 67. $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b})$; $\frac{1}{2}\pi$ 69. $g(x) = -e^{-x}$, dominio: $(-\infty, +\infty)$
 73. (a) $y = 65(0.5)^{t/30}$; (b) 81 años a partir de ahora 75. (a) $y = 50 - 50(0.6)^{t/30}$; (c) 32; (d) 3 horas, 50 minutos
 77. 8.66 años 79. 187 500 81. 8212 años 83. 8.63 min 85. 73.7°
 87. (a) $t = \frac{n}{60} + \frac{1}{120\pi} \cos^{-1} \frac{E}{20}$, para cualquier entero $n \geq 0$ o $t = \frac{k}{60} - \frac{1}{120\pi} \cos^{-1} \frac{E}{20}$, para cualquier entero $k \geq 1$;
 (b) $\frac{1}{360}$; (c) 0.0035; (d) $\frac{1}{180}$; (e) 0.0048
 89. $9 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3}\sqrt{2})$ unidades cuadradas 91. (a) 120 rad/h; (b) 60 rad/h 93. 0.007 rad/s 95. $\frac{1}{10}\pi$ h; el recorrido lo hace caminando 103. $(\operatorname{sgn} t)(1 - e^{-|t|})$

EJERCICIOS 6.1 (página 514)

1. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{97}$ 5. $\frac{14}{3}$ 7. $\frac{33}{16}$ 9. $\frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$ 11. 12 13. $\frac{22}{3}$ 15. $\frac{9}{8}$
 17. $\frac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8(a^2 - b^2)}$ si $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ si $b = a$ 19. $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ 21. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ 23. 2 25. 4.647 27. 3.820
 29. 1.089 31. 8.815 33. 2.422 35. $400 \sinh \frac{3}{4} \text{pie} \approx 328.9 \text{ pie}$

EJERCICIOS 6.2 (página 521)

1. 250 lb 3. 4000 dinas 5. $\frac{3}{2} \text{ m/s}^2$ 7. $\frac{8}{3}$ slugs 9. 4 11. 6 13. 54 kg; $\frac{11}{3}$ m del extremo dado
 15. 171 slugs; 5.92 pulg. del extremo dado 17. 42 g; $\frac{44}{7}$ cm del extremo izquierdo 19. $\frac{63}{2}$ kg; $\frac{18}{7}$ m del extremo más alejado del punto externo 21. 16 slugs; $\frac{16}{5}$ pie del extremo dado 23. $\frac{6}{5}$ m del extremo más alejado del punto externo
 25. $8 \ln 2$ g; $\left(\frac{15}{4 \ln 2} - 1\right)$ cm del extremo dado 27. 12 kg/m

EJERCICIOS 6.3 (página 529)

1. $(2, \frac{1}{3})$ 3. $\frac{29}{7}$ 5. $(\frac{2}{3}, 1)$ 7. $(0, \frac{8}{5})$ 9. $(0, \frac{12}{5})$ 11. $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$ 13. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ 15. (2, 0) 17. (0, -0.4762)
 19. (0, -0.1020) 21. (0.5126, 1.970) 23. (0.4910, -1.083) 25. (1.048, 0.7793) 27. (1.504, 2.375)
 29. (0.4183, 0.5792) 31. (0.5300, 1.590) 33. $\frac{5}{3}p$ 35. El centroide está sobre el radio que biseca la región, a una distancia de $\frac{4}{3\pi}$ veces la longitud del radio a partir del diámetro. 37. $(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3})r^3$

EJERCICIOS 6.4 (página 534)

1. $\frac{158}{3}$ pie-lb 3. $\frac{1076}{15}$ joules 5. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{393})$ 7. 180 pulg-lb 9. 8 joules 11. 1350 ergios 13. 409 500 pie-lb
 15. 50 185 pie-lb 17. 100 000 pie-lb 19. 5 500 pie-lb 21. 2.9×10^7 joules 23. 3.20×10^6 joules 25. 163.4 s
 27. $2\sqrt{3}$ pie 29. $31.2\pi(e^{-2} - e^{-8})$ pie-lb = 13.2 pie-lb 31. $3000 \ln \frac{3}{2}$ pulg-lb ≈ 1216 pulg-lb

EJERCICIOS 6.5 (página 541)

1. 19 968 lb 3. 3993.6 lb 5. 140.4 lb 7. 942 000 N 9. 4.09×10^6 N 11. 2.54 15. 874 000 lb
 17. 6.24×10^6 pie-lb 19. 756 lb 21. 3.15×10^5 lb 23. 1.22×10^6 lb

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 6 (página 542)

1. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ 3. $\frac{1}{53208} \frac{1}{2}(10999)^{3/2} - (2251)^{3/2} = 7.03$ 5. $\frac{2}{13}$ 7. $(\frac{3}{2}, 2)$ 9. $\frac{104}{3}$ slugs; $\frac{298}{65}$ pulg. del extremo izquierdo 11. $(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$
 13. $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ 15. $\frac{256}{3}\pi \text{ m}^3$ 17. (0, 0) 19. (0.3597, 0.5357) 21. 3.214 23. 1.876 25. $\frac{7}{12}$ 27. 6 000 ergios
 29. 400 pie-lb 31. 44 145 000 joules 33. 57 262 pie-lb 35. 22.6 lb 37. $\frac{5120}{3}$ lb 39. 888 694 lb

EJERCICIOS 7.1 (página 553)

1. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ 3. $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$ 5. $x \ln 5x - x + C$ 7. $\frac{1}{3}(\ln t)^3 + C$
 9. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + C$ 11. $\frac{e^x}{x+1} + C$ 13. $\frac{1}{2}y \sin(\ln y) - \frac{1}{2}y \cos(\ln y) + C$ 15. $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$
 17. $-x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$ 19. $x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + C$ 21. $2\sqrt{z} \cot^{-1}\sqrt{z} + \ln(1+z) + C$
 23. $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$ 25. $\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{16}{(\ln 3)^3} = 15.008$ 27. $\frac{9}{16} = 0.5625$ 29. $\frac{32}{3} \ln 2 - \frac{28}{9} \approx 4.2825$
 31. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1 = 1.8859$ 33. $12e^3 + 2e = 246.463$ 35. $(e^2 + 1)$ unidades cuadradas 37. $\frac{1}{2}\pi(3e^4 + 1)$ unidades cúbicas
 39. $(8 - 24e^{-2})$ unidades cuadradas 41. $2(1 - e^{-6})$ kg; $\frac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ m de algún extremo 43. (0.267, 0.604) 45. 48.86 pie-lb
 47. $C(x) = x \ln x - x + 6$ 51. $\frac{3}{25}e^{4\pi/3} - \frac{4}{25}e^{2\pi/3}$ 55. $50(6e^{-1} - \frac{13}{4}e^{-2} - \frac{7}{4})$

EJERCICIOS 7.2 (página 563)

1. (a) $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$; (b) $-\frac{1}{16}\cos^4 4x + C$ 3. (a) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$; (b) $\frac{1}{2}\sin x + C$
 5. (a) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$; (b) $\frac{2}{7}\cos^{7/2} z - \frac{2}{3}\cos^{3/2} z + C$ 7. $\frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + C$; 9. $-\frac{1}{16}\cos 8y + \frac{1}{4}\cos 2y + C$
 11. $\frac{1}{5}\tan 5x - x + C$ 13. $-\frac{1}{4}\cot 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$ 15. $-\frac{1}{2}\cot^2 t - \ln|\sec t| + C$

17. $\frac{1}{18}\tan^4 3x - \frac{1}{9}\tan^3 3x + \frac{1}{3}\tan 3x - x + C$ 21. $\frac{1}{3}\tan^3 e^x - \tan e^x + e^x + C$ 23. $\frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$
 25. $-\frac{1}{18}\cot^5 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C$ 27. $\frac{1}{2}(\tan 2x - \cot 2x) + C$ 29. $2\sec w - \tan w + C$
 31. $-2\cot 2x + C$ 33. $-\frac{1}{3}\csc^3 x + C$ 35. $\frac{2}{3}$ 37. $\frac{3}{8}$ 39. $\frac{1}{8}$ 41. $\frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$ 43. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$ 45. $\frac{56}{15}$ 47. $\frac{1}{5}$
 49. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cuadradas 51. $\frac{3}{8}\pi^2$ unidades cúbicas 53. $\frac{5}{8}\pi^2$ unidades cúbicas
 55. $\left(\frac{\frac{1}{2}\pi - \cos 1 - \sin 1}{1 - \sin 1}, \frac{\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{8}\sin 2 - \frac{1}{4}}{1 - \sin 1}\right)$ 57. $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades cuadradas
 59. $\frac{4}{3}\pi$ unidades cúbicas 65. (b) $\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$
 67. (b) $-\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$ 69. (b) $\frac{1}{n}\sec^n x + C$

EJERCICIOS 7.3 (página 571)

1. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ 3. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + C$ 5. $\sqrt{x^2-25} + C$ 7. $-\frac{x}{9\sqrt{4x^2-9}} + C$
 9. $\frac{\tan x}{4\sqrt{4-\tan^2 x}} + C$ 11. $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(8 + \ln^2 w) + C$ 13. $-\frac{1}{5}\ln(10 - 4\sqrt{6}) \approx 0.3199$
 15. $\frac{1}{5}\ln\frac{4(\sqrt{106}-5)}{9(\sqrt{41}-5)} = 0.10345$ 17. $\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \ln(2 + \sqrt{3}) = 0.4458$ 19. $\frac{125}{3} - 24\sqrt{3} = 1.097$
 21. $\frac{2}{35}\sqrt{5} = 0.09938$ 23. $\frac{1}{27}(6 - 2\sqrt{3}) = 0.09392$ 25. $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi = 0.17808$
 27. $\frac{625}{16}\pi = 122.72$ 29. $\frac{5}{36} - \frac{2}{27}\sqrt{3} = 0.010588$ 31. $\sec^{-1}\frac{2}{3}x + C$ 33. $\sqrt{4-x^2} + \ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}} + C$
 35. $\ln\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3\sqrt{2}-3}\right) + \sqrt{10} - \sqrt{2}$ 37. $\frac{81}{16}\pi^2$ unidades cúbicas 39. $\frac{392}{60 + 27\ln 3}$ cm del extremo izquierdo
 41. $\left(\frac{20 - 15\cos^{-1}\frac{3}{5}}{5\ln 3 - 4}, \frac{26}{225(5\ln 3 - 4)}\right)$ 43. $(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3})(62.4)$ lb = 847 lb
 45. $(\frac{512}{3}\pi + 192\sqrt{3})(0.39)$ oz ≈ 338.8 oz 47. (a) $15\ln 2 = 10.40$; (b) $\frac{30e^{4/3}}{e^{8/3} + 1} = 7.39$ 49. (a) $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{5}$

EJERCICIOS 7.4 (página 582)

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ 3. $\ln\left|\frac{C(w+4)^3}{2w-1}\right|$ 5. $x + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{C(x-2)^4}{(x+3)^9}\right|$ 7. $\frac{1}{t+2} + \ln\left|\frac{C(t+1)}{t+2}\right|$
 9. $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C$ 11. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{Cx^4(2x+1)^3}{2x-1}\right|$ 13. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+4} + C$
 15. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{4}\tan^{-1}2x + C$ 17. $\ln|x-1| + \tan^{-1}x + C$ 19. $\ln|\tan x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$
 21. $4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$ 23. $\ln\frac{27}{4} - 2$ 25. $6\ln 2$ 27. $13\ln 2 - 4\ln 5$ 29. $\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{8}\pi$ 31. $\frac{3}{8}\ln\frac{9}{5}$ 33. $\ln 4.5$ unidades cuadradas
 35. $2\pi(2 + 6\ln 3 - 2\ln 2)$ unidades cúbicas 37. $\left(\frac{6\ln 3 - 2\ln 2 + 2}{2\ln 3 - \ln 2}, \frac{48\ln 2 - 48\ln 3 + 35}{24(2\ln 3 - \ln 2)}\right)$ 39. $\frac{1}{16}$ unidades cuadradas
 41. $(\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi\ln 3)$ unidades cúbicas 43. (a) $\frac{1}{3}\ln|C(x^3 - 6x^2 + 18x)|$; (b) $\frac{9x+8}{6(x+2)^3} + C$
 45. (a) $f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.5t}}$; (b) 1328; (c) 4075; (d) 5000 47. (a) $y(t) = \frac{5000}{1 + 249e^{-9t/98}}$; (b) $y(10) = 50$;
 (c) $y(20) = 123$; (d) $y(30) = 297$; (e) $y(60) = 2491$; (f) $y(180) = 4999.9 = 5000$ (g) 60
 49. 10 a.m. 51. $\frac{31}{19}$ 53. 7.4 lb 55. $\frac{3}{50}\ln\frac{(t_1+2)^2}{4(t_1^2+1)} - \frac{7}{5(t_1+2)} - \frac{4}{25}\tan^{-1}t_1 + \frac{7}{10}$

EJERCICIOS 7.5 (página 589)

1. $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54\ln(3 + \sqrt{x}) + C$ 3. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}\right| + C$ 5. $\frac{1}{9}\sqrt{1+2x^3}(2x^3+7) + C$
 5. $-2\sqrt{1+x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right| + C$ 7. $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\tan x + \sqrt{2}}{\tan x - \sqrt{2}}\right| + C$ 9. $\frac{6}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\tan\frac{x}{2}\right) + C, |x| < \pi$
 11. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\tan\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$ 13. $4 - 2\ln 3 = 1.80278$ 15. $\ln\frac{11}{10} = 0.0953102$ 17. $\frac{1}{4}\ln 3 = 0.274653$
 19. $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 0.540236$ 21. $2\sqrt{3}\ln(1 + \sqrt{3}) = 3.481604$ 23. $\frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35} \approx 0.369532$
 25. $x + \frac{36}{6-x} + 12\ln|6-x| + C$ 27. $\frac{1}{30}(3x-1)(1+2x)^{3/2} + C$ 29. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C$
 31. $\ln|x+3 + \sqrt{x^2+6x}| + C$ 33. $\sqrt{9-4x^2} - 3\ln\left|\frac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + C$
 35. $\frac{1}{3}(x^2-x-6)\sqrt{4x-x^2} + 4\cos^{-1}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C$ 37. $-\frac{1}{5}\sin^4x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$
 39. $t^4 \sin t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \sin t - 24t \cos t + 24 \sin t + C$ 41. $x \sec^{-1} 3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2-1}| + C$
 43. $\frac{e^{4x}}{32}(8x^2-4x+1) + C$ 45. $\frac{x^4}{16}(4\ln 3x-1) + C$ 47. $\frac{3}{5}y \cosh 5y - \frac{3}{25}\sinh 5y + C$ 49. $\frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$
 51. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ 53. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$ 55. $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ 57. $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 59. $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ 61. 0 63. $\frac{1}{8}(e^2+3)$
 61. $2\ln|\sqrt{x}-1| + C$ 71. $\tan\frac{1}{2}x + C$

EJERCICIOS 7.6 (página 602)

1. (a) 4.250; (b) 4 3. (a) 0; (b) 0 5. (a) 0.696; (b) 0.693 7. (a) 0.880; (b) 0.881 9. 0.248
 11. 3.689 13. $-0.5 \leq \epsilon_T \leq 0$ 15. $-0.161 \leq \epsilon_T \leq 0.161$ 17. $-0.007 \leq \epsilon_T \leq -0.001$ 19. 4.000
 21. (a) 0.6932; (b) 0.6931 23. (a) 0.6045; (b) 0.6046 25. 0 27. $-0.0005 \leq \epsilon_S \leq 0$ 29. 0.2375
 31. 1.5690 33. 1.4022 35. 3.090 37. (a) 0.3401; (b) 0.3414 39. 3.8203 41. (a) 15.95; (b) 16.03
 43. 26.6 unidades cuadradas 45. 5.9 millas 47. 8.218 unidades cuadradas 49. 3.06 m/s 51. 56 53. 222

EJERCICIOS 7.7 (página 611)

1. 1 3. $-\pi$ 5. $\ln 2 - \ln 3 = -0.4055$ 7. 1 9. 1.5 11. 1.5 13. 2
 15. $-\frac{1}{8}$ 17. 0 19. $\frac{1}{3}$ 21. $\frac{1}{2}$ 23. $\frac{3}{5}$ 25. 2 27. -1 29. $\frac{4}{3}$ 31. $\frac{1}{2}\pi$ 33. $\frac{2}{\sqrt{\ln 3}}$
 35. $\ln\frac{1}{2}(e^2+1)$ 37. $\frac{Et}{L}$ 39. $-\frac{1}{2}$ 43. $a = -3, b = \frac{9}{2}$

EJERCICIOS 7.8 (página 617)

1. 0 3. 0 5. $\frac{1}{2}$ 7. 1 9. 0 11. 1 13. $\frac{1}{2}$ 15. e^3 17. 0 19. e^2 21. 1 23. 0 25. e^2
 27. $e^{-1/3}$ 29. $\frac{1}{2}$ 31. 0 33. 1 35. (a) $+\infty$; (b) 0 39. 1 41. $\frac{1}{\ln 3}$
 47. $f(e) = e^{1/e}$, máx. rel.; $y = 1$ es una asíntota 49. 1 51. (a) 0; (b) 0; (c) no

EJERCICIOS 7.9 (página 625)

1. 3 3. $-\frac{1}{2\ln 5}$ 5. $\frac{1}{(\ln 2)^2}$ 7. divergente 9. divergente 11. $\frac{1}{3}\pi$ 13. 2 15. 1 17. divergente
 19. (a) divergente; (b) 0 21. (a) 0 23. π 25. $\frac{1}{2}\pi$ 27. (a) 0.565; (b) 0.287 29. (a) 0.203; (b) 0.188
 31. 6.95 millas/s 33. $\frac{1000}{0.08 + \ln 2}$ dólares = \$1293.41 39. $n > 1$ 41. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \ln \frac{37}{27}$

EJERCICIOS 7.10 (página 631)

1. 2 3. -4 5. $\frac{1}{3}\pi$ 7. divergente 9. divergente 11. divergente 13. $\frac{1}{4}\pi$ 15. divergente 17. 0
 19. divergente 21. 0 23. $\frac{1}{3}\pi$ 25. divergente 27. $n > -1$; $\frac{1}{n+1}$ 29. $n > -1$; $\frac{2}{(n+1)^3}$ 31. sí; 6π

EJERCICIOS DE REPASO PAA EL CAPÍTULO 7 (página 634)

1. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{128}\sin 16x + C$ 3. $-2\sqrt{4-e^t} + C$ 5. $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$ 7. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\sin \frac{2}{3}x + C$
 9. $\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C$ 11. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$ 13. $3\ln\left|\frac{x^{1/3}}{1+x^{1/3}}\right| + C$
 15. $\frac{1}{3}\tan 3x - \frac{1}{3}\cot 3x + \frac{2}{3}\ln|\tan 3x| + C$ 17. $2t + \ln\frac{t^2}{(t+2)^{10}} - \frac{15}{t+2} + C$ 19. $x - \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
 21. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C$ 23. $\sin^{-1}\left(\frac{t+2}{\sqrt{7}}\right) + C$ 25. $\frac{1}{2}x^2 \sin x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$
 27. $\frac{2}{17}e^{t/2}(4\sin 2t + \cos 2t) + C$ 29. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right) + C$ 31. $-\tan^{-1}(\cos x) + C$
 33. $2\sin^{-1}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(t-2)\sqrt{4t-t^2} + C$ 35. $\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x| + C$ 37. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}e^x\right) + C$
 39. $-\frac{1}{15}\cot^3 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C$ 41. $\frac{1}{3}x^3 \sin^{-1}x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ 43. $\tan^{-1}(\cos x) + C$
 45. $\frac{2}{3}\sec^{-1}(2\sin 3t) + C$ 47. $\sqrt{2t} - \sqrt{1-2t}\sin^{-1}\sqrt{2t} + C$ 49. $\frac{4}{15}\ln\left|\frac{\tan \frac{1}{2}x - 3}{\tan \frac{1}{2}x + 3}\right| + \frac{x}{5} + C$
 51. $\begin{cases} \frac{1}{n}(-\cos nx + \frac{2}{3}\cos^3 nx - \frac{1}{5}\cos^5 nx) + C & \text{si } n \neq 0 \\ C & \text{si } n = 0 \end{cases}$ 53. $\begin{cases} \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \frac{1}{2}\ln^2 x + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$
 55. 4 57. $\frac{1}{2} + 2\ln \frac{6}{5}$ 59. $\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$ 61. $\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ 63. $\frac{4}{3}$ 65. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$ 67. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3})$
 69. $\frac{1}{2}\ln \frac{9}{2} - \frac{1}{6}\pi$ 71. 5 73. $\frac{1}{6} + \ln \frac{3}{2}$ 75. $\frac{4}{3}$ 77. $1 - \frac{1}{2}\ln 3$ 79. $\frac{24}{\pi}$ 81. $\frac{1}{5}\ln \frac{3}{2}$ 83. $\frac{256}{15}$
 85. 2.977 87. 2.958 89. (a) 1.624; (b) 1.563 91. 1 93. 1.5 95. -0.5 97. 1
 99. -1 101. 0 103. 1 105. $+\infty$ 107. $\frac{1}{3}$ 109. $+\infty$ 111. e^{12} 113. 0 115. 1 117. e 119. divergente
 121. $\frac{1}{2}$ 123. divergente 125. $\frac{32}{\ln 2}$ 127. divergente 129. $\frac{1}{4}\pi$ 131. divergente 133. $n > 1$; $\frac{1}{(1-n)^2}$
 135. $\frac{1}{3}k(1 - e^{-9})$ kg; $\frac{e^9 - 10}{3(e^9 - 1)}$ m a partir de algún extremo 137. $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}\right)$ 139. $\frac{1}{8}\pi$ unidades cuadradas
 141. $\pi(e^2 \ln 2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8})$ unidades cúbicas 143. (a) $x = 300\left(\frac{18^t - 17^t}{3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t}\right)$; (b) 35.94 lb 145. $\left(0, \frac{32}{15\pi}\right)$
 147. $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{2}\right)$ 149. 187.2 lb 151. (a) t días a partir de ahora, $P(t) = \frac{12000}{1 + 11(11/29)^{t/5}}$; (c) 1193;
 (d) $-5\frac{\ln 11}{\ln(11/29)} = 12.37$ 153. $\frac{64}{3}$ 155. 1 157. \$152,500 159. (a) $-\infty$; (b) 0

EJERCICIOS 8.1 (página 646)

1. $P_4(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{32}x^4$; $R_4(x) = \frac{x^5}{(z-2)^6}$, z entre 0 y x
 3. $P_5(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$; $R_5(x) = \frac{e^{-z}}{6!}x^6$, z entre 0 y x
 5. $P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$; $R_6(x) = \frac{\sec z}{7!}x^7$, z entre 0 y x
 7. $P_4(x) = x + \frac{1}{6}x^3$; $R_4(x) = \frac{1}{120}(\cosh z)x^5$, z entre 0 y x
 9. $P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$; $R_3(x) = \frac{3}{128}(1+z)^{-5/2}x^4$, z entre 0 y x
 11. $P_3(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2 - \frac{1}{128}(x-4)^3$; $R_3(x) = \frac{2(x-4)^4}{128z^{5/2}}$, z entre 4 y x
 13. $P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}e^{-x} - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3$; $R_3(x) = \frac{1}{24}\sin z(x - \frac{1}{6}\pi)^4$, z entre $\frac{1}{6}\pi$ y x
 15. $P_5(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5$; $R_5(x) = -\frac{1}{6}z^{-6}(x-1)^6$, z entre 1 y x
 17. $P_3(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - 2(x - \frac{1}{3}\pi)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3$; $R_3(x) = -\frac{1}{12}(3\sec^4 z - 2\sec^2 z)(x - \frac{1}{3}\pi)^4$, z entre $\frac{1}{3}\pi$ y x

19. 2.71828 21. 0.515 23. $|\text{error}| < \frac{(0.1)^4}{24} < 0.000005$ 25. $|\text{error}| < \frac{(0.01)^2}{8} = 0.0000125$
 27. $|\text{error}| < \frac{e^{0.01}}{6} (0.01)^2 = 0.00000017$ 29. 0.1823 31. $\frac{55\sqrt{2}}{672}$, $|\text{error}| < \frac{1}{7680} \sqrt{2}$
 35. $x = \frac{\pi}{2(1+m)}$ 37. $2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$
 39. (a) son el mismo; (b) 1; (c) son el mismo

EJERCICIOS 8.2 (página 658)

1. $\frac{1}{2}$ 3. divergente 5. -2 7. 0 9. 1 11. divergente 13. divergente 15. $e^{1/3}$ 17. 1 19. 0
 21. (a) 0; (b) 4 23. (a) $\frac{1}{2}$; (b) 1 27. creciente 29. decreciente 31. no monótona 33. no monótona
 35. decreciente 37. creciente después de los dos primeros términos 39. creciente 41. decreciente 43. no acotada
 55. $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ 57. converge a $\frac{a}{b}$

EJERCICIOS 8.3 (página 670)

1. $s_n = \frac{n}{2n+1}; \frac{1}{2}$ 3. $s_n = \frac{5n}{3n+1}; \frac{5}{3}$ 5. $s_n = -\ln(n+1)$; divergente 7. $s_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5^n} \right); \frac{5}{2}$
 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}; \frac{2}{3}$ 11. $\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}; 0$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)$; divergente 15. divergente
 17. 2 19. divergente 21. 1 23. $\frac{1}{e-1}$ 25. divergente 27. divergente 29. 3 31. $\frac{10}{3}$
 33. $\frac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$ 35. divergente 37. $\frac{3}{2}$ 39. divergente 41. divergente 43. 2
 45. $\frac{3}{11}$ 47. $\frac{137}{111}$ 49. 8 m 51. 84 pie 53. (b) $(6 + \frac{7}{2}\sqrt{3})$ s 55. 24 unidades
 57. (a) 3.8160; (b) 4.4992; (c) 4.9014; (d) 5.1874 59. 12.367

EJERCICIOS 8.4 (página 683)

1. convergente 3. convergente 5. divergente 7. convergente 9. divergente 11. convergente 13. divergente
 15. convergente 17. divergente 19. convergente 21. divergente 23. convergente 25. divergente 27. convergente
 29. convergente 31. convergente 33. divergente 35. convergente 37. convergente 39. convergente 41. convergente
 43. convergente 45. divergente 53. $0.7032 < \sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} < 0.7134$

EJERCICIOS 8.5 (página 694)

1. convergente 3. convergente 5. convergente 7. convergente 9. convergente 11. divergente 13. convergente
 15. $|R_4| < \frac{1}{5}$ 17. $|R_4| < \frac{1}{81}$ 19. $|R_4| < \frac{1}{25}$ 21. $|R_4| < \frac{1}{6 \ln 6}$ 23. 0.333 25. 0.632 27. 0.113
 29. absolutamente convergente 31. absolutamente convergente 33. absolutamente convergente 35. divergente
 37. absolutamente convergente 39. absolutamente convergente 41. absolutamente convergente
 43. absolutamente convergente 45. absolutamente convergente 47. divergente 49. (b) convergente

EJERCICIOS 8.6 (página 697)

1. $\frac{3}{16}, \frac{15}{64}, \frac{63}{256}, \frac{255}{1024}; s_n = \frac{4^n - 1}{4}; \frac{1}{4}$ 3. convergente; 3 5. divergente 7. convergente; $4 + 2\sqrt{3}$
 9. convergente; $\frac{1}{6}$ 11. convergente; $\frac{649}{729}$ 13. convergente 15. divergente 17. convergente
 19. divergente 21. convergente 23. divergente 25. divergente 27. convergente 29. convergente
 31. absolutamente convergente 33. condicionalmente convergente 35. divergente 37. absolutamente convergente
 39. absolutamente convergente 41. $\frac{437}{330}$ 43. $(\frac{15}{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$ s

EJERCICIOS 8.7 (página 706)

1. (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n$ 3. (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-9x^2)^n$ 5. $[-1, 1]$ 7. $[-1, 1]$ 9. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 11. $(-3, 3)$ 13. $(-\infty, +\infty)$
 15. $(-5, -1)$ 17. $(-9, 9)$ 19. $(0, 2)$ 21. $(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2})$ 23. $[-1, 1]$ 25. $(-4, 6)$ 27. $[4, 6)$ 29. $[-1, 1]$
 31. $(-e, e)$ 35. $+\infty$

EJERCICIOS 8.8 (página 716)

1. (a) $R = 1, [-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, R = 1$; (c) $[-1, 1)$ 3. (a) $R = 1, [-1, 1]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1}, R = 1$; (c) $(-1, 1)$
 5. (a) $R = +\infty, (-\infty, +\infty)$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}, R = +\infty$; (c) $(-\infty, +\infty)$ 7. (a) $R = \frac{1}{3}, (0, \frac{2}{3})$;
 (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3n(n+1)(3x-1)^n, R = \frac{1}{3}$; (c) $(0, \frac{2}{3})$ 9. (a) $R = 3, [-2, 4]$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}, R = 3$; (c) $(-2, 4)$
 11. $\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ 13. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(n+1)x^n$ 15. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$ 17. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ 19. 0.60653
 21. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 29. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; R = +\infty$ 31. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}; R = 2$ 33. 1.718 35. 0.693
 37. (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n!)}; R = +\infty$ 39. 1.318 41. 0.485 43. 0.0413 45. 0.450 47. 0.2450 49. 0.24
 51. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$ 55. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

EJERCICIOS 8.9 (página 726)

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 7. $e^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$ 9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$
 11. $2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1(-2)(-5) \dots (4-3n)}{24^n n!} (x-8)^n; R = 8$
 13. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} (x - \frac{1}{3} \pi) - \frac{1}{4} (x - \frac{1}{3} \pi)^2 + \frac{1}{12} \sqrt{3} (x - \frac{1}{3} \pi)^3 + \frac{1}{48} (x - \frac{1}{3} \pi)^4 - \dots; R = +\infty$ 15. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n}}{(2n)!}$
 17. $x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{25} x^5$ 19. $1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4$ 21. $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6$ 23. 0.5299 25. 1.97435
 27. -0.2231 29. 2.7182818 31. 0.0415 33. 0.0048 35. (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n(2n)!}$; (b) 0.2398
 37. $a_4 = 3; a_3 = -5; a_2 = 2; a_1 = -1; a_0 = 6$

EJERCICIOS 8.10 (página 733)

1. 1.0986 3. 0.3365 5. $\ln a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-a)^n}{na^n}$ 7. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$
 9. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n; R = 1$ 11. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^n}{8^n n!}; R = 4$
 13. $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n n!} x^{3n}; R = 1$ 15. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{4n}}{18^n n!}; R = \sqrt{3}$
 17. $x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{n+2}}{2^n n!}; R = 1$
 19. (a) $1 + \frac{1}{4} x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-5) x^{2n}}{4^n n!}$; (b) 0.510 21. 0.3349 23. 2.0271 25. 0.4970

$$27. (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}; R = 1 \quad 29. 0.3090 \quad 31. x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}; R = 1$$

$$33. 0.2424 \quad 35. -0.1494$$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 8 (página 736)

$$1. P_5(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}; R_5(x) = \frac{2^5 \cos 2z}{6!} x^6, z \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

$$3. P_4(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{24}(x-9)^2 - \frac{5}{34992}(x-9)^3 + \frac{35}{2519424}(x-9)^4; R_4(x) = -\frac{63}{256} z^{-11/2}(x-9)^5, z \text{ entre } 9 \text{ y } x$$

$$5. P_6(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!}; R_6(x) = \frac{(z+7)e^z}{7!} x^7, z \text{ entre } 0 \text{ y } x \quad 7. 0.0873 \quad 9. \frac{1}{12} \quad 11. 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, 2; 3$$

$$13. 0, \frac{3}{8}, \frac{4}{3}, \frac{15}{17}; 1 \quad 15. 1, 3, 1, 3; \text{ no tiene límite} \quad 17. 4, \frac{81}{16}, \frac{4096}{729}, \frac{390625}{65536}; e^2 \quad 19. 0 \quad 21. -2 \quad 25. [-1, 1]$$

$$27. [-3, 3] \quad 29. x = 3 \quad 31. (-7, 5) \quad 33. (-1, 3] \quad 35. (-1, 1) \quad 37. (a) R = 1, [-1, 1]; (b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-1}, R = 1;$$

$$(c) (-1, 1) \quad 39. (a) R = +\infty, (-\infty, +\infty); (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}, R = +\infty; (c) (-\infty, +\infty) \quad 41. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{4n+4} (2n+1)}; R = 4$$

$$43. 0.161 \quad 45. 0.493 \quad 47. (d) 0.261 \quad 49. 0.0124 \quad 51. 1.2840 \quad 53. 0.1947$$

$$55. 0.9986 \quad 57. 1.6094 \quad 59. 3.1416 \quad 61. 0.5773 \quad 63. 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)x^n}{2^n n!}; (-1, 1)$$

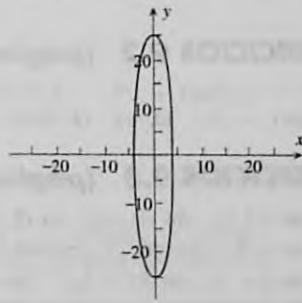
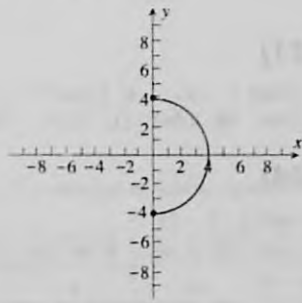
$$65. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}; (-\infty, +\infty) \quad 67. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x + \pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad 69. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n} \quad 71. 0 \quad 73. 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

EJERCICIOS 9.1 (página 746)

$$1. x^2 + y^2 = 16$$

$$3. x^2 + y^2 = 16, x \geq 0$$

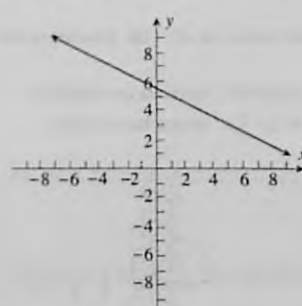
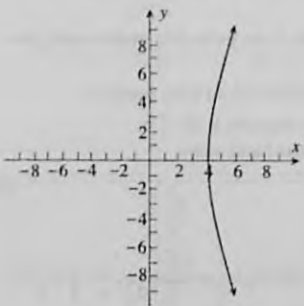
$$5. (x/4)^2 + (y/25)^2 = 1$$



$$7. (x/4)^2 + (y/9)^2 = 1, x \geq 0$$

$$9. x + 2y = 11$$

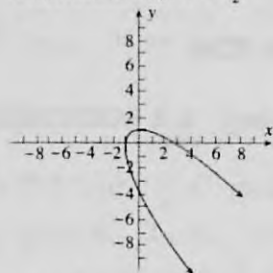
$$11. \frac{4}{3}t; \frac{4}{9}$$



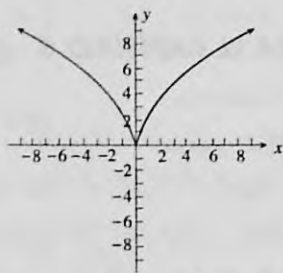
$$13. \frac{1 + \ln t}{te^t(2+t)}, \frac{(2+t) - (1 + \ln t)(2+4t+t^2)}{t^3 e^{2t}(2+t)^3};$$

$$15. -\frac{b}{a} \cot t; -\frac{b}{a^2} \csc^3 t$$

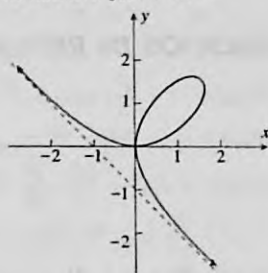
17. (a) tangente horizontal: $y = 1$; tangente vertical: $x = -1$;
 (b) cóncava hacia arriba: $t > \frac{1}{2}$;
 cóncava hacia abajo: $t < \frac{1}{2}$



19. (a) no posee tangentes horizontales; tangente vertical: $x = 0$;
 (b) cóncava hacia abajo para toda t

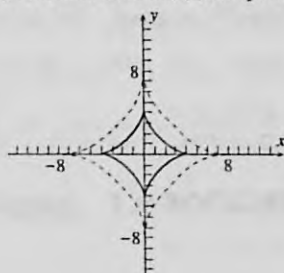
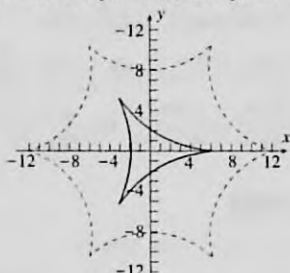


21. (a) tangente horizontal: $y = 0$, $y = 2^{2/3}$; tangente vertical: $x = 0$, $x = 2^{2/3}$;
 (b) cóncava hacia arriba: $t < -1$, $-1 < t < 2^{-1/3}$
 cóncava hacia abajo: $t > 2^{-1/3}$



23. $x^3 + y^3 = 3xy$ 25. $5\sqrt{3}x + 2y = 20$ 27. $\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ 29. $3\pi a^2$ unidades cuadradas

31. (b) es la línea continua, (c) está punteada 33. (a) 3 cúspides; (b) 6 cúspides 35. (b) es la línea continua, (c) está punteada

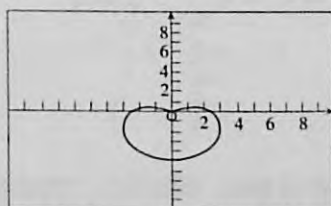
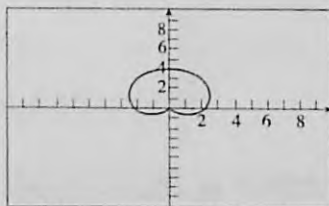
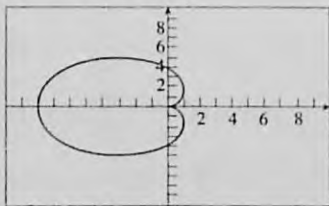


EJERCICIOS 9.2 (página 751)

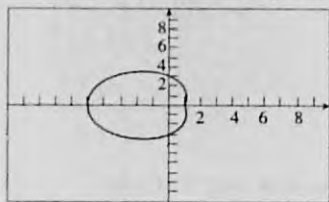
1. $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})$ 3. $2\sqrt{10} + \sqrt{2}\ln(2 + \sqrt{5})$ 5. $\frac{2}{27}[(40)^{3/2} - (13)^{3/2}]$ 7. 120 9. $\sqrt{2}(e - 1)$
 11. $\ln(1 + \sqrt{2})$ 13. 8π 15. 39.19 17. 3.966 19. 8.462 21. 55.31 23. $6a$ 25. $a[\ln(\cosh 2) - \ln(\cosh 1)]$

EJERCICIOS 9.3 (página 764)

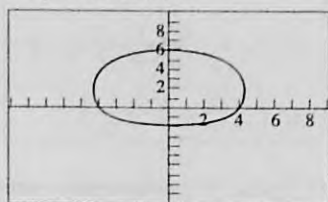
5. (a) $(-3, 0)$; (b) $(-1, -1)$; (c) $(2, -2\sqrt{3})$; (d) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$
 7. (a) $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{6}\pi)$; (c) $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(5, \pi)$ 9. (a) $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$; (b) $(x^2 + y^2)^3 = x^2$
 11. (a) $x = -1$; (b) $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$
 13. (a) recta que pasa por el polo con pendiente $\sqrt{3}$; (b) circunferencia con centro en el polo y radio $\frac{1}{3}\pi$
 15. (a) recta que pasa por el polo con pendiente $\tan^{-1} 2$; (b) circunferencia con centro en el polo y radio 2
 17. (a) Recta paralela al eje $\frac{1}{2}\pi$ y a 4 unidades a la derecha de él; (b) Circunferencia tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$, con centro en el eje polar y radio 2
 19. (a) Recta paralela al eje polar y a 4 unidades debajo de él; (b) Circunferencia tangente al eje polar, con centro en la prolongación-del eje $\frac{1}{2}\pi$ y radio 2
 21. Cardioide; simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda. 23. Cardioide; simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba. 25. Caracol con un lazo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo.



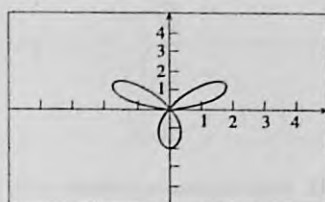
27. Caracol con hendidura; simétrico con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda



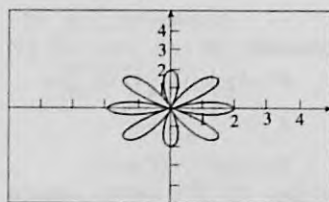
29. Caracol convexo; simétrico con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia arriba



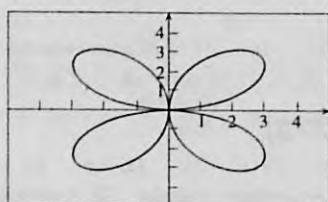
31. rosa de 3 hojas



33. rosa de 8 hojas

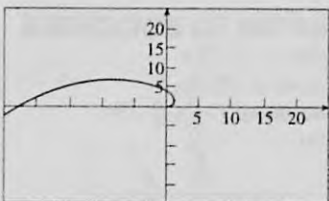


35. rosa de 4 hojas



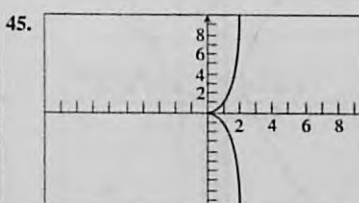
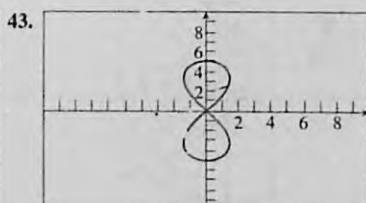
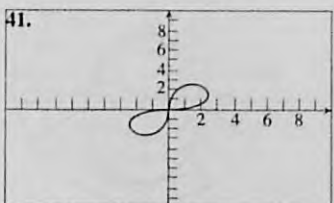
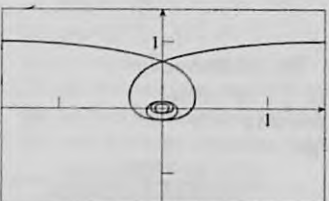
37. espiral logarítmica, algunos de sus puntos (r, θ) se muestran en la tabla siguiente:

r	1	$e^{\pi/2} \approx 5$	$e^{\pi} \approx 23$	$e^{3\pi/2} \approx 111$	$e^{2\pi} \approx 535$	$e^{5\pi/2} \approx 2576$	$e^{3\pi} \approx 12\,392$
θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

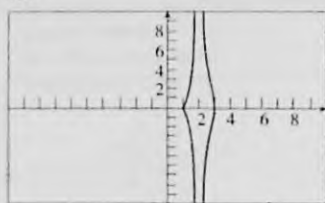


39. espiral recíproca, algunos de sus puntos (r, θ) se muestran en la tabla siguiente:

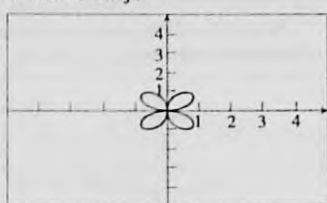
r	$\frac{6}{\pi} \approx 1.9$	$\frac{3}{\pi} \approx 0.95$	$\frac{2}{\pi} \approx 0.63$	$\frac{1}{\pi} \approx 0.32$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0.16$	$\frac{1}{3\pi} \approx 0.12$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0.08$	$\frac{1}{6\pi} \approx 0.05$
θ	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π	3π	4π	6π



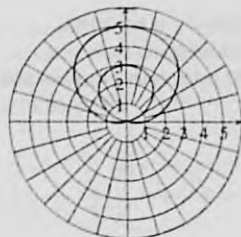
47.



49. rosa de 4 hojas



51.



53. rectas tangentes horizontales en $(7, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, $(2, 3.87)$; rectas tangentes verticales en $(5.34, 0.46)$, $(5.34, 2.68)$
 55. rectas tangentes horizontales en $(4.73, 1.95)$, $(4.73, 4.34)$; rectas tangentes verticales en $(2, 0)$, $(6, \pi)$
 57. rectas tangentes horizontales en $(-1, \frac{1}{2}\pi)$, $(-1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{2}{3}, 0.42)$, $(\frac{2}{3}, 2.72)$, $(\frac{2}{3}, 5.86)$; rectas tangentes verticales en $(0, 1)$, $(1, \pi)$, $(-\frac{2}{3}, 1.99)$, $(-\frac{2}{3}, 4.29)$, $(-\frac{2}{3}, 5.13)$
 59. rectas tangentes horizontales en $(0, 0)$, $(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$, $(-\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$; rectas tangentes verticales en $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$
 61. $(1.5, 2.60)$; $(1.5, -2.60)$ 63. $(0, 0)$; $(1.73, 1)$, $(-1.73, 1)$ 65. $(3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, -\frac{1}{3}\pi)$ 67. el polo; $(2, \frac{1}{6}\pi)$; $(2, -\frac{5}{6}\pi)$

EJERCICIOS 9.4 (página 773)

1. 5π 3. $2\pi a$ 5. 32 7. 12 9. $\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^8 - 1)$ 11. 6π 13. 19.38 15. 2.505 17. 4.455
 19.26.22 21. $\frac{9}{4}\pi$ unidades cuadradas 23. 4π unidades cuadradas 25. 4 unidades cuadradas 27. $\frac{9}{16}\pi^3$ unidades cuadradas
 29. $\frac{9}{8}\pi$ unidades cuadradas 31. $(\frac{11}{3}\pi - \frac{11}{2}\sin^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})$ unidades cuadradas 33. $(\frac{19}{3}\pi - \frac{11}{2}\sqrt{3})$ unidades cuadradas
 35. $(\frac{9}{2}\pi - 9)$ unidades cuadradas 37. $(18 - \frac{9}{4}\pi)$ unidades cuadradas 39. $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ unidades cuadradas
 41. (a) $(1, \pm\frac{1}{2}\pi)$; $(-1, \pm\frac{3}{2}\pi)$; (b) $(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3})$ unidades cuadradas 43. (a) $(2, \pm\frac{1}{6}\pi)$; $(2, \pm\frac{7}{6}\pi)$; $(-2, \pm\frac{1}{3}\pi)$; $(-2, \pm\frac{4}{3}\pi)$;
 (b) $(\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3})$ unidades cuadradas 45. 4 unidades cuadradas 47. $8\pi^3 a^2$ unidades cuadradas 49. $\frac{1}{2}\pi a^2$ unidades cuadradas

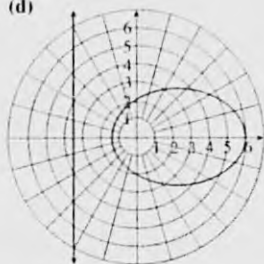
EJERCICIOS 9.5 (página 781)

1. (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$;
 focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$;
 directrices: $x = \pm\frac{9}{5}\sqrt{5}$
 (b)
3. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{21}$;
 focos: $(0, \pm\sqrt{21})$;
 directrices: $y = \pm\frac{25}{21}\sqrt{21}$;
 (b)
5. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{29}$;
 focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$;
 directrices: $x = \pm\frac{25}{29}\sqrt{29}$;
 (b)
7. (a) $e = \frac{5}{3}$;
 focos: $(\pm 5, 0)$;
 directrices: $x = \pm\frac{9}{5}$;
 (b)
9. (a) parábola; (b) hipérbola; (c) elipse; (d) circunferencia
 11. (a) 1; (b) parábola; (c) $r \cos \theta = -2$;
 (d)
13. (a) $\frac{1}{2}$; (b) elipse;
 (c) $r \sin \theta = 5$;
 (d)

15. (a) $\frac{2}{3}$; (b) elipse;

(c) $r \cos \theta = -3$;

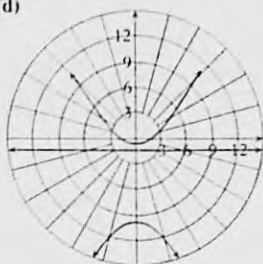
(d)



17. (a) $\frac{6}{5}$; (b) hipérbola;

(c) $r \sin \theta = -\frac{3}{2}$;

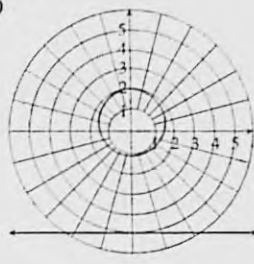
(d)



19. (a) $\frac{2}{7}$; (b) elipse;

(c) $r \sin \theta = -5$;

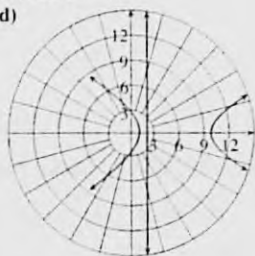
(d)



21. (a) $\frac{5}{4}$; (b) hipérbola;

(c) $r \cos \theta = 2$;

(d)



23. $r = \frac{8}{1 - \sin \theta}$

25. $r = \frac{36}{3 + 4 \cos \theta}$

27. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$

29. (a) $r = \frac{5}{1 - 3 \cos \theta}$; (b) $r \cos \theta = -\frac{5}{3}$

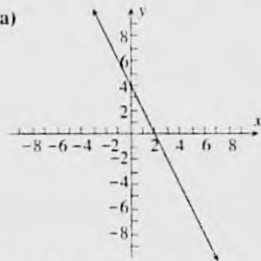
31. $\frac{16}{3} \sqrt{3} \pi$ unidades cuadradas

37. (a) $r = \frac{40\,000\,000}{1 - \cos \theta}$; (b) 20 000 000 millas

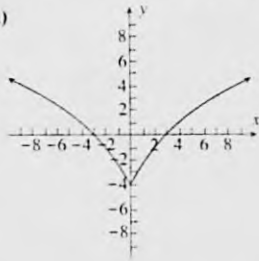
39. 4 600 millas

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 9 (página 783)

1. (a)



3. (a)



5. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6r}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{108r^3}$

7. $x = 12$; $y = 16$; $y = -16$

9. (a) $(2, \frac{11}{4}\pi)$, $(-2, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(-3, -\frac{5}{6}\pi)$, $(3, \frac{1}{6}\pi)$ 11. (a) (0, 1); (b) $(1, -\sqrt{3})$; (c) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$

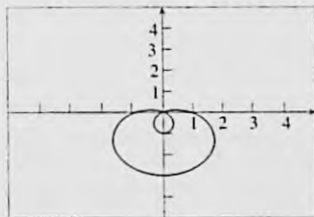
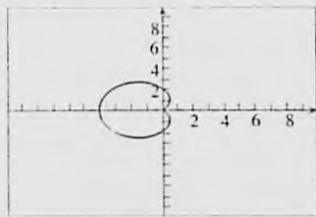
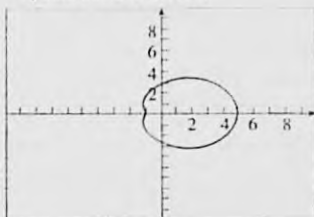
13. (a) $(4\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{3}\pi)$; (c) $(6, \frac{1}{2}\pi)$ (d) $(4, \frac{7}{6}\pi)$ 15. $r^2(4 \cos^2 \theta - 9 \sin^2 \theta) = 36$

17. $r = 9 \cos \theta - 8 \sin \theta$ 19. $xy = 2$ 21. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - y^2 = 0$

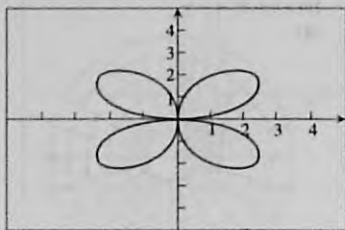
23. (a) recta que pasa por el polo con pendiente 1; (b) circunferencia con centro en el polo y radio 4

25. (a) recta perpendicular al eje polar que pasa por el punto $(3, 0)$; (b) circunferencia con centro en $(\frac{3}{2}, 0)$ y tangente al eje $\frac{1}{2}\pi$ en el polo

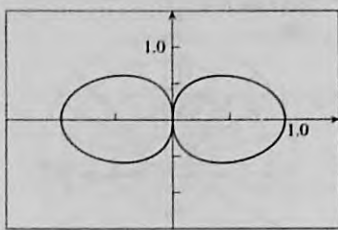
27. caracol con una hendidura; simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la derecha 29. cardiode, simétrica con respecto al eje polar; apunta hacia la izquierda 31. caracol con un lazo; simétrica con respecto al eje $\frac{1}{2}\pi$; apunta hacia abajo



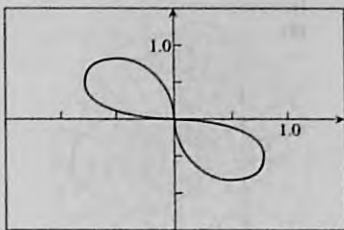
33. rosa de 4 hojas



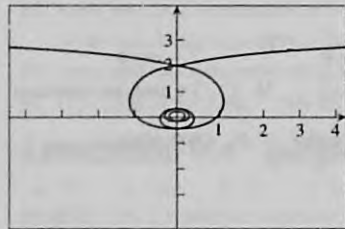
35.



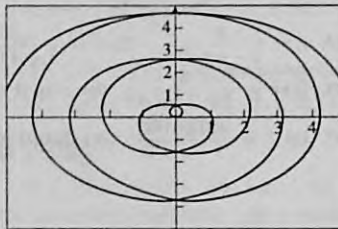
37. lemniscata



39. (a)



(b)



41. $\frac{3}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{4}\ln(6 + \sqrt{37})$ 43. 32 45. (a) $(16\pi - 24\sqrt{3})$ unidades cuadradas; (b) $(32\pi + 24\sqrt{3})$ unidades cuadradas
 47. $a^2(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ unidades cuadradas 49. $\frac{e^{4k\pi} - 1}{4k}$ unidades cuadradas 51. $r^2 - 2r_0r \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2$
 53. (a) $e = \frac{1}{2}$; (b) elipse; (c) $r \sin \theta = -2$ 55. (a) $e = \frac{3}{2}$; (b) hipérbola; (c) $3r \cos \theta = 4$
 57. $r = \frac{8}{1 - 3 \cos \theta}$ 59. $r = \frac{6}{1 - \sin \theta}$ 61. 38.014 63. 26.73 65. (a) 28.6 millones de millas (b) 43.4 millones de millas

EJERCICIOS 10.1 (página 797)

1. (b) 5 3. (b) $\frac{1}{2}\sqrt{1+4e^2}$ 5. (a) $\frac{7}{4}\pi$; (b) π ; (c) $\tan^{-1} 0.4 = 0.38$ 7. $\langle 2, -3 \rangle$ 9. $\langle 5, 6 \rangle$
 11. $\langle -4, 3 \rangle$ 13. $\langle 12, -5 \rangle$ 15. (a) $\langle -1, 9 \rangle$; (b) $\langle 1, -5 \rangle$ 17. (a) $\langle -9, -4 \rangle$; (b) $\langle 4, -e \rangle$
 19. (a) $\langle 6, 1 \rangle$; (b) $\sqrt{74}$; (c) $\sqrt{1061}$ 21. (a) $10i + 15j$; (b) $-24i + 6j$; (c) $6i + 2j$; (d) $2\sqrt{10}$
 23. (a) $\sqrt{13} + \sqrt{17}$; (b) $-14i + 21j$; (c) $7\sqrt{13}$; (d) $5\sqrt{13} - 6\sqrt{17}$ 25. (a) $-28i + 6j$; (b) $2\sqrt{205}$
 27. $\frac{11}{\sqrt{137}}i + \frac{4}{\sqrt{137}}j$; 29. (a) $5(\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j)$; $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$; (b) $2\sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi i + \sin \frac{1}{4}\pi j)$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{2}j$
 31. (a) $8(\cos \frac{2}{3}\pi i + \sin \frac{2}{3}\pi j)$; $-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}j$; (b) $16(\cos \pi i + \sin \pi j)$; -1 33. $h = 2, k = 3$
 37. (a) 135 lb; (b) 17° 39. 29.0° 41. (a) 364.1° ; (b) 243 millas/h 43. (a) 28.1° ; (b) 1.7 millas/h; (c) 0.53 millas
 51. (a) $\langle 1, -2 \rangle$; (b) $\langle 1, -2 \rangle$

EJERCICIOS 10.2 (página 809)

1. (b) $(7, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (7, 0, 3), (7, 0, 0)$; (c) $\sqrt{62}$
 3. (b) $(2, 1, 2), (-1, 3, 2), (-1, 1, 5), (2, 3, 2), (-1, 3, 5), (2, 1, 5)$; (c) $\sqrt{22}$
 5. (b) $(3, -1, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 5), (1, -1, 5), (3, -1, 5)$; (c) $3\sqrt{5}$ 7. (a) 3; (b) $(2, 5, \frac{5}{2})$
 9. (a) $\frac{13}{2}$; (b) $(\frac{5}{4}, -1, 2)$ 11. (a) $7\sqrt{2}$; (b) $(-1, \frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ 13. $(\pm 4\sqrt{6}, 4, 2)$
 17. (a) $|AB| = 9\sqrt{2}$; $|AC| = 2\sqrt{62}$; $|BC| = \sqrt{62}$; (b) punto medio de AB: $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$; punto medio de AC: $(-1, 2, 5)$; punto medio de BC: $(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2})$ 21. esfera con centro en $(4, -2, -1)$ y $r = 5$ 23. el punto $(0, 0, 3)$
 25. el conjunto vacío 27. $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 9$ 29. (a) $\langle 21, -13, -2 \rangle$; (b) $\langle -25, -26, 5 \rangle$; (c) $7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$; (d) $\sqrt{1326}$ 31. (a) $\langle -19, -16, -1 \rangle$; (b) $\langle -6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91} \rangle$ 33. $a = 0, b = 0$
 35. $\frac{4}{\sqrt{89}}; \frac{3}{\sqrt{89}}; \frac{8}{\sqrt{89}}$ 37. $-\frac{6}{\sqrt{86}}; -\frac{1}{\sqrt{86}}; -\frac{7}{\sqrt{86}}$ 39. $(\frac{13}{3}, 0, -\frac{4}{3})$ 41. $(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, -6)$
 43. (a) $7(-\frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k)$; (b) $\sqrt{14}(-\frac{2}{\sqrt{14}}i + \frac{1}{\sqrt{14}}j - \frac{3}{\sqrt{14}}k)$ 45. (a) $\langle \frac{1}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9} \rangle$; (b) $\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$

EJERCICIOS 10.3 (página 819)

1. (a) 10; (b) -1 3. (a) $-\frac{2}{5}$; (b) 9 15. (a) 0; (b) para ningún valor de k 17. (a) $-\frac{80}{\sqrt{85}}$; (b) $\frac{-112}{17}i + \frac{96}{17}j$
 19. $\frac{29}{50}\sqrt{50}$ 21. (a) -44; (b) -468; (c) -31; (d) (-84, 198, 124) 23. (a) $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (b) -3; (c) (2, 1, -2)
 25. (a) $-\frac{13}{9}\sqrt{6}$; (b) $(-\frac{26}{27}, -\frac{91}{27}, \frac{13}{27})$ 27. $\frac{1}{11}\sqrt{4422}$ 31. $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ unidades cuadradas 33. $(\frac{1}{17}\sqrt{17}, \frac{4}{17}\sqrt{17}); (-\frac{1}{17}\sqrt{17}, -\frac{4}{17}\sqrt{17})$
 35. $-\frac{46}{57}\sqrt{19}$ 37. (a) 24 pie-lb; (b) $24\sqrt{3}$ pie-lb 39. $(18 - 9\sqrt{3})$ pie-lb 41. 25 pie-lb 43. $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ pie-lb 45. $\frac{2}{5}$
 59. $E_1 = \frac{E \cdot H}{H \cdot H} H$; $E_2 = E - \frac{E \cdot H}{H \cdot H} H$

EJERCICIOS 10.4 (página 832)

1. $x + 2y - 3z + 1 = 0$ 3. $y - z + 3 = 0$ 5. $x - 3y - 4z - 3 = 0$ 7. $3x + 2y + 6z = 23$
 9. $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 11. $(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13}); (-\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13})$ 13. $(\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}); (\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}})$
 15. $5x - 3y + 7z + 14 = 0$ 17. $2x - y - z + 1 = 0$ 19. $4y - 3z - 1 = 0$ $y = z = 1$
 21. 67.6° 23. 69.2° 25. $\frac{16}{15}\sqrt{6}$ 27. $\frac{3}{2}$ 29. $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = 1; \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$
 31. $x = 13t, y = -12t, z = -8t; \frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8}$ 33. $x = 2t - 2, y = -16t, z = 13t + 3; \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$
 35. $x = 4 + t, y = -5 + 3t, z = 20 - 6t; \frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6}$ 37. $\frac{x-\frac{1}{7}}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z-\frac{10}{7}}{13}$
 41. $8x - y - 66 = 0; 13x - 5z - 102 = 0; 13y - 40z + 42 = 0$
 43. $4x + y + 3 = 0; 3x - z + 4 = 0; 3y + 4z - 7 = 0$ 45. $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ 47. $4x + 7y - 3z + 7 = 0$
 49. $4x + 2y - 3z + 5 = 0$ 51. $(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12})$ 53. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$ 55. $\frac{2}{5}\sqrt{70}$ 61. $x = x_0, y = y_0$

EJERCICIOS 10.5 (página 844)

1. (7, 13, -11) 3. -490 11. (9, -1, -23) 15. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 17. $\sqrt{89}$ unidades cuadradas 19. $9\sqrt{29}$ unidades cuadradas
 21. $5x - 2y + 7z = 0$ 23. $x + 2y + z - 2 = 0$ 25. $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$ 27. $\pm \frac{1}{\sqrt{6}}(i + 2j + k)$
 29. 20 unidades cúbicas 31. $\frac{38}{3\sqrt{78}}$ 33. 187.9 pulg-lb

EJERCICIOS 10.6 (página 857)

13. $x^2 + z^2 = 4y$ 15. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ 17. $y^2 = 9x^2 + 9z^2$ 19. $y^2 + z^2 = \sin^2 x$ 21. $x^2 + z^2 = 16$; eje x o eje y ; $0 \leq x^2 + z^2 = 16$, eje x o eje z ; $0 \leq y^2 + z^2 = 16$, eje y o eje z 23. $x^2 - z^2 = 4$, eje z ; $0 \leq y^2 - z^2 = 4$, eje z
 25. $x^2 = |y|$, eje y ; $0 \leq z^2 = |y|$, eje y 27. $y^2 = 9x^2$, eje y ; $0 \leq y^2 = 9z^2$, eje y 29. (i) (d); paraboloide elíptico
 (ii) (e); elipsoide; (iii) (b); paraboloide hiperbólico; (iv) (f); hiperboloide de 2 hojas; (v) (a); hiperboloide de 1 hoja;
 (vi) (c); cono elíptico 31. elipsoide 33. paraboloide de 1 hoja 35. cono elíptico 37. paraboloide elíptico
 39. paraboloide hiperbólico 41. hiperboloide elíptico de 2 hojas 43. (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$
 45. vértice: $(1, -\frac{1}{3}, 0)$; foco $(1, 0, 0)$ 49. 8π unidades cúbicas 51. $\frac{abh^2}{2c} \pi$ unidades cúbicas

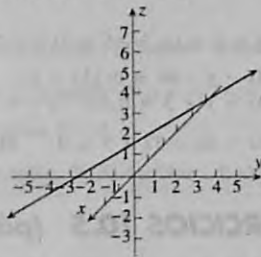
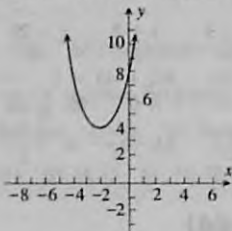
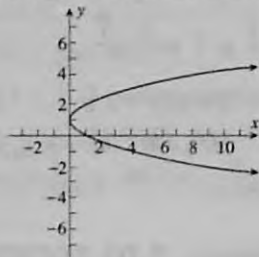
EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 10 (página 861)

1. $-25i + 63j$ 3. $\sqrt{4594}$ 5. $15\sqrt{2} - 14\sqrt{13}$ 7. 92 9. $\frac{9}{\sqrt{106}}i - \frac{5}{\sqrt{106}}j$ 11. $h = -\frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$
 13. $-\frac{19}{5}\sqrt{2}$ 15. $-\frac{19}{25}i - \frac{133}{25}j$ 17. $-\frac{19}{13}\sqrt{13}$ 19. $\frac{1}{13}(80 \pm 58\sqrt{3})$ 21. $i + 26j - 16k$ 23. -3 25. $7\sqrt{1270}$
 27. $-\frac{1}{3}\sqrt{21}$ 29. $\frac{1}{9}(i + 2j - 2k)$ 31. $\langle 60, -40, 80 \rangle$ 33. 16 35. 295 37. Un punto del eje x en R , una recta paralela al eje y en R^2 , un plano paralelo al plano yz en R^3 . 39. El eje x . 41. La circunferencia del plano xz con centro en el origen y radio 2. 43. El plano perpendicular al plano xy que lo intersecta en la recta $y = x$. 45. El paraboloide de revolución generado al girar $y^2 = 9z$ alrededor del eje z . 47. El cono circular recto generado al girar $y = x$ alrededor del eje x .

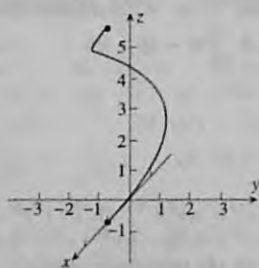
49. (a) 104.4 lb; (b) 35.5° 51. 127.28 pic·lb 53. $(-3, \sqrt{167}, 1), (-3, -\sqrt{167}, 1)$
 55. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 17$ 57. $z^2 = e^{4y}$ o $x^2 = e^{4y}$; el eje y 59. 3
 61. (a) $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{78}}, \cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{78}}, \cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{78}}$; (b) $-\frac{7}{\sqrt{78}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{78}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{78}}\mathbf{k}$
 63. (a) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{28}{25}\mathbf{i} + \frac{4}{25}\mathbf{j} - \frac{4}{3}\mathbf{k}$ 65. $x - 6y - 10z + 23 = 0$ 67. $\frac{47}{10}\sqrt{2}$ 69. 3 71. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 73. $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}, x = 4t, y = -3t, z = t$ 77. $\frac{54}{25}\pi$ unidades cuadradas 79. 24 unidades cúbicas

EJERCICIOS 11.1 (página 870)

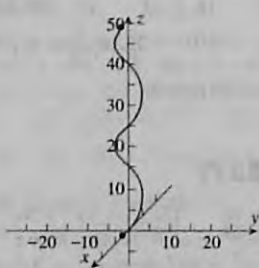
1. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$ 3. $(-1, 1]$ 5. $[-2, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 4]$ 7. $(-4, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 4]$
 9. (a) $2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; (b) $2\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; (c) $3t^2 - 3$; (d) $(t^3 + t^2 - 2t)\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + (2t - t^3 + t^2)\mathbf{k}$
 11. (a) $(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + (\cos t - \sin t)\mathbf{j}$; (b) $(\cos t - \sin t)\mathbf{i} - (\cos t + \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
 (c) $-t^2$; (d) $t(\sin t - \cos t)\mathbf{i} + t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 13. (a) $(t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - t^2 - t + 1)\mathbf{j} + (t^2 - 2t + 1)\mathbf{k}$; (b) $(t^2 - 2t + 1)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$
 (c) $(2 + t)\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; (d) $t\mathbf{i} + \mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$
 15. (a) $\sin t \cos t\mathbf{i} - \sin^2 t\mathbf{j} + t \sin t\mathbf{k}$; (b) $\sin^2 t\mathbf{i} + \sin t \cos t\mathbf{j} - t \sin t\mathbf{k}$; (c) $\sqrt{1-t^2}\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \sin^{-1} t\mathbf{k}$
 (d) $t\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\mathbf{j} - \sin^{-1} t\mathbf{k}$
 17. $4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 19. $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 21. $-\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 23. $e(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ 25. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$
 27. Todos los números reales distintos de $(k + \frac{1}{2})\pi$, donde k es cualquier entero 29. Todos los números reales
 31. 33. 35.



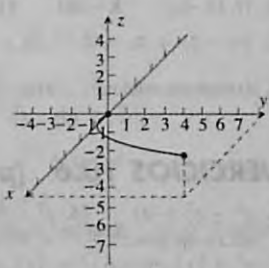
37.



39.



41.



43. (a) (0, 8, 0); (b) (4, 8, 4); (c) (0, 0, 8)
 45. (a) (0, 0, 10); (b) (-10, 0, 0) (c) (10, 0, 0)

EJERCICIOS 11.2 (página 880)

1. $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = 2t^{-3}\mathbf{j}$ 3. $\mathbf{R}(t) = (2t + 1)^{-2}\mathbf{i} + 2t^{-2}\mathbf{j}$; $\mathbf{R}''(t) = -4(t + 1)^{-3}\mathbf{i} - 4t^{-3}\mathbf{j}$
 5. $\mathbf{R}' = 2e^{2t}\mathbf{i} + t^{-1}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $\mathbf{R}''(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} - t^{-2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 7. $\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{k}$; $\mathbf{R}''(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathbf{i} + \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\mathbf{k}$
 9. $\mathbf{R}(t) = 10 \cos 2t\mathbf{i} - 4 \sec 4t \tan 4t\mathbf{j} - 8 \sec 2t\mathbf{k}$; $\mathbf{R}''(t) = -20 \sin 2t\mathbf{i} + (16 \sec 4t - 32 \sec^3 4t)\mathbf{j} - 16 \cos 2t\mathbf{k}$
 11. $(2t - 3)(2t^2 - 6t + 5)^{-1/2}$ 13. $\frac{12e^{6t}}{\sqrt{1+4e^{6t}}}$ 33. $\ln|\sec t| \mathbf{i} - \ln|t| \mathbf{j} + \mathbf{C}$
 35. $(t \ln t - t)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \mathbf{C}$ 37. $\frac{1}{3}e^{3t}\mathbf{i} - \frac{1}{3}e^{-3t}\mathbf{j} + (\frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-3t})\mathbf{k} + \mathbf{C}$ 39. $\ln|\sec t| \mathbf{i} + \ln|\sec t + \tan t| \mathbf{j} + \ln|t| \mathbf{k} + \mathbf{C}$
 41. $(\frac{1}{3}t^3 - 7)\mathbf{i} + (\ln|t - 2| - 5)\mathbf{j}$ 43. $[\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + \frac{3}{2}]\mathbf{i} + (\sin t - 1)\mathbf{j} + (2 - e^t)\mathbf{k}$ 45. $x^2 + y^2 = 1; 0$
 47. 0 49. $\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3}\ln(4 + \sqrt{2})$ 51. 13 53. 9.571 55. 3.096

EJERCICIOS 11.3 (página 888)

1. $T(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $T(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{i}$; $N(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $N(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}$
 3. $T(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $T(\frac{1}{2}\pi) = \mathbf{j}$; $N(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $N(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{i}$
 5. $T(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$; $T(2) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $N(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\mathbf{j}$; $N(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
 7. $T(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $N(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ 9. $T(t) = \frac{\mathbf{j} + t\mathbf{k}}{\sqrt{1 + t^2}}$; $N(t) = \frac{-t\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + t^2}}$
 11. $T(\frac{1}{2}\pi) = \mathbf{i}$; $N(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}$; $B(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{k}$ 13. $T(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $N(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $B(1) = \mathbf{k}$
 15. $T(t) = -\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $N(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$; $B(t) = -\mathbf{k}$ 17. osculador: $z = 2$; rectificador: $y = \frac{1}{2}\pi$; normal: $x = 1$
 19. osculador: $x = 1$; rectificador: $-(y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{3}) = 0$; normal: $(y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{3}) = 0$
 21. osculador: $z = 2$; rectificador: $(x - \frac{1}{4}\sqrt{2}) + (y - \frac{1}{4}\sqrt{2}) = 0$; normal: $-(x - \frac{1}{4}\sqrt{2}) + (y - \frac{1}{4}\sqrt{2}) = 0$
 23. $T(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{5}(-2\mathbf{i} + \mathbf{k})$; $N(\frac{1}{2}\pi) = -\mathbf{j}$; $B(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{5}(\mathbf{i} + 2\mathbf{k})$; osculador: $x + 2z - 4 = 0$; rectificador: $y = 1$; normal: $2x - z + 2 = 0$
 25. $\frac{3}{91}\sqrt{273}$ 27. $\frac{1}{4}\pi$ 29. $s = \frac{1}{27}[(4 + 9t)^{3/2} - 8]$
 31. $R(s) = (\operatorname{sen}\sqrt{2s} - \sqrt{2s}\cos\sqrt{2s})\mathbf{i} + (\cos\sqrt{2s} + \sqrt{2s}\operatorname{sen}\sqrt{2s})\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 33. $R(s) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}[(3s + 1)^{2/3} - 1]\mathbf{j} + \frac{1}{3}[(3s + 1)^{2/3} - 1]^{3/2}\mathbf{k}$ 35. $R(s) = (1 - \frac{2}{3}s)^{3/2}\mathbf{i} + (\frac{2}{3}s)^{3/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

EJERCICIOS 11.4 (página 896)

1. $K = \frac{1}{3}$; $\rho = 3$ 3. $K = 1$; $\rho = 1$ 5. $K = \frac{2}{25}$; $\rho = \frac{25}{2}$ 7. $\frac{1}{|t|}$ 9. $\frac{1}{t(1 + t^2)^{3/2}}$ 15. $\vec{2}$
 17. $K(t) = \frac{\sqrt{2}|1 - t^2|^3}{(1 + 6t^2 + t^4)^{3/2}}$; $K(0) = \sqrt{2}$; $\rho(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 19. $K = \frac{1}{2}$; $\rho = 2$ 21. $K = \frac{1}{4}\sqrt{2}$; $\rho = 2\sqrt{2}$
 23. $K = \frac{4}{49}\sqrt{7}$; $\rho = \frac{7}{4}\sqrt{7}$ 25. $K = \frac{2}{289}\sqrt{17}$; $\rho = \frac{17}{2}\sqrt{17}$ 27. $\frac{(2 - x^2)^{3/2}}{|x|}$ 29. $\frac{1}{376}(16x^2 + 81y^2)^{3/2}$
 31. $\frac{2(x + y)^{3/2}}{a^{1/2}}$ 33. $4|a \operatorname{sen} \frac{1}{2}t|$ 35. $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ 37. $(-3, -1)$ 41. $K = 2$; $\rho = \frac{1}{2}$; $(0, -\frac{1}{2})$
 43. $(3x + 2p, -\frac{y^3}{4p^2})$ 45. $(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t)$ 47. $C = (\frac{2}{9}, \frac{37}{12})$; $\rho = \frac{125}{36}$ 49. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$
 51. $K = \frac{23}{98}\sqrt{7}$; $\rho = \frac{14}{23}\sqrt{7}$ 53. $K = \frac{1}{16|a|}$; $\rho = 16|a|$ 59. $\frac{1}{2b}$

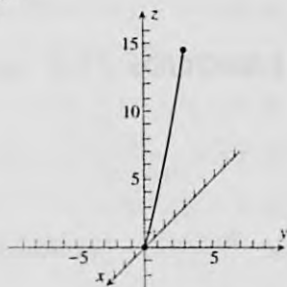
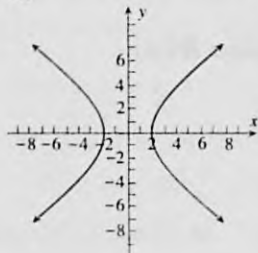
EJERCICIOS 11.5 (página 907)

1. (a) $V(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A(t) = 2\mathbf{i}$; $\|V(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1}$; $\|A(t)\| = 2$; (b) $V(3) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A(3) = 2\mathbf{i}$
 3. (a) $V(t) = -10 \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + 6 \cos 2t\mathbf{j}$; $A(t) = -20 \cos 2t\mathbf{i} - 12 \operatorname{sen} 2t\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = 2\sqrt{25 \operatorname{sen}^2 2t + 9 \cos^2 2t}$; $\|A(t)\| = 4\sqrt{25 \cos^2 t + 9 \operatorname{sen}^2 t}$; (b) $V(\frac{1}{4}\pi) = -10\mathbf{i}$; $A(\frac{1}{4}\pi) = -12\mathbf{j}$
 5. (a) $V(t) = e^t\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$; $A(t) = e^t + 4e^{2t}\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = e^t\sqrt{1 + 4e^{2t}}$; $\|A(t)\| = e^t\sqrt{1 + 16e^{2t}}$; (b) $V(\ln 2) = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $A(\ln 2) = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$
 7. (a) $V(t) = \mathbf{i} + \tan t\mathbf{j}$; $A(t) = \sec^2 t\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = |\sec t|$; $\|A(t)\| = \sec^2 t$; (b) $V(\frac{1}{4}\pi) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $A(\frac{1}{4}\pi) = 2\mathbf{j}$
 9. (a) $V(t) = (2t + 3)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}$; $A(t) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = \sqrt{40t^2 + 12t + 9}$; $\|A(t)\| = 2\sqrt{10}$; (b) $V(\frac{1}{2}) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $A(\frac{1}{2}) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ 11. $V(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$; $A(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{j}$; $\|V(\frac{1}{2}\pi)\| = \sqrt{5}$ 13. $V(2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $A(2) = 2\mathbf{j}$; $\|V(2)\| = 3$
 15. $V(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $A(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\|V(0)\| = \sqrt{3}$ 17. $(4 - \frac{1}{t+1})\mathbf{i} + (\frac{1}{2}t^2 + t + 2)\mathbf{j}$
 19. $(e^{-t} + 3t - 1)\mathbf{i} + (\frac{2}{9}e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{25}{9})\mathbf{j}$ 21. $(t + 1)\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j} - 16t^2\mathbf{k}$ 23. $(t^3 + 2t)\mathbf{i} + (t^4 + 3t)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}t^2 + 4)\mathbf{k}$
 25. $V(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $A(t) = 2\mathbf{j}$; $T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$; $N(t) = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = 2\sqrt{1 + t^2}$;
 $A_T(t) = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$; $A_N(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + t^2}}$; $K(t) = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}$; $V(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $T(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $A(2) = 2\mathbf{j}$;
 $N(2) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $\|V(2)\| = 2\sqrt{5}$; $A_T(2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $A_N(2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $K(2) = \frac{1}{10\sqrt{5}}$
 27. $V(t) = -15 \operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + 15 \cos 3t\mathbf{j}$; $A(t) = -45 \cos 3t\mathbf{i} - 45 \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$; $T(t) = -\operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j}$; $N(t) = -\cos 3t\mathbf{i} - \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$;
 $\|V(t)\| = 15$; $A_T(t) = 0$; $A_N(t) = 45$; $K(t) = \frac{1}{5}$; $V(\frac{1}{3}\pi) = -15\mathbf{j}$; $A(\frac{1}{3}\pi) = 45\mathbf{i}$; $T(\frac{1}{3}\pi) = -\mathbf{j}$; $N(\frac{1}{3}\pi) = \mathbf{i}$; $\|V(\frac{1}{3}\pi)\| = 15$
 $A_T(\frac{1}{3}\pi) = 0$; $A_N(\frac{1}{3}\pi) = 45$; $K(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{5}$

29. $V(t) = e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}$; $A(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$; $T(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{j}$; $N(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{4t} + 1}} \mathbf{i} - \frac{e^{2t}}{e^{4t} + 1} \mathbf{j}$;
 $\|V(t)\| = \frac{\sqrt{e^{4t} + 1}}{e^t}$; $A_T(t) = \frac{e^{4t} - 1}{e^t \sqrt{e^{4t} + 1}}$; $A_N(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{e^{4t} + 1}}$; $K(t) = \frac{2e^{3t}}{(e^{4t} + 1)^{3/2}}$; $V(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $A(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;
 $T(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$; $N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$; $\|V(0)\| = \sqrt{2}$; $A_T(0) = 0$; $A_N(0) = \sqrt{2}$; $K(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
31. $\frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 2}} T(t) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4t^2 + 2}} N(t)$ 33. $tT(t) + tN(t)$ 35. $2\sqrt{2}T(t) + 2N(t)$ 39. $3(x-1) - 3(y-1) + (z-1) = 0$
41. (a) $160\sqrt{2}\mathbf{i} + 160\sqrt{2}\mathbf{j}$; (b) $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = 160\sqrt{2}t\mathbf{i} + (160\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}$; (c) $10\sqrt{2}$ s; (d) 3 200 pie;
 (e) 800 pie; (f) $160\sqrt{2}\mathbf{i} - 160\sqrt{2}\mathbf{j}$; 320 pie/s;
 (g) $R(6) = 960\sqrt{2}\mathbf{i} + (960\sqrt{2} - 576)\mathbf{j}$; $V(6) = 160\sqrt{2}\mathbf{i} + (160\sqrt{2} - 192)\mathbf{j}$; $64\sqrt{34 - 15\sqrt{2}} = 229$ pie/s;
 (h) $y = x - \frac{x^2}{3200}$ 45. $(25 + \sqrt{631})$ s; $(20000\sqrt{3} + 800\sqrt{1893})$ pie 47. 283 m/s
49. Caerá en el agua a 24.3 pie del barco. 51. $40^\circ 8'$ 53. Pasará 5 pie por arriba del árbol y caerá a 25 pie del banderín.
55. (c) $T(t) = -\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}$; $N(t) = -\cos \omega t \mathbf{i} - \sin \omega t \mathbf{j}$; $A_T(t) = 0$; $A_N(t) = r\omega^2$; (d) se cuadruplicará

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 11 (página 910)

1. $[0, 3) \cup (3, +\infty)$ 3. $[-2, -\frac{1}{2}\pi) \cup (-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, 2]$ 5. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
 7. k 9. $(0, 4)$ 11. Todos los números reales 13. 15.



17. $R'(t) = \frac{-2t}{(t^2 + 9)^2} \mathbf{i} - \frac{1}{t^2} \mathbf{j} - \frac{1}{t} \mathbf{k}$; $R''(t) = 6 \frac{t^2 - 3}{(t^2 + 9)^3} \mathbf{i} + \frac{2}{t^3} \mathbf{j} - \frac{1}{t^2} \mathbf{k}$
19. $D_t \|R(t)\| = \frac{9e^{2t}}{\sqrt{9e^{2t} + 8}}$; $\|D_t R(t)\| = 3e^t$ 21. $[\ln(t+2) - \ln 2]\mathbf{i} + (\tan^{-1} t + 1)\mathbf{j}$
23. $(4e^{t/2} - 2e)\mathbf{i} + (4e^{-t/2} - 6e^{-1})\mathbf{j} + (4 \sinh \frac{1}{2}t - 4 \sinh 1 + 1)\mathbf{k}$ 25. $\frac{1}{8}\pi\sqrt{8 + \pi^2} + \sinh^{-1} \frac{1}{4}\sqrt{2}\pi$ 27. 0.9950
29. $T(t) = \frac{e^{2t}\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{e^{4t} + 1}}$; $N(t) = \frac{\mathbf{i} - e^{2t}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{4t} + 1}}$; $T(\ln 2) = \frac{4\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{17}}$; $N(\ln 2) = \frac{\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$
- 31 y 35. $T(t) = \frac{t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$; $N(t) = \frac{2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}}{t^2 + 2}$; $B(t) = \frac{-2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$;
 osculador: $-2(x - \frac{1}{3}) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$; rectificador: $2(x - \frac{1}{3}) + (y - 1) - 2(z - 2) = 0$;
 normal: $(x - \frac{1}{3}) + 2(y - 1) + 2(z - 2) = 0$
- 33 y 37. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3 \cos 2t \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3 \sin 2t \mathbf{k})$; $N(t) = -\sin 2t \mathbf{i} - \cos 2t \mathbf{k}$; $B(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2 \cos 2t \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k})$;
 osculador: $-2x + 3y = 0$; rectificador: $z = 3$; normal: $3x + 2y = 0$ 39. $\frac{1}{3}t^3 + 2t$
41. $R(s) = [2(3s + 17^{3/2})^{2/3} - 34]\mathbf{i} + \frac{1}{3}[(3s + 17^{3/2})^{2/3} - 16]^{3/2}\mathbf{j}$ 43. $R(s) = 3 \sin(s/\sqrt{13})\mathbf{i} + 2s/\sqrt{13}\mathbf{j} + 3 \cos(s/\sqrt{13})\mathbf{k}$
45. $K = \frac{8}{17^{3/2}}$; $\rho = \frac{17^{3/2}}{8}$ 47. $K = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}$ 49. $K = \frac{3}{13}$
53. $K = \frac{2}{75}$; $\rho = \frac{75}{2}$ 55. $(-\frac{21}{2}, 32)$
57. (a) $V(t) = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$; $A(t) = -2\mathbf{j}$; $\|V(t)\| = \sqrt{4t^2 - 16t + 25}$; $\|A(t)\| = 2$; (b) $V(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $A(1) = -2\mathbf{j}$
59. $V(\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $A(\frac{1}{2}\pi) = -2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\pi\mathbf{j}$; rapidez: $\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 + 2}$ 61. $R(t) = (\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2})\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$
63. $R(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + (2 \sin t + 2)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ 65. $(t + 1)\mathbf{i} + (\frac{3}{2}t^2 - 3t + \frac{11}{2})\mathbf{j} + (3t - t^2 - 2)\mathbf{k}$
67. $V(t) = 3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$; $A(t) = -2\mathbf{j}$; $T(t) = \frac{3\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$; $N(t) = \frac{(4 - 2t)\mathbf{i} - 3\mathbf{j}}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$; $\|V(t)\| = \sqrt{4t^2 - 16t + 25}$;
 $A_T(t) = \frac{4t - 8}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$; $A_N(t) = \frac{6}{\sqrt{4t^2 - 16t + 25}}$; $K(t) = \frac{6}{(4t^2 - 16t + 25)^{3/2}}$; $V(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $A(1) = -2\mathbf{j}$;
 $T(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$; $N(1) = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$; $\|V(1)\| = \sqrt{13}$; $A_T(1) = \frac{-4}{\sqrt{13}}$; $A_N(1) = \frac{6}{\sqrt{13}}$; $K(1) = \frac{6}{13^{3/2}}$

69. $A(t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{4 + e^{2t} + e^{-2t}}} T(t) + \sqrt{\frac{4 + 4e^{2t} + 4e^{-2t}}{4 + e^{2t} + e^{-2t}}} N(t)$
 71. (a) $V(t) = 2 \operatorname{senh} 2t \mathbf{i} + 2 \cosh 2t \mathbf{j}$; $A(t) = 4 \cosh 2t \mathbf{i} + 4 \operatorname{senh} 2t \mathbf{j}$;
 (b) $\|V(t)\| = 2\sqrt{\cosh 4t}$; (c) $A_T(t) = \frac{4 \operatorname{senh} 4t}{\sqrt{\cosh 4t}}$; $A_N(t) = \frac{4}{\sqrt{\cosh 4t}}$
 73. (a) $75\sqrt{3}t \mathbf{i} + (75t - 16t^2)\mathbf{j}$; (b) $\frac{5625}{16}\sqrt{3}$ pie; (c) $\frac{5625}{64}$ pie; (d) 150 pie/s 75. 98.73 pie/s
 77. (a) 0.85 s; (b) 18.38 pie

EJERCICIOS 12.1 (página 923)

1. (a) $-\frac{1}{7}$; (b) 5; (c) $\frac{x+y}{x-y+2}$; (d) 0 3. (a) 1; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$; (d) $4x + 4y + 8$
 5. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 1\}$ 7. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 9. $\{(x, y) | x^2 - y^2 \geq 1\}$ 11. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$
 13. $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 15. $\{(x, y) | y \neq \pm x\}$ 17. $\{(x, y) | -1 \leq x - y \leq 1\}$ 19. $\{(x, y) | xy > 1\}$
 21. $\{(x, y, z) | x - y - z \neq 0\}$ 23. $\{(x, y, z) | x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16\}$ 25. $\{(x, y, z) | |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$
 27. $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 < 4\}$ 29. $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 16\}$ 31. R^2 33. R^2 35. R^2
 37. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{16 - k^2}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$
 39. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{16 - k}$, $k = 16, 12, 7, 0, -9, -20$
 41. Hipérbolas $x^2 - y^2 = k$, $k = 16, 9, 4, 0^*$, $-4, -9, -16$ (*las rectas $y = \pm x$) 43. Circunferencias de radio $\sqrt{2k}$, $k = 8, 6, 4, 2, 0$
 45. Hipérbolas $xy = k$, $k = 0^*$, $\ln 2, 1, \ln 4, \ln \frac{1}{2}, -1, \ln \frac{1}{4}$ (*los ejes x y y)
 47. (a) 2; (b) 6; (c) $\sqrt{x - y^2}$; (d) $|x - y|$; (e) $|x - y|$
 49. $h(x, y) = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; dominio: $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 51. (b) (iii) 53. (a) (iv)
 55. (a) x pies es el ancho, y pies es la altura, $\$C$ es el costo. $C(x, y) = .32 \left[xy + \frac{12}{x} + \frac{18}{y} \right]$, $x > 0, y > 0$; (b) $\$5.92$
 57. (a) $V = \frac{1}{2}xy(6 - x - 3y)$, $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6$; (b) 0.78125 unidades cúbicas
 59. Circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{9 - 16/V^2}$, $V = 16, 12, 8, 4$
 61. Ramas en el primer cuadrante de las hipérbolas $xy = f$, $f = 5, 4, 3, 2, 1$
 63. Esferas centradas en el origen de radio $\sqrt{\ln(4/P)}$, $P = 4, 2, 1, \frac{1}{2}$

EJERCICIOS 12.2 (página 940)

1. 0 3. -4 5. 0 7. $\delta = \frac{1}{7}\epsilon$
 21. El límite existe y es 0; tome $\delta = \sqrt{\epsilon}$ 23. El límite no existe 25. $\frac{1}{4}\pi$ 27. $\frac{1}{2}$
 29. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre la recta $y = 1$
 31. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre el eje y
 33. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que no este sobre la recta $y = 2x$
 35. Continua en todo punto (x, y) de R^2 que esté en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ 37. Continua en todo punto de R^2
 39. Continua en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ de R^2 41. Continua en todo punto de R^2
 43. Todos los puntos (x, y) de R^2 que estén en el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$
 45. Todos los puntos (x, y) de R^2 que estén en el exterior de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ 47. Todos los puntos (x, y) de R^2 para los cuales $|xy| > 1$
 49. Todos los puntos (x, y) de R^2 de los cuadrantes primero y tercero para los cuales $|x + y| < 1$ 51. Todos los puntos de R^2
 53. esencial 55. eliminable; $f(0, 0) = 0$ 57. esencial 59. eliminable; $f(0, 0) = 0$
 67. 0 69. continua en todo punto (x, y, z) de R^3 que esté en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 71. continua en todo punto de R^3

EJERCICIOS 12.3 (página 952)

1. 6 3. $3x - 2y$ 5. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 7. $x^2 - 6xy + 2z$ 9. $xy + yt + zt$ 11. 4 13. $\frac{x}{x^2 + y^2}$
 15. $-2 \operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 2\phi$ 17. $\frac{e^{y/t}}{xy} \left(y \ln \frac{x^2}{y} - x \right)$ 19. $\frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ 21. $4xy + \frac{1}{z}$ 23. $xze^{xyz} + \frac{e^{xyz}}{z^4 + 9x^2y^2}$
 25. (a) -1 ; (b) 12 27. $-\ln \operatorname{sen} x$; $\ln \operatorname{sen} y$ 29. (a) $\frac{2}{y} - \frac{6y}{x^4}$; (b) $\frac{2x^2}{y^3}$ 31. (a) $4e^{2t} \operatorname{sen} y$; (b) $-e^{2t} \operatorname{sen} y$
 33. (a) $2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; (b) $2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ 35. (a) $3y \cosh x$; (b) $4x \operatorname{senh} y$
 37. (a) $e^{-t} \cos y - \frac{2x \ln y}{(1 + x^2)^2}$; (b) $-e^{-t} \cos y - \frac{\tan^{-1} x}{y^2}$ 39. (a) $12x + 20y$; (b) $12x + 20y$ 41. (a) 0; (b) e^y

43. (a) $-2e^z \operatorname{sen} e^z$; (b) $-2we^z(\operatorname{sen} e^z + e^z \cos e^z)$ 45. (a) $\frac{-320rst}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$; (b) $\frac{16r(5t^2 + 12s^2 - r^2)}{(r^2 + 4s^2 - 5t^2)^3}$ 55. 4
57. -4 grados/cm; -8 grados/cm 59. (a) $\frac{100}{t^2} \left[\frac{9i + 1}{(1 + i)^9} - 1 \right]$; (b) $\frac{1}{0.0036} \left[\frac{1.54}{(1.06)^9} - 1 \right] = -24.4$; (c) $\frac{5000 \ln 1.06}{3(1.06)^t}$;
- (d) $-\frac{5000 \ln 1.06}{3(1.06)^8} = -61$ 61. (a) 1; (b) 1 63. (a) -2 ; (b) 0 65. ninguna existe
67. $f_{12}(0, 0) = -1$; $f_{21}(0, 0) = 1$ 69. $0.0943 \text{ m}^2/\text{kg}$; $6.42 \text{ m}^2/\text{m}$

EJERCICIOS 12.4 (página 964)

1. (a) $3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y$; (b) 0.5411; (c) $14\Delta x - 6\Delta y$; (d) 0.54
3. (a) $(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)e^{(2 + \Delta x)(-4 + \Delta y)} + 8e^{-8}$; (b) -0.0026 ; (c) $28e^{-8}\Delta x - 14e^{-8}\Delta y$; (d) -0.0019
5. (a) $\Delta x + 4\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(5 + \Delta z) - \ln 5$; (b) 0.2141; (c) $\Delta x + 5\Delta y + \frac{1}{5}\Delta z$; (d) 0.214
7. $(12x^2 - y^2)dx + (3 - 2xy)dy$ 9. $(\cos y - y \cos x)dx + (-x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)dy$
11. $\frac{2x dx - 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 13. $\tan^{-1}z dx - \frac{2y}{z^2} dy + \left(\frac{x}{1 + z^2} + \frac{y^2}{z^2} \right) dz$
15. (a) $2(x_0 y_0 - y_0) \Delta x + (x_0^2 - 2x_0) \Delta y + (y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y) \Delta x + 2(x_0 \Delta x - \Delta x) \Delta y$;
(b) $\epsilon_1 = y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y$; $\epsilon_2 = 2(x_0 \Delta x - \Delta x)$
17. (a) $\frac{2x_0 y_0 \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 - x_0^2 \Delta y}{y_0^2 + y_0 \Delta y}$; (b) $\epsilon_1 = \frac{y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y}{y_0^3 + y_0^2 \Delta y}$; $\epsilon_2 = \frac{x_0^3 \Delta y}{y_0^3 + y_0^2 \Delta y}$
31. (a) $(y_0 - z_0) \Delta x + x_0 \Delta y + (2z_0 - x_0) \Delta z - (\Delta z)(\Delta x) + \Delta x \Delta y + (\Delta z)(\Delta z)$; (b) $\epsilon_1 = -\Delta z$, $\epsilon_2 = \Delta x$, $\epsilon_3 = \Delta z$
35. 7.36 m^3 37. 0.14 cm ; 1.4% 39. $\frac{13}{1600}$, 0.325% 41. $\$7200$
43. $D_1 f(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
- $D_2 f(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

EJERCICIOS 12.5 (página 973)

1. $\frac{\partial u}{\partial r}$: (a) $6x - 2y$; (b) $16r - 10s$; $\frac{\partial u}{\partial s}$: (a) $-2x - 4y$; (b) $-10r - 6s$
3. $\frac{\partial u}{\partial r}$: (a) $13x - 2y + 5$; (b) $24r - 41s + 5$; $\frac{\partial u}{\partial s}$: (a) $-17x - 7y - 10$; (b) $-41r + 44s - 10$
5. $\frac{\partial u}{\partial r}$: (a) $\frac{2e^{y/x}}{x^2} (2x \operatorname{sen} t - y \cos t)$; (b) 0; $\frac{\partial u}{\partial t}$: (a) $\frac{2re^{y/x}}{x^2} (y \operatorname{sen} t + 2x \cos t)$; (b) $2e^{2 \tan t} \sec^2 t$
7. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2r(x + y) + 3x$; $\frac{\partial u}{\partial s} = 2s(x + y) - 2x$ 9. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6re^s - s \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3e^{2s} + r \cos rs}{\sqrt{1 - (3x + y)^2}}$
11. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{6s}{x^2} \operatorname{senh} \frac{y}{x} (xe^r - ry)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{3}{x^2} \operatorname{senh} \frac{y}{x} (2xe^r - yr^2) = 0$
13. $\frac{\partial u}{\partial r} = 2x \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 2z \cos \phi$; $\frac{\partial u}{\partial \phi} = 2xr \cos \phi \cos \theta + 2yr \cos \phi \operatorname{sen} \theta - 2zr \operatorname{sen} \phi$;
 $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2xr \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta + 2yr \operatorname{sen} \phi \cos \theta$
15. (a) $e^x(\cos t - y \operatorname{sen} t) + e^y(x \cos t - \operatorname{sen} t)$; (b) $e^{\cos t}(\cos t - \operatorname{sen}^2 t) + e^{\operatorname{sen} t}(\cos^2 t - \operatorname{sen} t)$
17. (a) $\frac{x \sec^2 t - y \operatorname{sen} t + z \cos t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; (b) $\tan t \sec t$ 19. $\frac{txe^t - y}{t(x^2 + y^2)}$, $t > 0$ 21. $\frac{x + y + 2t + ty - tx}{t(y + t)^2}$, $t > 0$
23. $-\frac{3x^2 - 8y}{3y^2 - 8x}$ 25. $-\frac{\operatorname{sen} y - y \cos x}{x \cos y + \cos x}$ 27. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3y - 6x - 4z}{2z + 4x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x - 2y}{2z + 4x}$
29. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz + 1}{3xy \tan 3xz - xy^2}$ 35. $6se^{r-s}(2 + r) - 8e^{-2s}$ 37. $10 \cos^2 \theta + 8$ 39. $-10r \operatorname{sen} 2\theta$
43. decrece a la tasa de $\frac{8}{61} \text{ rad/min}$ 45. crece a la tasa de $3840\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 47. crece a la tasa de 1.6 litros/min

EJERCICIOS 12.6 (página 983)

1. $2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ 3. $3x + \sqrt{2}y + 4z$ 5. $\frac{17}{13(x-y)^2}$ 7. $(8x - 3y)\mathbf{i} + (2y - 3x)\mathbf{j}$ 9. $\frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$
 11. $\frac{y+z}{(x+z)^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x+z}\mathbf{j} - \frac{x-y}{(x+z)^2}\mathbf{k}$ 13. $e^{-2y}\sec z(\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x\tan z\mathbf{k})$ 15. 6 17. -42 19. -2
 21. $-3e^{\pi/4}\cos\frac{1}{12}\pi$ 23. (a) $(-4, -4)$; (b) $-2 - 2\sqrt{3}$ 25. (a) $(-12, 2, 14)$; (b) $\frac{6}{7}$ 29. $\frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}; \frac{1}{4}\sqrt{\pi^2 + 4}$
 31. $-\frac{29}{11}; \sqrt{2}$ 33. $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{3\pi+1}$ y $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{3\pi+1} - \pi$
 35. (a) $6\sqrt{2}$ grados por metro; (b) en la dirección del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
 37. (a) -1 volt por pie; (b) en la dirección del vector $-\mathbf{j}$ e intensidad de 2 volts por pie

EJERCICIOS 12.7 (página 989)

1. $2x - 2y + 3z = 17$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ 3. $4x + 8y + 3z + 22 = 0$; $\frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-6}{3}$
 5. $ex - y = 0$; $\frac{x-1}{-e} = \frac{y-e}{1}, z = 0$ 7. $x - y - 3 = 0$; $\frac{x-6}{1} = \frac{y-3}{-1}, z = 3$
 9. $x + 2y + 2z - 8 = 0$; $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ 11. $3x - 2y - 6z - 84 = 0$; $\frac{x-8}{-3} = \frac{y-27}{2} = \frac{z-1}{6}$
 13. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{20}$ 15. $x = 4, y = 16$ 17. $\frac{x}{1-8\pi} = \frac{y-2}{-2\pi} = \frac{z-1}{-1}$ 19. las superficies son tangentes
 21. $9x - 4y - 1 = 0$ 23. $4x - 5y + 6 = 0$

EJERCICIOS 12.8 (página 1001)

1. $f(0, 0) = 4$, máx. abs. 3. $f(2, 4) = -4$, mín. abs. 5. $f(1, 0) = 9$, máx. abs.
 7. $f(4, -\frac{1}{2}) = -\frac{133}{4}$, mín. rel.; $f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$, punto silla 9. $f(1, 2) = 0$, punto silla 11. $f(-\frac{1}{4}, 16) = -12$, máx. rel.
 13. $f(0, \pm\frac{1}{2}) = 0$, puntos silla 15. $f(1, 1) = 5$, mín. rel.; $f(-1, -3) = 31$, máx. rel.; $f(1, -3) = 27$, $f(-1, 1) = -1$, puntos silla 17. $f(0, 0) = 1$, punto silla 19. $f(2, 4) = -4$, mín. abs.; $f(0, 0) = f(2, 0) = 16$, máx. abs.
 21. $f(-\frac{2}{3}, 4) = -\frac{4}{3}$, mín. abs.; $f(2, 4) = 20$, máx. abs. 23. $f(0, 1) = -2$, mín. abs.; $f(0, 2) = 2$, máx. abs. 25. 8, 8, 8
 27. $(\frac{31}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14})$; $\frac{9}{14}\sqrt{14}$ 29. $(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}})$ y $(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})$; 1 31. $\frac{1}{2}$ c mg de droga A y $\frac{1}{2}$ c mg de droga B
 33. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ unidades cúbicas 35. la longitud de la base es $2\frac{2}{3}$ pie; el ancho de la base es 2 pie; la profundidad es 3 pie
 37. 3 horas-maquina y 9 horas-persona 39. \$25 400 41. (a) 3 120; (b) 9 43. (a) $y = 534.7 - 0.423x$
 (b) 390.6 mililitros por minuto por kilogramo 45. (a) $y = 0.8329x - 25.13$; (b) \$62 320
 47. 12 del tipo 1; 10 del tipo 2; la utilidad total es \$1064 49. largo, 1; ancho, 1; altura, $\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 12.9 (página 1012)

1. $(0, 0)$ y $(0, 4)$ 3. $(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7})$ 5. $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. rel.; $f(0, 3) = 3$, mín. rel.; $f(0, -3) = -3$, mín. rel.
 7. $f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{6}$,
 mín. rel.; $f(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.
 9. $f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{35}, \frac{1}{2}) = \frac{37}{4}$, máx. abs.; $f(0, -3) = -3$, mín. abs. 11. Todos los extremos del ejercicio 7 son absolutos
 13. 3 15. $3\sqrt{3}$ 17. (a) 12; (b) 4; (c) 1 19. $\frac{4}{13}\sqrt{26}$ 21. 2, 6 23. $\frac{37}{13}$ 25. $\frac{7}{32}$ 37. 22.5, 7.5, 3.625
 39. $T(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$; $T(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ 41. 15, 10, 7.5, 30, 6

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 12 (página 1015)

1. $\{(x, y) | x^2 + 4y^2 \geq 16\}$ 3. $\{(x, y) | y > x^2\}$
 5. $\{(x, y, z) | y \neq \pm z\}$; el conjunto de todos los puntos de R^3 excepto aquellos en los planos $y = \pm z$
 7. $\{(x, y) | 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$; la mitad superior del elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$ 9. $y = \frac{k}{4x^{1/2}}$, $k = 16, 8, 4, 2$
 11. (a) $4xy - 3y^2 + 4$; (b) $2x^2 - 6xy - 2$; (c) $4y$; (d) $-6x$; (e) $4x - 6y$; (f) $4x - 6y$

13. (a) $\frac{2x}{3y^2}$; (b) $\frac{y-2x^2}{3y^3}$; (c) $-\frac{4x}{3y^3}$; (d) $-\frac{4x}{3y^3}$
15. (a) $t^2 \cos st^2 + te^s$; (b) $2st \cos st^2 + e^s$; (c) $2t(\cos st^2 - st^2 \operatorname{sen} st^2) + e^s$; (d) $2t(\cos st^2 - st^2 \operatorname{sen} st^2) + e^s$
17. (a) $\frac{1}{y} e^{x/y} + \frac{1}{x}$; (b) $-\frac{x}{y^2} e^{x/y} - \frac{1}{y}$; (c) $\frac{1}{y^2} e^{x/y} - \frac{1}{x^2}$; (d) $\frac{2x}{y^3} e^{x/y} + \frac{x^2}{y^4} e^{x/y} + \frac{1}{y^2}$
19. (a) $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; (b) $\frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$; (c) $\frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
21. (a) $\frac{-320uvw}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$; (b) $\frac{16u(12v^2 + 5w^2 - u^2)}{(u^2 + 4v^2 - 5w^2)^3}$ 23. (a) $\frac{1}{rt^2}$; (b) $\frac{-2}{rt^3}$; (c) $\frac{2}{r^2t^3}$
27. (a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{6y(x+y)}{x^2 + y^2} + 3 \ln(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{4y(x-y)}{x^2 + y^2} - 2 \ln(x^2 + y^2)$;
 (b) $\frac{\partial u}{\partial t} = (3t - 2s) \frac{18t}{4s^2 + 9t^2} + 3 \ln(8s^2 + 18t^2)$; $\frac{\partial u}{\partial s} = (3t - 2s) \frac{8s}{4s^2 + 9t^2} - 2 \ln(8s^2 + 18t^2)$
29. (a) $18xyse^{3rs} + 6yse^{3rs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$; (b) $[9(1 + 2rs)e^{6rs} + 6(1 + rs)e^{3rs} - 9 \ln 4]r^2s^2$
31. (a) $3x \cos t - 4(y + 2x) \operatorname{sen} t$; (b) $12 \cos 2t - 16 \operatorname{sen} 2t$; $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=\pi/4} = -16$
33. (a) $3(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)^2 - 5(-1 + \Delta x)(2 + \Delta z)^2 - 2(-1 + \Delta x)(3 + \Delta y)(2 + \Delta z) - 5$; (b) -0.48 ;
 (c) $-5 \Delta x - 14 \Delta y + 26 \Delta z$; (d) -0.48 35. 2 37. $\frac{1}{6}\pi$ 39. $\delta = \min(1, \frac{1}{35}\epsilon)$
41. El límite existe y es 0; tome $\delta = \sqrt[4]{\epsilon}$ 43. El límite no existe
45. Continua en todos los puntos (x, y) de R^2 que no estén en las rectas $x = \pm 2y$ 47. Continua en todos los puntos de R^2
49. 14 51. $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ 53. $-\frac{3}{8}$ 55. (a) $\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j$; (b) $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$ 59. $f(-1, 1) = 1$, máx. rel.
63. 39ϵ 65. $-3200\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 67. decrece a la tasa de $0.44 \text{ atm}/\text{min}$
69. $4x + 2y + z - 12 = 0$; $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 71. $\frac{x-1}{17} = \frac{y+2}{20} = \frac{z-11}{-4}$
73. (a) la dirección del vector $-12i - 150j$; (b) asciende;
 (c) en la dirección de alguno de los vectores: $\frac{25}{\sqrt{629}}i - \frac{2}{\sqrt{629}}j$ o $-\frac{25}{\sqrt{629}}i + \frac{2}{\sqrt{629}}j$
75. $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$, mín. rel 77. $f(9, 11, 15) = -362$, máx. rel. 79. $\frac{7}{6}\sqrt{6}$
81. $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$ 83. $2\sqrt{3}$ por $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$
85. (a) $-\frac{3\sqrt{3}+2}{11}$ grados por cm; (b) $\frac{2}{11}\sqrt{13}$ grados por cm en la dirección del vector $-\frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$
87. 18 pie por 18 pie por 18 pie 89. base cuadrada y una profundidad igual a la mitad de la longitud del lado de la base
91. (a) $y = 0.285x - 0.951$; (b) 11 días 93. (a) $y = 9.628x - 1488.2$; (b) 2740 kilogramos por hectárea
95. (a) 12; (b) -3

EJERCICIOS 13.1 (página 1025)

1. (a) $(0, 3, 5)$; (b) $(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\sqrt{3}, -4)$; (c) $(\cos 1, \operatorname{sen} 1, 1)$ 3. (a) $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$; (b) $(0, 2\sqrt{3}, 2)$; (c) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3})$
5. (a) $(2, \frac{2}{3}\pi, -2\sqrt{3})$; (b) $(0, \frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2})$; (c) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \sqrt{6})$ 7. elipsoide; $r^2 + 4z^2 = 16$ 9. paraboloides elíptico $r^2 = 3z$
11. cono elíptico; $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$ 13. esfera; $\rho = 9 \cos \phi$ 15. cilindro circular recto; $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$
17. esfera; $\rho = 8 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ 19. (a) cilindro circular recto; $x^2 + y^2 = 16$; (b) plano que pasa por el eje z ; $y = x$
21. $x^2 - y^2 = z^3$ 23. (a) esfera; $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; (b) semiplano que pasa por el eje z ; $y = x$, donde x y y son no negativos; (c) la mitad de un cono con vértice en el origen; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 25. cilindro circular recto; $x^2 + y^2 = 36$
27. $x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$ 29. (a) (iii); (b) (vi); (c) (viii) 31. (a) (ix); (b) (v) 35. (b) $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$

EJERCICIOS 13.2 (página 1039)

1. 45 3. 50 5. 1368 7. 704 9. 50.75 11. 1376 13. 68.6 15. 38.2 17. $[0, 24]$ 19. $[1, e]$
21. 42 23. $\frac{98}{3}$ 25. $-\frac{49}{5}$ 27. $\frac{1}{3}$ 29. $\frac{1}{3}$ 31. 45 33. $\frac{152}{3}$ 35. $\frac{3}{2}\pi$ 37. $\frac{864}{5}$ 39. $\frac{512}{3}$ unidades cúbicas
41. $\frac{16}{3}$ unidades cúbicas 43. $\frac{15\pi - 32}{120}$ unidades cúbicas 45. $\frac{1}{12}$ unidades cuadradas 47. 72 unidades cuadradas

$$49. 2c \int_a^a \int_b^b \frac{h\sqrt{1-(x/a)^2}}{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy dx \quad 51. \frac{337}{30} \text{ unidades cúbicas} \quad 53. (a) \frac{2}{3} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x+y) dx dy \quad 55. 0$$

EJERCICIOS 13.3 (página 1050)

1. 12 kg; $(2, \frac{3}{2})$ 3. $\frac{27}{2}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{9}{5})$ 5. $\frac{176}{5}$ k kg; $(\frac{35}{22}, \frac{102}{77})$ 7. $\frac{2}{3}ka^3$ kg; $(\frac{3}{32}a(2+\pi), \frac{3}{32}a(2+\pi))$ 9. $\frac{1}{4}k\pi$ kg; $(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi})$
 11. $\frac{4}{3}$ kg; $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ 13. 9k kg-m² 15. $\frac{1}{2}\pi ka^4$ kg-m² 17. $\frac{96}{35}k$ kg-m² 19. (a) $\frac{144}{5}$ kg-m²; (b) 54 kg-m²; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{15}$ m;
 (d) $\frac{414}{5}$ kg-m² 21. (a) $\frac{3}{32}\pi k$ kg-m²; (b) $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2-3)k$ kg-m²; (c) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$ m, (d) $(\frac{1}{12}\pi^3 - \frac{1}{32}\pi)k$ kg-m²
 23. $\frac{19904}{315}k$ kg-m² 25. $\sqrt{6}$ unidades cuadradas 27. $2\sqrt{1633}$ unidades cuadradas 29. 9 unidades cuadradas
 31. $\frac{1}{12}(135\sqrt{10} - 13\sqrt{26})$ unidades cuadradas 33. 32 unidades cuadradas 35. $9\sqrt{2}$ unidades cuadradas
 37. $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$ unidades cuadradas 39. $2\pi a^2(1-e^{-1})$ unidades cuadradas 41. 12π unidades cuadradas 43. $\frac{1}{12}b\sqrt{6}$ pies

EJERCICIOS 13.4 (página 1059)

1. 6 π unidades cuadradas 3. $\frac{1}{4}a^2(8+\pi)$ unidades cuadradas 5. $(4\pi+12\sqrt{3})$ unidades cuadradas 7. 4 π unidades cúbicas
 9. $\frac{128}{9}(3\pi-4)$ unidades cúbicas 11. $\frac{2}{3}\pi$ unidades cúbicas 13. $\frac{40}{3}\pi k$ kg; $(0, \frac{21}{10})$ 15. $\frac{22}{3}k\pi$ kg; $(-\frac{57}{44}, 0)$ 17. $\frac{20}{3}k$ kg; $(\frac{23}{25}, \frac{531}{1280}\pi)$
 19. $\frac{8}{9}(27\sqrt{3}-14\pi)k$ kg; $(0, \frac{3}{10} \cdot \frac{297\sqrt{3}-160\pi}{27\sqrt{3}-14\pi})$ 21. $\frac{5}{64}k\pi$ kg-m² 23. $\frac{116}{16}k\pi a^4$ kg-m² 25. $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ m
 27. $\pi e(e^8-1)$ 29. 8 π unidades cuadradas 31. 12 π unidades cuadradas 33. $\frac{1}{6}\pi(2\sqrt{2}-1)a^2$

EJERCICIOS 13.5 (página 1065)

1. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{7}{8}$ 5. $-e(\ln 2)^2$ 7. $\frac{1}{2}\pi-1$ 9. $\frac{15}{2}$ 11. $\frac{1}{24}$ 13. 36 15. $\frac{243}{2}\pi$ 17. $\frac{648}{5}$ 19. $\frac{1}{4}$ unidades cúbicas
 21. $\frac{3}{2}\pi$ unidades cúbicas 23. 4 π unidades cúbicas 25. $\frac{4}{3}\pi abc$ unidades cúbicas 27. $\frac{80}{3}k$ kg 29. $\frac{1}{8}k$ kg 31. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ kg

EJERCICIOS 13.6 (página 1072)

1. $\frac{1}{3}a^3$ 3. $6\pi(e-1)$ 5. πa^3 7. $\frac{4}{3}a^3$ 9. $\frac{1}{3}$ 11. 8 π 13. $\frac{4}{5}a^5\pi k$ kg 15. 1250 πk slug-pie² 17. $\frac{4}{3}a^5\pi k$ kg
 19. 8 π 21. $\frac{512}{75}k$ kg-m² 23. 8k π kg 25. $\frac{56}{9}\pi a^3 k$ slug-pie² 27. $(0, 0, \frac{1}{2})$ 29. 18 π 31. $\frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2}-1)$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 13 (página 1075)

1. $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \pi, \frac{3}{2})$ 3. (a) $z = r^2(1 + \sin 2\theta) + 1$; (b) $r^2(25 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = 100$ 5. $\frac{1}{40}$ 7. $\frac{1}{8}\pi$
 9. $\frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2 + e - \frac{3}{8}$ 11. $\frac{3}{4}\pi$ 13. $\frac{1}{8}$ 15. $\frac{1}{3}$ 17. $\frac{1}{2}\pi \ln 2$ 19. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ 21. $\frac{4}{15}$ unidades cuadradas 23. 9 π
 25. $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas 27. $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas 29. $\frac{1}{2}$ unidades cúbicas 31. $\frac{1}{2}$ unidades cúbicas 33. $\frac{1104}{35}$ unidades cúbicas
 35. 18 unidades cuadradas 37. $(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$ unidades cuadradas 39. $(2, \frac{3}{2})$ 41. $\frac{1}{108}(3\pi-7)k$ 43. $6\pi a^4$ unidades cúbicas
 45. $\frac{8}{3}\pi$ unidades cúbicas 47. $\frac{1}{64}(7e^8+1)$ kg-m² 49. $k(\pi + \frac{8}{3})$ kg-m² 51. $2k\pi$ kg-m²; $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ m
 53. 65k π kg 55. $\frac{32}{5}k\pi$ kg-m²

EJERCICIOS 14.1 (página 1088)

7. 6xi + 6y²j 9. $\frac{2xy}{1+x^4y^2}\mathbf{i} + \frac{x^2}{1+x^4y^2}\mathbf{j}$ 11. $(6x^2 - 6xy + y^2)\mathbf{i} + (-3x^2 + 2xy - 12y^2)\mathbf{j}$
 13. 2xye^{-4z}i + e^{-4z}j - 4x²ye^{-4z}k 15. conservador 17. no conservador 19. conservador

21. $\phi(x, y) = xy + C$ 23. $\phi(x, y) = e^x \sin y + C$ 25. $\phi(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + C$
 27. $\phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}z^2 - xy + C$ 29. $\phi(x, y, z) = ze^x + xe^y - ye^z + C$
 31. $\phi(x, y, z) = x^2 \cos y - yz^2 - 3x + 2z + C$ 33. 0; 5 35. $2e^x \sin yk; 2e^x \cos y$ 37. 0; $2x + 2y + 2z$
 39. $\sin z\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j} + \sin y\mathbf{k}; 0$ 41. $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathbf{k}; \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} + 2z$

EJERCICIOS 14.2 (página 1097)

1. 1 3. $\pi - \frac{8}{3}$ 5. 8π 7. 1 9. $\frac{16}{3}$ 11. $\frac{4}{3}$ 13. $-\frac{5}{12}$ 15. $\frac{1477}{2}$ 17. $\frac{35}{2}$ 19. $\pi(a^2 + 2a)$ 21. 8
 23. $\frac{4}{3}$ joules 25. $20\frac{3}{4}$ joules 27. $27\frac{3}{4}$ joules 29. $(\frac{1}{16}\pi a^4 + a^2)$ joules 31. 3 joules
 33. $(e^2 + e^4 + e^8 - 3)$ joules 35. $2\frac{1}{2}$ joules

EJERCICIOS 14.3 (página 1107)

1. 2 3. e^2 5. -4 7. 15 9. $-4e$ 11. -14 13. 18 15. $2e^2 - 3e^3 + e^4$ 17. $\frac{3}{4}$ 19. 11 21. $\frac{13}{2}$
 23. 4 25. 0 27. 3 29. 4 31. -13 33. 216 joules 35. 32 766 joules 37. $\frac{2}{15}k$ joules

EJERCICIOS 14.4 (página 1119)

1. -1 3. $-\frac{5}{12}$ 5. $-\frac{1}{2}\pi$ 7. $-\frac{32}{15}$ 9. $-\frac{3}{7}$ 11. $\frac{1}{5}$ 13. $\frac{1}{24}(5 - 4\sqrt{2})\pi$ 15. 0 17. -10π 19. $\frac{41}{70}$
 21. $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas 23. $\frac{1}{3}$ unidades cuadradas 25. $\frac{3}{8}\pi a^2$ 31. 24π joules 33. 0 35. $8\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ 37. $\frac{3}{2}\pi \text{ cm}^2/\text{s}$
 39. 15; (i) 41. 0; (iii)

EJERCICIOS 14.5 (página 1127)

1. 8π 3. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 5. $\frac{9}{3}\sqrt{14}$ 7. $\frac{1}{6}(5\sqrt{2} - 1)$ 9. $\frac{15}{2}\sqrt{2}\pi$ 11. $\frac{7}{3}\sqrt{61}$ 13. 0 15. $8k\pi \text{ kg}$ 17. $9\pi \text{ kg}$
 19. $\frac{665}{6}\sqrt{2}\pi \text{ kg}$ 21. 18 23. 45π 25. $\frac{7}{2}$

EJERCICIOS 14.6 (página 1134)

1. $\frac{8}{3}\pi$ 3. 1 5. 18 7. $\frac{7}{2}$ 9. 27 11. 32π 13. 144π 15. $\frac{11}{12}$ 17. 0 19. π 21. 54π 23. -1
 25. 8π 27. -2

EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 14 (página 1135)

1. $f(x, y) = e^{x^2} \ln y + C$ 3. $f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} - \frac{2}{z} + C$
 5. (a) $(4xy + 3y^3)\mathbf{i} + (2x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}$; (b) $e^y\mathbf{i} + (xe^y - yze^y - ze^y)\mathbf{j} - ye^y\mathbf{k}$ 7. $\phi(x, y) = \tan^{-1} 2xy^2 + C$
 9. $\phi(x, y, z) = z^2 \tan x + y^2 e^{3z} + C$ 11. $x(e^{-xy} - e^{xz})\mathbf{i} + y(e^{xz} - e^{yz})\mathbf{k}; 0$ 13. $\frac{1-2y}{y^2}\mathbf{k}; \frac{2x}{y^2}$
 15. $-\frac{4}{3}$ 17. $\frac{44}{3} - 3\pi$ 19. $\frac{27}{10}$ 21. $\frac{19}{4}$ 23. $9e^2 - 1$ 25. π 27. 13 29. 4
 31. 12π 33. 0 35. $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas 37. $\frac{1568}{15}$ joules 39. $\frac{23}{6}$ joules 43. 0 45. $54 \text{ cm}^2/\text{s}$ 47. $\frac{1}{2}\pi$
 49. $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ 51. $\frac{1}{6}(37\sqrt{37} - 0)$ 53. $\frac{8}{3}k\pi \text{ kg}$ 55. $108\sqrt{2}\pi \text{ kg}$ 57. 56π 59. 160π 63. 0

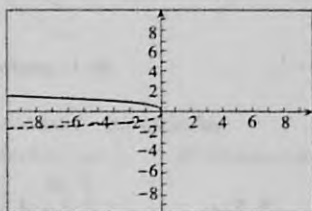
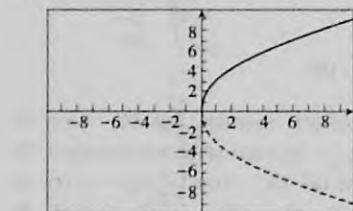
EJERCICIOS A.1 (página 1148)

1. $\{-10, -7, -\sqrt{5}, -2, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{3}, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \sqrt{2}, 3, 5, 21\}$ 3. (a) $\{x | -9 < x < 8\}$; (b) $\{y | -12 < y < -3\}$;
 (c) $\{z | 4z - 5 < 0\}$ 5. (a) $\{x | 2x + 4 \geq 0\}$; (b) $\{r | 2 \leq r < 8\}$; (c) $\{a | -5 < a - 2 \leq 7\}$
 7. (a) $(2, +\infty)$; (b) $(-4, 4]$ 9. (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ 11. (a) $(2, 12)$; (b) $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$
 13. (a) $(-4, 0]$; (b) $(-\infty, 7]$ 15. (a) $\{x | 2 < x < 7\}$; (b) $\{x | -3 \leq x \leq 6\}$; (c) $\{x | -5 < x \leq 4\}$;
 (d) $\{x | -10 \leq x < -2\}$ 17. (a) $\{x | x \geq 3\}$; (b) $\{x | x < 0\}$; (c) $\{x | x > -4\}$;
 (d) el conjunto R de los números reales
 19. (a) 7; (b) $\frac{3}{4}$; (c) $3 - \sqrt{3}$; (d) $3 - \sqrt{3}$ 21. (a) 6; (b) 10; (c) 10; (d) 6 23. (a) t ; (b) $-t$

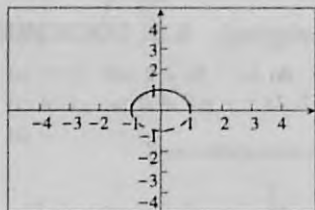
EJERCICIOS A.2 (página 1157)

1. (a) primer cuadrante; (b) tercer cuadrante; (c) cuarto cuadrante; (d) segundo cuadrante
 3. (a) (1, 2); (b) (-1, -2); (c) (-1, 2); (d) (-2, 1)
 5. (a) (2, -2); (b) (-2, 2); (c) (-2, -2); (d) no es posible
 7. (a) (-1, 3); (b) (1, -3); (c) (1, 3); (d) (-3, -1)
 9. (a) $(-\frac{3}{2}, 2)$
 11. $|\overline{AB}| = 10$; $|\overline{BC}| = \sqrt{17}$; $|\overline{CA}| = 13$
 13. $\sqrt{26}$; $\frac{1}{2}\sqrt{89}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$
 15. $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{41}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{82}$, y $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$
 21. $17\sqrt{2}$
 23. $-2 \text{ u } 8$

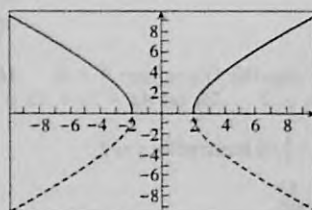
En los ejercicios 25–31, se muestra la gráfica de (i). La parte continua es la gráfica de (ii) y la parte punteada es la de (iii).



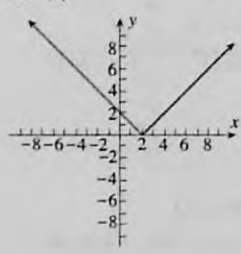
29. Simétrica con respecto al eje x , al eje y y al origen.



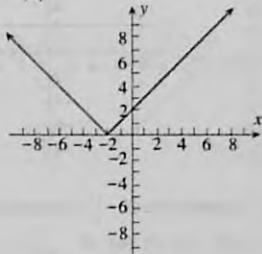
31. Simétrica con respecto al eje x , al eje y y al origen.



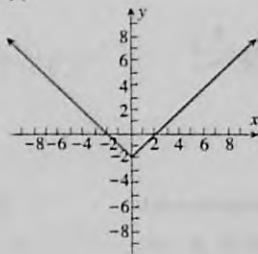
33. (a)



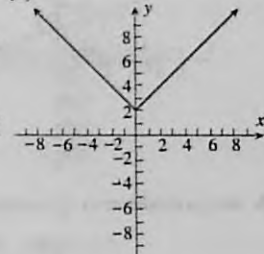
(b)



(c)



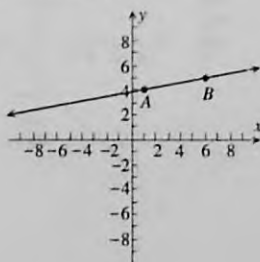
(d)



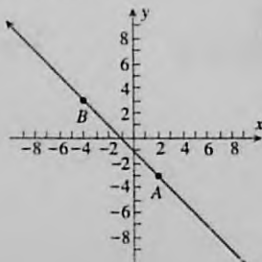
35. Todos son simétricos con respecto al origen. 37. Todos son simétricos con respecto al eje y .

EJERCICIOS A.3 (página 1166)

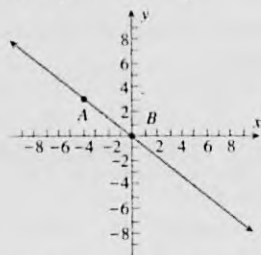
1. (a) La pendiente es $\frac{1}{3}$.



(b) La pendiente es -1 .



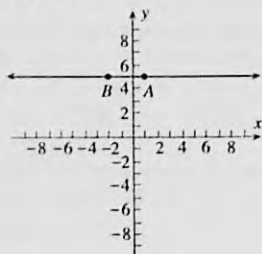
3. (a) La pendiente es $-\frac{3}{4}$.



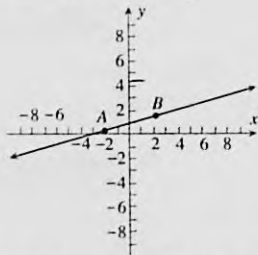
(b) La pendiente es $-\frac{1}{7}$.



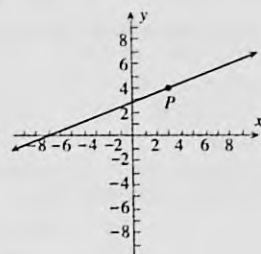
5. (a) La pendiente es 0.



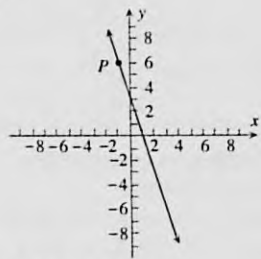
(b) La pendiente es $\frac{1}{4}$.



7. (a)



(b)

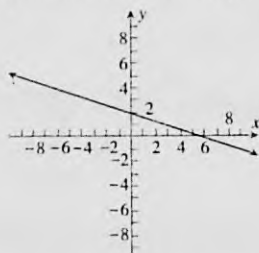


9. (a) $4x - y - 11 = 0$; (b) $11x - 4y - 9 = 0$ 11. (a) $2x + 3y - 3 = 0$; (b) $6x - 3y + 8 = 0$

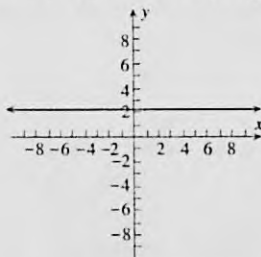
13. (a) $y = -7$; (b) $x = 2$ 15. (a) $4x - 3y + 12 = 0$; (b) $x - y = 0$ 17. $2x - y + 7 = 0$

19. $5x + y - 14 = 0$

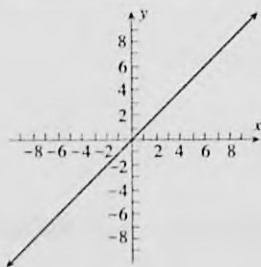
21. (a) La pendiente es $-\frac{1}{3}$, la intercepción y es 2.



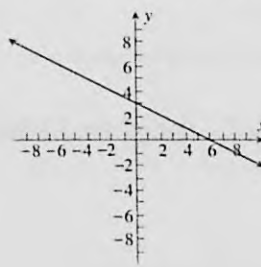
(b) La pendiente es 0, la intercepción y es $\frac{9}{4}$.



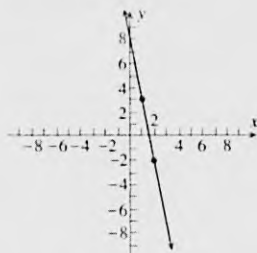
23. (a) La pendiente es $\frac{7}{8}$, la intercepción y es 0.



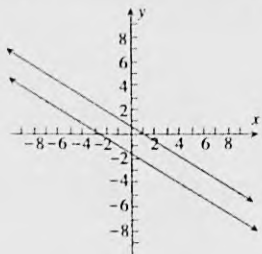
(b) La pendiente es $-\frac{1}{2}$, la intercepción y es 3.



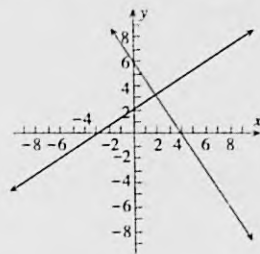
25. $y = -5x + 8$



27. La pendiente de cada recta es $-\frac{3}{5}$



29. Las pendientes de las rectas son $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$



31. $\pm \frac{2}{3}$ 33. (a) colineales; (b) no colineales 35. (a) no colineales; (b) colineales

37. Las pendientes de dos lados son $-\frac{1}{2}$; las pendientes de los otros dos lados son $\frac{3}{5}$. 39. El área es de 5 unidades cuadradas.

41. (a) $y = 25x + 3000$ 43. (a) \$600; (b) $y = 30x + 600$ 45. 8

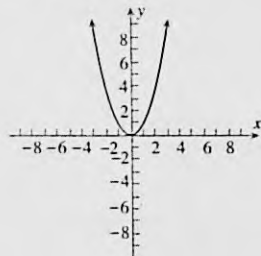
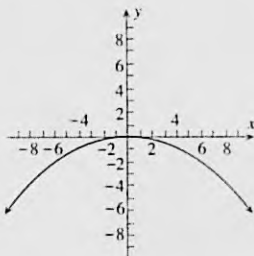
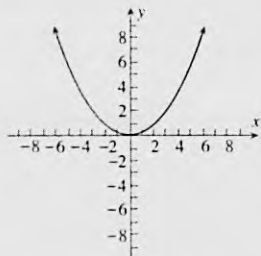
49. desde $(3, -2)$: $y = -\frac{9}{5}(x - 3) - 2$; desde $(2, 4)$: $y = \frac{9}{2}(x - 2) + 4$; desde $(-1, 1)$: $y = 1$

EJERCICIOS A.4 (página 1171)

1. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
 (c) $(0, 1)$; (d) $y = -1$;
 (e) $(-2, 1), (2, 1)$

3. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
 (c) $(0, -4)$; (d) $y = 4$;
 (e) $(-8, -4), (8, -4)$

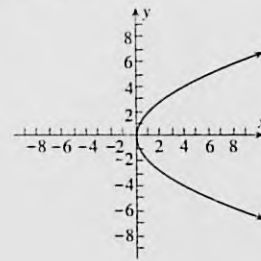
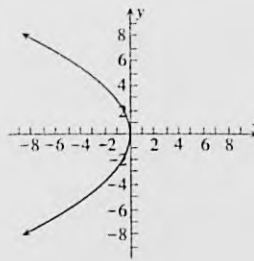
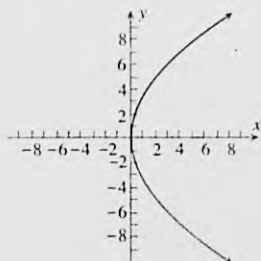
5. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
 (c) $(0, \frac{1}{4})$; (d) $y = -\frac{1}{4}$;
 (e) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



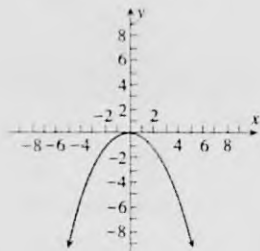
7. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$;
 (c) $(3, 0)$; (d) $x = -3$;
 (e) $(3, -6), (3, 6)$

9. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$;
 (c) $(-2, 0)$; (d) $x = 2$;
 (e) $(-2, -4), (-2, 4)$

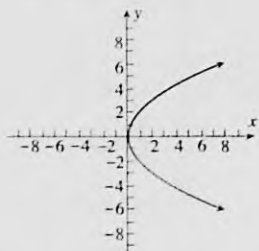
11. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$;
 (c) $(\frac{5}{4}, 0)$; (d) $x = -\frac{5}{4}$;
 (e) $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}), (\frac{5}{4}, \frac{5}{2})$



13. (a) $(0, 0)$; (b) $x = 0$;
 (c) $(0, -\frac{2}{3})$; (d) $y = \frac{2}{3}$;
 (e) $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$



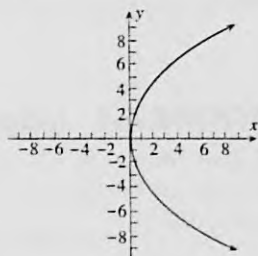
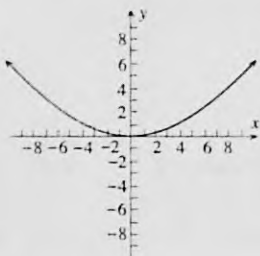
15. (a) $(0, 0)$; (b) $y = 0$;
 (c) $(\frac{9}{8}, 0)$; (d) $x = -\frac{9}{8}$;
 (e) $(\frac{9}{8}, -\frac{9}{4}), (\frac{9}{8}, \frac{9}{4})$



23. $x^2 = 16y$

25. $x^2 = -20y$

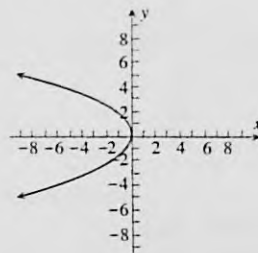
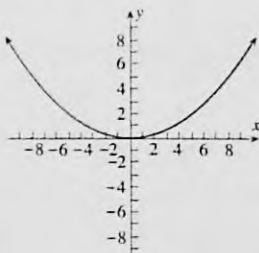
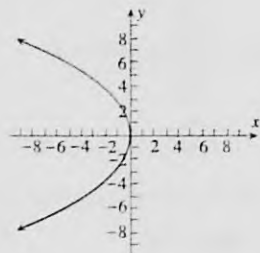
27. $y^2 = 8x$



29. $3y^2 = -20x$

31. $x^2 = 12y$

33. $3y^2 = -8x$



35. $x^2 = y$

37. $\frac{32}{48}$ pulg

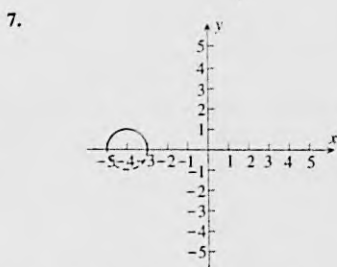
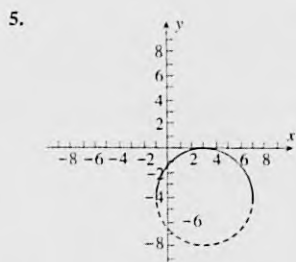
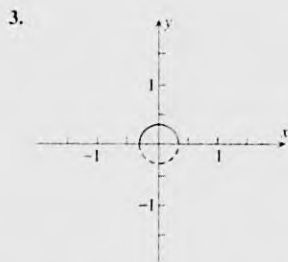
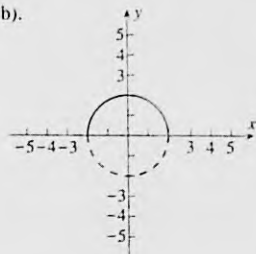
39. 16.6 m

43. (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $x^2 = -10y$



EJERCICIOS A.5 (página 1176)

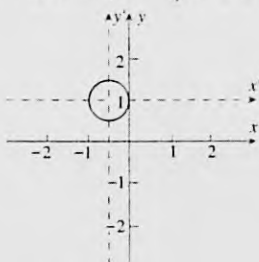
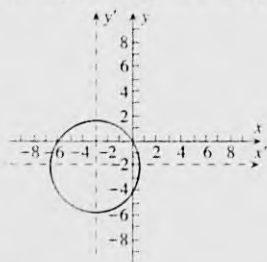
1. Se muestra la gráfica de (c). La parte continua es la gráfica de (a) y la parte punteada es la de (b).



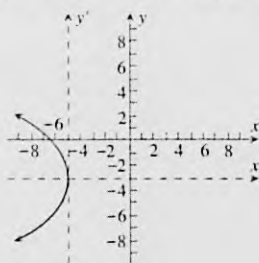
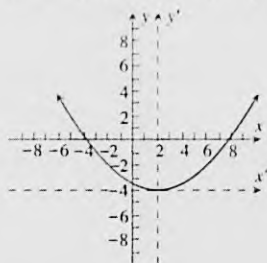
15. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ 17. $(x+5)^2 + (y+12)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$
 19. $x^2 + (y-7)^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 14y + 48 = 0$ 21. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ 23. $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 13$
 25. $(3, 4)$; 4 27. $(-1, -5)$; $2\sqrt{2}$ 29. $(0, -\frac{2}{3})$; $\frac{5}{3}$ 33. circunferencia 35. el conjunto vacío 37. el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
 39. $y = \frac{4}{3}(x+4) + 3$ 41. $y = -\frac{3}{4}(x-5) + 1$ 39. $D^2 + E^2 > 4F$
 49. Si O es la circunferencia unitaria centrada en el origen y P es la circunferencia de radio 2, también centrada en el origen, entonces el conjunto consiste de los puntos que: (a) están dentro o sobre la circunferencia O ; (b) fuera de la circunferencia O y dentro de la circunferencia P o sobre ella; (c) fuera de la circunferencia P .

EJERCICIOS A.6 (página 1182)

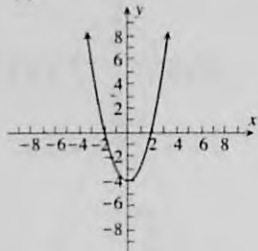
1. $x'^2 + y'^2 = 13$; $x' = x + 3$, $y' = y + 2$ 3. $x'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}$; $x' = x + \frac{1}{2}$, $y' = y - 1$



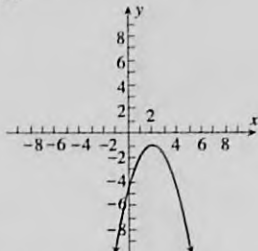
5. $x'^2 = 8y'$; $x' = x - 2$, $y' = y + 4$ 7. $y'^2 = -6x'$; $x' = x + 5$, $y' = y + 3$



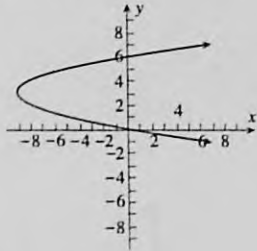
9. (a) $(0, -4)$; (b) $x = 0$;
 (c) $(0, -\frac{15}{4})$; (d) $y = -\frac{17}{4}$;
 (e) $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$;
 (f)



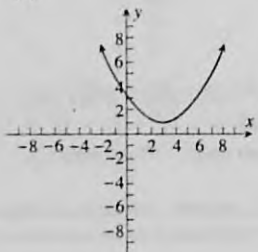
11. (a) $(2, -1)$; (b) $x = 2$;
 (c) $(2, -\frac{5}{4})$; (d) $y = -\frac{3}{4}$;
 (e) $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$;
 (f)



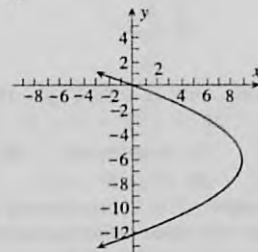
13. (a) $(-9, 3)$; (b) $y = 3$;
 (c) $(-\frac{35}{4}, 3)$; (d) $x = -\frac{37}{4}$;
 (e) $(-\frac{35}{4}, \frac{7}{2}), (-\frac{35}{4}, \frac{5}{4})$;
 (f)



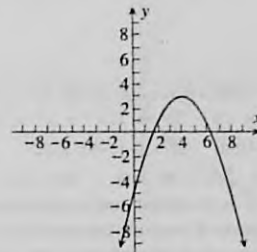
15. (a) $(3, 1)$; (b) $x = 3$;
 (c) $(3, 2)$; (d) $y = 0$;
 (e) $(5, 2), (1, 2)$;
 (f)



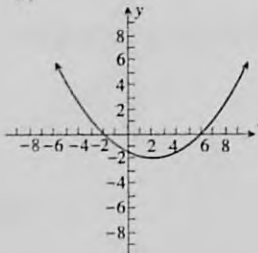
17. (a) $(9, -6)$; (b) $y = -6$;
 (c) $(8, -6)$; (d) $x = 10$;
 (e) $(8, -4), (8, -8)$;
 (f)



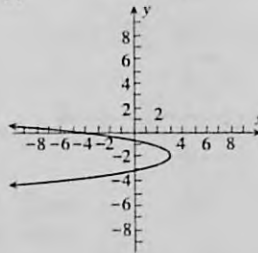
19. (a) $(4, 3)$; (b) $x = 4$;
 (c) $(4, \frac{5}{2})$; (d) $y = \frac{7}{2}$;
 (e) $(5, \frac{5}{2}), (3, \frac{5}{2})$;
 (f)



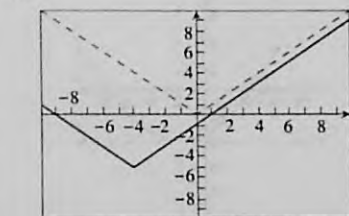
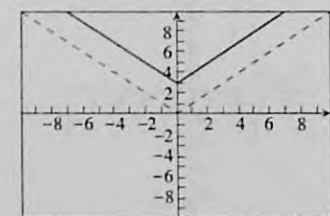
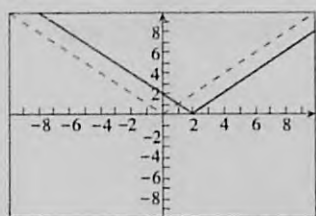
21. (a) $(2, -2)$; (b) $x = 2$;
 (c) $(2, 0)$; (d) $y = -4$;
 (e) $(6, 0), (-2, 0)$;
 (f)

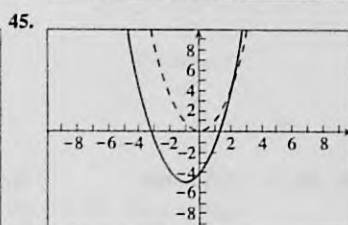
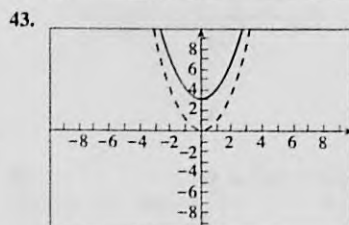
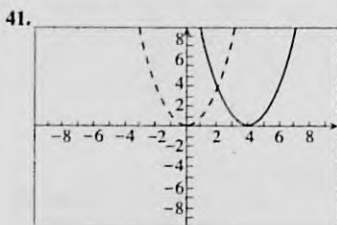
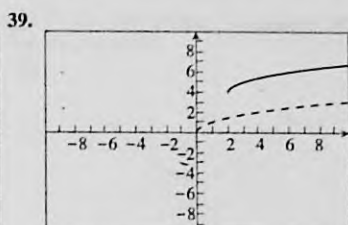
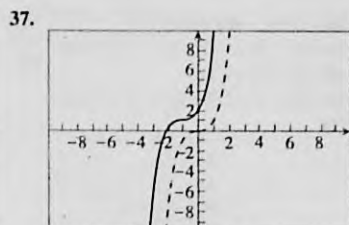
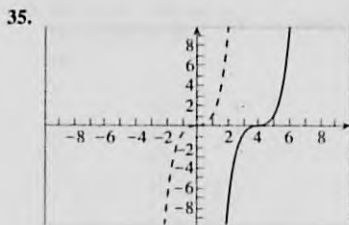


23. (a) $(3, -2)$; (b) $y = -2$;
 (c) $(\frac{23}{8}, -2)$; (d) $x = \frac{25}{8}$;
 (e) $(\frac{23}{8}, -\frac{7}{4}), (\frac{23}{8}, -\frac{9}{4})$;
 (f)



En los ejercicios 29–45, la gráfica de la primera ecuación se presenta punteada; la de la segunda se muestra en forma continua.

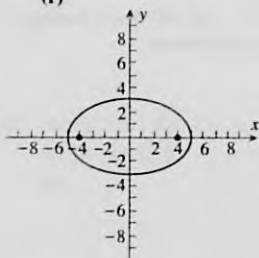




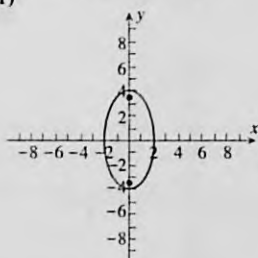
47. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

EJERCICIOS A.7 (página 1191)

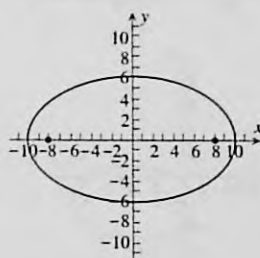
1. (a) (0, 0); (b) eje x;
 (c) (-5, 0), (5, 0);
 (d) (0, -3), (0, 3);
 (e) (-4, 0), (4, 0);
 (f)



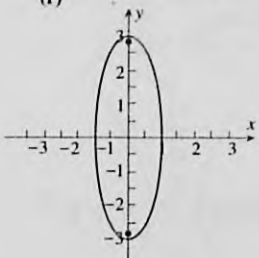
3. (a) (0, 0); (b) eje y;
 (c) (0, -4), (0, 4);
 (d) (-2, 0), (2, 0);
 (e) (0, $-2\sqrt{3}$), (0, $2\sqrt{3}$);
 (f)



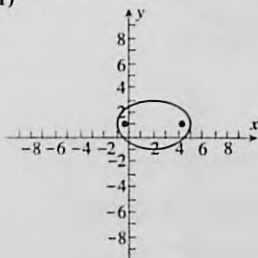
5. (a) (0, 0); (b) eje x;
 (c) (-10, 0), (10, 0);
 (d) (0, -6), (0, 6);
 (e) (-8, 0), (8, 0);
 (f)



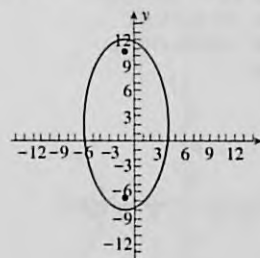
7. (a) (0, 0); (b) eje y;
 (c) (0, -3), (0, 3);
 (d) (-1, 0), (1, 0);
 (e) (0, $-2\sqrt{2}$), (0, $2\sqrt{2}$);
 (f)



9. (a) (2, 1); (b) $y = 1$;
 (c) (-1, 1), (5, 1);
 (d) (2, -1), (2, 3);
 (e) (2 - $\sqrt{5}$, 1), (2 + $\sqrt{5}$, 1);
 (f)

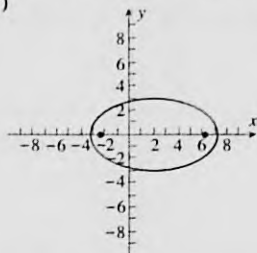


11. (a) (-1, 2); (b) $x = -1$;
 (c) (-1, -8), (-1, 12);
 (d) (-6, 2), (4, 2);
 (e) (-1, $2 - 5\sqrt{3}$), (-1, $2 + 5\sqrt{3}$);
 (f)



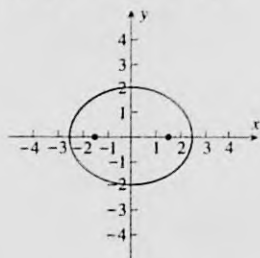
13. el punto $(-\frac{5}{2}, 4)$

15. (a) $(2, 0)$; (b) eje x ;
 (c) $(2 - 3\sqrt{3}, 0), (2 + 3\sqrt{3}, 0)$;
 (d) $(2, -3), (2, 3)$;
 (e) $(2 - 3\sqrt{2}, 0), (2 + 3\sqrt{2}, 0)$;
 (f)

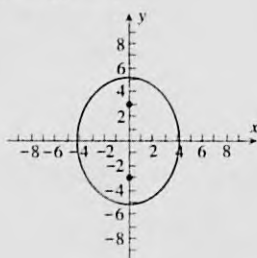


17. el punto $(1, -1)$

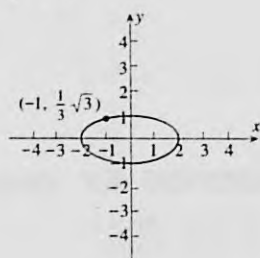
19. $16x^2 + 25y^2 = 100$



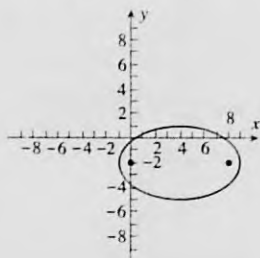
21. $3x^2 + 2y^2 = 54$



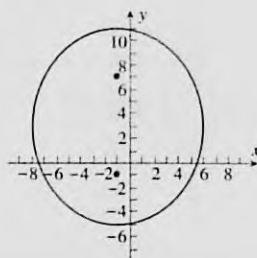
23. $x^2 + 4y^2 = 4$



25. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



27. $\frac{(x+1)^2}{48} + \frac{(y-3)^2}{64} = 1$

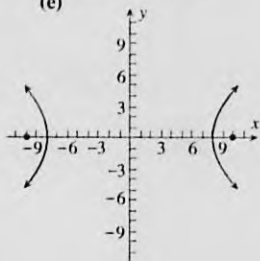


29. 8.4 m

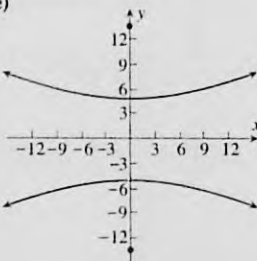
31. $9x^2 + 25y^2 = 562,500$, donde la unidad es 1 millón de kilómetros

EJERCICIOS A.8 (página 1200)

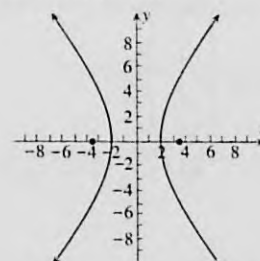
1. (a) $(0, 0)$; (b) eje x ;
 (c) $(-8, 0), (8, 0)$;
 (d) $(-10, 0), (10, 0)$;
 (e)



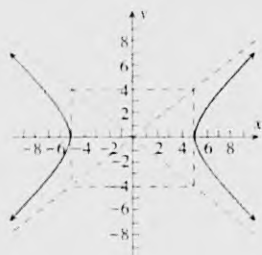
3. (a) $(0, 0)$; (b) eje y ;
 (c) $(0, -5), (0, 5)$;
 (d) $(0, -13), (0, 13)$;
 (e)



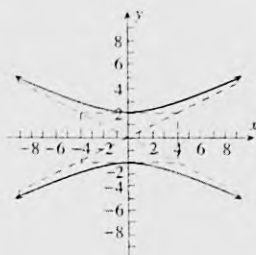
5. (a) $(0, 0)$; (b) eje x ;
 (c) $(-2, 0), (2, 0)$;
 (d) $(-\sqrt{13}, 0), (\sqrt{13}, 0)$;
 (e)



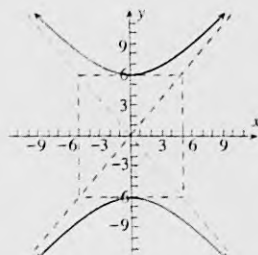
7. (a) $(0, 0)$; (b) eje x ;
 (c) $(-5, 0)$, $(5, 0)$;
 (d)



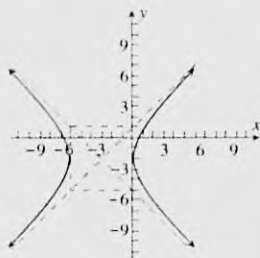
9. (a) $(0, 0)$; (b) eje y ;
 (c) $(0, -2)$, $(0, 2)$;
 (d)



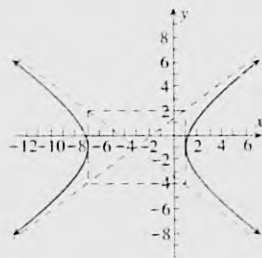
11. (a) $(0, 0)$; (b) eje y ;
 (c) $(0, -6)$, $(0, 6)$;
 (d)



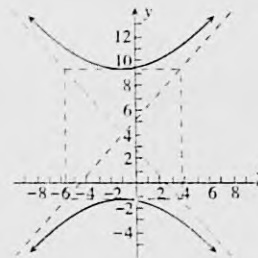
13. (a) $(-3, -2)$; (b) $y = -2$;
 (c) $(-6, -2)$, $(0, -2)$;
 (d)



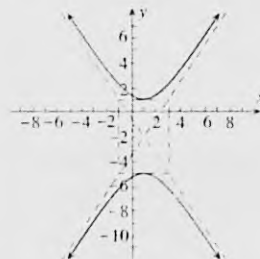
15. (a) $(-3, -1)$; (b) $y = -1$;
 (c) $(-7, -1)$, $(1, -1)$;
 (d)



17. (a) $(-1, 4)$; (b) $x = -1$;
 (c) $(-1, 4 - 2\sqrt{7})$,
 $(-1, 4 + 2\sqrt{7})$;
 (d)

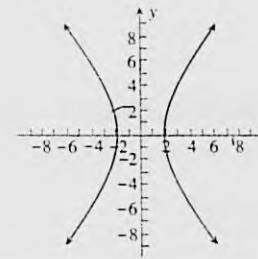


19. (a) $(1, -2)$; (b) $x = 1$;
 (c) $(1, -5)$, $(1, 1)$;
 (d)

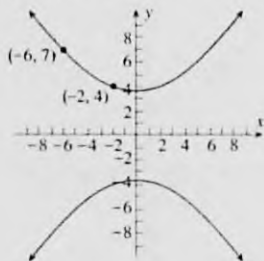


21. $y = -\frac{4}{5}x$, $y = \frac{4}{5}x$
 23. $y = -x + 5$, $y = x + 1$
 25. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

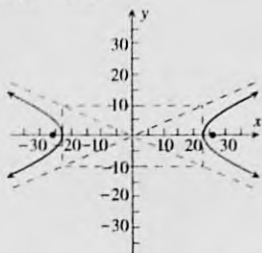
27. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$



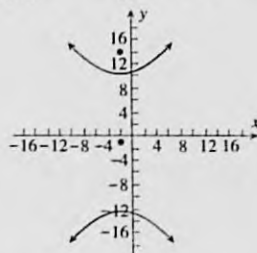
29. $32y^2 - 33x^2 = 380$



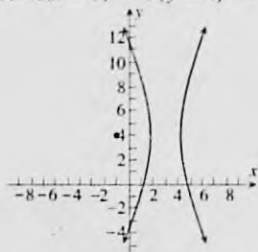
31. $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$



33. $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$



35. $72(x-3)^2 - 9(y-4)^2 = 128$



37. (a) $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$; (b) $y = 2x + 3, y = -2x - 5$

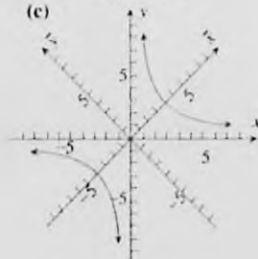
39. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{7} = 1$ 41. La rama derecha de la hipérbola $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1$.

EJERCICIOS A.9 (página 1207)

1. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{3}{4}\pi$; (c) $\frac{7}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$; (e) $\frac{1}{9}\pi$; (f) $\frac{5}{2}\pi$; (g) $-\frac{5}{12}\pi$; (h) $\frac{5}{9}\pi$
 3. (a) 45° ; (b) 120° ; (c) 330° ; (d) -90° ; (e) $28^\circ39'$; (f) 540° ; (g) $-114^\circ36'$; (h) 15°
 5. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{2}$ 7. (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) -1; (d) 0 9. (a) $\sqrt{3}$; (b) 1; (c) -1; (d) 1
 11. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) 1 13. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\sqrt{2}$
 15. (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) -2; (d) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 17. (a) 0; (b) 1; (c) -1; (d) indefinido
 19. (a) 1; (b) 0; (c) indefinido; (d) 1 21. (a) -1; (b) -1; (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $\sqrt{3}$
 23. (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (c) 0; (d) 0 25. (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) π ; (c) $\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$; (d) 0
 27. (a) $0, \pi$; (b) $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; (c) $0, \pi$; (d) $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ 29. (a) $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$; (c) $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; (d) $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$
 31. (a) $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$; (b) $0, \pi$ 33. (a) π ; (b) $\frac{3}{2}\pi$ 35. $x = 5 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t$ 37. $x = 2 \cos t, y = 4 \operatorname{sen} t$
 39. $x = 3 \cos t + 2, y = 2 \operatorname{sen} t + 1$ 41. $x = 5 \cos t - 1, y = 10 \operatorname{sen} t + 2$ 45. $x = 8 \sec t = 8/\cos t, y = 6 \tan t$
 47. $x = 12 \tan t, y = 5 \sec t = 5/\cos t$ 49. $x = 3 \sec t - 3 = 3/\cos t - 3, y = 3 \tan t - 2$
 51. $x = \sqrt{21} \tan t - 1, y = 2\sqrt{7} \sec t + 4 = 2\sqrt{7}/\cos t + 4$

EJERCICIOS A.10 (página 1215)

1. (a) hipérbola; (b) elipse; (c) parábola; (d) dos rectas que se intersectan 3. (a) un punto; (b) hipérbola; (c) parábola; (d) el conjunto vacío
 5. (a) hipérbola; (b) $x^2 - y^2 = 16$; (c) 7. (a) hipérbola; (b) $\overline{xy} = -4$; (c)



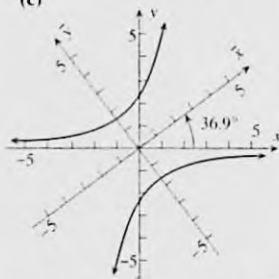
En los ejercicios 9–25, los ejes $\bar{x}\bar{y}$ se han rotado un ángulo de medida α .

9. (a) hipérbola;

(b) $\alpha = 36.9^\circ$,

$$16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36;$$

(c)

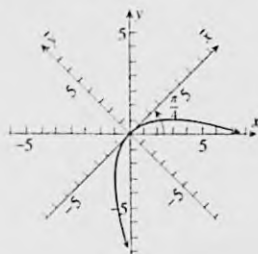


11. (a) parábola;

(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$$\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} = 0;$$

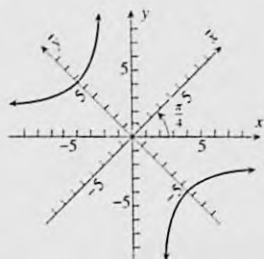
(c)



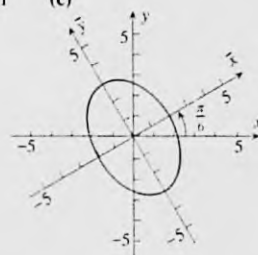
13. (a) hipérbola;

(b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 32$;

(c)



15. (a) elipse; (b) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$ (c)

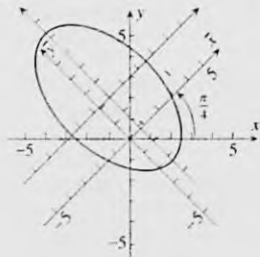


En los ejercicios 17–25, los ejes $x'y'$ también se han trasladado de modo que $x' = \bar{x} - h$, $y' = \bar{y} - k$.

17. (a) elipse; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad k = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad \frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{18} + = 1;$$

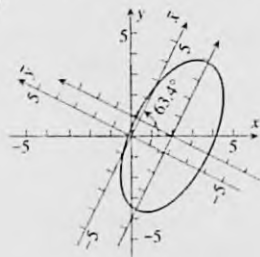
(c)



19. (a) elipse; (b) $\alpha = 63.4^\circ$,

$$h = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad k = -\frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1;$$

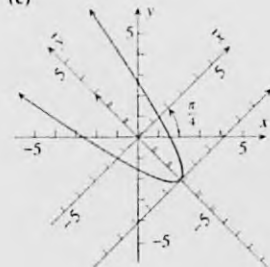
(c)



21. (a) parábola; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$,

$$h = 0, \quad k = -2\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}x'^2 = y';$$

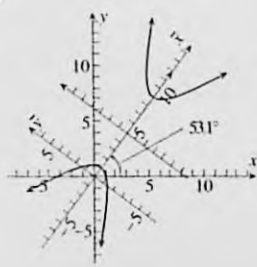
(c)



23. (a) hipérbola; (b) $\alpha = 53.1^\circ$,

$$h = 5, \quad k = 0, \quad \frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1;$$

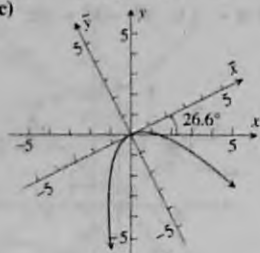
(c)



25. (a) parábola; (b) $\alpha = 26.6^\circ$.

$$\sqrt{5}x^2 + 6\sqrt{5}y = 0;$$

(c)



27. Refiérase a la figura del ejercicio 9(c).

29. Refiérase a la figura del ejercicio 11(c).

31. Refiérase a la figura del ejercicio 17(c).

33. Refiérase a la figura del ejercicio 21(c).

EJERCICIOS A.11 (página 1222)

$$1. \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2} \quad 3. -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} \quad 5. \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-1} \quad 7. \frac{-5}{3x+1} + \frac{2}{x-2} \quad 9. \frac{2}{x} - \frac{3}{3x-2} - \frac{1}{2x+3}$$

$$11. 2x + \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+2} \quad 13. 2x - 5 + \frac{3}{2x-3} + \frac{2}{x+2} \quad 15. \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{7}{x-2} \quad 17. \frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}$$

$$19. \frac{6}{(2x+1)^2} + \frac{\frac{14}{3}}{2x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{\frac{7}{3}}{x-1} \quad 21. 1 + \frac{16}{(x-2)^3} + \frac{18}{(x-2)^2} + \frac{6}{x-2} \quad 23. \frac{4}{x} - \frac{x+5}{x^2+x+1}$$

$$25. \frac{1}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+4} \quad 27. -\frac{2}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2+1} \quad 29. \frac{4}{x+4} + \frac{3x-1}{2x^2+3} \quad 31. \frac{x+2}{x^2+2} - \frac{x-2}{x^2-x-1}$$

$$33. \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+2x+3} \quad 35. \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{(x^2+1)^2} \quad 37. \frac{x-15}{(x^2+2)^2} + \frac{3x+4}{x^2+2} - \frac{2}{x-1}$$

ÍNDICE

- Abierta(o)
 - bola, 927
 - disco, 927
 - intervalo, 1143
 - región rectangular, 1028
- Abscisa, 1150
- Absolutamente convergentes, series infinitas, 688
- Acción de masas, ley de, 579
- Aceleración
 - debida a la gravedad, 324
 - en el movimiento curvilíneo, 897
 - instantánea, 139
 - vector, 897
- Adición, 1139
 - de vectores, 790
- Alfabeto griego, 1274
- Análisis vectorial, 787
- Ángulo(s), 1201
 - director, 789
 - directores de un vector, 805
 - entre dos planos, 825
 - entre dos vectores, 812
 - funciones trigonométricas de, 1205
 - medida en radianes de, 1201
- Antiderivada, 297
 - general, 299
- Antiderivación (o antidiferenciación), 297
- Antifluente (o sumidero) de un fluido, 1116
- Aproximación(es)
 - lineal, 279
 - mediante la recta tangente, 279
 - polinomiales mediante la fórmula de Taylor, 639–647
- Arco rectificable, 510, 748
- Área, 328–338
 - de una región en coordenadas polares, 768
 - de una región plana, 334, 343, 372–380
 - de una superficie, 1048
- Arquímedes, xxvii, 360
 - espiral de, 761
- Asíntota(s)
 - de una hipérbola, 1195
 - horizontal, 255
 - oblicua, 257
 - vertical, 63
- Aspectos históricos del Cálculo, xxix
- Axioma, 1139
 - de completez, 656
- Barra
 - centro de masa de una, 516–522
- Barra (*continúa*)
 - densidad lineal de una, 518
 - homogénea, 518
 - masa de una, 519
 - momento de masa de una, 520
- Barrow, Isaac, xxvii
- Base del espacio vectorial real, 795, 798
- Bernoulli, Jakob, xxvii
- Bernoulli, Johann, xxvii, 431
- Bessel, Friedrich W., 738
 - funciones de, 738
- Bola
 - abierta, 927
 - cerrada, 927
- Bolzano, Bernhard, xxvii
- Cable, Charles A., 393
- Caja de inspección, 921
- Campo(s)
 - de fuerza, 1084
 - central, 1084
 - de velocidad, 1082
 - escalar, 1082
 - vectorial(es), 1078–1089
 - conservador (o conservativo), 1084
 - de estado estable, 1082
 - definición de, 1082
 - divergencia de un, 1086
 - gradiente, 1084
 - flujo de un, 1116
 - irrotacional, 1119
 - libre de divergencia, 1115
 - rotacional de un, 1085
 - solenoidal, 1115
- Capas cilíndricas, 391
 - método para determinar el volumen mediante, 391–397
- Caracoles (Limaçons), 759, 1272, 1273
 - cardioides, 759
 - con hendidura, 759
 - con lazo, 759
 - convexos, 759
- Cardioide, 759
- Catenaria, 494
- Cauchy, Augustin L., xxvii, 606
 - teorema del valor medio de, 606
- Centro
 - de curvatura, 896
 - de masa

- Centro (de masa) (*continúa*)
 - de una barra, 520
 - de una lámina, 524, 1041
 - de una circunferencia, 1173
 - de una elipse, 1184
 - de una esfera, 803
 - de una hipérbola, 1193
- Centroide de una región plana, 525
- Cerrada(o)
 - bola, 927
 - curva, 743
 - forma, 687
 - intervalo, 1144
 - región, 996
 - rectangular, 1028
- Cicloide, 742
- Cilindro, 381, 846
 - circular recto, 381, 846
 - como un sólido, 381
 - como una superficie, 846
 - directriz de un, 846
 - elíptico, 846
 - generatriz de un, 846
 - hiperbólico, 846
 - parabólico, 846
 - recto, 381
 - altura de un, 381
 - regladura de un, 846
- Circulación de un campo de velocidad, 1119
- Circunferencia(s), 1173, 1267
 - de curvatura, 892
 - ecuación de una, 1173
 - forma centro-radio de la, 1175
 - forma general de la, 1175
 - osculatriz, 892
 - trazo de una, 1173
 - unitaria, 1173
- Cisoide, 764
- Cociente(s)
 - de funciones, 12
 - de diferencias
 - estándar, 105
 - simétricas, 118
- Combinación lineal, 795
- Competencia perfecta, 273
- Completez, axioma de, 656
- Componente(s)
 - de un vector, 787, 804, 815
 - normal del vector aceleración, 901
 - tangencial del vector
 - aceleración, 901
 - velocidad, 901
- Concavidad, 231
 - hacia abajo, 231
 - hacia arriba, 231
- Concepto de variación
 - marginal, 147
 - promedio, 147
- Conclusión de un teorema, 1139
- Concoide de Nicómedes, 764
- Condionalmente convergentes, series infinitas, 688
- Condición(es)
 - de frontera, 305
 - de monopolio, 274
 - iniciales, 305
 - lateral, 1004
- Cónica, 774, 1183
 - central, 1184, 1193
 - excentricidad de una, 774
 - foco de una, 775
 - sección, 774, 1183
- Conjunto(s), 1140
 - iguales, 1140
 - intersección de, 1140
 - notación por construcción de, 1140
 - unión de, 1140
 - vacío, 1140
- Cóno
 - circular recto, 849
 - elíptico, 855
- Constante
 - de integración, 366
 - función, 15
- Continuidad
 - de las funciones trigonométricas, 85–93
 - de una función
 - compuesta, 77
 - de dos variables, 936
 - de n variables, 936
 - en un intervalo
 - abierto, 78
 - cerrado, 79
 - semiabierto, 79
 - en un número, 67
 - en una bola abierta, 939
 - vectorial, 869
 - diferenciabilidad y, 109–118
 - por la derecha, 78
 - por la izquierda, 78
- Contradominio de una función, 4, 914
- Convergencia
 - intervalo de, 704
 - radio de, 704
- Convergente
 - integral impropia, 619
 - serie infinita, 661
 - sucesión, 651
- Coordenada(s)
 - cartesianas rectangulares, 799, 1150
 - tridimensionales, 799
 - cilíndricas, 1022
 - integrales triples en, 1067–1074
 - esféricas, 1023
 - integrales triples en, 1070
 - polares, 752
 - integrales dobles en, 1052–1060
 - x , 799, 1150

- Coordenada(s) (*continúa*)
 y, 799, 1150
 z, 799
- Cosenos directores de un vector, 805
- Costo
 marginal, 148
 función de, 148
 promedio, 147
 función de, 147
 total, función de, 147
- Cota
 inferior de una sucesión, 654
 máxima, 655
 superior de una sucesión, 654
 mínima, 655
- Creciente
 función, 223
 sucesión, 653
- Crecimiento
 exponencial, 457
 limitado, 465
 logístico, 576
 natural, ley de, 456
- Criterio(s)
 de comparación, 672
 por paso al límite, 674
 de la primera derivada para extremos relativos, 225
 de la segunda derivada para extremos relativos, 238, 994
 de la raíz, 693
 de la razón, 690
 de la recta horizontal, 405
 de las series alternantes, 684
 de simetría, 1155, 1156
- Cuadrantes, 1150
- Cuádrlica, 850
 central, 852
 no central, 853
- Cúbica alabeada, 867
- Curso, 792
- Curva(s)
 cerrada, 743, 1102
 de aprendizaje, 465
 de nivel (o de contorno), 918
 de producción constante, 919
 equipotenciales, 919
 generatriz de una superficie de revolución, 848
 isotermas, 919
 longitud de arco de una, 748
 plana, 740
 longitud de arco de una, 748
 simple, 743
 suave (lisa o uniforme), 743
 a trozos, 743, 1093
- Curvatura, 888–897
 centro de, 896
 circunferencia de, 892
 definición de, 890
 radio de, 893
 vector, 890
- Dandelin, G. P., 1190
- Decimales
 finitos, 1139
 infinitos
 no periódicos, 1139
 periódicos, 1139
- Decreciente
 función, 223
 sucesión, 653
- Decrecimiento
 exponencial, 457
 natural, ley de, 456
- Dedekind, Richard, xxvii
- Demostración
 de un teorema, 1139
 del cono de helado, 1190
- Densidad
 de probabilidad, función de, 624
 lineal de una barra, 518
 superficial, (o de área), 522
 volumétrica, 1068
- Derivada(s). Véase también Diferenciación.
 como tasa de variación, 145–152
 de la función
 cosecante, 156
 inversa, 481
 coseno, 154
 inversa, 475
 cotangente, 155
 inversa, 480
 exponencial
 de base a , 449
 natural, 441
 logarítmica
 de base a , 452
 natural, 420
 secante, 155
 inversa, 478
 seno, 153
 inversa, 472
 tangente, 155
 inversa, 477
 de la inversa de una función, 412
 de las funciones
 hipérblicas inversas, 497
 trigonométricas, 152–162
 de orden superior, 130–132
 de una función, 104
 compuesta, 162–172
 vectorial, 873
 definición de, 104
 direccionales, 975–984
 lateral, 112
 n -ésima, 130
 notación para, 106–107
 numérica (NDER), 119
 parciales, 942–954
 de orden superior, 949
 definición de, 942, 948

- Derivada(s) (*continúa*)
 por la derecha, 112
 por la izquierda, 112
 sucesivas (de la primera a la n -ésima), 130–132
 total, 967
- Descartes, Rene, xxvii, 1150
- Desigualdad(es), 1141
 continua, 1142
 de Cauchy-Schwartz, 821
 de triángulo (o triangular), 1147
 estrictas, 1141
 no estrictas, 1141
- Desviación (o error), 998
- Dibuje la gráfica, xxix, 1154
- Diferencia
 de funciones, 12
 vectoriales, 868
 de dos vectores, 792, 806
- Diferenciabilidad
 de funciones vectoriales, 874
 y continuidad, 109–118
 y diferencial total, 955–965
- Diferenciación (o derivación). *Véase también* Derivada.
 de funciones algebraicas, 123–132
 definición de, 109
 implícita, 175
 logarítmica, 431
 parcial, 942
 reglas de. *Véase* Reglas.
 término a término de series de potencias, 708
- Diferencial
 de la variable dependiente, 281
 de la variable independiente, 282
 geometría, 872
 total de una función
 de dos variable, 959
 de n variables, 961
- Dimensión de un espacio vectorial, 796
- Dina, 517
- Dirección
 de máxima inclinación, 979
 de un vector, 788, 805
- Directriz
 de un cilindro, 846
 de una cónica, 777
 de una parábola, 1168
- Disco
 abierto, 927
 cerrado, 927
- Discontinuidad
 de salto, 70
 esencial, 69, 937
 infinita, 69
 removible (o eliminable), 69, 937
- Discriminante
 de la ecuación general de segundo grado
 en dos variables, 1213
 hessiano, 994
- Distancia
 dirigida, 1150, 1151
 entre dos puntos de R^n , 926
 fórmula de Ja, 1152, 1264
 no dirigida, 1151
- Divergencia
 campo vectorial libre de, 1115
 de un campo vectorial, 1086
- Divergente
 integral impropia, 619
 serie infinita, 661
 sucesión, 651
- División, 1139
- Dominio de una función, 4, 914
- e (base de los logaritmos naturales), 438
- Ecuación(es)
 algebraica, 1153
 cartesiana(s), 740, 754,
 de un plano, 823
 de una curva en R^3 , 866
 de Cauchy-Riemann, 974
 de Laplace, 953, 1087
 de un plano, 822
 de una circunferencia, 1173
 de una elipse, 1184
 formas estándar de las, 1187
 de una esfera, 803
 de una gráfica, 1161
 de una hipérbola, 1193
 formas estándar de las, 1197
 de una parábola, 1169, 1171
 formas estándar de las, 1179
 de una recta, 1161, 1266
 en R^2 , 1161–1163
 forma pendiente-intercepción de la, 1162
 forma punto-pendiente de la, 1161
 en R^3 , 828
 paramétricas, 828
 simétricas, 828
 de Van de Waals, 975
 diferencial, 319
 separables, 320
 solución completa de una, 320
 solución general de una, 320
 gráfica de una, 1153
 lineal, 823, 1163
 para la traslación de ejes, 1178
 paramétricas, 740
 de una recta en R^3 , 828
 polar, 754
 solución de una, 1153
 vectorial, 865
- Eje(s), 1142
 conjugado de una hipérbola, 1193
 coordenado(s), o de coordenadas, 799, 1150
 rotación de, 1211
 fórmulas para la, 1211
 traslación de, 1178–1183

- Eje(s) (*continúa*)
 de revolución, 383
 de una parábola, 1169
 de una superficie de revolución, 848
 mayor de una elipse, 1184
 menor de una elipse, 1184
 polar, 752
 principal
 de una elipse, 1184
 de una hipérbola, 1193
 real, 1143
 transverso de una hipérbola, 1193
 x, 799, 1150
 y, 799, 1150
 z, 799
- Elemento(s)
 de área, 333
 de un conjunto, 1140
 de un cono, 1183
 de una sucesión, 648
 de volumen, 381
- Elipse(s), 1183–1192, 1269
 centro de una, 1184
 definición de, 1184
 degenerada, 1189
 ecuación(es) de una, 1184
 formas estándar de las, 1187
 eje
 mayor de una, 1184
 menor de una, 1184
 principal de una, 1184
 excentricidad de una, 1190
 focos de una, 1184
 vértices de una, 1184
- Elipsoide, 850
 de revolución, 849
- Elíptico(a)
 cilindro, 846
 cono, 855
 hiperboloide
 de dos hojas, 851
 de una hoja, 851
 integral, 751
 paraboloides, 853
- Energía
 cinética, 1106
 ley de conservación de la, 1107
 potencial, 1105
- Enteros. Véase Números enteros.
- Epicicloide, 785
- Ergio, 530
- Error
 de redondeo, 594
 para una serie infinita, 711
 de truncado, 594
- Escalar, 795
 campo, 1082
 magnitud, 787
 multiplicación, de vectores, 794
- Escalar (*continúa*)
 producto, 811
 proyección, de un vector sobre otro, 815
- Esfera, 803, 851
 centro de una, 803
 forma
 centro-radio de la ecuación de una, 803
 general de la ecuación de una, 803
 radio de una, 803
- Esteroides, 851
 oblatos, 851
 prolato, 851
- Espacio
 vectorial
 dimensión de un, 796
 real, 795
 numérico
 n-dimensional (R^n), 914
 tridimensional (R^3), 799
- Espiral(es), 761, 764
 de Arquímedes, 761
- Euler, Leonhard**, xxvii, 4, 438
 número e de, 438
- Excentricidad
 de una cónica, 774
 de una elipse, 1190
 de una hipérbola, 1199
- Exponente real, definición de, 437
- Exponencial
 crecimiento, 457
 decrecimiento, 457
 función
 de base a , 448
 derivada de la, 449
 integral de la, 449
 de densidad, 624
 natural, 437
 derivada de la, 441
 integral de la, 442
- Extremo(s)
 absoluto(s) de una función, 202
 aplicaciones que involucran un, 207–215, 266–275
 de dos variables, 990
 de un intervalo, 1144
 libres, problemas con, 1004
 relativos, 198
 criterio de la primera derivada para, 225
 criterio de la segunda derivada para, 238, 994
 de una función, 198
 de dos variables, 990
 restringidos, problemas con, 1004
- Factor
 de amortiguamiento, 445
 de multiplicidad p , 1219
 p -múltiple, 1219
- Familia de funciones
 de dos parámetros, 322
 de un parámetro, 320

Fermat, Pierre de, xxvii

Fluido incompresible, 1115

Flujo de un campo vectorial, 1116

Foco(s)

de una cónica, 775

de una elipse, 1184

de una hipérbola, 1192

de una parábola, 1168

Forma(s)

cerrada de una integral indefinida, 587

centro-radio de la ecuación de una

circunferencia, 1175

esfera, 803

de intersección de la ecuación de un plano, 832

de Lagrange del residuo para un polinomio de Taylor, 640

general de la ecuación de una

circunferencia, 1175

esfera, 803

indeterminadas, 604–618

integral del residuo para un polinomio de Taylor, 646

pendiente-intersección de la ecuación de una recta, 1162

punto-pendiente de la ecuación de una recta, 1161

Fórmula(s)

de álgebra, 1259

de geometría, 1260

analítica, 1264–1274

de la distancia, 926, 1152, 1264

de Maclaurin, 640

de reducción, 552

de Taylor, 639

aproximaciones polinomiales mediante la, 639–647

con forma de Lagrange para el residuo, 640

con forma integral para el residuo, 646

de trigonometría, 1261

hiperbólica, 1263

del punto medio, 802, 1152, 1264

para integración por partes, 547

para rotación de ejes, 1211

prismoidal, 603

Fracción(es), 1139

impropia, 1217

parciales, 1216–1222

propia, 1217

racionales, 1216

Frenet, Jean-Frederic, 884

sistema de referencia de, 884

Frontera de una región, 996

Fuente de un fluido, 1116

Fuerza ejercida por la presión de un líquido, 536–542

definición de, 538

Función(es)

algebraica(s), 16

diferenciación de, 123–132

antiderivada de una, 297

armónica, 1087

cociente de, 12

como modelos matemáticos, 20–28

compuesta, 13, 916

Función(es) (compuesta) (*continúa*)

continuidad de una, 77

de dos variables, 916

de n variables, 916

derivada de una, 162–172

límite de una, 77

vectorial, 868

constante, 15

continua, 67, 936

en una bola abierta, 939

continuamente diferenciable, 959

continuidad de una

compuesta, 77

en un intervalo

abierto, 78

cerrado, 79

en un número, 67–76

en una bola abierta, 939

por la derecha, 78

por la izquierda, 78

vectorial, 869

contradominio de una, 4, 914

cosecante, 1204

derivada de la, 156

hiperbólica, 491

derivada de la, 492

integral de la, 434

inversa, 480

derivada de la, 481

coseno, 1202

derivada de la, 154

hiperbólico, 490

derivada de la, 490

integral de la, 493

inverso, 495

derivada de la, 497

integral de la, 303

inverso, 473

derivada de la, 475

cotangente, 1204

derivada de la, 155

hiperbólica, 491

derivada de la, 492

inversa, 495

derivada de la, 497

integral de la, 433

inversa, 479

derivada de la, 480

creciente, 223

cuadrática, 16

cúbica, 16

curvas de nivel de una, 918

de Bessel, 738

de costo

marginal, 148

promedio, 147

total, 147

Función(es) (continúa)

- de densidad
 - de probabilidad, 624
 - normal estandarizada, 466
 - exponencial, 624
- de dos parámetros, familia de, 322
- de ingreso
 - marginal, 149
 - total, 148
- de más de una variable, 914–926
 - límites y continuidad de, 926–942
- de n variables, 914
- de producción, 919
- de un parámetro, familia de, 320
- decreciente, 223
- definición de, 3, 914
- definida a trozos, 7
- derivada
 - de una, 104
 - numérica de una, 119
 - total de una, 967
- diferencia de, 12
- diferenciable, 109, 956, 961
 - continuamente, 959
 - de dos variables, 956
 - de n variables, 961
 - en un intervalo abierto, 109
 - infinitamente, 718
- discontinua, 67, 936
- dominio de una, 4, 914
- escalón unitario. Véase Función salto unitario.
- exponencial
 - de base a , 448
 - derivada de la, 449
 - integral de la, 449
 - de densidad, 624
 - natural, 437–447
 - aplicaciones de la, 456–469
 - definición de la, 437
 - derivada de la, 441
 - integral de la, 442
- extremos absolutos de una, 202, 990
- gradiente de una, 978, 982
- gráfica de una, 6, 917, 922
- hiperbólicas, 490–502
- identidad, 16
- impar, 16
- infinitamente diferenciable, 718
- integrable, 340, 1029
- inversa de una, 407
- límite(s)
 - al infinito de, 257–268
 - bilaterales de, 50
 - de una, 38
 - de más de una variable, 928
 - infinitos de, 55–67
 - laterales de, 49–55
 - por la derecha de, 50
 - por la izquierda de, 50

Función(es) (continúa)

- lineal, 15
- logarítmica
 - de base a , 450
 - derivada de la, 452
 - natural, 418–429
 - definición de la, 420
 - derivada de la, 420
- longitud de arco, 514
- máximo entero, 9
- monótona, 232
- normal estandarizada de densidad de probabilidad, 466
- operaciones con, 12
- par, 16
- periódica, 1203
- periodo de una, 1203
- polinomial, 16, 917
- potencia, 172
- potencial, 1084
- producto de, 12
- racional, 16
- salto unitario, 11
- secante, 1204
 - derivada de la, 155
 - hiperbólica, 491
 - derivada de la, 492
 - integral de la, 434
 - inversa, 477
 - derivada de la, 478
- seno, 1202
 - derivada de la, 153
 - hiperbólico, 490
 - derivada de la, 490
 - integral de la, 493
 - inverso, 495
 - derivada de la, 497
 - integral de la, 303
 - inverso, 470
 - derivada de la, 472
- signo, 11
- suave (lisa o uniforme), 510
- sucesión, 648
- suma de, 12
- superficies de nivel de una, 922
- tangente, 1204
 - derivada de la, 155
 - hiperbólica, 491
 - derivada de la, 492
 - inversa, 495
 - derivada de la, 497
- integral de la, 433
- inversa, 475
 - derivada de la, 477
- trascendentes, 403
- trigonométricas, 1201–1208
 - continuidad de las, 85–93
 - de un ángulo, 1205
 - derivadas de las, 152–162
 - integrales de las, 303, 433–435

Función(es) (trigonométricas) (*continúa*)

- inversas, 469–484
- integrales que producen, 485–490
- uno a uno, 405
- utilidad, 1009
- valor absoluto, 9
- valor de, 4
- valor promedio de una, 358
- vectorial(es), 865–912
 - Cálculo de las, 872–882
 - continuidad de las, 869
 - definición de, 865
 - derivada de las, 873
 - diferenciable, 874
 - integral indefinida de, 877
 - límites de, 869

Galerías del susurro, 1186

Gas ideal, ley del, 947

Gauss, Karl, 1114

- teorema de la divergencia de, 1114, 1128
- en el plano, 1114

Generatriz

- de un cilindro, 846
- de un cono, 1183

Geometría

- analítica, 1150
 - fórmulas de, 1264–1274
- diferencial, 872
- fórmulas de, 1260

Gradiente de una función, 978, 982

Grado de una función polinomial, 917

Gráfica(s)

- de una ecuación
 - en R^2 , 1153
 - en R^3 , 802
- de una función, 6, 917, 922
- ecuación de una, 1161
- generadas por computadora, 855, 921
- pendiente de una, 102
- polar, 754

Graficadores matemáticos, 855

Gravedad, aceleración debida a la, 324

Green, George, 1108

- teorema de, 1108–1120
- enunciado del, 1108

Gudermann, Christoph, 507

Gudermanniano, 507

Hélice, 866

- circular, 866
- cónica, 1027

Hermit, Charles, 438

Hessiano (discriminante), 994

Hipérbola(s), 1192–1200, 1270

- asíntotas de una, 1195
- centro de una, 1193
- definición de, 1192
- degenerada, 1198

Hipérbola(s) (*continúa*)

- ecuación(es) de una, 1193
- formas estándar de las, 1197
- eje
 - conjugado de una, 1193
 - principal de una, 1193
 - transverso de una, 1193
- equilátera, 1195
- excentricidad de una, 1199
- focos de una, 1192
- ramas de una, 1193
- rectángulo auxiliar de una, 1195
- unitaria, 1195
- vértices de una, 1193

Hiperboloide

- de revolución, 849
- elíptico
 - de dos hojas, 851
 - de una hoja, 851

Hipocicloide, 746

Hipótesis de un teorema, 1139

Hooke, Robert, 532

ley de, 532

Idéntico aditivo, 794, 810

Identidad(es)

- de Jacobi, 845
- de polarización, 821
- pitagórica fundamental, 1203, 1261
- pitagóricas, 1205, 1261
- trigonométricas fundamentales, 1205, 1261

Impropia(s)

- fracción, 1217
- integrales, 618–632

Incremento

- de una función
 - de dos variables, 955
 - de n variables, 960
- de x , 101
- de y , 106

Independientes, vectores, 795, 798, 810

Índice

- de una suma, 329
- de utilidad, 1009

Inercia, momento de, 1043, 1044

Infinito

- límites al, 249–260
- negativo, 57, 1144
- positivo, 56, 1144

Ingreso

- función de
 - marginal, 149
 - total, 148
- marginal, 149

Integración, 366. *Véase también* Integral(es).

- constante de, 366
- de funciones
 - exponenciales, 442, 450

Integración (de funciones) (*continúa*)

- rationales, 572–583
 - de seno y coseno, 585
 - de potencias de funciones trigonométricas, 555–565
 - límites de, 341
 - inferior, 341
 - superior, 341
 - mediante sustitución trigonométrica, 565–572
 - múltiple, 1021–1076
 - numérica, 591–603
 - por partes, 545–554
 - fórmula para, 547
 - región de, 1028
 - signo de, 341
 - término a término de series de potencias, 712
- Integral(es). *Véase también* Integración
- criterio de la, 680
 - de línea, 1089–1097
 - definición de, 1092, 1093, 1095
 - independiente de la trayectoria, 1098–1108
 - teorema fundamental para las, 1100
 - de superficie, 1121–1128
 - definida, 338–351,
 - definición de, 341
 - doble(s), 1028–1041
 - aplicaciones de las, 1041–1052
 - definición de, 1029
 - en coordenadas polares, 1052–1060
 - elíptica, 751
 - impropias, 618–632
 - con una discontinuidad infinita
 - en el límite inferior, 628
 - en el límite superior, 629
 - en un número interior, 629
 - con límites de integración infinitos, 618–627
 - convergente, 619
 - divergente, 619
 - indefinida, 341, 366
 - en forma cerrada, 587
 - de una función vectorial, 877, 878
 - iterada, 1034
 - múltiples, 1028
 - numérica (NINT), 344
 - que producen
 - funciones trigonométricas inversas, 485–489
 - funciones logarítmicas naturales, 430–436
 - signo de, 341
 - simple, 1028
 - teorema del valor medio para, 356
 - trigonométricas, 555–565
 - triple(s), 1061–1066
 - definición de, 1061
 - en coordenadas cilíndricas, 1067–1074
 - en coordenadas esféricas, 1070

Integrando, 341

Intensidad (o módulo) de un vector, 788, 805

Intercepción

- x de un plano, 824
- y de un plano, 824

Intercepción (*continúa*)

- y de una recta, 1162
- z de un plano, 824

Interés compuesto continuamente, 462

Intersección de conjuntos, 1140

Intervalo

- abierto, 1143
- cerrado, 1144
- de convergencia de una serie de potencias, 704
- extremos de un, 1144
- partición de un, 339
- semiabierto por la derecha, 1144
- semiabierto por la izquierda, 1144

Invariante, 1213

Inversa de una función, 407

Isotermas, 919

Joule (unidad de trabajo), 530

Lado(s)

- de un rectángulo, 1028
- inicial de un ángulo, 1201
- recto (*latus rectum*) de una parábola, 1169
- terminal de un ángulo, 1201

Lagrange, Joseph Louis, xxvii, 106, 640

- forma de, del residuo para un polinomio de Taylor, 640
- multiplicadores de, 1004–1013
- notación de, para una derivada, 106

Lámina

- centro de masa de una, 524, 1042
- definición de, 522
- homogénea, 522
- masa total de una, 524, 1042
- momento de masa de una, 524, 1042

Laplace, Pierre Simon, marqués de, 1087

ecuación de, 953, 1087

Laplaciano, 1087

Leibniz, Gottfried Wilhelm, xxvii, 106, 360, 684

notación de, para una derivada, 106

Lemniscata, 761, 764

Ley(es)

- asociativas para vectores, 810
- conmutativas para vectores, 810
- de acción de masas, 579
- de Boyle, 150
- de conservación de la energía, 1107
- de crecimiento natural, 456
- de decrecimiento natural, 456
- de enfriamiento de Newton, 463
- de Hooke, 532
- de refracción de Snell, 821
- del gas ideal, 947
- del paralelogramo, 794, 821
- distributivas para vectores, 810

Libby, Willard, 468Limaçon. *Véase* Caracoles.

Límite(s)

- al infinito, 249–260
- bilateral, 50

- Límite(s) (*continúa*)
 criterio de comparación por paso al, 674
 de una función, 38
 de dos variables, 928
 de n variables, 928
 vectorial, 869
 de una sucesión, 650
 de una suma de Riemann, 340
 para una función de dos variables, 1029
 inferior
 de integración, 341
 de una suma, 329
 infinitos, 55–67
 laterales, 49–55
 por la derecha (o lateral derecho), 50
 por la izquierda (o lateral izquierdo), 50
 superior
 de integración, 341
 de una suma, 329
- Linealmente
 dependientes, vectores, 799
 independientes, vectores, 795
- Localización acústica, 1199
- Longitud de arco
 como parámetro, 885
 de la gráfica de una función, 509
 de una curva de R^3 , 880
 de una curva plana, 748
 de una gráfica polar, 766
 función, 514
- L'Hôpital, Guillaume François, marqués de, 604
 regla de, 604, 609, 612, 613
- Maclaurin, Collin, 640
 fórmula de, 640
 polinomio de, 640
 serie de, 719
- Magnitud(es)
 escalar, 787
 vectoriales, 787
- Mapa de contornos, 918
- Marginal
 concepto de variación, 147
 costo, 148
 función
 de costo, 148
 de ingreso, 149
 ingreso, 149
- Masa, 516
 centro de, de una lámina, 524, 1042
 de una barra, 519
 total de una lámina, 524, 1042
 momento de, 517, 522
 de una barra, 520
 de una lámina, 524, 1042
 total, 522
- Mathematica (software), 867
- Máxima cota inferior de una sucesión, 655
- Máximo, valor,
 absoluto, 201
 de una función de dos variables, 990
 de una función, 198–207, 990–1003
 en un intervalo, 201
 relativo, 198
 de una función de dos variables, 990
- Mediana de un triángulo, 1157
- Medida, 333
 en radianes, 1201
- Método
 de aproximación de Newton, 275–278
 de capas cilíndricas para calcular el volumen
 de un sólido, 391–397
 de mínimos cuadrados, 998
 de multiplicadores de Lagrange, 1004
- Mínima cota superior de una sucesión, 655
- Mínimo, valor,
 absoluto, 201
 de una función de dos variables, 990
 de una función, 198–207, 990–1003
 en un intervalo, 201
 relativo, 198
 de una función de dos variables, 990
- Modelos matemáticos, las funciones como, 20–28
- Módulo (o intensidad) de un vector, 788, 805
- Momento
 de inercia, 1043
 de masa, 517, 522
 de una barra, 520
 de una lámina, 524, 1042
 polar de inercia, 1045
- Monopolio, condiciones de, 274
- Monótona
 función, 224
 sucesión, 653
- Movimiento
 armónico
 amortiguado, 445
 simple, 168
 circular uniforme, 909
 curvilíneo, 872–897
 de un proyectil, 904–907
 rectilíneo, 132–145, 319–326
- Multiplicación, 1139
 cruz, 834
 escalar, 793
 por un escalar, 793
 vectorial, 834
 Multiplicadores de Lagrange, 1004–1013
- n -ésima derivada, 130
- NDER (derivada numérica), 119
- Negativo, 1139
 de un vector, 792, 810
- Newton (unidad de fuerza), 516
- Newton, Sir Isaac, xxvii, 106, 275, 360
 ley de enfriamiento de, 463
 método de aproximación de, 275–278

- NINT (integral numérica), 344
- Norma de una partición, 340, 1028, 1067
- Normal
- componente, del vector aceleración, 901
 - plano, 884
 - recta
 - a una gráfica, 103
 - a una superficie, 986
 - vector, 822
 - a un plano, 822
 - a una superficie, 985
 - inferior unitario, 1124
 - saliente unitario, 1113, 1126
 - superior unitario, 1124
 - unitario, 882
- Notación
- de Lagrange para la derivada, 106
 - de Leibniz para la derivada, 106
 - por construcción de conjuntos, 1140
 - sigma, 329
- Número(s)
- crítico, 200
 - de Euler (e), 438
 - decimales
 - finitos, 1139
 - infinitos no periódicos, 1139
 - infinitos periódicos, 1139
 - directores de una recta, 828
 - enteros, 1139
 - irracionales, 1139
 - racional, 1139
 - reales, 1139
 - trascendente, 438
- Ocho identidades trigonométricas fundamentales, 1205
- Octantes, 800
- Operaciones inversas, 297
- Orden de una ecuación diferencial, 319
- Ordenada, 1150
- al origen, 1162
- Origen, 799, 1142, 1150
- Papuss de Alejandría**, 528
- teorema de, 528
- Part(es) ordenado(s), 3, 1150
- Parábola(s), 1154, 1168–1172, 1267, 1268
- definición de, 1168
 - degenerada, 1209
 - directriz de una, 1168
 - eje de una, 1169
 - ecuación(es) de una, 1169, 1171
 - forma estándar de las, 1179
 - foco de una, 1168
 - lado recto de una, 1169
 - vértice de una, 1169
- Paraboloide
- de revolución, 849
 - elíptico, 853
 - hiperbólico, 853
- Paralelepípedo rectangular, 381
- Paralelogramo, ley del, 791, 821
- Paralelos(as)
- planos, 825
 - rectas, 1163
 - vectores, 813
- Parámetro(s), 740
- directores, 828
 - familia de funciones de dos, 322
 - familia de funciones de un, 320
- Partición
- cilíndrica, 1067
 - de un intervalo, 339
 - regular, 342
 - de una región, 1028, 1062
 - esférica, 1070
 - norma de una, 339, 1028, 1067
- Pascal, Blaise**, 537
- principio de, 537
- Pendiente
- de la recta tangente a la gráfica de una función, 102
 - de una gráfica, 102
 - de una recta, 1159
- Periodo de una función, 1203
- Perpendiculares
- planos, 825
 - rectas, 1165
 - vectores, 814
- Plano(s), 822
- ángulo entre dos, 825
 - coordenados, 799
 - de proyección, 832
 - de una recta, 832
 - definición de, 822
 - ecuación de un, 822
 - normal, 884
 - numérico, 1150
 - osculador, 884
 - paralelos, 825
 - perpendiculares, 825
 - rectificador, 884
 - tangente, 986
- Polar
- ecuación, 754
 - eje, 752
- Polinomio
- de Maclaurin, 640
 - de Taylor, 640
- Polo, 752
- Posición estándar de un ángulo, 1201
- Preparación para el estudio del cálculo, xxix
- Presión de un líquido, fuerza ejercida por la, 536–542
- Primer
- momento, 1043
 - teorema fundamental del Cálculo, 362
- Primera derivada, 130
- criterio de la, para extremos relativos, 225
- Principio de Pascal, 537

- Problemas con extremos
 libres, 1004
 restringidos, 1004
- Productividad marginal
 de la mano de obra, 1017
 de la maquinaria, 1017
- Producto, 1139
 de funciones, 12
 de un escalar por un vector, 793, 794
 de vectores, 811–833, 833–845
 cruz, 833–845
 definición de, 833
 escalar, 811
 interior, 811
 punto, 811–833
 definición de, 811
 triple, escalar, 837
 triple, vectorial, 837
 vectorial, 834
- Proyección
 escalar de un vector sobre otro, 815
 vector, 816
- Punto(s), 1150
 colineales, 1164
 crítico, 992
 de acumulación, 931
 de inflexión, 233
 de R^3 , 799
 de R^n , 914
 inicial, 787
 producto, 811–833
 silla, 993
 terminal, 787
 unidad, 1142
- Radián(es)
 hiperbólico, 501
 medida en, 1201
- Radio
 de convergencia de una serie de potencias, 704
 de curvatura, 893
 de giro, 1046
 de una circunferencia, 1173
 de una esfera, 803
- Ramas de una hipérbola, 1193
- Rapidez de una partícula, 134, 898
- Razón de cambio (o tasa de variación)
 derivada como, 145–152
 instantánea, 145
- Recíproco, 1139
- Recta(s), 1158–1168
 cruzantes (u oblicuas), 831
 de regresión, 998
 ecuación(es) de una, 1161, 1162, 1163, 1266
 en R^3 , 827–831
 forma pendiente-intercepción de la, 1162
 forma punto-pendiente de la, 1161
 normal
 a una gráfica, 103
 a una superficie, 986
- Recta(s) (*continúa*)
 numérica real, 1143
 paralelas, 1163
 pendiente de una, 1159
 perpendiculares, 1165
 polar, 752
 secante, 101
 tangente
 a la gráfica de una función, 102
 a una curva en R^3 , 987
 pendiente de la, 102
- Rectángulo(s)
 curvados, 1052
 de inspección, 921
 auxiliar de una hipérbola, 1195
- Reflexión
 de un punto, 409
 de una gráfica, 409
- Región
 acotada, 996
 cerrada, 996
 de integración, 1028
 rectangular
 abierta, 1028
 cerrada, 1028
- Regla(s)
 de la cadena, 164, 965
 general, 968
 para antiderivación, 311
 para funciones
 de más de una variable, 965–975
 vectoriales, 876
 de diferenciación
 de la función potencia para exponentes racionales, 174
 de una constante, 123
 para el cociente, 128
 para el producto, 126
 para el producto de una función por una constante, 124
 para la suma, 125
 para potencias con exponentes
 enteros
 negativos, 129
 positivos, 123
 racionales, 174
 reales, 443
 de L'Hôpital, 604, 609, 612, 613
 de Simpson, 598
 del trapecio, 593
 parabólica, 596
- Regladura de un cilindro, 846
- Representación
 de posición de un vector, 788, 805
 de un vector, 787
- Residuo
 de una serie después de k términos, 686
 para un polinomio de Taylor, 673
 forma de Lagrange del, 640
 forma integral del, 646
 para una serie infinita, 686

- Resonancia, 455
- Restricción (o condición lateral), 1004
- Resultante de dos vectores, 791
- Revolución
 - eje de, 383
 - elipsoide de, 849
 - hiperboloide de, 849
 - paraboloide de, 849
 - superficie de, 848
 - volumen de un sólido de, 383, 386, 393
- Rerdvente, 848
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard**, 339
 - suma de, 339, 1028
 - límite de una, 340, 1028
- Rolle, Michel**, 215
 - teorema de, 216
 - y teorema del valor medio, 215–223
- Rosa, 760
- Rotación de ejes, fórmulas para, 1211, 1271
- Rotacional de un campo vectorial, 1085
- Sección
 - cónica, 774, 1183
 - transversal de una superficie en un plano, 847
- Segmento rectilíneo dirigido, 787
- Segunda(s) derivada(s), 130
 - criterio de la, para extremos relativos, 238, 994
 - parciales, 949
- Segundo
 - momento, 1044
 - teorema fundamental del Cálculo, 364
- Semivida (o vida media), 459
- Serie(s) infinita(s)
 - absolutamente convergentes, 688
 - alternantes, 684
 - criterio de las, 684
 - armónica, 664
 - alternante, 688
 - binomial, 730
 - condicionalmente convergente, 688
 - convergente, 661
 - criterios sobre convergencia de,
 - de comparación, 672
 - por paso al límite, 674
 - de la integral, 680
 - de la raíz, 693
 - de la razón, 690
 - resumen de, 695–697
 - de Maclaurin, 719
 - de potencias, 698–707
 - definición de, 698
 - diferenciación término a término de, 708
 - integración término a término de, 712
 - intervalo de convergencia de, 704
 - radio de convergencia de, 704
 - de Taylor, 718–735
 - definición de, 719
 - de términos
 - constantes, 659–671
- Serie(s) infinita(s) (de términos) (*continúa*)
 - positivos, 671–683
 - y negativos, 684–695
 - definición de, 660
 - divergente, 661
 - geométrica, 660, 665
 - hiperarmónica, 678
 - p , 678
 - residuo de una, después de k términos, 686
 - suma de una, 661
 - sumas parciales de una, 660
 - términos de una, 660
- Simetría
 - de dos puntos, 1155
 - de una gráfica, 1156
 - criterios de, 1156
- Simpson, Thomas**, 596
 - regal de, 598
- Sistema
 - coordinado
 - cartesiano rectangular, 799, 1150
 - derecho, 799
 - de coordenadas
 - cartesianas rectangulares, 799, 1150
 - polares, 752
 - numérico real, 1139
- Slug, 516
- Sólido de revolución, 383
 - volumen de un, mediante el método de arandelas, 386
 - capas cilíndricas, 391–397
 - discos, 384
- Solución de una ecuación, 1153
 - diferencial, 319
 - completa, 320
 - general, 320
- Stirling, James**, 640
- Stokes, George**, 1118
 - teorema de, 1130
 - en el plano, 1118
- Subconjunto, 1140
- Sucesión
 - acotada, 655
 - convergente, 651
 - cota inferior de una, 654
 - máxima, 655
 - cota superior de una, 654
 - mínima, 655
 - creciente, 653
 - de sumas parciales, 660
 - decreciente, 653
 - definición de, 648
 - divergente, 651
 - elementos de una, 648
 - estrictamente creciente, 653
 - estrictamente decreciente, 653
 - finita, 647
 - función, 648
 - infinita, 647

- Sucesión (continúa)**
 límite de una, 650
 monótona, 653
- Suma(s), 1139**
 de funciones, 12, 868
 de Riemann, 339, 1028
 límite de una, 340, 1028
 de una serie infinita, 661
 de vectores, 790, 806
 índice de una, 329
 parciales
 de una serie infinita, 660
 sucesión de, 660
- Sumidero (o antifuerto) de un fluido, 1116**
- Superficie(s), 802, 846–859**
 área de una, 1048
 cuádrica, 850
 central, 852
 no central, 853
 de nivel, 922
 de revolución, 848
 equipotenciales, 982
 integrales de, 1121–1128
 isoterma, 982
 tangentes, 988
- Sustitución trigonométrica, integración mediante, 565–572**
- Sustracción, 1139**
- Tangente(s)**
 aproximación mediante la recta, 279
 función, 1204
 derivada de la, 155
 integral de la, 433
 inversa, 475
 derivada de la, 477
 plano, 986
 recta
 a la gráfica de una función, 102
 a una curva en R^3 , 987
 pendiente de la, 102
 superficies, 988
 vector, unitario, 882
- Tasa(s)**
 de variación (o razón de cambio)
 derivada como, 145–152
 instantánea, 145
 relacionadas, 182–190
 efectiva de interés anual, 462
- Taylor, Brook, 639**
 fórmula de, 639
 aproximaciones polinomiales mediante la, 639–647
 con forma de Lagrange del residuo, 640
 con forma integral del residuo, 646
 polinomio de, 640
 series de, 718–735
 definición de las, 719
- Teorema(s), 1139**
 conclusiones de un, 1139
 de estricción, 85
- Teorema(s) (continúa)**
 de existencia, 219, 656
 de Green, 1108–1120
 enunciado del, 1108
 de la función
 implícita, 985
 inversa, 412–414
 de la divergencia de Gauss, 1114, 1128
 en el plano, 1114
 de Pappus, 528
 de Pitágoras, 821, 1151, 1260
 para vectores, 821
 de Rolle, 216
 y teorema del valor medio, 215–223
 de Stokes, 1130
 en el plano, 1118
 de unicidad, 47, 219
 del binomio, 732
 del cero intermedio, 81
 del valor extremo, 203
 para funciones de dos variables, 996
 del valor intermedio, 80
 del valor medio, 217
 de Cauchy, 606
 para integrales, 356
 teorema de Rolle y, 215–223
 fundamental para integrales de línea, 1100
 fundamentales del Cálculo, 360–371
 primero, 362
 segundo, 364
 hipótesis de un, 1139
- Tercera derivada, 130**
- Términos de una serie infinita, 660**
- Torque, vector, 844**
- Trabajo, 530–536, 818**
 definición de, 531, 1091
- Trace la gráfica, xxix, 1154**
- Tractriz, 507, 572**
- Traslación de ejes, 1178–1182, 1271**
- Trazas de un plano, 824**
- Traza**
 de una circunferencia, 1173
 de una parábola, 1171
- Triedro móvil, 884**
- Trigonometría, fórmulas de, 1261**
- Triple producto**
 escalar, 837
 vectorial, 837
- Unión de conjuntos, 1140**
- Utilidad**
 función, 1009
 índice de, 1009
- Valor**
 absoluto, 1145
 función, 9
 de función, 4
 promedio (o medio) de una función, 357, 358

Valor (*continúa*)

máximo

- absoluto, 201
 - de una función de dos variables, 990
 - de una función, 198–207, 990–1003
- relativo, 198
 - de una función de dos variables, 990

mínimo

- absoluto, 201
 - de una función de dos variables, 990
 - de una función, 198–207, 990–1003
- relativo, 198
 - de una función de dos variables, 990

Van de Waals, ecuación de, 975

Variable(s), 4, 1140

- dependiente(s), 4, 915
- independiente(s), 4, 915
- intermedias, 968

Vector(es), 787, 795

- aceleración, 897
 - componente normal del, 901
 - componente tangencial del, 901
- adición de, 790, 807
- ángulo entre dos, 812
- ángulos directores de un, 789, 805
- binormal unitario, 884
- cero, 788, 805
- componentes de un, 787, 804, 805, 815
- cosenos directores de un, 805
- curvatura, 890
- de desplazamiento, 818
- de posición, 866
- diferencia de, 792, 807
- dirección de un, 788, 805
- en el plano, 787–799
- en el espacio tridimensional, 799–810
- existencia del idéntico aditivo para, 794
- existencia del idéntico multiplicativo escalar para, 794
- existencia del negativo de un, 794
- gradiente, 978, 982
- iguales, 787, 805
- independientes, 795, 798, 810
- leyes
 - asociativas para, 810
 - conmutativas para, 810, 811
 - distributivas para, 810, 811
- linealmente
 - dependientes, 799
 - independientes, 795, 798, 810
- módulo (o intensidad) de un, 788, 805
- multiplicación de, 811–833, 833–845
 - cruz, 834
 - escalar, 793
- negativo de un, 792, 810
- normal, 822, 985
 - inferior unitario, 1124
 - saliente unitario, 1113, 1126
 - superior unitario, 1124
 - unitario, 882

Vector(es) (*continúa*)

- ortogonales, 814
- paralelos, 813
- perpendiculares, 814
- producto cruz de, 833–845
 - producto punto (escalar o interior) de, 811–833
 - definición de, 811
- proyección, 816
- proyección escalar de un, sobre otro, 815
- representación de posición de un, 788, 805
- representación de un, 787
- resultante de dos, 791
- suma de, 790, 806
- sustracción de, 792, 806
- tangente unitario, 882
- teorema de Pitágoras para, 821
- torque, 844
- triple producto
 - escalar de, 837
 - vectorial de, 837
- unitario, 795
- velocidad, 897

Vectorial(es)

- análisis, 787
- campo(s), 1078, 1082
 - conservador (o conservativo), 1084
 - de estado estable, 1082
 - definición de, 1082
 - gradiente, 1084
- ecuación, 865
- espacio, 795
 - real, 795
 - base del, 795, 808
 - dimensión del, 796
- función(es), 865–912
 - Cálculo de las, 872–882
 - continuidad de las, 869
 - definición de, 865
 - derivada de las, 873
 - diferenciabilidad de las, 874
 - integral indefinida de, 877
 - límites de, 869
- magnitudes, 787
- triple producto, 837

Velocidad, 787

- campo de, 1082
- con respecto a la tierra, 792
- con respecto al aire, 792
- de una partícula, 134
- de salida, 904
- en el movimiento curvilíneo, 897
- instantánea, 134
- promedio, 133
- vector, 897

Vértice(s)

- de un ángulo, 1201
- de un rectángulo, 1028
- de una elipse, 1184
- de una hipérbola, 1193
- de una parábola, 1169

Vida media (o semivida), 459

Volumen

de un sólido, 382

de revolución mediante el método de arandelas, 386

capas cilíndricas, 391–397

discos, 384

definición del, 382

mediante el método de rebanado, 382

elemento de, 381

Wallis, John, xxvii

Weierstrass, Karl, xxvii

x,

coordenada, 799, 1150

x (*continúa*)

eje, 799, 1150

intersección, de un plano, 824

y,

coordenada, 799, 1150

eje, 799, 1150

intersección

de un plano, 824

de una recta, 1162

z,

coordenada, 799

eje, 799

intersección, de un plano, 824



BIBLIOTECA UTN



062402

BIBLIOTECA UTN



062402



ISBN 978-970-613-182-9



9 789706 131829