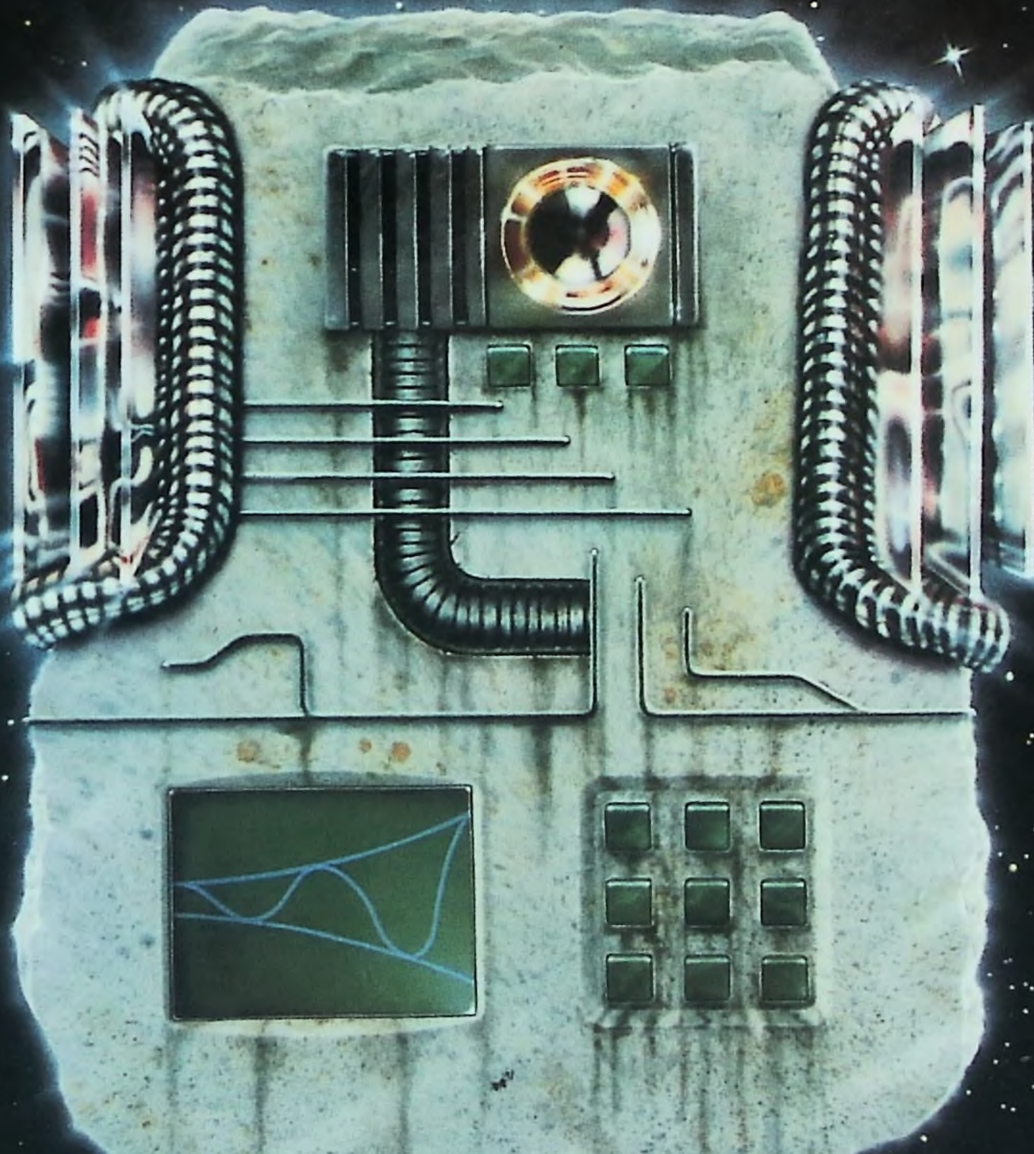
EC7
LEITHOLD



EL CÁLCULO - 7 ed.

Contrato 006-A-2018/423

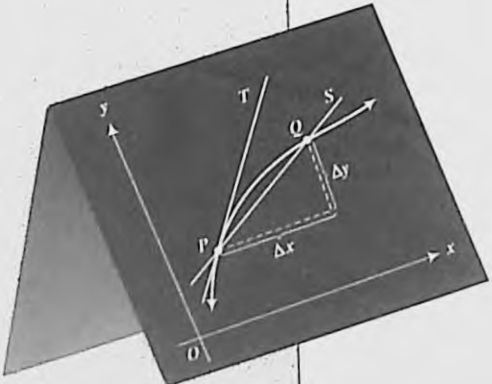
EL CÁLCULO

Traducción: Fidencio Mata González
Facultad de Ciencias, UNAM
Revisión técnica: M. en C. Claudia Patiño Román
Facultad de Ciencias, UNAM

EL CÁLCULO

7 ed.

Louis Leithold
Pepperdine University



OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford, el cual promueve los objetivos de excelencia en la investigación, el aprendizaje y la educación de la Universidad mediante publicaciones en todo el mundo. Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y en algunos otros países.

Publicado en México por
Oxford University Press México, S.A. de C.V.
Antonio Caso 142, Col. San Rafael, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.

EL CÁLCULO

Séptima edición en español publicada en 1998

Universitaria

ISBN 978-970-613-182-9
ISBN 970-613-182-5

Trigésimo segunda reimpresión

Traducido de la séptima edición en inglés de THE CALCULUS 7.

ISBN 0-673-46913-1

Se usaron tipos Times New Roman (8 pts.), Futura Bold (7, 11, 14 y 15 pts.), sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 68 g
Se terminó de imprimir en PrintQU, Sandra Núnez Córdova, Tomás Vázquez núm. 148, Col. Barrio San Pedro Iztacalco, C.P.08220, México, D.F.

Impreso en México

Junio de 2013

Créditos:
Autor: Louis Leithold
Traducción: Fidencio Mata González
Producción: Antonio Figueredo Hurtado
Imagen de portada: Dan Douke

Dan Douke, pintor del sur de California y actualmente profesor de arte en California State University de Los Ángeles, exhibe su obra regularmente en la Tortue Gallery, en Santa Mónica, y en O. K. Harris Works of Art en Nueva York.
El profesor Douke redactó la siguiente declaración de acuerdo con el cuadro reproducido en la cubierta:
"El enorme avance de la tecnología en la década final del siglo XX, alentada por lo utópico de la sociedad del Oeste que cree en un paraíso de información electrónica, motivó esta pintura especialmente creada para EC7, la cual surge directamente de mi trabajo reciente sobre objetos futuristas. En este cuadro que el trabajo tenga un aspecto extrañamente familiar, tal vez como parte de algo más grande, más poderoso y futurista, pero a la vez que parezca usado. El cuadro es de hecho una metáfora que representa el deseo del individuo de buscar y experimentar la adquisición del conocimiento."

A mi hijo Gordon Marc,
sus hijos Justin y Matthew,
y su abuelo David

CONTENIDO

PROLOGO xv

1 Funciones, límites y continuidad **1**

1.1 Funciones y sus gráficas 2

1.2 Operaciones con funciones y tipos de funciones 12

1.3 Funciones como modelos matemáticos 20

1.4 Introducción gráfica a los límites de funciones 28

1.5 Definición de límite de una función y teoremas de límites 38

1.6 Límites laterales 49

1.7 Límites infinitos 55

1.8 Continuidad de una función en un número 67

1.9 Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo 76

1.10 Continuidad de las funciones trigonométricas y teorema de estricción 85

Revisión del capítulo 1 93

2 Derivada y diferenciación **100**

2.1 Recta tangente y derivada 101

2.2 Diferenciabilidad y continuidad 109

2.3 Derivada numérica 118

2.4 Teoremas sobre diferenciación de funciones algebraicas y derivadas de orden superior 123

2.5 Movimiento rectilíneo 132

2.6 Derivada como tasa de variación 145

2.7 Derivadas de las funciones trigonométricas 152

2.8 Derivada de una función compuesta y regla de la cadena 162

2.9 Derivada de la función potencia para exponentes racionales y diferenciación implícita 172

2.10 Tasas de variación relacionadas 182

Revisión del capítulo 2 190

3 Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones 197

3.1 Valores máximos y mínimos de funciones 198

3.2 Aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado 207

3.3 Teorema de Rolle y teorema del valor medio 215

3.4 Funciones crecientes y decrecientes, y criterio de la primera derivada 223

3.5 Concavidad, puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada 231

3.6 Trazo de las gráficas de funciones y de sus derivadas 242

3.7 Límites al infinito 249

3.8 Resumen para el trazo de las gráficas de funciones 260

3.9 Aplicaciones adicionales sobre extremos absolutos 266

3.10 Aproximaciones mediante el método de Newton, de la recta tangente y de diferenciales 275

Revisión del capítulo 3 287

4 Integral definida e integración 296

4.1 Antiderivación 297

4.2 Algunas técnicas de antiderivación 310

4.3 Ecuaciones diferenciales y movimiento rectilíneo 319

4.4 Área 328

4.5 Integral definida 338

4.6 Teorema del valor medio para integrales 352

4.7 Teoremas fundamentales del Cálculo 360

4.8 Área de una región plana 372

4.9 Volúmenes de sólidos mediante los métodos de rebanado, de discos y de arandelas 381

4.10 Volúmenes de sólidos mediante el método de capas cilíndricas 391

Revisión del capítulo 4 397

5 Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas 403

5.1 Inversa de una función 404

5.2 Función logarítmica natural 418

5.3 Diferenciación logarítmica e integrales que producen funciones logarítmicas naturales 430

5.4 Función exponencial natural 437

5.5 Otras funciones exponenciales y logarítmicas 448

5.6 Aplicaciones de la función exponencial natural 456

5.7 Funciones trigonométricas inversas 469

5.8 Integrales que producen funciones trigonométricas inversas 485

5.9 Funciones hiperbólicas 490

Revisión del capítulo 5 503

6 Aplicaciones adicionales de la integral definida 508

6.1 Longitud de arco de la gráfica de una función 509

6.2 Centro de masa de una barra 516

6.3 Centro de masa de una lámina y centroide de una región plana 522

6.4 Trabajo 530

6.5 Fuerza ejercida por la presión de un líquido 536

Revisión del capítulo 6 542

7 **Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias** **544**

7.1 Integración por partes 545

7.2 Integrales trigonométricas 555

7.3 Integración de funciones algebraicas mediante sustitución trigonométrica 565

7.4 Integración de funciones racionales y crecimiento logístico 572

7.5 Integración mediante otras técnicas de sustitución y tablas 584

7.6 Integración numérica 591

7.7 Forma indeterminada 0/0 y teorema del valor medio de Cauchy 604

7.8 Otras formas indeterminadas 612

7.9 Integrales impropias con límites de integración infinitos 618

7.10 Otras integrales impropias 627

Revisión del capítulo 7 632

8 **Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas** **638**

8.1 Aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor 639

8.2 Sucesiones 647

8.3 Series infinitas de términos constantes 659

8.4 Series infinitas de términos positivos 671

8.5 Series infinitas de términos positivos y negativos 684

8.6 Resumen de criterios sobre la convergencia y divergencia de series infinitas 695

8.7 Series de potencias 698

8.8 Diferenciación e integración de series de potencias 707

8.9 Series de Taylor 718

8.10 Series de potencias para logaritmos naturales y serie binomial 727

Revisión del capítulo 8 735

9 **Ecuaciones paramétricas, curvas planas y gráficas polares** **739**

9.1 Ecuaciones paramétricas y curvas planas 740

9.2 Longitud de arco de una curva plana 747

9.3 Coordenadas polares y gráficas polares 752

9.4 Longitud de arco y área de una región para gráficas polares 765

9.5 Tratamiento unificado de las secciones cónicas y ecuaciones polares de las cónicas 774

Revisión del capítulo 9 782

10 **Vectores, rectas, planos y superficies en el espacio** **786**

10.1 Vectores en el plano 787

10.2 Vectores en el espacio tridimensional 799

10.3 Producto punto 811

10.4 Planos y rectas en R^3 822

10.5 Producto cruz 833

10.6 Superficies 846

Revisión del capítulo 10 860

11 **Funciones vectoriales** **864**

11.1 Funciones vectoriales y curvas en R^3 865

11.2 Cálculo de las funciones vectoriales 872

11.3 Vectores tangente unitario y normal unitario, y longitud de arco como parámetro 882

11.4 Curvatura 888

11.5 Movimiento curvilíneo 897

Revisión del capítulo 11 909

12 **Cálculo diferencial de funciones de más de una variable** **913**

12.1 Funciones de más de una variable 914

12.2 Límites y continuidad de funciones de más de una variable 926

12.3 Derivadas parciales 942

12.4 Diferenciabilidad y diferencial total 955

12.5 Regla de la cadena para funciones de más de una variable 965

12.6 Derivadas direccionales y gradientes 975

12.7 Planos tangentes y rectas normales a superficies 985

12.8 Extremos de funciones de dos variables 990

12.9 Multiplicadores de Lagrange 1004

Revisión del capítulo 12 1014

13 Integración múltiple 1021

13.1 Coordenadas cilíndricas y esféricas 1022

13.2 Integrales dobles 1028

13.3 Aplicaciones de las integrales dobles 1041

13.4 Integrales dobles en coordenadas polares 1052

13.5 Integrales triples 1061

13.6 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 1067

Revisión del capítulo 13 1074

14 Introducción al Cálculo de campos vectoriales 1077

14.1 Campos vectoriales 1078

14.2 Integrales de línea 1089

14.3 Integrales de línea independientes de la trayectoria 1098

14.4 Teorema de Green 1108

14.5 Integrales de superficie 1121

14.6 Teorema de la divergencia de Gauss y teorema de Stokes 1128

Revisión del capítulo 14 1135

A Apéndice: Temas de matemáticas previas al Cálculo 1138

A.1 Números reales y desigualdades 1139

A.2 Coordenadas y gráficas de ecuaciones 1150

A.3 Rectas 1158

A.4 Parábolas 1168

A.5 Circunferencias 1173

A.6 Traslación de ejes 1178

A.7 Elipses 1183

A.8 Hipérbolas 1192

A.9 Funciones trigonométricas 1201

A.10 Ecuación general de segundo grado en dos variables y rotación de ejes 1209

A.11 Fracciones parciales 1216

S **Secciones suplementarias** **1223**

Suplemento 1.5 1224

Suplemento 1.7 1231

Suplemento 1.10 1232

Suplemento 2.8 1233

Suplemento 4.5 1235

Suplemento 5.1 1237

Suplemento 8.2 1241

Suplemento 8.5 1242

Suplemento 8.8 1243

Suplemento 12.3 1247

Suplemento 12.4 1249

Suplemento 12.8 1250

Tablas y formularios **1253**

Tabla de derivadas 1253

Tabla de integrales 1253

Fórmulas de álgebra 1259

Fórmulas de geometría 1260

Fórmulas de trigonometría 1261

Fórmulas de trigonometría hiperbólica 1263

Fórmulas de geometría analítica 1264

Alfabeto griego 1274

Respuestas de los ejercicios impares **1275**

Índice **1345**

PRÓLOGO

" Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero sin excederse en ello."

Albert Einstein

El Cálculo 7 (de aquí en adelante abreviado como *EC7*) es una obra diseñada tanto para los cursos de especialización en matemáticas como para los estudiantes cuyo interés primario radica en la ingeniería, las ciencias físicas y sociales, o los campos no técnicos. La exposición está adecuada a la experiencia y madurez del principiante. Las explicaciones detalladas, los abundantes ejemplos desarrollados así como la gran variedad de ejercicios, continúan siendo las características distintivas del texto.

En ningún otro tiempo entre ediciones sucesivas han ocurrido tantos cambios en la enseñanza del Cálculo como en el periodo entre las ediciones sexta y séptima de este texto. Muchos de estos cambios son el resultado de la disponibilidad de la tecnología moderna en la forma de calculadora gráfica o graficadora manual. Algunos otros cambios se deben al movimiento denominado *reforma del Cálculo*. He invitado a seguir este movimiento observando el principio: REFORMA CON RAZÓN. Con el fin de apegarme a este principio, he aplicado las siguientes guías:

1. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, *no* para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas teóricos.
2. Las definiciones y teoremas deben establecerse formalmente, *no* informalmente.
3. Los estudiantes deben estar concientes de que las demostraciones de los teoremas son necesarias.
4. Cuando se presenta una demostración, debe ser bien motivada y cuidadosamente explicada, de modo que sea entendible para cualquiera que haya alcanzado un dominio promedio de las secciones anteriores del libro.
5. Cuando se establece un teorema sin demostración, la discusión debe aumentarse mediante figuras y ejemplos; en tales casos, debe enfatizarse el hecho de que lo que se presenta es un ejemplo ilustrativo de la proposición del teorema y *no* una demostración del mismo.
6. Debe darse importancia a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida real.
7. Debe destacarse la redacción en matemáticas.

Los catorce capítulos de *EC7* pueden clasificarse en dos partes: capítulos 1–9, en los que se estudian funciones de una variable y series infinitas; capítulos 10–14, en los que se tratan vectores y funciones de más de una variable. En *EC7* se han realizado cambios en las dos partes. En todo el libro se mantiene un sano equilibrio entre un estudio riguroso y un punto de vista intuitivo, incluso en las modificaciones.

Con objeto de alcanzar los objetivos planteados, se han incorporado las siguientes características:

GRAFICADORA "ACTIVA"

A lo largo de la presentación, *EC7* utiliza la calculadora gráfica o graficadora manual no sólo como un poderoso y fascinante instrumento para el aprendizaje, sino como un instrumento fundamental en la solución de problemas. Se ha integrado la graficadora directamente a la exposición de acuerdo a la filosofía que he aprendido en mis tres veranos con TICAP (Technology Intensive Calculus for Advanced Placement) la cual se resume como sigue:

1. Trabajar *analíticamente* (con papel y lápiz); después **apoyar** *numérica* y *gráficamente* (con la graficadora).
2. Trabajar *numérica* y *gráficamente*; después **confirmar** *analíticamente*.
3. Trabajar *numérica* y *gráficamente* debido a que otros métodos *no son prácticos* o *posibles*.

MODELOS MATEMÁTICOS Y PROBLEMAS VERBALES

Los modelos matemáticos de situaciones prácticas presentadas como problemas verbales surgen en diversos campos como física, química, ingeniería, administración, economía, psicología, sociología, biología y medicina. Las funciones como modelos matemáticos se introducen primero en la sección 1.3 y aparecen con frecuencia en el resto del texto. La sección 1.3 contiene sugerencias para obtener una función como modelo matemático paso a paso.

REDACCIÓN EN MATEMÁTICAS

A fin de completar la solución de cada ejemplo de un problema verbal, se presenta una *conclusión* que responde a las preguntas de éste. El estudiante debe redactar una conclusión semejante, que consista en una o más oraciones completas, para cada ejercicio similar. Al final de cada grupo de ejercicios hay uno o dos de redacción los cuales pueden preguntar sobre *cómo* o *por qué* funciona un procedimiento determinado, o bien, pueden pedirle al estudiante que *describa*, *explique* o *justifique* un proceso particular.

EJERCICIOS

Los ejercicios, revisados de las ediciones anteriores y ordenados por grados de dificultad, proporcionan una gran variedad de tipos de problemas que van desde cálculos y aplicaciones hasta problemas teóricos para la calculadora y ejercicios de redacción, como los mencionados anteriormente. Éstos aparecen al final de cada sección y como ejercicios de repaso al final de cada capítulo.

EJEMPLOS Y EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los *ejemplos*, cuidadosamente seleccionados, habilitan a los estudiantes en la resolución de los ejercicios, y además sirven como modelos para sus soluciones. Se utiliza un *ejemplo ilustrativo* a fin de mostrar un concepto, definición o teorema particular; es un prototipo de la idea expuesta.

PROGRAMA DE ARTE VISUAL (FIGURAS)

Todas las figuras se han vuelto a trazar para *EC7*. Las gráficas trazadas en la graficadora se muestran en una pantalla de graficadora enmarcada por un borde de color más oscuro a diferencia de las gráficas dibujadas a mano. Todas las figuras tridimensionales se han generado mediante computadora con el fin de obtener precisión matemática. Estas figuras, que son más vívidas que en las ediciones anteriores, fueron creadas con la ayuda de *Matemática*® y *Adobe Illustrator*®

ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Cada capítulo comienza con una introducción titulada *VISIÓN PRELIMINAR*. Al final de cada capítulo se muestra una lista de sugerencias para su revisión. Juntos, estos aspectos sirven como una reseña, de principio a fin del capítulo, cuando el estudiante se prepara para un examen.

DESCRIPCIÓN DE CADA CAPÍTULO

Capítulo 1 Funciones, límites y continuidad

Los tres temas del título de este capítulo conforman la base de cualquier primer curso de Cálculo. Se exponen todos los teoremas de límites incluyendo algunas demostraciones en el texto, mientras que otras se esbozan en los ejercicios. La sección 1.3, nueva en esta edición, presenta las funciones como modelos matemáticos anticipadamente de su uso posterior en aplicaciones. En consecuencia, estos modelos proporcionan al estudiante una vista preliminar de cómo se aplica el Cálculo en situaciones reales. La sección 1.4, también nueva, utiliza la graficadora para introducir el concepto de límite de una función.

Capítulo 2 Derivada y diferenciación

En la sección 2.1 se define la recta tangente a la gráfica de una función antes de estudiar la derivada, esto con el propósito de mostrar un avance de la interpretación geométrica de este concepto. Las aplicaciones físicas de la derivada en el estudio del movimiento rectilíneo se presentan sólo después de haber demostrado los teoremas sobre diferenciación, de modo que dichos teoremas pueden emplearse en estas aplicaciones. En la sección 2.7 se estudian las derivadas de las seis funciones trigonométricas y después se emplean como ejemplos para la presentación inicial de la regla de la cadena en la siguiente sección. La derivada numérica, tema nuevo en esta edición y presentado en la sección 2.3, se utiliza junto con la graficadora para aproximar derivadas y para trazar sus gráficas. En la sección 2.4 se simula el movimiento de una partícula sobre una línea recta.

Capítulo 3 Comportamiento de las funciones y sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

En este capítulo se presentan las aplicaciones tradicionales de la derivada que implican máximos y mínimos así como el trazado de una curva. Los límites al infinito y sus aplicaciones para determinar asíntotas horizontales se han cambiado a este capítulo donde se aplican a fin de dibujar gráficas. La graficadora se utiliza frecuentemente con el objeto de apoyar los resultados obtenidos de forma analítica así como para conjeturar propiedades de las funciones, las cuales se confirman después analíticamente. Un aspecto nuevo de esta edición está relacionado con los ejercicios, donde se le pide al estudiante que dibuje la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada y viceversa. En la sección final del capítulo se presenta la aproximación mediante la recta tangente junto con el método de Taylor y el de diferenciales.

Capítulo 4 Integral definida e integración

Las dos primeras secciones tratan sobre antiderivación (o antidiferenciación). Se utiliza el término antiderivación en lugar de *integración indefinida*, sin embargo, se conserva la notación estándar $\int f(x)\,dx$. Esta notación sugerirá que debe existir alguna relación entre integrales definidas y antiderivadas, pero no veo perjuicio alguno en lo anterior, en tanto la presentación proporcione un panorama teóricamente apropiado de la definición de la integral definida como un límite de sumas. Dichos límites se aplican primero para definir el área de una región plana y después se utilizan en la definición de la integral definida. La capacidad de la graficadora para aproximar el valor de una integral definida se presenta antes de la demostración del segundo teorema fundamental del Cálculo, utilizado para obtener valores de integrales analíticamente. Esta capacidad permite demostrar propiedades de la integral definida en una graficadora tal como se desarrollan. La sección 4.3, sobre ecuaciones diferenciales separables, presenta aplicaciones sobre el movimiento rectilíneo, donde el movimiento se simula en la graficadora. Otras aplicaciones de los conceptos de este capítulo incluyen el estudio completo del área de una región plana así como el volumen de sólidos, presentados posteriormente en la edición anterior. La sección 4.9 se inicia con el cálculo de volúmenes mediante el método de rebanado, se continúa con la determinación de volúmenes de sólidos de revolución mediante los métodos de discos y de arandelas, considerados como casos especiales del método de rebanado. En la sección 4.10 se determinan los volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de capas cilíndricas.

Capítulo 5 Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas

En la primera sección se tratan las funciones inversas, y las cinco secciones siguientes se dedican a las funciones logarítmica y exponencial. Primero se define la función logarítmica natural y después la función exponencial natural como su inversa. Este procedimiento permite dar un significado preciso de un exponente irracional de un número positivo. Posteriormente se define la función exponencial de base a, donde a es positivo. Las aplicaciones de estas funciones incluyen las leyes naturales de crecimiento y decaimiento, el crecimiento limitado implica la curva de aprendizaje, y la función de densidad de probabilidad normal estandarizada. Las tres últimas secciones se dedican a las funciones trascendentes (no algebraicas) restantes: las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas.

Capítulo 6 Aplicaciones adicionales de la integral definida

En este capítulo se presentan las aplicaciones de la integral definida, no sólo las técnicas de manipulación sino también los principios fundamentales involucrados. La longitud de arco, una aplicación geométrica, se trata en la sección 6.1. Las otras cuatro secciones están dedicadas a aplicaciones físicas, las cuales incluyen centro de masa de una barra y de regiones planas, trabajo y fuerza ejercida por la presión de un líquido. En cada aplicación, se motivan y explican intuitivamente las definiciones de los términos nuevos. Se han vuelto a escribir todas las secciones y se han agregado ejemplos, en algunos de ellos se utiliza la graficadora para aproximar el valor de la integral definida.

Capítulo 7 Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias

Las técnicas de integración constituyen uno de los aspectos más importantes de las operaciones del Cálculo. Estas técnicas se estudian en las primeras cinco secciones, tratadas en ocho en la edición anterior. Después de una motivación introductoria, se explican los fundamentos teóricos de cada uno de los métodos. El dominio de las técnicas de integración depende de los ejemplos, y se han utilizado como problemas ilustrativos que, seguramente, el estudiante enfrentará en la práctica. En la sección 7.4 se presentan otras dos aplicaciones de la integración: crecimiento logístico, que surge en economía, biología y sociología; y la ley química de acción de masas. En la sección 7.6 se estudian dos métodos numéricos para aproximar integrales definidas. Estos procedimientos son importantes debido a que resultan muy adecuados para el uso de computadoras y graficadoras. Los temas sobre aproximación de integrales definidas incluyen el establecimiento de teoremas acerca de las cotas para el error implicado en estas aproximaciones. Las cuatro secciones restantes, que tratan acerca de las formas indeterminadas e integrales impropias, se han reubicado en esta edición; preceden inmediatamente a los temas de series, en donde se aplican muchos de los resultados obtenidos. Las aplicaciones de las integrales impropias incluyen la función de densidad de probabilidad así como algunas otras relacionadas con geometría y economía.

Capítulo 8 Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas

Las secciones acerca de sucesiones y series se han considerado en un solo capítulo y no en dos como en la edición anterior. Todos los temas se incluyen, pero algunas de las discusiones se han acortado sin sacrificar la integridad matemática. Este capítulo es independiente y puede estudiarse en cualquier momento después de completar los primeros siete capítulos. La primera sección trata acerca de aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor. Esta fórmula se generaliza a la serie de Taylor en la sección 8.9. Las secciones 8.2–8.6 se han dedicado a las sucesiones y series infinitas de términos constantes, y en la sección 8.6 se presenta un resumen de los criterios de convergencia para series infinitas. En las secciones 8.7–8.10 se estudian las series de términos variables denominadas series de potencias. Los temas de este capítulo conducen por sí mismos a la incorporación de la graficadora, no sólo para facilitar el estudio sino que permite a los estudiantes examinar e investigar la convergencia o divergencia de una serie infinita y de aproximaciones polinomiales.

Capítulo 9 Ecuaciones paramétricas, curvas planas y gráficas polares

Los tres temas de este capítulo se han agrupado para completar el estudio del cálculo de una variable. Las dos primeras secciones tratan sobre ecuaciones paramétricas y curvas planas, constituyen un requisito previo para el estudio de vectores. En las dos secciones siguientes se estudian gráficas polares, mientras que en la sección final se presenta un tratamiento unificado de las secciones cónicas y las ecuaciones polares de las cónicas. La discusión de las secciones cónicas en coordenadas rectangulares ahora se estudian por lo general en un curso previo al Cálculo, en esta edición se tratan en el apéndice.

Capítulo 10 Vectores, rectas, planos y superficies en el espacio

En esta edición, los vectores bidimensionales y tridimensionales se estudian en el mismo capítulo y no en forma separada como en ediciones anteriores. En la sección 10.1 se definen los vectores en el plano. En la sección 10.2, antes de definir un vector tridimensional, se presenta el espacio numérico tridimensional, el cual se denota por R^3. En el capítulo también se proporciona una introducción vectorial a la geometría analítica sólida al estudiar, en la sección 10.4, rectas y planos en R^3, y superficies en la sección 10.6.

Capítulo 11 Funciones vectoriales

De igual manera que con los vectores en el capítulo 10, en este capítulo se estudian las funciones vectoriales tanto en el plano como en el espacio tridimensional. Las curvas en los dos espacios, definidas mediante una función vectorial o por medio de un conjunto de ecuaciones paramétricas, así como sus propiedades también se estudian simultáneamente. Las aplicaciones de este capítulo tratan acerca de geometría, física e ingeniería. En la sección 11.5, sobre movimiento curvilíneo, se utiliza la graficadora para simular en movimiento de un proyectil en un plano.

Capítulo 12 Cálculo diferencial de funciones de más de una variable

Los temas contenidos en este capítulo se han reunido y condensado de dos capítulos de las ediciones anteriores, otra vez sin afectar la integridad matemática. En las primeras cinco secciones se estudian límites, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad y la regla de la cadena para funciones de más de una variable. Las aplicaciones de estas secciones incluyen la determinación de tasas de variación y el cálculo de aproximaciones. La sección 12.6, sobre derivadas direccionales y gradientes, precede a una sección que muestra la aplicación del gradiente en la determinación de planos tangentes y rectas normales a superficies. Otras aplicaciones de las derivadas parciales se presentan en las dos últimas secciones y tratan sobre problemas de extremos y multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 13 Integración múltiple

El Cálculo integral de funciones de más de una variable, contenido en las secciones 13.2–13.6, es precedido por una sección en la que se estudian coordenadas cilíndricas y esféricas, reubicadas en esta edición, de modo que estén más cerca a los temas en que se aplican. Las integrales dobles de las funciones de dos variables se estudian en la sección 13.2 y en las dos secciones siguientes se aplican a la física, ingeniería y geometría.

Capítulo 14 Introducción al Cálculo de campos vectoriales

En las seis secciones de este capítulo final se presenta un estudio amplio del Cálculo vectorial. Este estudio incluye campos vectoriales, integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes. La presentación de estos temas es intuitiva y las aplicaciones son acerca de física e ingeniería.

Apéndice

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica, por lo común se estudian en cursos previos al Cálculo, ahora se presentan en el apéndice, dejando así el cuerpo principal del texto para temas estrictamente de Cálculo. Esta modificación tiene como consecuencia el hecho de que las palabras *con geometría analítica* no aparecen en el título de esta edición. Las secciones del apéndice pueden cubrirse en detalle, como un repaso o pueden omitirse por completo, dependiendo de la preparación de los estudiantes de cada grupo.

Secciones suplementarias

Las secciones suplementarias se encuentran después del apéndice; estas secciones contienen temas que pueden ser cubiertos u omitidos sin afectar la comprensión del material subsecuente. Estas secciones designadas mediante el número de la sección del cuerpo principal del texto, contienen discusiones teóricas y algunas de las demostraciones más difíciles.

LOUIS LEITHOLD

RECONOCIMIENTOS

REVISORES

Benita Albert, Oak Ridge High School
Daniel D. Anderson, University of Iowa
Richard Armstrong, Saint Louis Community College at Florissant Valley
Carole A. Bauer, Triton College
Jack Berman, Northwestern Michigan College
Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College
James F. Brown, Midland College
Phillip Clarke, Los Angeles Valley College
Charles Coppin, University of Dallas
Larry S. Dilley, Central Missouri State University
Peter Embalabala, Linclon Land Community College
Leon Gerber, Saint John's University
Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
William L. Grimes, Central Missouri State University
Kay Hodge, Midland College
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
John E. Kinikin, Arcadia High School
Stephen Kokoska, Bloomsburg University of Pennsylvania Ron Lancaster
Benny Lo, Ohlone College
Miriam Long, Madonna University
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Janet Mills, Seattle University
James M. Parks, State University of New York College at Potsdam
Terry Reeves, Red Rock Community College
William H. Richardson, Wichita State University
Ricardo A. Salinas, San Antonio College
Lillian Seese, Saint Louis Community College at Maramac
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Lawrence Small, Los Angeles Pierce College
James Smolko, Lakeland Community College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam
Anthony E. Vance, Austin Community College
Jan Vandever, South Dakota State University
Gerald L. White, Western Illinois University
Douglas Wilberscheid, Indian River Community College
Don Williams, Brazosport College
Andre L. Yandl, Seattle University

PREPARACIÓN DE SOLUCIONES Y RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Leon Gerber, Saint John's University, asistido por Samuel Gerber

REVISORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam

DISEÑO DE LA CUBIERTA

Dan Douke, cortesía de Tortue Gallery, Santa Mónica

Para estas personas, para el cuerpo técnico de HarperCollins College Publishers y todos los usuarios de las seis ediciones anteriores ofrezco mi más profundo reconocimiento. Deseo agradecer especialmente a Leon Gerber, Saint John's University, y Lawrence Small, Los Angeles Pierce College, por sus esfuerzos diligentes en la revisión del manuscrito en sus diferentes versiones antes de la publicación así como por sus contribuciones significativas a los ejercicios nuevos de esta edición. También agradezco a mi editor, Kevin Connors, HarperCollins College Publishers, por su firme dedicación, coraje y apoyo para este proyecto

L.L.

MATERIAL SUPLEMENTARIO PARA EL CÁLCULO*

Para el estudiante

An Outline for the Study of Calculus (**Un esbozo para el estudio del Cálculo**) por Leon Gerber, de Saint John's University y John Minnick, de DeAnza College.

Para ayudar a los estudiantes en su estudio de *EC7*, este manual, en tres volúmenes, contiene las soluciones detalladas paso a paso de todos los ejercicios cuyo número es divisible entre 4. Los manuales también contienen todos los teoremas y definiciones importantes así como exámenes simples con sus soluciones para cada capítulo.

Para el profesor

Instructor's Solutions Manual for THE CALCULUS 7 (**Manual de soluciones para el profesor**) por Leon Gerber, de Saint John's University.

Este manual, en dos volúmenes, contiene las soluciones para todos los ejercicios de *EC7*.

Test Generator/Editor with Quizmaster (**Generador de exámenes/Editor con Quizmaster**)

Este banco de exámenes computarizado está disponible en versiones para DOS y Macintosh, y puede trabajarse completamente en redes. El *Generador de Exámenes*, escrito para *EC7*, puede emplearse para seleccionar problemas y preguntas al elaborar exámenes ya preparados. El *Editor* permite a los profesores editar cualesquiera datos preexistentes o crear sus propias preguntas. *Quizmaster* permite a los instructores crear exámenes y cuestionarios del *Generador de Exámenes* y almacenarlos en discos de modo que puedan ser utilizados por los estudiantes en computadoras personales o en una red.

También está disponible un banco de exámenes impresos que incluye todos los problemas y preguntas del banco de exámenes computarizado.

Libros auxiliares de interés para estudiantes y profesores de Cálculo publicados por Oxford University Press, Harla, México

Estos materiales se encuentran listados en la tercera de forros de este libro.

* **N. del E.** Este material sólo está disponible en inglés. En un futuro próximo esta editorial tendrá el "Manual de resoluciones para el profesor".

ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CÁLCULO

Algunas de las ideas fundamentales del Cálculo se remontan a los antiguos matemáticos griegos del tiempo de **Arquímedes** (287-212 a.C.) así como a los trabajos de los primeros años del siglo XVII realizados por **René Descartes** (1596-1650), **Pierre de Fermat** ((1601-1665), **John Wallis** (1616-1703) e **Isaac Barrow** (1630-1677). Sin embargo, la invención del Cálculo se atribuye a **Sir Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos. Asimismo, otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII intervinieron en el desarrollo del Cálculo, algunos de ellos fueron: **Jakob Bernoulli** (1654-1705), **Johann Bernoulli** (1667-1748), **Leonhard Euler** (1707-1783) y **Joseph L. Lagrange** (1736-1813). No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX en que se establecieron los fundamentos de las nociones y de los procesos del Cálculo por matemáticos tales como **Bernhard Bolzano** (1781-1848), **Augustin L. Cauchy** (1789-1857), **Karl Weierstrass** (1815-1897) y **Richard Dedekin** (1831-1916).

PREPARACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL CÁLCULO

Aprender Cálculo puede ser una de las experiencias educacionales más estimulantes y excitantes. Para que esto sea así, usted debe iniciar su curso de Cálculo con el conocimiento de ciertos conceptos de matemáticas concernientes a álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica.

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica de especial importancia se presentan en las secciones A.1–A.11 del apéndice al final del libro. Las propiedades específicas de los números reales así como algunas notaciones básicas se presentan en la sección A.1. Debe familiarizarse con estos temas antes de iniciar el capítulo 1. Refiérase a las secciones A.2–A.8 y A.10 para revisar los temas de geometría analítica. En la sección A.9 se estudian las funciones trigonométricas. Tal vez necesite estudiar la sección A.11, donde se presentan las fracciones parciales, antes de tratar la sección 7.4 sobre integración de funciones racionales.

La visualización mediante gráficas juega un papel importante en el estudio del Cálculo. Estas gráficas se obtendrán en dos formas: a mano y mediante un dispositivo de graficación automático de alta velocidad como las graficadoras y computadoras con el *software* apropiado. Estos dispositivos funcionan de manera similar, pero para el estudiante resultará más práctico utilizar una graficadora que una computadora personal. En consecuencia, en el texto se empleará la graficadora.

Cuando se trate de una gráfica realizada a mano se usará la terminología *dibuje la gráfica*, y cuando deba emplear un dispositivo electrónico en su elaboración se indicará *trace la gráfica*. Las gráficas trazadas en una graficadora están representadas por figuras que muestran una pantalla de graficadora enmarcada por un rectángulo y las ecuaciones de las gráficas mostradas se indican en la parte inferior de la pantalla. Las graficadoras no son estrictamente automáticas debido a que requieren de un operador (una persona que las haga funcionar) que presione teclas específicas; sin embargo, como estas teclas dependen del fabricante y del modelo de la graficadora, deberá consultar el manual de funcionamiento para obtener información sobre cómo realizar operaciones específicas.

Con los conocimientos básicos preliminares, está usted preparado para iniciar su curso de Cálculo, que es el fundamento para muchas de las ramas matemáticas y para la mayoría de los conocimientos del mundo moderno.

EL CÁLCULO

Capítulo

1

Funciones, límites y continuidad

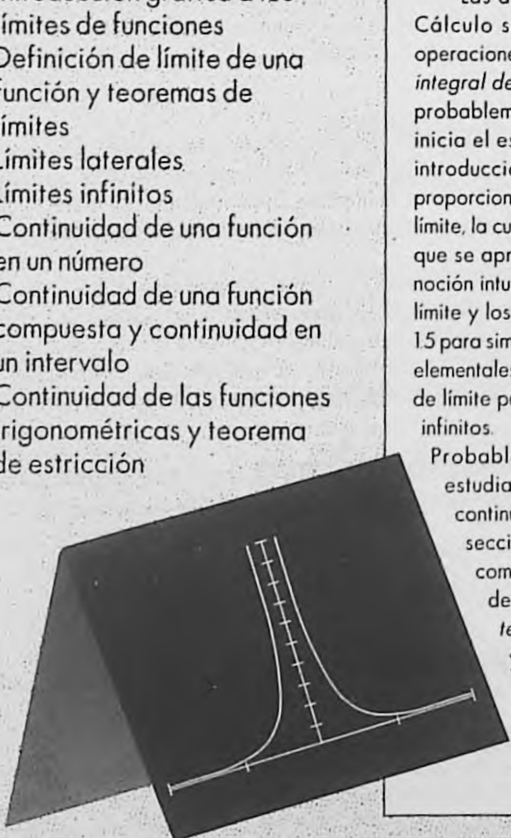
VISIÓN PRELIMINAR

1.1 Funciones y sus gráficas
1.2 Operaciones con funciones y tipos de funciones
1.3 Funciones como modelos matemáticos
1.4 Introducción gráfica a los límites de funciones
1.5 Definición de límite de una función y teoremas de límites
1.6 Límites laterales
1.7 Límites infinitos
1.8 Continuidad de una función en un número
1.9 Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo
1.10 Continuidad de las funciones trigonométricas y teorema de estricción

Indudablemente habrá tratado funciones en sus cursos anteriores de matemáticas, y debido a que son fundamentales en Cálculo y sirven como un concepto unificador a lo largo de este texto, se dedicarán las dos primeras secciones a su estudio. La sección 1.3 está designada para proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos de situaciones del mundo real así como para mostrarle algunas aplicaciones del Cálculo.

Las dos operaciones matemáticas fundamentales en Cálculo son la *diferenciación* y *la integración*. Estas operaciones implican la determinación de la *derivada* y de la *integral definida*, cada una con base en la noción de *límite*, probablemente el concepto más importante en Cálculo. Se inicia el estudio de límites en la sección 1.4 mediante una introducción gráfica a los límites de funciones. Primero se proporciona una fundamentación paso a paso de la noción de límite, la cual comienza con el cálculo del valor de una función que se aproxima a un número y termina desarrollando una noción intuitiva del proceso de límite. La definición formal de límite y los teoremas sobre límites se introducen enla sección 1.5 para simplificar cálculos de límites de funciones algebraicas elementales. En las secciones 1.6 y 1.7, se extiende el concepto de límite para incluir tipos de funciones adicionales y límites infinitos.

Probablemente la clase de funciones más importante estudiadas en Cálculo sean las *funciones continuas*. La continuidad de una función en un número se define en la sección 1.8 mientras que la continuidad de una función compuesta, la continuidad en un intervalo y el teorema del valor intermedio son temas de la sección 1.9. *El teorema de estricción* se presenta en la sección 1.10 y se aplica ahí para determinar el límite del cociente de sen t conforme t se aproxima a cero. Este resultado es importante al estudiar la continuidad de las funciones trigonométricas en esta misma sección.



1.1 FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo transcurrido desde que salió de un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro; etc. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una *función*. Para fines exclusivos de este texto, las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x.

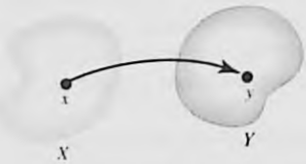


FIGURA 1

En la figura 1 se muestra la representación de una correspondencia de este tipo. Se puede establecer el concepto de función de otra manera: considere intuitivamente que el número real y del conjunto Y es una *función* del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cual se asocia un solo valor de y a un valor x. Esta regla se expresa frecuentemente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2$$

define una función para la cual X es el conjunto de todos los números reales y Y es el conjunto de los números no negativos. El valor de y asignado al valor de x se obtiene al multiplicar x por sí mismo. La tabla 1 proporciona algunos de estos valores y la figura 2 ilustra la correspondencia de los números de la tabla.

Tabla 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16

Para denotar funciones se utilizan símbolos como f, g y h. El conjunto X de los números reales indicado anteriormente es el *dominio* de la función y el conjunto Y de números reales asignados a los valores de x en X es el *contradominio* de la función. El dominio y el contradominio suelen expresarse en la notación de intervalos descrita en la sección A.1 del apéndice.

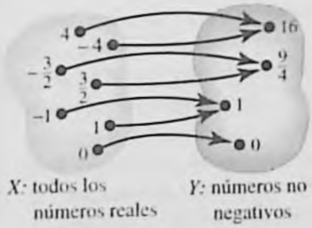


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Con notación de intervalos, el dominio y contradominio de la función definida por la ecuación

$$y = x^2$$

es $(-\infty, +\infty)$ y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Sea f la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como los números se han restringido a los números reales, y es una función de x sólo si $x - 2 \geq 0$ debido a que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un solo valor de y. Sin embargo, si $x < 2$, se tiene la raíz cuadrada de un número negativo, y en consecuencia, no se obtendrá un número real y. Por tanto, se debe restringir x de manera que $x \geq 2$. De este modo, el dominio de f es el intervalo $[2, +\infty)$, y su contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea g la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Se observa que y es una función de x sólo para $x \geq 3$ o $x \leq -3$ (o simplemente, $|x| \geq 3$); para cualquier x que satisfaga alguna de estas desigualdades, se determinará un solo valor de y. No se determinará ningún valor real de y si x está en el intervalo abierto $(-3, 3)$, ya que para estos valores de x se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, el dominio de g es $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

Se puede considerar una función como un conjunto de *pares ordenados*. Por ejemplo, la función definida por la ecuación $y = x^2$ consta de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Los pares ordenados de esta función proporcionados por la tabla 1 son $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ y $(-4, 16)$. Por supuesto, existe un número ilimitado de pares ordenados de esta función, algunos otros son $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$, etcétera.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 La función f del ejemplo ilustrativo 2 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x - 2}$. En símbolos esto se expresa como

$$f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$$

Algunos de los pares ordenados de f son $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 La función g del ejemplo ilustrativo 3 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x^2 - 9}$; es decir,

$$g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Algunos de los pares ordenados de g son $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◀

A continuación se establecerá formalmente la definición de función como un conjunto de pares ordenados. Al definir una función de esta manera, y no como una regla de correspondencia, se hace más preciso su significado.

1.1.1 Definición de función

Una **función** es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de **contradominio*** de la función.

En esta definición, la restricción de que dos pares ordenados no pueden tener el mismo primer número asegura que y es único para cada valor específico de x. Los símbolos x y y denotan **variables.** Debido a que el valor de y depende de la elección de x, x denota a la **variable independiente** mientras que y representa a la **variable dependiente.**

Si f es la función tal que los elementos de su dominio se representan por x, y los elementos de su contradominio se denotan por y, entonces el símbolo $f(x)$ (léase "f de x") denota el valor particular de y que corresponde al valor de x. La notación $f(x)$, denominada **valor de función,** se debe al matemático y físico suizo **Leonhard Euler** (1707-1783).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 En el ejemplo ilustrativo 2, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-2}\}$. De modo que

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

A continuación se calculará $f(x)$ para algunos valores específicos de x.

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{3-2} & \qquad f(5) &= \sqrt{5-2} \\ &= 1 & &= \sqrt{3} \\ f(6) &= \sqrt{6-2} & f(9) &= \sqrt{9-2} \\ &= 2 & &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

◀

Cuando se define una función, debe indicarse el dominio implícita o explícitamente. Por ejemplo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

la función tiene un valor si x es cualquier número real; por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leq x \leq 10$$

entonces el dominio de f consta de todos los números reales entre 1 y 10, incluidos éstos.

De manera semejante, si g está definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{5x-2}{x+4}$$

está implícito que $x \neq -4$, debido a que el cociente no está definido para $x = -4$; en consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto -4.

Si h está definida por la ecuación

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

el dominio de h es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ porque $\sqrt{4-x^2}$ no es un número real para $x > 2$ o $x < -2$. El contradominio de h es $[0, 2]$.

* **N. del T.** La palabra inglesa *range* se ha traducido generalmente como *rango*, y corresponde al nombre del conjunto de valores asignados a la variable dependiente de una función. Otros nombres para este conjunto son: recorrido (poco empleado en cálculo); ámbito (término muy reciente para este concepto); imagen (muy empleado en álgebra y teoría de conjuntos); rango (muy empleado en cálculo).

EJEMPLO 1 Dado que f es la función definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

determine: **(a)** $f(0)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(h)$; **(d)** $f(2h)$; **(e)** $f(2x)$; **(f)** $f(x + h)$; **(g)** $f(x) + f(h)$

Solución

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= -4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$
$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$
$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$
$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$ ◀

Compare los cálculos del inciso (f) y (g) del ejemplo 1. En el inciso (f) se realiza el cálculo de $f(x + h)$, que es el valor de la función para la suma de x y h. En el inciso (g), en donde se calcula $f(x) + f(h)$, se obtiene la suma de los dos valores de la función $f(x)$ y $f(h)$.

En el capítulo 2 se requerirá calcular cocientes de la forma

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

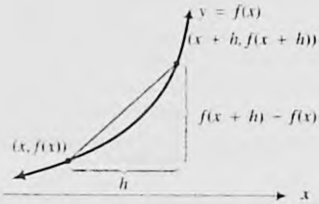


FIGURA 3

Este cociente se presenta como la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ de la gráfica de la función definida por $y = f(x)$. Consulte la figura 3. En caso de que al efectuar el cálculo aparezca en el numerador la diferencia de dos radicales, se racionaliza el numerador como en el inciso (b) del ejemplo siguiente.

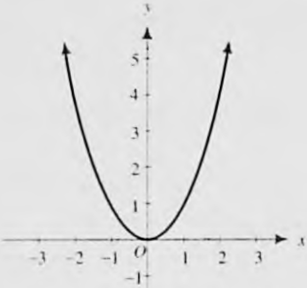
EJEMPLO 2 Determine

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

donde $h \neq 0$, si **(a)** $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; **(b)** $f(x) = \sqrt{x}$.

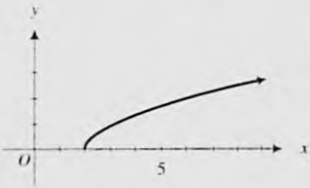
Solución

(a) $$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{4(x + h)^2 - 5(x + h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h}$$
$$= \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7}{h}$$
$$= \frac{8hx - 5h + 4h^2}{h}$$
$$= 8x - 5 + 4h$$



$y = x^2$

FIGURA 4

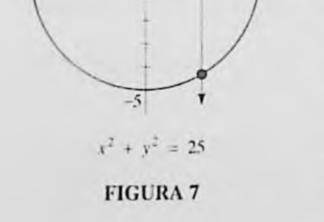


$f(x) = \sqrt{x-2}$

FIGURA 5

$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

FIGURA 6



$x^2 + y^2 = 25$

FIGURA 7

(b)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

En el segundo paso del inciso (b) de esta solución, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del numerador para racionalizar el numerador, de donde se obtiene un factor común de h en el numerador y en el denominador. ◀

El concepto de función como un conjunto de pares ordenados permite enunciar la siguiente definición de *gráfica de una función*.

1.1.2 Definición de gráfica de una función

Si f es una función, entonces la **gráfica de** f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.

De esta definición, se deduce que la gráfica de una función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de la función del ejemplo ilustrativo 1 es la parábola dibujada en la figura 4. La gráfica de la función f de los ejemplos ilustrativos 2 y 4 y dibujada en la figura 5 es la mitad superior de la parábola. La gráfica de la función g de los ejemplos ilustrativos 3 y 5 está dibujada en la figura 6; está gráfica es la mitad superior de una hipérbola.

Recuerde que en una función existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. En términos geométricos, esto significa que:

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto.

Observe que en las figuras 4, 5 y 6, cualquier recta vertical intersectará a cada gráfica cuanto más en un punto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Considere el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$, cuya gráfica es la circunferencia, de radio 5 y centro en el origen, dibujada en la figura 7. Este conjunto de pares ordenados no es una función porque para cualquier x en el intervalo $(-5, 5)$, dos pares ordenados diferentes tienen a x como primer número. Por ejemplo, $(3, 4)$ y $(3, -4)$ son dos pares ordenados del conjunto dado. Además, observe que cualquier recta vertical cuya ecuación sea $x = a$, donde $-5 < a < 5$, intersecta a la circunferencia en dos puntos. ◀

▶ **EJEMPLO 3** Determine el dominio de la función g definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica en la graficadora.

Solución Como $\sqrt{x(x-2)}$ no es un número real cuando $x(x-2) < 0$, el dominio de la función g consta de los valores de x para los cuales $x(x-2) \geq 0$. Esta desigualdad se satisface cuando se tiene alguno de los dos casos siguientes: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$; o si $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$.

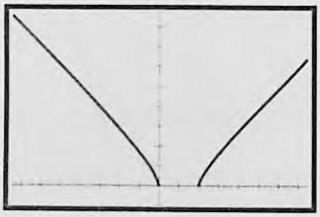
Caso 1: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$. Esto es,

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \geq 2$$

Ambas desigualdades se cumplen si $x \geq 2$, lo cual equivale a que x esté en el intervalo $[2, +\infty)$.

Caso 2: $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$. Esto es,

$$x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 2$$



$[-7.5,\ 7.5]$ por $[-1,\ 9]$

$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$

FIGURA 8

Las dos desigualdades se cumplen si $x \leq 0$, lo cual equivale a que x pertenezca al intervalo $(-\infty, 0]$.

Las soluciones de estos dos casos se combinan para obtener el dominio de g, el cual es $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

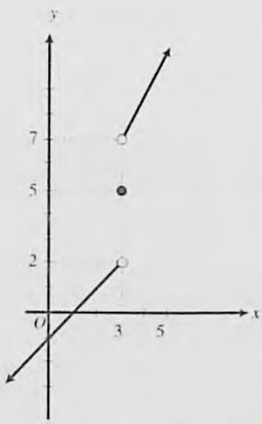
La gráfica de g se muestra en la figura 8. Esta gráfica desciende desde la izquierda hasta $x = 0$, asciende hacia la derecha a partir de $x = 2$, y no contiene puntos cuando x está en el intervalo abierto $(0, 2)$. Por tanto, la gráfica apoya la respuesta. ◀

Como se vio, el dominio de una función puede determinarse mediante la definición de la función. Con frecuencia se determina el contradominio a partir de la gráfica de la función, como en el ejemplo siguiente en el que se trata una *función definida a trozos*, la cual se define empleando más de una expresión.

▶ **EJEMPLO 4** Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f, y dibuje su gráfica.



$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 9

Solución El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. La figura 9 muestra la gráfica de f; consta de la porción de la recta $y = x - 1$ para la cual $x < 3$, el punto $(3, 5)$ y la parte de la recta $y = 2x + 1$ para la cual $3 < x$. Los valores de la función son números menores que 2, el número 5 o números mayores que 7. Por tanto, el contradominio de f es el número 5 y aquellos números en $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$. ◀

Las funciones definidas a trozos serán de gran utilidad en el estudio de límites, continuidad y derivada, como ejemplos y contra-ejemplos de funciones que poseen ciertas propiedades. En el caso de la gráfica de la función del ejemplo 4, se rompe en el punto donde $x = 3$ lo que, como aprenderá en la sección 1.8, muestra que la función es *discontinua* para ese valor de x. En el ejemplo siguiente se tiene una función definida a trozos cuya gráfica no se rompe en el valor de x, en el que cambian las expresiones que la definen, en este caso en $x = 1$.

FIGURA 10

EJEMPLO 5 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de g, y dibuje su gráfica.

Solución El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica contiene la parte de la recta $y = 3x - 2$ para la cual $x < 1$ y la porción de la parábola $y = x^2$ para la cual $1 \leq x$. La gráfica se muestra en la figura 10. El contradominio es $(-\infty, +\infty)$. ◀

EJEMPLO 6 La función h está definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine el dominio y el contradominio de h, y dibuje su gráfica.

Solución Como $h(x)$ está definida para todo x, excepto 3, el dominio de h es el conjunto de números reales excepto 3. Cuando $x = 3$, tanto el numerador como el denominador son cero y $0/0$ no está definido.

Al factorizar el numerador como $(x - 3)(x + 3)$ se obtiene

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

o $h(x) = x + 3$, teniendo en cuenta que $x \neq 3$. En otras palabras, la función h puede definirse por

$$h(x) = x + 3 \qquad \text{si } x \neq 3$$

La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = x + 3$ excepto el punto $(3, 6)$, y se muestra en la figura 11. El contradominio de h es el conjunto de todos los números reales excepto 6. ◀

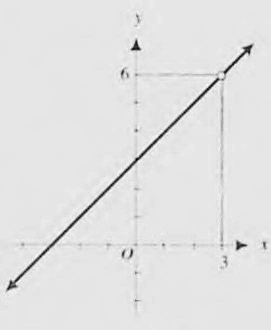


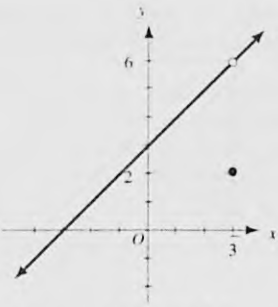
FIGURA 11

En el ejemplo 6, la gráfica tiene un "hoyo" o "agujero" en $x = 3$, donde $h(3)$ no está definido. En el ejemplo siguiente, también la gráfica tiene un agujero en $x = 3$, pero el valor de la función en 3 sí está definido.

EJEMPLO 7 Sea H la función definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de H y dibuje su gráfica.



$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

FIGURA 12

Solución Como H está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de H se muestra en la figura 12. El contradominio de H es el conjunto de todos los números reales, diferentes de 6. ◀

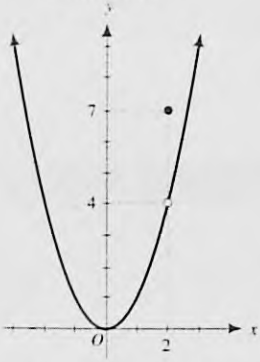
▶ EJEMPLO 8

La función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f y dibuje su gráfica.

Solución Como f está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica, mostrada en la figura 13, consta del punto $(2, 7)$ y todos los puntos sobre la parábola $y = x^2$ excepto $(2, 4)$. El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

FIGURA 13

La función del ejemplo siguiente se denomina **función valor absoluto.**

▶ EJEMPLO 9

Determine el dominio y el contradominio de la función f para la cual

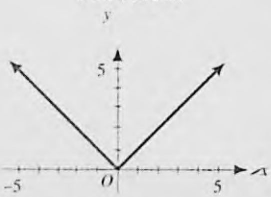
$$f(x) = |x|$$

y dibuje su gráfica.

Solución De la definición de $|x|$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de f consta de dos semirectas que pasan por el origen y están por arriba del eje x; una tiene pendiente 1 y la otra tiene pendiente -1. Consulte la figura 14. El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$f(x) = |x|$

FIGURA 14

La función valor absoluto se ha implementado en las graficadoras y usualmente se denota por *ABS*. Otra función con que cuenta la graficadora es la **función máximo entero** cuyos valores de función se denotan por $[\![x]\!]$ y están definidos por

$$[\![x]\!] = n \qquad \text{si } n \leq x < n + 1, \text{ donde } n \text{ es un entero}$$

Esto es, $[\![x]\!]$ es el máximo entero menor o igual que x. En particular, $[\![1]\!] = 1$, $[\![1.3]\!] = 1$, $[\![0.5]\!] = 0$, $[\![-4.2]\!] = -5$ y $[\![-8]\!] = -8$.

La gráfica de la función máximo entero está dibujada en la figura 15. Su dominio es el conjunto de todos los números reales y su contradominio consiste de todos los números enteros. En muchas graficadoras se denota la función máximo entero por *INT*.

Función máximo entero

FIGURA 15

▶ EJEMPLO 10

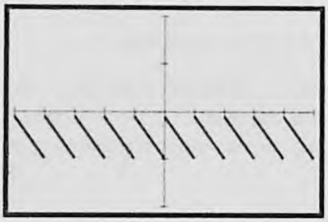
Dibuje la función G definida por

$$G(x) = [\![x]\!] - x$$

y determine su dominio y su contradominio. Apoye su respuesta trazando su gráfica en la graficadora.

$G(x) = [\![x]\!] - x$

FIGURA 16



$[-5, 5]$ por $[-2, 2]$

$G(x) = INT(x) - x$

FIGURA 17

Solución Como G está definida para todos los valores de x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. A partir de la definición de $[\![x]\!]$ se obtiene lo siguiente:

si $-2 \leq x < -1$,	$[\![x]\!] = -2$;	por tanto, $G(x) = -2 - x$,
si $-1 \leq x < 0$,	$[\![x]\!] = -1$;	por tanto, $G(x) = -1 - x$,
si $0 \leq x < 1$,	$[\![x]\!] = 0$;	por tanto, $G(x) = -x$,
si $1 \leq x < 2$,	$[\![x]\!] = 1$;	por tanto, $G(x) = 1 - x$,
si $2 \leq x < 3$,	$[\![x]\!] = 2$;	por tanto, $G(x) = 2 - x$,

y así sucesivamente. De modo más general, si n es cualquier número entero, entonces

si $n \leq x < n + 1$, $[\![x]\!] = n$; por tanto, $G(x) = n - x$

Con estos valores de función se puede dibujar la gráfica de G, mostrada en la figura 16. A partir de la gráfica se observa que el contradominio es $(-1, 0]$. Al trazar la gráfica de $G(x) = INT(x) - x$ se obtiene la figura 17, lo cual apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 4, determine si el conjunto es una función. Si es una función determine su dominio.

1. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$
   (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$
   (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$
2. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$
   (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$
   (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
3. (a) $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ (b) $\{(x, y) \mid x = y^2\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$ (d) $\{(x, y) \mid x = y^3\}$
4. (a) $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$
   (b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$
   (c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$
   (d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$
5. Dada $f(x) = 2x - 1$, determine
   (a) $f(3)$; (b) $f(-2)$; (c) $f(0)$; (d) $f(a + 1)$; (e) $f(x + 1)$; (f) $f(2x)$; (g) $2\,f(x)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$;
   (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.
6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, calcule (a) $f(1)$; (b) $f(-3)$; (c) $f(6)$;
   (d) $f(\frac{1}{3})$; (e) $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; (f) $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; (g) $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; (h) $f(x - 3)$;
   (i) $f(x) - f(3)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.
7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, determine (a) $f(-2)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(0)$; (d) $f(3)$; (e) $f(h + 1)$; (f) $f(2x^2)$; (g) $f(x^2 - 3)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$;
   (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.
8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, calcule (a) $g(-4)$; (b) $g(\frac{1}{2})$; (c) $g(x^2)$; (d) $g(3x^2 - 4)$; (e) $g(x - h)$; (f) $g(x) - g(h)$;
   (g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.
9. Dada $F(x) = \sqrt{x + 9}$, encuentre (a) $F(x + 9)$; (b) $F(x^2 - 9)$; (c) $F(x^4 - 9)$; (d) $F(x^2 + 6x)$;
   (e) $F(x^4 - 6x^2)$; (f) $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}$, $h \neq 0$.
10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, determine a) $G(4 - x)$; ((b) $G(4 - x^2)$; (c) $G(4 - x^4)$; (d) $G(4x - x^2)$;
    (e) $G(-x^4 - 4x^2)$; (f) $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}$, $h \neq 0$

En los ejercicios 11 a 46, dibuje a mano la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

11. $f(x) = 3x - 1$	12. $g(x) = 4 - x$
13. $F(x) = 2x^2$	14. $G(x) = x^2 + 2$
15. $g(x) = 5 - x^2$	16. $f(x) = (x - 1)^2$
17. $G(x) = \sqrt{x - 1}$	18. $F(x) = \sqrt{9 - x}$
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$	20. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
21. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$	22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
23. $h(x) = \lvert x - 3 \rvert$	24. $H(x) = \lvert 5 - x \rvert$
25. $F(x) = \lvert 3x + 2 \rvert$	26. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
27. $H(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$	28. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ 30. $g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6}$

31. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

32. $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 8 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

35. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

36. $G(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

37. $G(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

38. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

39. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{si } -2 < x \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

41. $h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

42. $H(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

43. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ 44. $G(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$

45. $f(x) = [\![x - 4]\!]$ 46. $g(x) = [\![x + 2]\!]$

47. **(a)** Dibuje la gráfica de la *función escalón (o salto) unitario* denotada por U y definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: **(b)** $U(x - 1)$; **(c)** $U(x) - 1$; **(d)** $U(x) - U(x - 1)$.

48. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas, donde U es la función escalón unitario definida en el ejercicio 47:
(a) $x \cdot U(x)$; **(b)** $(x + 1) \cdot U(x + 1)$;
(c) $(x + 1) \cdot U(x + 1) - x \cdot U(x)$.

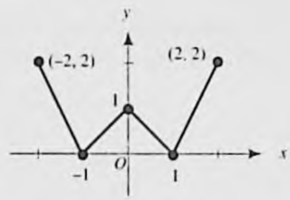
49. **(a)** Dibuje la gráfica de la *función signo* denotada por sgn y definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

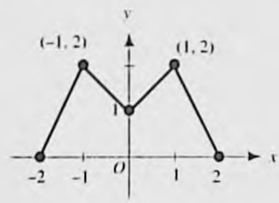
sgn(x) se lee "signo de x". Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: **(b)** $x \cdot \operatorname{sgn}(x)$; **(c)** $2 - x \operatorname{sgn}(x)$; **(d)** $x - 2 \operatorname{sgn}(x)$.

50. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos, donde sgn es la función signo definida en el ejercicio 49: **(a)** $\operatorname{sgn}(x + 1)$; **(b)** $\operatorname{sgn}(x - 1)$; **(c)** $\operatorname{sgn}(x + 1) - \operatorname{sgn}(x - 1)$.

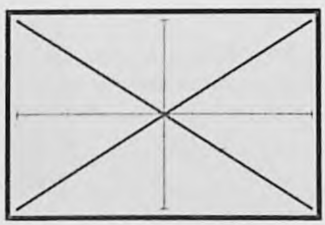
51. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra W. Defina $f(x)$ a trozos.



52. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra M. Defina $f(x)$ a trozos.



53. En la figura, la gráfica se parece a la letra X y es la gráfica de dos funciones f_1 y f_2 trazadas en el rectángulo inspección de $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Defina $f_1(x)$ y $f_2(x)$.



$[-1, 1]$ por $[-1, 1]$

54. Existen tres funciones f_1, f_2 y f_3 cuyas gráficas trazadas simultáneamente en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ se parecen a la letra Z. Defina $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

En los ejercicios 55 a 58, haga lo siguiente: (a) defina la función a trozos sin emplear las barras de valor absoluto; (b) dibuje la gráfica de la función definida en el inciso (a); (c) apoye sus respuestas a los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de la función.

55. $f(x) = |x^2 - 1|$ 56. $g(x) = |4 - x^2|$

57. $g(x) = |x| \cdot |5 - x|$ 58. $f(x) = |x| \cdot |x - 3|$

En los ejercicios 59 y 60, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio. Apoye sus respuestas trazando la gráfica de la función.

59. $h(x) = x - [\![x]\!]$ **60.** $F(x) = x + [\![x]\!]$

61. Las gráficas de las funciones de los ejercicios 51 y 52 parecen letras del alfabeto. Defina otras dos funciones cuyas gráficas se parezcan a dos letras diferentes y dibújelas.

62. En esta sección se utilizaron los símbolos f, $f(x)$ y $y = f(x)$ concernientes a una función particular, los cuales tienen significados diferentes. Explique lo que significa cada notación, invente una función y utilícela para distinguir los tres símbolos.

63. Explique por qué la gráfica de una función es consistente con la definición de la función como un conjunto de pares ordenados. En su explicación utilice un ejemplo específico.

1.2 OPERACIONES CON FUNCIONES Y TIPOS DE FUNCIONES

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de las funciones originales.

1.2.1 Definición de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Dadas las dos funciones f y g:

(i) su **suma,** denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) su **diferencia,** denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) su **producto,** denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) su **cociente,** denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

En cada caso, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dado que f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: **(a)** $f + g$; **(b)** $f - g$; **(c)** $f \cdot g$; **(d)** f/g.

Solución

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$

(b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

El dominio de f es $[-1, +\infty)$ y el dominio de g es $[4, +\infty)$. Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos (a), (b) y (c) es $[4, +\infty)$. En el inciso (d), el denominador es cero cuando $x = 4$; por lo que 4 también se excluye y se obtiene como dominio $(4, +\infty)$. ◀

Otra operación entre funciones es la obtención de la *función compuesta* de dos funciones dadas.

1.2.2 Definición de función compuesta

Dadas las dos funciones f y g, la **función compuesta,** denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

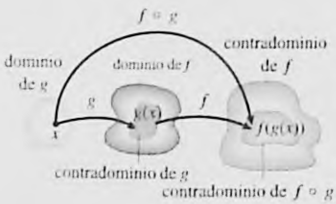


FIGURA 1

Esta definición indica que cuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica g a x y después se aplica f a $g(x)$. Para visualizar este cálculo Consulte la figura 1. La función g asigna el valor $g(x)$ al número x del dominio de g. La función f asigna el valor $f(g(x))$ al número $g(x)$ del dominio de f. Observe que en la figura 1 el contradominio de g es un subconjunto del dominio de f y que el contradominio de $f \circ g$ es un subconjunto del contradominio de f.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 3$$

entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x - 3)\\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números reales x para los cuales $2x - 3 \geq 0$ o, equivalentemente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

EJEMPLO 2 Sean

$$f(x) = \frac{5}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 1$$

Obtenga $(f \circ g)(3)$ mediante dos métodos: **(a)** calcule $g(3)$ y utilice este número para determinar $f(g(3))$; **(b)** calcule $(f \circ g)(x)$ y emplee el resultado para determinar $(f \circ g)(3)$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}g(3) &= 2(3) + 1\\ &= 7\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(g(3)) &= f(7)\\ &= \frac{5}{7 - 2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x + 1)\\ &= \frac{5}{(2x + 1) - 2}\\ &= \frac{5}{2x - 1}\end{aligned}$$

$$= 1$$

Por tanto

$$(f \circ g)(3) = \frac{5}{2(3) - 1}$$
$$= 1$$

◀

EJEMPLO 3 Dado que f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

calcule: **(a)** $f \circ f$; **(b)** $g \circ g$; **(c)** $f \circ g$; **(d)** $g \circ f$. También determine el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $[0, +\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, +\infty)$.

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$.

(c)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

El dominio es

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

En el inciso (d) observe que aunque $x - 1$ está definido para todos los valores de x, el dominio de $g \circ f$, por la definición de función compuesta, es el conjunto de todos los números x del dominio de f tales que $f(x)$ está en el dominio de g. De donde, el dominio de $g \circ f$ debe ser un subconjunto del dominio de f. ◀

Observe en los resultados de los incisos (c) y (d) del ejemplo 3 que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ no son necesariamente iguales.

Un teorema importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena*, que se estudiará en la sección 2.8, trata sobre funciones compuestas. Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones, tal como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $h(x) = (4x^2 + 1)^3$, h se puede expresar como la composición de las dos funciones f y g para las cuales

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = 4x^2 + 1$$

debido a que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

◀

La función h del ejemplo ilustrativo 2 también puede expresarse como la composición de otro par de funciones. Por ejemplo, si

$$F(x) = (4x + 1)^3 \quad \text{y} \quad G(x) = x^2$$

entonces

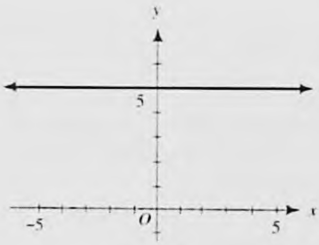
$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x))\\ &= F(x^2)\\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

▶ EJEMPLO 4

Dada

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

exprese h como la composición de dos funciones f y g en dos formas: **(a)** la función f contiene el radical; **(b)** la función g contiene el radical.



$f(x) = 5$

FIGURA 2

Solución

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

$g(x) = x^2$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

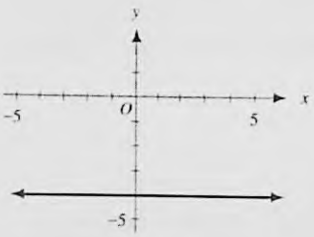
(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(\sqrt{x^2 + 3})\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

◀



$g(x) = -4$

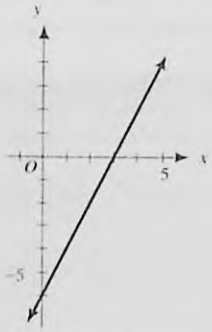
FIGURA 3

Una función cuyo contradominio consta de un solo número recibe el nombre de **función constante.** De este modo, si $f(x) = c$, y c es cualquier número real, entonces f es una función constante y su gráfica es una recta horizontal a una distancia dirigida de c unidades a partir del eje x.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

(a) La función definida por $f(x) = 5$ es una función constante, y su gráfica, mostrada en la figura 2, es una recta horizontal situada a 5 unidades sobre el eje x.

(b) La función definida por $g(x) = -4$ es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal ubicada a 4 unidades debajo del eje x. Consulte la figura 3. ◀



$f(x) = 2x - 6$

FIGURA 4

Una **función lineal** se define por

$$f(x) = mx + b$$

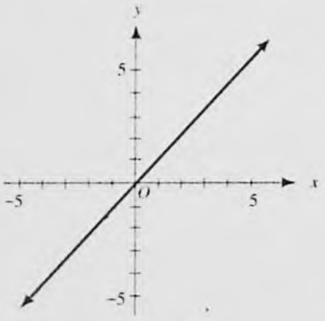
donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta cuya *pendiente* es m y su *intercepción y* u *ordenada al origen* es b.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

La función definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

es lineal. Su gráfica es la recta mostrada en la figura 4. ◀



$f(x) = x$

FIGURA 5

La función lineal particular definida por

$$f(x) = x$$

se denomina **función identidad.** Su gráfica, dibujada en la figura 5, es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.

Si una función f se define por

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales $(a_n \neq 0)$ y n es un número entero no negativo, entonces recibe el nombre de **función polinomial** de grado n. Así, la función definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

es una función polinomial de grado 5.

Una función lineal es una función polinomial de grado 1. Si el grado de una función polinomial es 2, entonces se le llama **función cuadrática,** y si el grado es 3, entonces recibe el nombre de **función cúbica.**

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, entonces se denomina **función racional.**

Una **función algebraica** es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación (elevación a una potencia) y radicación (extracción de una raíz). Las funciones polinomiales y racionales son tipos particulares de funciones algebraicas. Un ejemplo complejo de una función algebraica es aquella definida por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Además de las funciones algebraicas, se considerarán las *funciones trascendentes*, ejemplos de estas funciones son las funciones trigonométricas, discutidas en la sección A.9 del apéndice, y las funciones logarítmica y exponencial estudiadas en el capítulo 5.

Una *función par* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y, y una *función impar* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al origen. A continuación se presenta la definición formal de estas funciones.

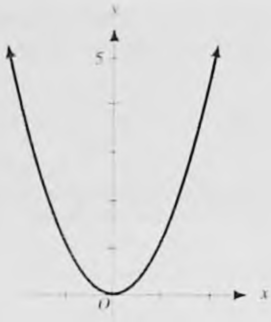
1.2.3 Definición de función par y función impar

(i) Una función f es una **función par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Una función f es una **función impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

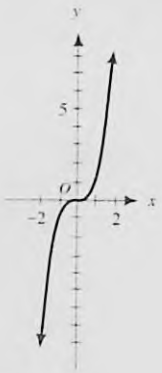
En los dos incisos (i) y (ii) se sobrentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Las propiedades de simetría de las funciones pares e impares se deducen de los criterios de simetría dados en la sección A.2 del apéndice.



$f(x) = x^2$

FIGURA 6



$g(x) = x^3$

FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) Si $f(x) = x^2$, entonces $f(-x) = (-x)^2$. Por tanto, $f(-x) = f(x)$ y en consecuencia, f es una función par. Su gráfica es una parábola simétrica con respecto al eje y. Véa la figura 6.

(b) Si $g(x) = x^3$, entonces $g(-x) = (-x)^3$. Como $g(-x) = -g(x)$, entonces g es una función impar. La gráfica de g, mostrada en la figura 7, es simétrica con respecto al origen. ◀

▶ *EJEMPLO 5*

Trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos; después confirme la conjetura analíticamente.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

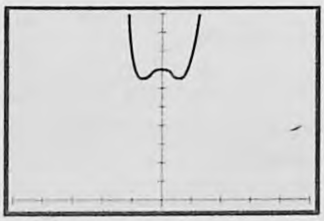
(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Solución

(a) La gráfica de f, trazada en la figura 8, parece simétrica con respecto al eje y. Por tanto, se sospecha que la función es par. Para probar este hecho analíticamente, se calcula $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

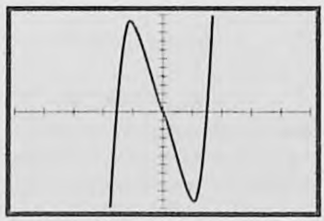
Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par.



$[-5, 5]$ por $[0, 10]$

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

FIGURA 8



$[-5, 5]$ por $[-11, 11]$

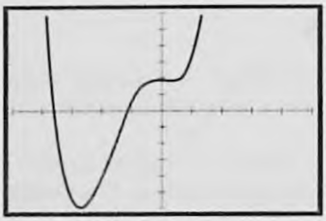
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

FIGURA 9

(b) La figura 9 muestra la gráfica de la función g, la cual parece simétrica con respecto al origen. Por tanto, se sospecha que la función es impar. Al calcular $g(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Como $g(-x) = -g(x)$, entonces se ha demostrado analíticamente que la función g es impar.



$[-5, 5]$ por $[-30, 30]$
$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

FIGURA 10

(c) Como la gráfica de h, mostrada en la figura 10, no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen, la función no es par ni impar. Al calcular $h(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se ha confirmado que h no es par ni tampoco impar. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Sea

$$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$$

(a) Defina $F(x)$, sin las barras de valor absoluto, a trozos en los intervalos siguientes: $(-\infty, -3)$; $[-3, 3)$; $[3, +\infty)$. **(b)** Apoye la respuesta gráficamente trazando la gráfica de F a partir de la ecuación dada. **(c)** De la gráfica del inciso (b) establezca si F es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. **(d)** Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación.

Solución

(a) A partir de la definición del valor absoluto de un número

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) & \text{si } x + 3 < 0 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

Esto es

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, -3)$, $|x + 3| = -x - 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. En consecuencia

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= -x - 3 - (-x + 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Si $x \in [-3, 3)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. Así

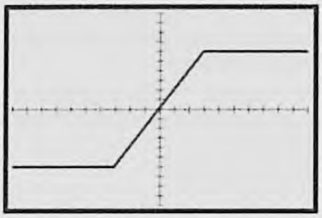
$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (-x + 3) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Si $x \in [3, +\infty)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = x - 3$. Por tanto

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (x - 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Con estos resultados, se define $F(x)$ a trozos de la siguiente forma

$$F(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$

FIGURA 11

(b) La figura 11 muestra la gráfica de F trazada a partir de la ecuación. La gráfica apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como la gráfica de la figura 11 es simétrica con respecto al origen, la función F es impar.

(d) Al calcular $F(-x)$ a partir de la ecuación dada, se confirma la respuesta del inciso (c):

$$\begin{aligned} F(-x) &= |-x + 3| - |-x - 3| \\ &= |-(x - 3)| - |-(x + 3)| \\ &= |x - 3| - |x + 3| \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado analíticamente que F es impar. ◀

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 10, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

1. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

7. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

8. $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

10. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 11 a 14, para las funciones f y g y el número c, obtenga $(f \circ g)(c)$ mediante dos métodos: (a) calcule $g(c)$ y utilice este número para determinar $f(g(c))$; (b) Determine $(f \circ g)(x)$ y emplee ese valor para calcular $(f \circ g)(c)$.

11. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $g(x) = 2x - 5$; $c = 4$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$; $g(x) = x^2 - 3x$; $c = 5$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$; $c = \dfrac{1}{2}$

14. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x + 3}}{x}$; $g(x) = \dfrac{2x + 5}{x^4}$; $c = -2$

En los ejercicios 15 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

15. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

16. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

17. Las funciones del ejercicio 1.

18. Las funciones del ejercicio 2.

19. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

20. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

22. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

23. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 25 y 26 defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$; (d) $(f \circ f)(-x)$.

25. $f(x) = \sqrt{x}$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

En los ejercicios 27 a 32, exprese h como composición de las dos funciones f y g en dos formas.

27. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

28. $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$

29. $h(x) = \left(\dfrac{1}{x - 2}\right)^3$

30. $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^3} + 3}$

31. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$

32. $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

En los ejercicios 33 a 38, trace en la graficadora la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

33. **(a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ **(b)** $g(x) = 5x^5 + 1$

34. **(a)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **(b)** $g(x) = x^6 - 1$

35. **(a)** $f(x) = 5x^3 - 7x$ **(b)** $g(x) = |x|$

36. **(a)** $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ **(b)** $g(x) = x^3 + 1$

37. **(a)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = 5x^4 - 4$

38. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **(b)** $g(x) = 2|x| + 3$

En los ejercicios 39 y 40, determine analíticamente si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos.

39. **(a)** $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ **(b)** $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

40. (a) $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ (b) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, haga lo siguiente: (a) defina $f(x)$, sin las barras de valor absoluto, en los intervalos indicados. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente trazando la gráfica de f en la graficadora a partir de la ecuación dada. (c) A partir de la gráfica del inciso (b), establezca si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. (d) Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación dada.

41. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

42. $f(x) = x|x|$; $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$

43. $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$; $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$

44. $f(x) = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{x}$

$(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $(1, +\infty)$

45. ¿Es conmutativa la composición de dos funciones? Es decir, si f y g son dos funciones cualesquiera, ¿son iguales $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Justifique su respuesta proporcionando un ejemplo.

Si f y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, entonces se dice que f y g son inversas una de la otra. En los ejercicios 46 a 50, demuestre que f y g son inversas una de la otra.

46. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

48. $f(x) = x^2, x \ge 0$, y $g(x) = \sqrt{x}$

49. $f(x) = x^2, x \le 0$, y $g(x) = -\sqrt{x}$

50. $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

51. La función escalón unitario U y la función signo sgn se definieron en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. (a) Defina $\operatorname{sgn}(U(x))$ y dibuje la gráfica. (b) Defina $U(\operatorname{sgn}(x))$ y dibuje la gráfica.

52. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $(f + g)$ y $(f - g)$ también son funciones impares, mientras que $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.

53. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es par o impar en cada uno de los casos siguientes: (a) f y g son impares; (b) f es par y g es impar; (c) g es par.

54. Encuentre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

55. Encuentre fórmulas para $(g \circ f)(x)$ a partir de las funciones del ejercicio 54. Dibuje la gráfica de $g \circ f$.

56. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

57. Si $f(x) = x^2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

58. Demuestre que si f y g son dos funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

59. Existe una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales que es a la vez par e impar. ¿Cuál es esa función? Demuestre que es única esta función.

60. Suponga que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $h(x) = -x$. Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ y explique por qué $f \circ g$ ni $g \circ f$ son la misma que h.

61. Trace en la graficadora las gráficas de las dos funciones F y G definidas por

$$F(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}} \quad \text{y} \quad G(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 4}}$$

[Observe que F es la misma función que f/g del ejemplo 1(d)]. Explique por qué las gráficas de F y G no son las mismas y, consecuentemente, las funciones no son iguales.

1.3 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

En las aplicaciones del Cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada **modelo matemático** de la situación. Esta sección está destinada a proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos y al mismo tiempo para mostrarle algunas de las aplicaciones que encontrará posteriormente.

Aunque no siempre se emplea un método específico para obtener un modelo matemático, a continuación se le presentan algunos pasos que le proporcionarán un procedimiento posible que deberá seguir. Conforme estudie los ejemplos, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.

Sugerencias para resolver problemas que implican una función como modelo matemático

1. Lea el problema cuidadosamente hasta que lo entienda. Para comprenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que involucre una situación similar en la que las cantidades son conocidas. Otra ayuda es dibujar un diagrama si es posible, como se muestra en los ejemplos 4 y 5.
2. Determine las cantidades conocidas y desconocidas. Utilice un símbolo, digamos x, para la variable independiente y un símbolo, por decir f, para la función que se obtendrá; entonces $f(x)$ simbolizará el valor de función. Como x y $f(x)$ son símbolos para representar números, sus definiciones deben indicar este hecho. Por ejemplo, si la variable independiente representa longitud y la longitud se mide en pies, entonces si x es el símbolo para la variable, x debe definirse como el número de pies de la longitud o, equivalentemente, x pies es la longitud.
3. Anote cualquier hecho numérico conocido acerca de la variable y del valor de la función.
4. A partir de la información del paso 3, determine dos expresiones algebraicas en términos de la variable y del valor de la función. De estas dos expresiones forme una ecuación que defina la función. Ahora ya se tiene una función como modelo matemático del problema.
5. A fin de terminar el problema una vez que se ha aplicado el modelo matemático, para determinar las cantidades desconocidas, *escriba una conclusión*, la cual consista de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema. Asegúrese de que la conclusión contenga las unidades de medición correctas.

EJEMPLO 1 El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175° el gas ocupa 100 m^3. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura. **(b)** ¿Cuál es volumen del gas a una temperatura de 140°?

Solución

(a) Sea $f(x)$ metros cúbicos el volumen del gas cuya temperatura es x grados. Entonces, por la definición de variación directamente proporcional

$$f(x) = kx \qquad (1)$$

donde k es una constante. Como el volumen del gas es 100 m^3 a la temperatura de 175°, se sustituye x por 175 y $f(x)$ por 100 en (1), de donde se obtiene

$$100 = k(175)$$
$$k = \tfrac{4}{7}$$

Al sustituir este valor de k en (1), se obtiene

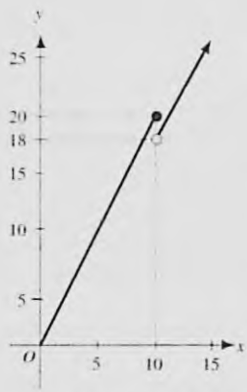
$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

(b) A partir de la expresión para $f(x)$, se obtiene

$$f(140) = \tfrac{4}{7}(140)$$
$$= 80$$

Conclusión: A una temperatura de 140°, el volumen del gas es de 80 m^3. ◀

EJEMPLO 2 Un mayorista vende un producto por libra (o fracción de libra); si se ordenan no más de 10 libras, el mayorista cobra \$2 por libra. Sin embargo, para atraer órdenes mayores, el mayorista cobra sólo \$1.80 por libra si se ordenan más de 10 libras. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como una función de la cantidad de libras ordenadas del producto. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de una orden de 9.5 lb y de una orden de 10.5 lb.



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

Solución

(a) Sea $C(x)$ dólares el costo total de una orden de x libras del producto. Entonces,

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

(b) La gráfica de la función C se muestra en la figura 1.

(c) $C(x)$ se obtiene a partir de la ecuación $C(x) = 2x$ cuando $0 \le x \le 10$ y de la ecuación $C(x) = 1.8x$ cuando $10 < x$. Por tanto,

$$C(9.5) = 2(9.5) = 19 \qquad C(10.5) = (1.8)(10.5) = 18.90$$

Conclusión: El costo total de 9.5 lb es \$19 y el costo total de 10.5 lb es \$18.90. ◀

Observe en el inciso (b) del ejemplo 2 que la gráfica de C se rompe en el punto donde $x = 10$, lo cual indica que la función C es *discontinua* en $x = 10$. Se estudiará esta propiedad en la sección 1.8. Por ahora, note que debido a esta discontinuidad de C, sería más ventajoso incrementar el tamaño de algunas órdenes de compra para obtener un costo total menor. En particular, sería imprudente comprar 9.5 lb por \$19 cuando se pueden comprar 10.5 lb por \$18.90.

En el ejemplo siguiente se tiene una función compuesta como un modelo matemático.

EJEMPLO 3 En un bosque un depredador se alimenta de su presa, y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza. Si

$$f(x) = \tfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \text{y} \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \le t \le 15$, haga lo siguiente: **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como un función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza. **(b)** Determine la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

Solución

(a) La población de depredadores t semanas después del cierre de la temporada de caza está dada por $(f \circ g)(t)$, donde $0 \le t \le 15$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(t) &= f(g(t)) \\ &= f(4t + 52) \\ &= \tfrac{1}{48}(4t + 52)^2 - 2(4t + 52) + 50\end{aligned}$$

(b) Cuando $t = 11$, se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)(11) &= \tfrac{1}{48}(96)^2 - 2(96) + 50 \\ &= 50\end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> Once semanas después del cierre de la temporada de caza la población de depredadores es 50. ◀

En la sección 2.8 se considerará la situación del ejemplo 3 y se determinará la tasa a la cual creció la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

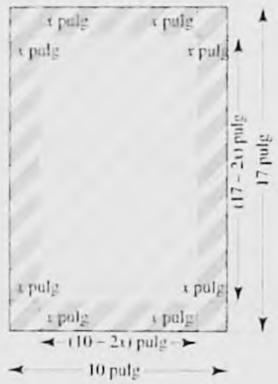


FIGURA 2

▶ EJEMPLO 4

Un fabricante de cajas de cartón desea elaborar cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de 10 pulg por 17 pulg cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo?

Solución

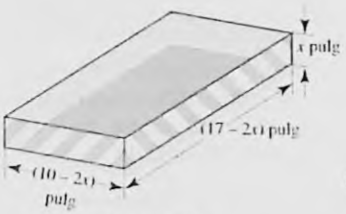


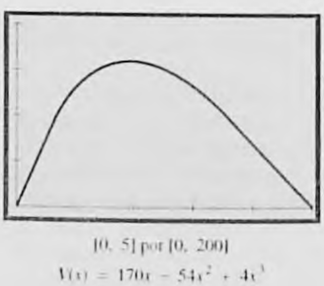
FIGURA 3

(a) Sea x pulgadas la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y sea $V(x)$ pulgadas cúbicas el volumen de la caja. En la figura 2 se presenta una pieza de cartón dada y la figura 3 muestra la caja obtenida a partir de la pieza de cartón. El número de pulgadas de las dimensiones de la caja son x, $10 - 2x$ y $17 - 2x$. Por tanto,

$$\begin{aligned}V(x) &= x(10 - 2x)(17 - 2x) \\ &= 170x - 54x^2 + 4x^3\end{aligned}$$

(b) De la expresión para $V(x)$ del inciso (a), se observa que $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$. A partir de las condiciones del problema se sabe que x no puede ser un número negativo ni tampoco mayor que 5. En consecuencia, el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$.

(c) La gráfica de la función V trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 5]$ por $[0, 200]$ se muestra en la figura 4. Se observa que V tiene un valor máximo en su dominio. La coordenada x del punto más alto de la gráfica proporciona la longitud del lado de los cuadrados, los cuales deben cortarse para obtener la caja de volumen máximo, y la coordenada y proporciona dicho volumen. En la graficadora se determina que el punto más alto es $(2.03, 156.03)$.



$[0, 5]$ por $[0, 200]$

$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$

FIGURA 4

<u>**Conclusión:**</u> La longitud del lado de los cuadrados debe ser de 2.03 pulg para obtener la caja cuyo volumen máximo es 156.03 pulg^3. ◀

En la sección 3.2 se aplicará el Cálculo para confirmar analíticamente la respuesta del ejemplo 4(c).

▶ EJEMPLO 5

Una envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 pulg^3, tiene la forma de un cilindro circular recto. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total del envase como una función del radio de la base. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su elaboración.

FIGURA 5

Solución

(a) Observe la figura 5, ésta muestra el envase cilíndrico donde r pulgadas es la longitud del radio de la base y h es la altura. Se empleará la cantidad mínima de hojalata cuando el área de la superficie total sea un mínimo. El área de la superficie lateral es $2\pi rh$ pulg^2, y el área de cada una de las dos tapas es πr^2 pulg^2. Si S pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{2}$$

Como $\pi r^2 h$ pulgadas cúbicas es el volumen de un cilindro circular recto y el volumen del envase es de 60 pulg^3, se tiene que

$$\pi r^2 h = 60$$

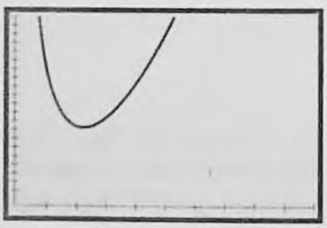
Al despejar h de esta ecuación y sustituirla en (2), se obtiene S como función de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{60}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

(b) Para obtener el dominio de S, observe en la ecuación que define a $S(r)$ que r no puede ser cero. Sin embargo, teóricamente r puede ser cualquier número positivo. Por tanto, el dominio de S es $(0, +\infty)$.

(c) La figura 6 muestra la gráfica de S trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[0, 200]$. La coordenada r del punto más bajo de la gráfica proporciona el radio para el área de la superficie total mínima. En la graficadora se determina que el punto más bajo es $(2.12, 84.84)$.



$[0, 10]$ por $[0, 200]$

$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$

FIGURA 6

Conclusión: Se empleará la cantidad mínima de hojalata en la elaboración del envase cuando el radio sea de 2.12 pulg. ◀

En la sección 3.9 se confirmará analíticamente la respuesta del ejemplo 5(c) como una aplicación del Cálculo.

▶ ***EJEMPLO 6*** En una comunidad de 8 000 personas, la velocidad con la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste circula a una velocidad de 200 personas por hora. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la velocidad a la que se esparce el rumor como una función del número de personas que lo han escuchado. **(b)** ¿Qué tan rápido circula el rumor cuando lo han escuchado 500 personas? **(c)** En la graficadora, estime cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste corre con la mayor velocidad.

Solución

(a) Sea $f(x)$ el número de personas por hora la velocidad a la cual corre el rumor cuando lo han escuchado x personas. Entonces, por la definición de variación conjuntamente proporcional,

$$f(x) = kx(8\,000 - x) \tag{3}$$

donde k es una constante. Como el rumor circula a la velocidad de 200 personas por hora, cuando 20 personas lo han escuchado, se sustituye x por 20 y $f(x)$ por 200 en (3), obteniéndose

$$200 = k(20)(8\,000 - 20)$$
$$k = \frac{1}{798}$$

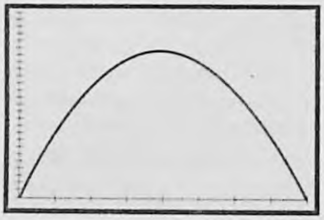
Al sustituir k por este valor en (3), se tiene

$$f(x) = \frac{x(8\,000 - x)}{798}$$

(b) De la expresión anterior para $f(x)$, se obtiene

$$f(500) = \frac{500(8\,000 - 500)}{798} = 4\,699.25$$

<u>**Conclusión:**</u> El rumor se difunde a una tasa de 4 699 personas por hora cuando lo han escuchado 500 personas,



[0, 8 000] por [0, 25 000]

$$f(x) = \frac{x(8\,000 - x)}{798}$$

FIGURA 7

(c) La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 8 000] por [0, 25 000]. Se determina que el punto más alto se obtiene cuando $x = 4\,000$.

<u>**Conclusión:**</u> El rumor se difunde a la mayor velocidad cuando lo han escuchado 4 000 personas, la mitad de la población. ◀

En las secciones 3.2 y 7.4 se considerará la situación del ejemplo 6 para ilustrar dos aplicaciones diferentes del Cálculo. En la sección 3.2 se confirmará analíticamente la respuesta del inciso (c). Después, en la sección 7.4, se obtendrá un modelo que exprese el número de personas que han escuchado el rumor como función del tiempo que el rumor ha sido esparcido, de modo que se puede determinar cuántas personas han escuchado el rumor en cualquier momento particular. Aprenderá que la gráfica de este modelo recibe el nombre de *curva de crecimiento logístico*. También se probará en la sección 7.4 que, finalmente, la población completa escuchará el rumor.

EJERCICIOS 1.3

En cada ejercicio, obtenga una función como un modelo matemático de una situación particular. Muchos de estos modelos aparecerán posteriormente en el texto cuando se aplique el Cálculo a la situación. Defina la variable independiente y el valor de la función como un número e indique las unidades de medición. En algunos de los ejercicios, la variable independiente, por definición, puede representar un número no negativo. Por ejemplo, en el ejercicio 1 si x representa el número de trabajadores, entonces x debe ser un número entero no negativo. En tales ejercicios, para satisfacer los requerimientos de continuidad (que la gráfica no se rompa) necesarios para aplicar el Cálculo posteriormente, considere que la variable independiente representa un número real no negativo. No olvide completar el ejercicio escribiendo una conclusión.

1. La nómina de pago diario de una cuadrilla es directamente proporcional al número de trabajadores, y una cuadrilla de 12 tiene una nómina de $810. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la nómina de pago diario como una función del número de trabajadores. **(b)** ¿Cuál es la nómina de pago diario para una cuadrilla de 15 trabajadores?

2. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, y una persona que pesa 150 lb tiene un cerebro cuyo peso aproximado es de 4 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de la persona. **(b)** Determine el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 176 lb.

3. El periodo (tiempo para una oscilación completa) de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, y un péndulo de 8 pie de longitud tiene un periodo de 2 s. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el periodo de un péndulo como una función de su longitud. **(b)** Determine el periodo de un péndulo de 2 pie de longitud.

4. Para una cuerda que vibra, el número de vibraciones es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda, y una cuerda particular vibra 864 veces por segundo bajo una tensión de 24 kg. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el número de vibraciones como una función de la tensión. **(b)** Determine el número de vibraciones por segundo bajo una tensión de 6 kg.

5. Los cargos de embarques se basan frecuentemente en una fórmula que proporciona el cargo mínimo por libra conforme el cargamento se incrementa. Suponga que los cargos de embarques son los siguientes: \$2.20 por libra si el peso no excede 50 lb; \$2.10 por libra si el peso es mayor que 50 lb pero no excede 200 lb; \$2.05 por libra si el peso es mayor que 200 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de un embarque como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de un embarque de 50 lb; 51 lb; 52 lb; 53 lb; 200 lb; 202 lb; 204 lb y 206 lb.

6. En 1995, el porte de correo para una carta de primera clase se calculó como sigue: 32 centavos para la primera onza o menos, y 23 centavos por onza (o fracción de onza) adicional para las siguientes 10 oz. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el porte de correo para una carta de primera clase, que no pese más de 11 oz, como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el porte de correo para una carta de primera clase que pesa 1.6 oz, 2 oz, 2.1 oz, 8.4 oz y 11 oz.

7. El costo de una llamada telefónica desde Mendocino a San Francisco durante el horario de oficinas es 40 centavos por el primer minuto y 30 centavos por cada minuto o fracción adicional. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, como una función de la duración de la llamada. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo de una llamada telefónica que dura 0.5 min, 2 min, 2.5 min, 3 min, 3.5 min y 5 min.

8. El precio de admisión regular para un adulto a una determinada función en el Coast Cinema es de \$7, mientras que para un niño menor de 12 años de edad es de \$4 y el precio para adultos de por lo menos 60 años de edad es de \$5. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el precio de admisión como una función de la edad de la persona. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a).

9. La demanda de un juguete en cierto almacén es una función f de p, el número de dólares de su precio, el cual es a su vez una función g de t, el número de meses desde que el juguete llegó al almacén. Si

$$f(p) = \frac{5\,000}{p^2} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{20}t + 5$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la demanda como una función del número de meses desde que el juguete llegó al almacén. **(b)** Determine la demanda cinco meses desde que el juguete llegó al almacén.

10. En un lago, un pez grande se alimenta de un pez mediano y la población del pez grande es una función f de x, el número de peces de tamaño mediano en el lago. A su vez, el pez mediano se alimenta de un pez pequeño, y la población de peces medianos es una función g de w, el número de peces pequeños en el lago. Si

$$f(x) = \sqrt{20x} + 150 \quad \text{y} \quad g(w) = \sqrt{w} + 5\,000$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la población de peces grandes como una función del número de peces pequeños en el lago. **(b)** Determine el número de peces grandes cuando el lago contiene 9 millones de peces pequeños.

11. El área de la superficie de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r centímetros y $A(r)$ centímetros cuadrados es el área de la superficie, entonces $A(r) = 4\pi r^2$. Suponga que un globo mantiene la forma de una esfera conforme se infla de modo que el radio cambia a una tasa constante de 3 cm/s. Si $f(t)$ centímetros es el radio del globo después de t segundos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(A \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el área de la superficie del globo después de 4 s.

12. El volumen de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r pies y $V(r)$ pies cúbicos es su volumen, entonces $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Suponga que una bola de nieve de 2 pie de radio comenzó a derretirse a una tasa constante de 4.5 pulg/min. Si $f(t)$ pies es el radio de la bola de nieve después de t minutos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(V \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el volumen de la bola de nieve después de 3 min.

13. A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 m de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del campo rectangular de mayor área que pueda cercarse con 240 m.

14. En un jardín rectangular se colocaron con 100 pie de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del jardín como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de pies, las dimensiones del jar-

dín rectangular de mayor área que pueda cercarse con 100 pie.

15. Realice el ejercicio 13 considerando ahora que un lado del terreno está sobre la orilla de un río, por lo que tiene una límite natural, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.

16. Realice el ejercicio 14 considerando ahora que el jardín está situado de modo que el lado de una casa sirve como límite, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.

17. Un fabricante de cajas de hojalata abiertas desea emplear piezas de hojalata con dimensiones de 8 pulg por 15 pulg, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de décimos de pulgada, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a pulgadas cúbicas?

18. Un fabricante de cajas de cartón hace cajas abiertas a partir de piezas cuadradas de cartón de 12 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centímetros, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a centímetros cúbicos?

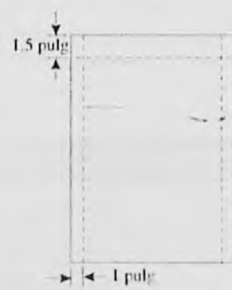
19. Realice el ejercicio 17 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de hojalata rectangulares de dimensiones de 12 pulg por 15 pulg. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

20. Realice el ejercicio 18 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de dimensiones de 40 cm por 50 cm. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

21. Para el envase de hojalata del ejemplo 5, suponga que el costo del material para las tapas es dos veces el costo del material para los lados. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función del radio de la base del envase. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Detemine en la graficadora, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base para el cual el costo total del material es el mínimo.

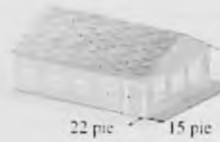
22. Realice el ejemplo 5 considerando ahora que el envase es abierto en lugar de cerrado.

23. Una página impresa contiene una región de impresión de 24 pulg^2, un margen de 1.5 pulg en las partes superior e inferior y un margen de 1 pulg en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total de la página como una función del ancho de la región de impresión. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine, en la graficadora, con aproximación de centésimos de pulgada, las dimensiones de la página más pequeña que satisface estos requerimientos.

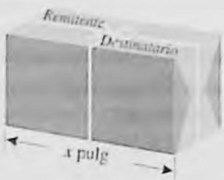


24. Un almacén que tiene un piso rectangular de 13 200 pie^2, se construye de modo que tenga pasillos de 22 pie de ancho en el frente y en fondo del almacén, y pasillos de 15 pie de ancho en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total del terreno donde se construirá el almacén y los pasillos como una función de la longitud del frente y del fondo del almacén. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de pie, las dimen-

siones del terreno que tiene el área mínima en el cual este almacén se construirá.



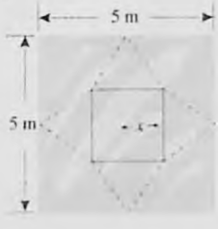
25. Suponga que desea utilizar un servicio de correo particular para enviar un paquete que tiene forma de caja rectangular con una sección transversal cuadrada tal que la suma de su longitud y el perímetro de la sección transversal es 100 pulg, el máximo permitido por el servicio. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de pulgadas, las dimensiones del paquete que tiene el mayor volumen posible que pueda enviarse por este servicio.



26. En un ambiente limitado donde A es el número óptimo de bacterias soportado por el ambiente, la tasa del crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número presente de bacterias y la diferencia entre A y el número presente. Suponga que el número óptimo soportable por un ambiente particular es 1 millón de bacterias, y que la tasa de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando se tienen 1000 bacterias presentes. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento bacteriano como función del número de bacterias presentes. **(b)** ¿Cuál es la tasa de crecimiento cuando están presentes 100 000 bacterias? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de miles, cuántas bacterias están presentes cuando la tasa de crecimiento es un máximo.

27. Fort Bragg, en el norte de California, es una ciudad pequeña con 5 000 habitantes. Suponga que la tasa de crecimiento de una epidemia (la tasa de variación del número de personas infectadas) en Fort Bragg es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y el número de personas no infectadas. Cuando 100 personas están infectadas, la epidemia crece a una tasa de 9 personas por día. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento de la epidemia como una función del número de personas no infectadas. **(b)** ¿Qué tan rápido es el crecimiento de la epidemia cuando 200 personas están infectadas? **(c)** En la graficadora, determine cuántas personas están infectadas cuando la tasa de crecimiento de la epidemia es un máximo.

28. Una tienda de campaña con forma de pirámide cuadrangular se construye a partir de una pieza cuadrada de material de 5 m de lado. En la base de la pirámide, sea x metros la distancia desde el centro a uno de sus lados. Refiérase a la figura. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la casa de campaña como una función de x. *Sugerencia:* La fórmula para el volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde V, B y h son, respectivamente, las medidas del volumen, el área de la base y la altura. **(b)** Determine el volumen de la pirámide cuando $x = 0.8$. **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de metro, el valor de x para el cual el volumen de la pirámide es un máximo.



1.4 INTRODUCCIÓN GRÁFICA A LOS LÍMITES DE FUNCIONES

El primer contacto con límites concierne a *límites de funciones*. Para dar una idea intuitiva del límite de una función se dedicará esta sección a una interpretación gráfica, los resultados de esto se confirmarán analíticamente al emplear desigualdades. La discusión desarrollada aquí facilitará el camino para la definición présentada en la sección 1.5.

Se comenzará con una función particular:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \tag{1}$$

Observe que esta función no está definida cuando $x = 1$; esto es, $f(1)$ no existe. Sin embargo, la función está definida para cualquier otro número real. Se investigarán los valores de la función cuando x se aproxima a 1, pero sin lle-

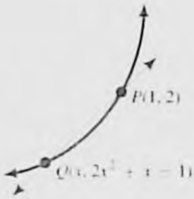


FIGURA 1

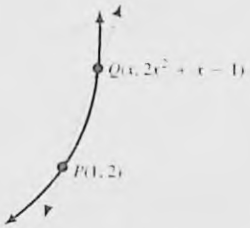


FIGURA 2

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0.25	3.5
0.5	4
0.75	4.5
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

Tabla 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1.75	6.5
1.5	6.0
1.25	5.5
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

gar a ser 1. Usted puede preguntarse por qué se desea considerar estos valores de función. El siguiente ejemplo ilustrativo orientará esa pregunta.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 El punto $P(1, 2)$ está sobre la curva que tiene como ecuación

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Sea $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ otro punto sobre esta curva, diferente de P. Cada una de las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de la ecuación y la recta secante que pasa por Q y P, donde Q está cerca de P. En la figura 1, la coordenada x de Q es menor que 1, y en la figura 2 es mayor que 1. Suponga que $f(x)$ es la pendiente de la recta PQ. Entonces

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

la cual es la ecuación (1). Además, $x \neq 1$ porque P y Q son puntos distintos. Conforme x se aproximan cada vez más a 1, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más al número que se definirá en la sección 2.1 como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P. ◀

Considere otra vez la función definida por la ecuación (1) y calcule $f(x)$ cuando x toma los valores 0, 0.25, 0.50, 0.75, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, y así sucesivamente. Se están tomando valores de x cada vez más cercanos a 1 pero menores que 1; en otras palabras, la variable x se aproxima a 1 a través de números que son menores que 1. La tabla 1 proporciona los valores de la función para estos números.

Ahora considere que la variable se aproxima a 1 a través de números que son mayores que 1; esto es, x toma los valores 2, 1.75, 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, etc. Los valores de la función para estos números se muestran en la tabla 2.

Observe que en las dos tablas conforme x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5; y cuanto más cerca esté x de 1, más cerca estará $f(x)$ de 5. Por ejemplo, de la tabla 1, cuando $x = 0.9$, $f(x) = 4.8$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.1, $f(x)$ es menor que 5 por 0.2. Cuando $x = 0.999$, $f(x) = 4.998$; es decir, cuando x es menor que 1 por 0.001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.002. Además, cuando $x = 0.9999$, $f(x) = 0.49998$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.0002.

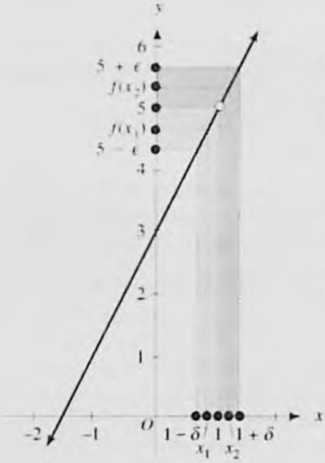
La tabla 2, muestra que cuando $x = 1.1$, $f(x) = 5.2$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.1, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.2. Cuando $x = 1.001$, $f(x) = 5.002$; es decir, cuando x es mayor que 1 por 0.001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.002. Cuando $x = 1.0001$, $f(x) = 5.0002$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.0002.

Por tanto, de las dos tablas se observa que cuando x difiere de 1 por ± 0.001, (esto es $x = 0.999$ o $x = 1.001$), $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.002 (es decir $f(x) = 4.998$ o $f(x) = 5.002$). Y cuando x difiere de 1 por ± 0.0001, $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.0002.

Ahora, enfocando la situación desde otro punto de vista, se considerarán primero los valores de $f(x)$. Es posible hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cercanos a 5 como se desee, si se toman valores de x suficientemente cercanos a 1; esto es, $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee haciendo $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño. Pero tenga presente que x nunca toma el valor 1.

Esta condición puede escribirse en forma más precisa empleando dos símbolos para las diferencias pequeñas. Los símbolos empleados usualmente son las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta). De modo que se establece que para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, seleccionado adecuadamente, tal que si $|x - 1|$ es menor que δ y $|x - 1| \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), entonces $|f(x) - 5|$ es menor que ϵ. Es importante señalar que primero se elige ϵ y que el valor de δ depende del valor de ϵ. Otra forma de expresar esto es: proporcionado cualquier número positivo ϵ, puede lograrse que $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño; es decir, existe un número positivo δ lo suficientemente pequeño tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon \tag{2}$$



$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

FIGURA 3

Observe que el numerador de la fracción en (1) puede factorizarse de modo que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

Si $x \neq 1$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 1$ para obtener

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \tag{3}$$

La ecuación (3), junto con la indicación de que $x \neq 1$, es tan adecuada como la ecuación (1) para una definición de $f(x)$.

Ahora se verá el significado geométrico de todo esto para la función particular definida por las ecuaciones (1) o (3). La figura 3 ilustra el significado geométrico de ϵ y δ. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$; o equivalentemente,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon$$

[0, 4.7] por [4, 6]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

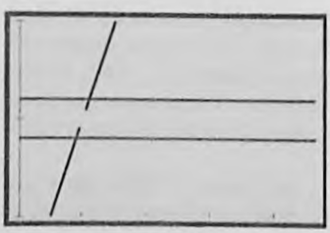
FIGURA 4

Otra manera de establecer esto es la siguiente: $f(x)$, en el eje vertical, puede restringirse a que esté entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$ obligando a que x, en el eje horizontal, esté entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$.

A continuación se mostrará gráficamente cómo elegir una δ adecuada para una ϵ dada. La figura 4 muestra la gráfica de la función f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [4, 6]. La gráfica tiene un «agujero» en el punto (1, 5), el cual puede o no exhibirse en la graficadora, esto depende del modelo de la graficadora y del rectángulo de inspección elegido.

Suponga que $\epsilon = 0.2$; se desea restringir $f(x)$, en el eje vertical, de modo que esté entre $5 - 0.2$ y $5 + 0.2$ o, equivalentemente, entre 4.8 y 5.2. Se trazan las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$ y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección, como se muestra en la figura 5. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.9$ y $x = 1.1$, respectivamente. De modo que para $\epsilon = 0.2$, se toma $\delta = 0.1$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.2$$



[0, 4.7] por [4, 6]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

FIGURA 5

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$, lo cual está de acuerdo con lo observado en las tablas 1 y 2. Si su graficadora tiene la característica de *sombra* (*shade*), se podrá tener apoyo gráfico al trazar la gráfica de f: el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$, y el

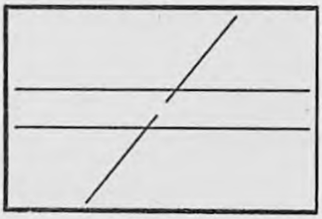
[0, 4.7] por [4, 6]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

$x = 0.9$ y $x = 1.1$

FIGURA 6

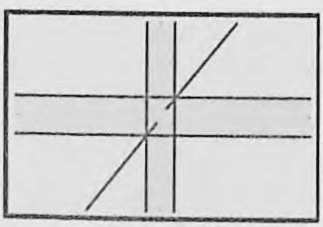


[0.9, 1.1] por [4.9, 5.1]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

FIGURA 7



[0.9, 1.1] por [4.9, 5.1]

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

$x = 0.99$ y $x = 1.01$

FIGURA 8

rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.9$ y $x = 1.1$ en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [4, 6] como se muestra en la figura 6.

Ahora suponga que $\epsilon = 0.02$ y trace la gráfica de f y las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$ en el rectángulo de inspección de [0.9, 1.1] por [4.9, 5.1] como se muestra en la figura 7. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.99$ y $x = 1.01$, respectivamente. Por tanto, para $\epsilon = 0.02$, se toma $\delta = 0.01$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.01 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.02$$

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.02$ y $\delta = 0.01$, lo cual está de acuerdo con la información de las tablas 1 y 2. Otra vez se obtiene apoyo gráfico adicional de la figura 8, la cual muestra el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$, el rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.99$ y $x = 1.01$ y la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [0.9, 1.1] por [4.9, 5.1].

Se puede dar como ϵ cualquier número positivo pequeño y determinar un valor adecuado para δ tal que si $|x - 1| < \delta$ y $x \neq 1$ (esto es, $0 < |x - 1| < \delta$), entonces $|f(x) - 5|$ será menor que ϵ. Observe que los valores de ϵ se eligen arbitrariamente y puede ser tan pequeño como se desee, y que el valor de δ depende del valor elegido de ϵ. También debe señalarse que a un valor pequeño de ϵ le corresponderá un valor pequeño de δ. Como para cualquier $\epsilon > 0$ puede determinarse un $\delta > 0$ tal que la proposición (2) se cumpla, se establece que el límite de $f(x)$ conforme x tiende o se aproxima a 1, es igual a 5, o expresado con símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que en esta ecuación se tiene un nuevo uso del símbolo "igual". Aquí, ningún valor de x hace que $f(x)$ tenga el valor 5. El símbolo "igual" es apropiado debido a que el lado izquierdo está escrito como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

De (3) es evidente que puede lograrse que $f(x)$ esté tan cerca de 5 como se desee, tomando x suficientemente cerca de 1, por lo que esta propiedad de la función f no depende de que f esté definida cuando $x = 1$. Este hecho proporciona la diferencia entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y el valor de la función en 1; es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, *pero $f(1)$ no existe*. En consecuencia, en la proposición (2), se escribe $0 < |x - 1|$ debido a que sólo nos interesan los valores de $f(x)$ para x cerca de 1, pero no para $x = 1$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

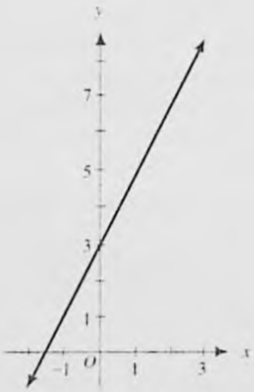
La gráfica de g se muestra en la figura 9. Excepto en $x = 1$, la función g tiene los mismos valores de la función f definida por la ecuación (1). En consecuencia, como el hecho de que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ no tiene nada que ver con lo que ocurre en $x = 1$, se puede aplicar el argumento anterior a la función g y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 5$. Note que $g(1) = 7$; por lo que para esta función, el límite de la función y el valor de la función existen para $x = 1$, pero no son iguales. ◀

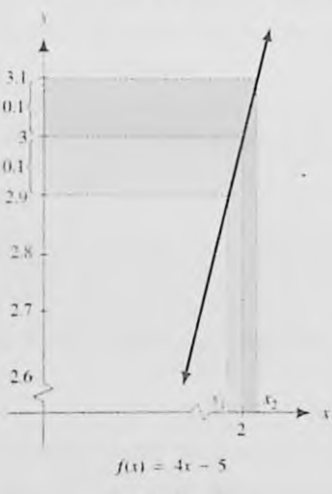
$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

FIGURA 9



$h(x) = 2x + 3$

FIGURA 10



$f(x) = 4x - 5$

FIGURA 11

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea h la función definida por

$$h(x) = 2x + 3$$

La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = 2x + 3$, mostrada en la figura 10. Otra vez, excepto en $x = 1$, se tiene una función con los mismos valores de la función f, definida por la ecuación (1), así como de la función g del ejemplo ilustrativo 2. De este modo, se puede aplicar una vez más el mismo argumento y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |h(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 5$. Sin embargo, en esta ocasión, el valor de la función y el límite existen y son iguales para $x = 1$. Una consecuencia de este hecho, como se verá en la sección 1.8, es que la función h es *continua* en $x = 1$. Observe que la gráfica de h de la figura 10 no tiene ningún agujero en $x = 1$, considerando que las gráficas de f y g de las figuras 3 y 9, respectivamente, tienen un agujero en $x = 1$. En la sección 1.8 aprenderá que las funciones f y g son *discontinuas* en $x = 1$. ◀

EJEMPLO 1 Sea f la función definida por

$$f(x) = 4x - 5$$

(a) Utilice una figura semejante a la figura 3 para $\epsilon = 0.1$ con el fin de determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.

Solución

(a) Refiérase a la figura 11 y observe que los valores de la función crecen conforme x se incrementa. Así, la figura indica que se necesita un valor de x_1 tal que $f(x_1) = 2.9$ y un valor de x_2 tal que $f(x_2) = 3.1$; esto es, se necesitan x_1 y x_2 tales que

$$4x_1 - 5 = 2.9 \qquad\qquad 4x_2 - 5 = 3.1$$
$$x_1 = \frac{7.9}{4} \qquad\qquad x_2 = \frac{8.1}{4}$$
$$x_1 = 1.975 \qquad\qquad x_2 = 2.025$$

Debido a que $2 - 1.975 = 0.025$ y $2.025 - 2 = 0.025$, se elige $\delta = 0.025$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.025 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) En la graficadora se traza la gráfica de f y las rectas $y = 2.9$ y $y = 3.1$ en el rectángulo de inspección de $[0, 3]$ por $[0, 4]$ como se muestra en la figura 12. Con la operación de *intersección* (*intersection*) o las de *rastreo* (*trace*) y *aumento* (*zoom*) de la graficadora, se determina que la recta $y = 2.9$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.975$ y que la recta $y = 3.1$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.025$, lo cual apoya la elección de δ efectuada en el inciso (a). ◀

$[0, 3]$ por $[0, 4]$
$f(x) = 4x - 5$
$y = 2.9$ y $y = 3.1$

FIGURA 12

En el ejemplo siguiente se utiliza el símbolo $\Rightarrow$ por primera vez. La flecha $\Rightarrow$ significa *implica*. También se emplea la doble flecha $\Leftrightarrow$, lo cual significa que las proposiciones precedente y siguiente son *equivalentes*.

EJEMPLO 2 Confirme analíticamente la elección de δ en el ejemplo 1 utilizando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1\\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < 0.1\\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 2| < 0.1\\
\Leftrightarrow\ &\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2| < 0.025
\end{aligned}$$

Esta proposición indica que una elección adecuada de δ es 0.025. Con esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < 0.025\\
& 4|x - 2| < 4(0.025)\\
\Rightarrow\ & |4x - 8| < 0.1\\
\Rightarrow\ & |(4x - 5) - 3| < 0.1\\
\Rightarrow\ & |f(x) - 3| < 0.1
\end{aligned}$$

De esta manera, se ha confirmado analíticamente que

$$\text{si } 0 < |x - 2| < 0.025 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1 \tag{4}$$

En los ejemplos 1 y 2 cualquier número positivo menor que 0.025 puede utilizarse en lugar de 0.025 como la δ requerida. Observe este hecho en la figura 11. Además, si $0 < \gamma < 0.025$ y si se cumple la desigualdad (4), entonces se tiene que

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \gamma \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

ya que cualquier número x que satisfaga la desigualdad $0 < |x - 2| < \gamma$ también satisface la desigualdad $0 < |x - 2| < 0.025$.

Las soluciones de los ejemplos 1 y 2 consistieron en determinar una δ para una ϵ específica. En la sección 1.5 aprenderá que si para cualquier $\epsilon > 0$ se puede determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon$$

entonces se habrá establecido que $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$. Esto se hará en el ejemplo 1 de la sección 1.5.

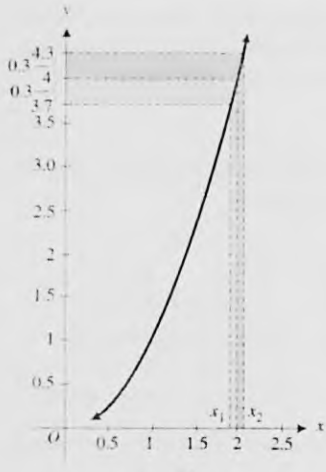
EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2$$

(a) Utilice una figura con $\epsilon = 0.3$ para determinar una $\delta > 0$ tal que

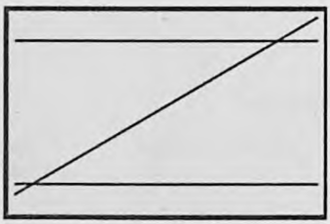
$$\text{si } 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.



$f(x) = x^2$

FIGURA 13



[1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]

$f(x) = x^2$

$y = 3.7$ y $y = 4.3$

FIGURA 14

Solución

(a) La figura 13 muestra una porción de la gráfica de f en una vecindad del punto (2, 4). Si $x > 0$, los valores de la función crecen conforme el valor de x se incrementa. Por tanto, la figura indica que se necesita un valor positivo x_1 tal que $f(x_1) = 3.7$ y un valor positivo x_2 tal que $f(x_2) = 4.3$; esto es, se necesitan $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, tales que

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 3.7 & \qquad x_2^2 &= 4.3 \\ x_1 &= \sqrt{3.77} & x_2 &= \sqrt{4.3} \\ x_1 &\approx 1.92 & x_2 &\approx 2.07 \end{aligned}$$

Entonces $2 - 1.92 = 0.08$ y $2.07 - 2 = 0.07$. Debido a que $0.07 < 0.08$, se elige $\delta = 0.07$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.07 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3$$

Cualquier número positivo menor que 0.07 puede tomarse como la δ requerida.

(b) La figura 14 muestra las gráficas de f y de las rectas $y = 3.7$ y $y = 4.3$ trazadas en el rectángulo de inspección de [1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]. En la graficadora se determina que la recta $y = 3.7$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.92$ y que la recta $y = 4.3$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.07$, lo cual apoya la elección de δ del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Confirme analíticamente la elección de δ del ejemplo 3 empleando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3 \qquad (5) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x^2 - 4| < 0.3 \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2||x + 2| < 0.3 \end{aligned}$$

Observe en el lado derecho de esta proposición que además del factor $|x - 2|$, se tiene el factor $|x + 2|$. Por tanto, se necesita obtener una desigualdad que contenga a $|x + 2|$. Para hacer esto, se restringe la δ que se requiere. Considere que δ es menor que o igual a 0.1, lo cual parece razonable. Entonces

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \le 0.1 \\ \Rightarrow \quad & 0 < |x - 2| < 0.1 \\ \Rightarrow \quad & -0.1 < x - 2 < 0.1 \\ \Rightarrow \quad & 3.9 < x + 2 < 4.1 \\ \Rightarrow \quad & |x + 2| < 4.1 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \le 0.1 \\ \Rightarrow \quad & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 2| < 4.1 \\ \Rightarrow \quad & |x - 2||x + 2| < \delta(4.1) \end{aligned}$$

Recuerde que el objetivo consiste en obtener la proposición (5). De modo que, debe pedirse que

$$\delta(4.1) \le 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \le \tfrac{3}{41}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 0.1$ y $\delta \leq \frac{3}{41}$. Para que ambas restricciones se cumplan, se toma $\delta = \frac{3}{41}$, el menor de los dos números. Mediante el uso de esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 2| < \tfrac{3}{41} \\ \Rightarrow \quad & |x - 2| < \tfrac{3}{41} \quad \text{y} \quad |x + 2| < 4.1 \\ \Rightarrow \quad & |x - 2|\,|x + 2| < \tfrac{3}{41}(4.1) \\ \Rightarrow \quad & |x^2 - 4| < 0.3 \end{aligned}$$

Por tanto, se ha determinado una δ de modo que la proposición (5) se cumple. Puesto que $\frac{3}{41} \approx 0.07$ se ha confirmado la elección de δ del ejemplo 3. ◀

Ahora se aplicarán los conceptos anteriores a fin de determinar cómo debe medirse aproximadamente una cantidad para asegurar una aproximación específica de la medición de una segunda cantidad que depende de la primera.

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.5 m^3 y 80.5 m^3?

Solución En el ejemplo 1 de la sección 1.3 se obtuvo el siguiente modelo matemático de la situación:

$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

donde $f(x)$ metros cúbicos es el volumen de un gas cuya temperatura es x grados. Como $f(140) = 80$, el gas ocupa 80 m^3 a una temperatura de 140°. Se desea determinar qué tan cerca debe estar x de 140 para que $f(x)$ no esté a más de 0.5 de 80; esto es, para $\epsilon = 0.5$ se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 80| < 0.5 \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\tfrac{4}{7}x - 80| < 0.5 \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad \tfrac{7}{4}|\tfrac{4}{7}x - 80| < \tfrac{7}{4}(0.5) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 140| < 0.875 \end{aligned}$$

Por tanto, se toma $\delta = 0.875$, y se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 140| < 0.875 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{4}{7}|x - 140| < \tfrac{4}{7}(0.875) \\ \Rightarrow \quad & |\tfrac{4}{7}x - 80| < 0.5 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 140| < 0.875 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 80| < 0.5$$

Conclusión: Para que el gas ocupe un volumen entre 79.5 y 80.5 m^3 su temperatura debe estar entre 139.125° y 140.875°. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** La cubierta circular de una mesa tiene un área que difiere de 225π pulg^2 en menos de 4 pulg^2. ¿Cuál es la medida aproximada del radio?

$A(r) = \pi r^2$

FIGURA 15

Solución Observe la figura 15. Si la longitud del radio de la cubierta de la mesa es de r pulgadas y $A(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la cubierta, entonces

$$A(r) = \pi r^2$$

El área es 225π pulg^2 cuando el radio mide 15 pulg. Se desea determinar qué tan cerca debe estar r de 15, de modo que $A(r)$ no esté a más de 4 unidades de 225π. Esto es, si $\epsilon = 4$, se desea determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
&\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |A(r) - 225\pi| < 4 \\
\Leftrightarrow \quad &\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\pi r^2 - 225\pi| < 4 \\
\Leftrightarrow \quad &\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |r - 15|\,|r + 15| < \frac{4}{\pi} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Debido a que se tiene el factor $|x + 15|$ del lado derecho de la proposición (6), se necesita una desigualdad que contenga a este factor. A fin de obtener dicha desigualdad, se restringe δ de modo que $\delta \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
&0 < |r - 15| < \delta \ \text{ y } \ \delta \leq 1 \Rightarrow 0 < |r - 15| < 1 \\
\Rightarrow \quad &-1 < r - 15 < 1 \Rightarrow 14 < r < 16 \\
\Rightarrow \quad &29 < r + 15 < 31 \Rightarrow |r + 15| < 31
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \ \text{ y } \ \delta \leq 1 \ \text{ entonces } \ |r - 15|\,|r + 15| < \delta(31)$$

Como se desea que la proposición (6) se cumpla, será necesario que

$$\delta(31) \leq \frac{4}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \frac{4}{31\pi}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{4}{31\pi}$. Se elige δ como $\frac{4}{31\pi}$, el menor de estos dos números. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
&0 < |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \\
\Rightarrow \quad &|r - 15| < \frac{4}{31\pi} \ \text{ y } \ |r + 15| < 31 \\
\Rightarrow \quad &|r - 15|\,|r + 15| < \frac{4}{31\pi}(31) \\
\Rightarrow \quad &\pi|r^2 - 225| < 4
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{si } \ 0 < |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \quad \text{entonces} \quad |A(r) - 225\pi| < 4$$

Como $\frac{4}{31\pi} \approx 0.041$, se tiene la siguiente conclusión.

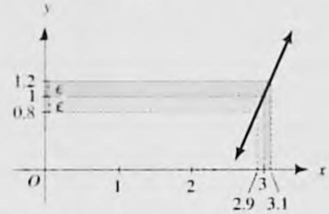
<u>**Conclusión:**</u> El radio de la cubierta de la mesa debe estar entre 14.959 pulg y 15.041 pulg para que dicha cubierta tenga un área que difiera de 225π pulg^2 por menos de 4 pulg^2. ◀

EJERCICIOS 1.4

En los ejercicios 1 y 2, se proporcionan $f(x)$, a, L, ϵ y una figura. A partir de la figura determine $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

1. $f(x) = 2x - 5$; $a = 3$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$



2. $f(x) = 2 - 3x$; $a = -1$; $L = 5$; $\epsilon = 0.6$

En los ejercicios 3 a 14, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ. (a) Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 1 y 2 y el ejemplo 1, y argumentos similares al del ejemplo 1 para determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) usando una graficadora.

3. $f(x) = x - 1$; $a = 4$; $L = 3$; $\epsilon = 0.03$

4. $f(x) = x + 2$; $a = 3$; $L = 5$; $\epsilon = 0.02$

5. $f(x) = 2x + 4$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.01$

6. $f(x) = 3x - 1$; $a = 2$; $L = 5$; $\epsilon = 0.1$

7. $f(x) = 5x - 3$; $a = 1$; $L = 2$; $\epsilon = 0.05$

8. $f(x) = 4x - 5$; $a = 2$; $L = 3$; $\epsilon = 0.001$

9. $f(x) = 3 - 4x$; $a = -1$; $L = 7$; $\epsilon = 0.02$

10. $f(x) = 2 + 5x$; $a = -2$; $L = -8$; $\epsilon = 0.002$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $a = -2$; $L = -4$; $\epsilon = 0.01$

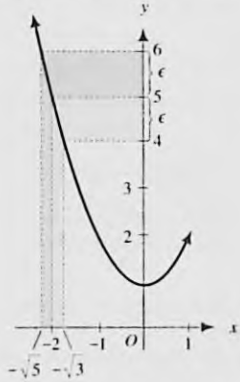
12. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1}$; $a = \dfrac{1}{3}$; $L = 2$; $\epsilon = 0.01$

13. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1}$; $a = -\dfrac{1}{2}$; $L = -4$; $\epsilon = 0.03$

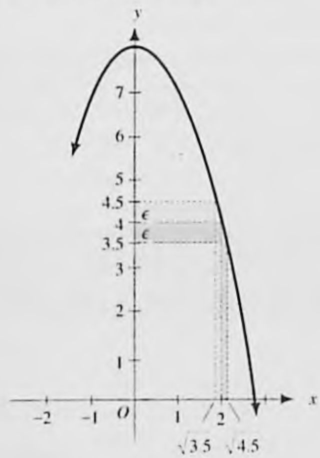
14. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3}$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.05$

Para los ejercicios 15 y 16, siga las mismas instrucciones que para los ejercicios 1 y 2.

15. $f(x) = x^2 + 1$; $a = -2$; $L = 5$; $\epsilon = 1$



16. $f(x) = 8 - x^2$; $a = 2$; $L = 4$; $\epsilon = 0.5$



En los ejercicios 17 a 24, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ (a). Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 15 y 16 y del ejemplo 3, y argumentos similares al de este ejemplo para determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

17. $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 9$; $\epsilon = 0.5$

18. $f(x) = x^2$; $a = 0.5$; $L = 0.25$; $\epsilon = 0.1$

19. $f(x) = x^2$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$

20. $f(x) = x^2 - 5$; $a = 1$; $L = -4$; $\epsilon = 0.15$

21. $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $a = 2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.4$

22. $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.05$

23. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$; $a = -3$; $L = 6$; $\epsilon = 0.6$

24. $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$; $a = 1$; $L = -2$; $\epsilon = 0.3$

En los ejercicios 25 a 36, confirme analíticamente (empleando propiedades de las desigualdades) la elección de δ del ejercicio indicado.

25. Ejercicio 3 **26.** Ejercicio 4

27. Ejercicio 7 **28.** Ejercicio 8

29. Ejercicio 13 **30.** Ejercicio 14

31. Ejercicio 17 **32.** Ejercicio 18

33. Ejercicio 21 **34.** Ejercicio 22

35. Ejercicio 23 **36.** Ejercicio 24

En los ejercicios 37 a 44, primero obtenga una función como modelo matemático de la situación. Defina la variable dependiente y el valor de función como números, e indique las unidades de medición. No olvide completar el ejercicio con una conclusión.

37. A una persona que gana \$15 por hora se le paga sólo por el tiempo real de trabajo. ¿Qué tan cerca de 8 horas debe trabajar una persona para que su salario difiera de \$120 en no más de 25 centavos?

38. Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.95 m^3 y 80.05 m^3?

39. Se construye una cerca alrededor de un jardín de forma cuadrada. ¿Qué tan próxima a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que la longitud total de la cerca esté entre 39.96 y 40.04 pie?

40. Se construye una señal circular de modo que la longitud de su circunferencia difiera de 6π pie en no más de 0.1 pie. ¿Qué tan cerca de 3 pie debe medir el radio de la señal?

41. Para el jardín del ejercicio 39, ¿qué tan cercana a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que el área de dicho jardín difiera de 100 pie^2 en no más de 0.5 pie^2?

42. Para la señal del ejercicio 40, ¿qué tan cercano a 3 pie debe medir el radio de la señal para que el área de dicha señal difiera de 9π pie^2 en no más de 0.2 pie^2?

43. El número de pies que cae un cuerpo a partir del reposo en t segundos varía directamente como el cuadrado de t, y un cuerpo cae a partir del reposo 64 pie en 2 s. ¿Qué tiempo cercano a 5 s le tomará a un cuerpo caer entre 398 y 402 pie?

44. El número de libras por pie cuadrado de la fuerza del viento sobre una superficie plana cuando la velocidad del viento es v millas por hora, varía directamente como el cuadrado de v. Suponga que la fuerza es de 2 lb/pie^2 cuando la velocidad del viento es de 20 mi/h. ¿Qué tan cerca de 30 mi/h será la velocidad del viento cuando su fuerza sobre una superficie plana está entre 4.45 lb/pie^2 y 4.55 lb/pie^2?

1.5 DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES

Ahora se presentará la definición formal de límite de una función. La definición contiene la proposición que implica las desigualdades con la notación ϵ-δ mostrada con frecuencia en la sección 1.4.

1.5.1 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L**, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:

dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad (1)$$

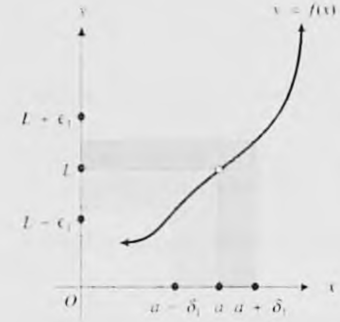


FIGURA 1

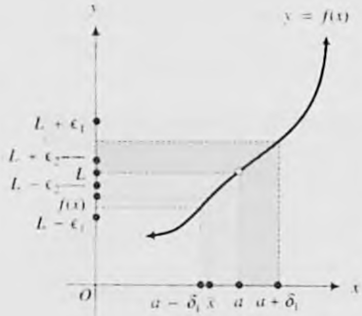


FIGURA 2

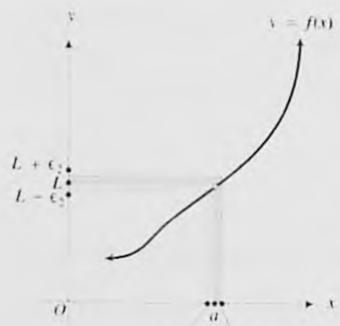


FIGURA 3

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Observe que en la definición no se menciona nada acerca del valor de la función cuando $x = a$. Recuerde, como se señaló en la sección 1.4, la función f no necesita estar definida en a, para que el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista. Más aún, si f está definida en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puede existir sin que tenga el mismo valor que $f(a)$ como en el caso de la función del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.4.

Una interpretación geométrica de la definición de límite de una función f se muestra en la figura 1, la cual presenta una porción de la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$. Como f no está necesariamente definida en a, no existe un punto en la gráfica de f con abscisa a. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. En otras palabras, al restringir x, en el eje horizontal, de modo que esté entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, se restringe a $f(x)$, en el eje vertical, de manera que esté entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. Así,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_1$$

La figura 2 muestra cómo un valor pequeño de ϵ puede requerir una elección diferente para δ. En la figura se aprecia que $\epsilon_2 < \epsilon_1$, y que el valor δ_1 es demasiado grande; esto es, existen valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta_1$, pero $|f(x) - L|$ no es menor que ϵ_2. Por ejemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, pero $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Por esta razón debe elegirse un valor δ_2 más pequeño, como se muestra en la figura 3, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_2$$

Sin embargo, para cualquier elección de $\epsilon > 0$, no importa que tan pequeño sea, existe $\delta > 0$ tal que la proposición (1) se cumple. Por tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

En el primer ejemplo de esta sección, se vuelve a tratar la función mostrada en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

▶ EJEMPLO 1

Utilice la definición de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$$

Solución El primer requisito de la definición 1.5.1 es que $4x - 5$ esté definida en cada número de un intervalo abierto que contenga a 2, excepto posiblemente en 2. Puesto que $4x - 5$ está definida para todos los números reales, cualquier intervalo abierto que contenga a 2 satisface este requisito. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon \qquad \textbf{(2)}\\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 2| < \epsilon\\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2| < \tfrac{1}{4}\epsilon
\end{aligned}$$

Esta proposición denota que $\frac{1}{4}\epsilon$ es una δ satisfactoria. Con esta elección de δ se tiene el argumento siguiente:

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta\\
\Rightarrow \quad & 4|x - 2| < 4\delta\\
\Rightarrow \quad & |4x - 8| < 4\delta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < 4\delta$$
$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon \quad (\text{porque } \delta = \tfrac{1}{4}\epsilon)$$

Por tanto, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$, entonces se cumple la proposición (2). Esto demuestra que $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$.

En particular, si $\epsilon = 0.1$, entonces se toma $\delta = \frac{1}{4}(0.1)$, es decir, $\delta = 0.025$. Este valor de δ corresponde al valor determinado en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

Cualquier número positivo menor que $\frac{1}{4}\epsilon$ puede emplearse también como la δ requerida. ◀

En el suplemento de esta sección, al final del ápendice se proporciona un ejemplo que muestra cómo aplicar la definición 1.5.1 para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

A fin de calcular límites de manera más fácil que cuando se utiliza la definición se emplean teoremas, cuyas demostraciones están basadas en la definición. Estos teoremas, así como otros que aparecen en secciones posteriores de este capítulo, están señalados con la etiqueta *teorema de límites*.

1.5.2 Teorema 1 de límites Límite de una función lineal

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Demostración A partir de la definición de límite de una función, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon \qquad (3)$$

Caso 1: $m \neq 0$.

Como $|(mx + b) - (ma + b)| = |m| \cdot |x - a|$, se desea encontrar una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |m| \cdot |x - a| < \epsilon$$

o como $m \neq 0$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Esta proposición se cumplirá si $\delta = \epsilon/|m|$; por lo que se puede concluir que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ y } \delta = \frac{\epsilon}{|m|} \quad \text{entonces} \quad |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$$

Esto demuestra el teorema para el caso 1.

Caso 2: $m = 0$.

Si $m = 0$, entonces $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ para todos los valores de x. De modo que se toma δ como cualquier número positivo, cumpliéndose así la proposición (3). Esto demuestra el teorema para el caso 2. ■

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Del teorema 1 de límites,

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 3 \cdot 2 + 5$$
$$= 11$$

◀

1.5.3 Teorema 2 de límites Límite de una función constante

Si c es una constante, entonces para cualquier número a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 0$ y $b = c$.

1.5.4 Teorema 3 de límites Límite de la función identidad

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Este teorema también se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 1$ y $b = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Del teorema 2 de límites,

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

y del teorema 3 de límites,

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$

◀

1.5.5 Teorema 4 de límites Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

La demostración del teorema 4 de límites se presenta en el suplemento de esta sección. En el enunciado del teorema, el hecho de que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ indica que los límites existen. En otras palabras, no se puede decir simplemente que *el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites*, se debe agregar la condición de la existencia de los límites: *si los límites existen*. Consulte el ejercicio 44 de la sección 1.6 y el ejercicio 50 de la sección 1.7.

El teorema siguiente de límites es una extensión del teorema 4 de límites para cualquier número finito de funciones. Se le pedirá que proporcione la demostración mediante inducción matemática en el ejercicio suplementario 10.

1.5.6 Teorema 5 de límites Límite de la suma y de la diferencia de n funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

El límite del producto de dos funciones se tiene mediante el teorema siguiente de límites. Otra vez, observe que el teorema establece que el límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites si los límites existen. Para la demostración, refiérase al suplemento de esta sección.

1.5.7 Teorema 6 de límites Límite del producto de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Del teorema 3 de límites, $\lim_{x \to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 9$. Así, por el teorema 6 de límites

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} [x(2x + 1)] &= \lim_{x \to 4} x \cdot \lim_{x \to 4} (2x + 1) \\ &= 4 \cdot 9 \\ &= 36 \end{aligned}$$

◀

El teorema 6 de límites también puede extenderse a un número finito de funciones mediante la aplicación de la inducción matemática, como se le pedirá que lo haga en el ejercicio suplementario 13.

1.5.8 Teorema 7 de límites Límite del producto de *n* funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots,$ y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

1.5.9 Teorema 8 de límites Límite de la *n*-ésima potencia de una función

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

La demostración es inmediata a partir del teorema 7 de límites, tomando $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ todas iguales a $f(x)$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ todos iguales a L.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Del teorema 1 de límites, $\lim_{x \to -2} (5x + 7) = -3$. Por tanto, del teorema 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 &= \left[\lim_{x \to -2} (5x + 7) \right]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

◀

El siguiente teorema de límites trata acerca del límite del cociente de dos funciones, y no sólo se requiere la existencia de los límites, sino que también se pide que el límite de la función del denominador sea diferente de cero.

1.5.10 Teorema 9 de límites Límite del cociente de dos funciones

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

La demostración de este teorema se presenta en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Del teorema 3 de límites, $\lim_{x\to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim_{x\to 4} (-7x + 1) = -27$. Por tanto, del teorema 9 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{x}{-7x+1} &= \frac{\lim_{x\to 4} x}{\lim_{x\to 4}(-7x+1)}\\ &= \frac{4}{-27}\\ &= -\frac{4}{27}\end{aligned}$$ ◀

1.5.11 Teorema 10 de límites Límite de la raíz *n*-ésima de una función

Si n es un número entero positivo y $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

La demostración de este teorema también se proporciona en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Del ejemplo ilustrativo 5 y del teorema 10 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x\to 4} \frac{x}{-7x+1}}\\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}}\\ &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$ ◀

Ahora se establecerán dos teoremas, los cuales son casos especiales de los teoremas 9 y 10 de límites, respectivamente. Cada uno de estos teoremas se utiliza en la sección 1.9 para la demostración de los teoremas de límites correspondientes.

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Las demostraciones de los teoremas 1.5.12 y 1.5.13 se presentan en el suplemento de esta sección.

En los ejemplos siguientes se aplicarán los teoremas anteriores para calcular límites. A fin de indicar qué teorema se ha aplicado se escribirá la abreviación "T.n L.", donde n representa el número del teorema; por ejemplo, "T.2 L." se refiere al teorema 2 de límites.

EJEMPLO 2 Calcule $\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 5 L.)}\\
&= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 6 L.)}\\
&= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 && \textbf{(T. 3 L. y T.2 L.)}\\
&= 9 + 21 - 5\\
&= 25
\end{aligned}$$

Es importante que se de cuenta de que el límite del ejemplo 2 se evaluó mediante la aplicación directa de los teoremas de límites. Observe que para la función f del ejemplo no sólo el $\lim_{x \to 3} f(x)$ es igual a 25, sino que también $f(3)$ es igual a 25. Pero recuerde, $\lim_{x \to 3} f(x)$ y $f(a)$ no siempre son iguales.

EJEMPLO 3 Determine el siguiente límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} &= \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} && \textbf{(T. 10 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2}(x^3 + 2x + 3)}{\lim_{x \to 2}(x^2 + 5)}} && \textbf{(T. 9 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3}{\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 5 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{(\lim_{x \to 2} x)^3 + \lim_{x \to 2} 2 \cdot \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3}{(\lim_{x \to 2} x)^2 + \lim_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 6 L. y T. 8 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} && \textbf{(T. 3 L. y T. 2 L.)}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{8+4+3}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}$$

EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $f(x)$ cuando x toma los valores 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999 y cuando x es igual a 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a 5?

(b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
4	9
4.5	9.5
4.9	9.9
4.99	9.99
4.999	9.999

Tabla 2

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
6	11
5.5	10.5
5.1	10.1
5.01	10.01
5.001	10.001

Solución

(a) Las tablas 1 y 2 muestran los valores de $f(x)$ para los valores indicados de x. Observando estas tablas, parece que $f(x)$ se aproxima a 10 conforme x tiende a 5.

(b) En este caso, se tiene una situación diferente a las de los ejemplos anteriores. No puede aplicarse el teorema 9 de límites al cociente $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ debido a que $\lim_{x \to 5} (x - 5) = 0$. Sin embargo, al factorizar el numerador se obtiene

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Si $x \neq 5$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 5$ para obtener $x + 5$. Recuerde que cuando se calcula el límite de una función conforme x se aproxima a 5, se consideran los valores de x cercanos a 5, pero sin tomar este valor. Por tanto, es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 5$. La solución se expresa en la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \\
&= \lim_{x \to 5} (x + 5) \\
&= 10 \qquad \textbf{(T. 1 L.)}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Considere

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $g(x)$ cuando x toma los valores 3, 3.5, 3.9, 3.99, 3.999 y cuando x es igual a 5, 4.5, 4.1, 4.01, 4.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $g(x)$ conforme x tiende a 4?

(b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente.

(c) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim_{x \to 4} g(x)$ y, cuando sea apropiado, indique los teoremas que se aplicaron.

Solución

(a) Las tablas 3 y 4 muestran los valores de $g(x)$ para los valores especificados de x. Observando estas tablas, parece que $g(x)$ se aproxima a 0.2500 conforme x tiende a 4.

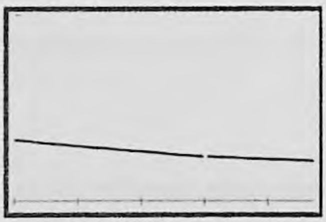
Tabla 3

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
3	0.2679
3.5	0.2583
3.9	0.2516
3.99	0.2502
3.999	0.2500

Tabla 4

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
5	0.2361
4.5	0.2426
4.1	0.2485
4.01	0.2498
4.001	0.2500

(b) La figura 4 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de $[1, 5.7]$ por $[0, 1]$. La gráfica tiene un agujero en el punto $(4, 0.25)$. Utilizando el rastreo (*trace*) de la graficadora, se observa que $g(x)$ se aproxima a 0.25 conforme x tiende a 4, lo cual apoya la respuesta del inciso (a).



$[1, 5.7]$ por $[0, 1]$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

FIGURA 4

(c) Como en el ejemplo 4, no se puede aplicar el teorema 9 de límites al cociente $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ debido a que $\lim_{x \to 4} (x - 4) = 0$. Para simplificar el cociente se racionaliza el numerador multiplicando tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{x} + 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \end{aligned}$$

Puesto que se está evaluando el límite conforme x tiende a 4, se consideran sólo los valores de x cercanos a 4 sin tomar este valor. En consecuencia, se pueden dividir el numerador y el denominador entre $x - 4$. Por tanto

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \qquad \text{si } x \neq 4$$

La solución se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{\lim_{x \to 4} 1}{\lim_{x \to 4}(\sqrt{x} + 2)} && \textbf{(T. 9 L.)} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \to 4} \sqrt{x} + \lim_{x \to 4} 2} && \textbf{(T. 2 L.)} \text{ y } \textbf{(T. 4 L.)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to 4} x} + 2} && \textbf{(T. 10 L.)} \text{ y } \textbf{(T. 2 L.)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} && \textbf{(T. 3 L.)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

◀

De vez en cuando se necesitarán otros dos enunciados de límites que son equivalentes a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Estos enunciados se presentan en los dos teoremas siguientes, cuyas demostraciones se le pedirán en los ejercicios 63 y 64.

1.5.14 Teorema

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$$

1.5.15 Teorema

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{t \to 0} f(t + a) = L$$

El teorema siguiente establece que una función no puede aproximarse a dos límites diferentes simultáneamente. Este teorema recibe el nombre de *teorema de unicidad*, debido a que garantiza que si el límite de una función existe, entonces es único.

1.5.16 Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Debido a este teorema se puede establecer que si una función f tiene un límite L en el número a, entonces L es *el* límite de f en a. La demostración del teorema se proporciona en el suplemento de esta sección.

EJERCICIOS 1.5

En los ejercicios 1 a 10, demuestre, aplicando la definición 1.5.1, que el límite es el número indicado.

1. $\lim_{x \to 2} 7 = 7$
2. $\lim_{x \to 5} (-4) = -4$
3. $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 9$
4. $\lim_{x \to 1} (4x + 3) = 7$
5. $\lim_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$
6. $\lim_{x \to -4} (2x + 7) = -1$
7. $\lim_{x \to -2} (1 + 3x) = -5$
8. $\lim_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$
9. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$
10. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

En los ejercicios 11 a 24, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

11. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$
12. $\lim_{x \to -4} (5x + 2)$
13. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$
14. $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$
15. $\lim_{z \to -2} (z^3 + 8)$
16. $\lim_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$
17. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$
18. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$
19. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$
20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$
21. $\lim_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$
22. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$
23. $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$
24. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{5 + 2x}{5 - x}}$

En los ejercicios 25 a 30, haga lo siguiente: (a) utilice una calculadora para determinar con cuatro cifras decimales y tabular los valores de $f(x)$ para los valores especificados de x. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a c? (b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de f en un rectángulo de inspección adecuado. (c) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \to c} f(x)$ y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

25. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; x es 1, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999 y x es 3, 2.5, 2.1, 2.01, 2.001; $c = 2$
26. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$; x es -3, -2.5, -2.1, -2.01, -2.001 y x es -1, -1.5, -1.9, -1.99, -1.999; $c = -2$
27. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$; x es -4, -3.5, -3.1, -3.01, -3.001, -3.0001 y x es -2, -2.5, -2.9, -2.99, -2.999, -2.9999; $c = -3$
28. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 9}$; x es 1, 1.4, 1.49, 1.499, 1.4999 y x es 2, 1.6, 1.51, 1.501, 1.5001; $c = \frac{3}{2}$
29. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; x es 8, 8.5, 8.9, 8.99, 8.999 y x es 10, 9.5, 9.1, 9.01, 9.001; $c = 9$

30. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$; x es $-1, -0.5, -0.1, -0.01, -0.001$ y x es $1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001$; $c = 0$

En los ejercicios 31 a 46, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

31. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

32. $\lim\limits_{z \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

33. $\lim\limits_{x \to 3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

34. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

35. $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

36. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

37. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

38. $\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

39. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

40. $\lim\limits_{t \to 3/2} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

41. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

42. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

43. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h + 2} - \sqrt{2}}{h}$

44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

46. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

47. Si $f(x) = x^2 + 5x - 3$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Apoye su respuesta gráficamente.

48. Si $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to -1} F(x) = F(-1)$. Apoye su respuesta gráficamente.

49. Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿por qué no existe $g(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

50. Si $G(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$, ¿por qué no existe $G(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} G(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

51. Si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$, ¿por qué no existe $h(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

52. Si $H(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$, ¿por qué no existe $H(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

53. Si

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

encuentre el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. Dibuje la gráfica de f.

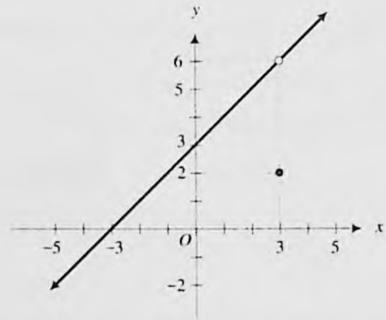
54. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

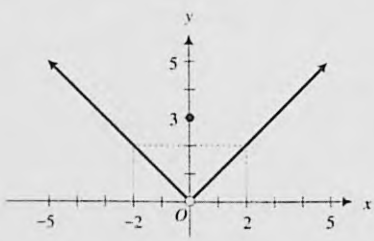
encuentre el $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. Dibuje la gráfica de f.

En los ejercicios 55 a 58, responda los incisos (a)-(c) a partir de la gráfica de f dibujada en la figura adjunta.

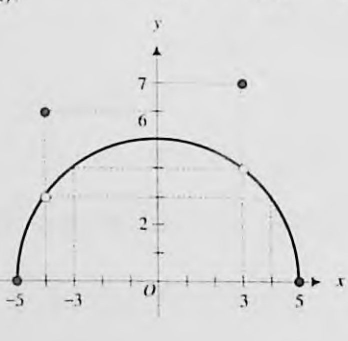
55. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?



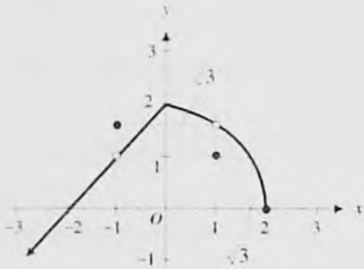
56. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?



57. El dominio de f es $[-5, 5]$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-4)$, $f(-3)$, $f(3)$ y $f(4)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$?



58. El dominio de f es $[-\infty, 2]$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{3})$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} f(x)$?



En los ejercicios 59 a 62, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas. En cada ejercicio el dominio de f es $(-\infty, +\infty)$.

59. $f(2) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq 2$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

60. $f(-3) = 4$; $f(3) = -5$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 3$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

61. $\lim\limits_{x \to -6} f(x) \neq f(-6)$; $\lim\limits_{x \to 6} f(x) \neq f(6)$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 6$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

62. $f(-2) \neq f(2)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 2$; el contradominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

63. Demuestre el teorema 1.5.14. *Sugerencia:* Debido a que el teorema tiene el conectivo lógico *si y sólo si*, la demostración debe realizarse en dos partes. Para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *si* $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L] = 0$, inicie con $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y sustituya $f(x)$ por $[f(x) - L] + L$, después aplique el teorema 4 de límites. Para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L] = 0$ o, equivalentemente, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L] = 0$ *si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, aplique el teorema 4 de límites a $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L]$.

64. Demuestre el teorema 1.5.15. *Sugerencia:* como en la demostración del teorema 1.5.14, se requieren dos partes. Para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *si* $\lim\limits_{t \to 0} f(t + a) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya $t + a$ por x y t por $x - a$. Para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim\limits_{t \to 0} f(t + a) = L$ o, equivalentemente, $\lim\limits_{t \to 0} f(t + a) = L$ *si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya x por $t + a$ y $x - a$ por t.

65. Si P es una función polinomial, ¿por qué existe $\lim\limits_{x \to a} P(x)$ para todos los números a y por qué puede determinarse este límite calculando $P(a)$? Si R es una función racional, ¿por qué no puede tenerse un enunciado semejante al anterior que implique a $\lim\limits_{x \to a} R(x)$? ¿Cómo podría modificar el enunciado anterior para el límite de una función racional?

66. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ no existe, explique por qué puede concluirse que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe.

67. Sin emplear las palabras *límite* o *se aproxima* y sin utilizar símbolos tales como ϵ y δ, establezca en palabras lo que significa el siguiente simbolismo: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

1.6 LÍMITES LATERALES

Hasta ahora, en el estudio del límite de una función conforme la variable independiente x tiende al número a, se han considerado valores de x cercanos a a, tanto mayores como menores que a; esto es, valores de x en un intervalo abierto que contenga a a, el cual no se considera como posible valor de x. Sin embargo, suponga que se tiene la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

Como $f(x)$ no existe si $x < 4$, entonces f no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a 4. De modo que $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$ no tiene significado. Si, de cualquier forma, se restringe x a números mayores que 4, puede lograrse que el valor de $\sqrt{x - 4}$ esté tan cerca de 0 como se desee tomando valores de x suficientemente cercanos a 4 pero mayores que 4. En tal caso, x se aproxima a 4 por la derecha y se considera el *límite por la derecha* (o el *límite lateral derecho*), el cual se define a continuación.

1.6.1 Definición de límite por la derecha

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L**, lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Observe que en la última línea de la definición, no se colocaron barras de valor absoluto alrededor de $x - a$ ya que se consideran únicamente valores de x para los cuales $x > a$.

Al calcular, a partir de la definición, el límite de $\sqrt{x - 4}$, conforme x tiende a 4 por la derecha, se tiene

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$$

Si, cuando se considera el límite de una función, la variable independiente x se restringe a números menores que a, se dice que x se aproxima a a por la izquierda. Este límite recibe el nombre de *límite por la izquierda* (o *límite lateral izquierdo*).

1.6.2 Definición de límite por la izquierda

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L**, lo que se denota por

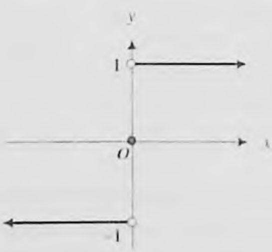
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Se referirá al $\lim_{x \to a} f(x)$ como el **límite bilateral** para distinguirlo de los límites laterales.

Los teoremas 1 a 10 de límites estudiados en la sección 1.5 siguen siendo válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".



$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 1 muestra la gráfica de la función signo definida en el ejercicio 49 de la sección 1.1 mediante

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$ y $\operatorname{sgn} x = 1$ si $0 < x$, se tiene

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1$$
$$= -1 \qquad\qquad = 1$$

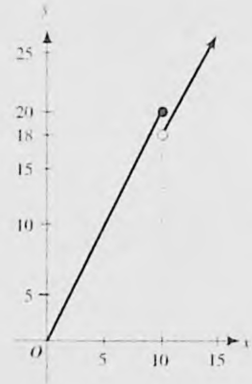
◀

En el ejemplo ilustrativo 1, debido a que el límite por la izquierda y el límite por la derecha no son iguales, el límite bilateral $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ no existe. El concepto de límite bilateral no existe debido a que los dos límites laterales son diferentes, lo cual es una consecuencia del siguiente teorema.

1.6.3 Teorema

El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

La demostración de este teorema se deja al estudiante como ejercicio (consulte el ejercicio 34).



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 2

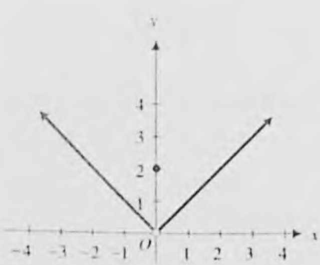
EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En el ejemplo 2 de la sección 1.3 se tuvo la siguiente función en la que $C(x)$ dólares es el costo total de un pedido de x libras de un producto:

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

La gráfica de C se muestra en la figura 2. Observe el rompimiento de la gráfica en $x = 10$. A continuación se examinará el $\lim_{x \to 10} C(x)$. Como la definición de $C(x)$ cuando $x < 10$ es diferente de la definición cuando $x > 10$, debe distinguirse entre el límite por la izquierda en 10 y el límite por la derecha en 10. Al calcular estos límites se obtiene

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} 2x = 20 \qquad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} 1.8x = 18$$

Puesto que $\lim_{x \to 10^-} C(x) \neq \lim_{x \to 10^+} C(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x \to 10} C(x)$ no existe. En la sección 1.8, se considerará otra vez esta función como un ejemplo de una función *discontinua*. ◀



$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FIGURA 3

EJEMPLO 1 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de g. **(b)** Determine $\lim_{x \to 0} g(x)$ si existe.

Solución

(a) La gráfica de g se muestra en la figura 3. Observe que la gráfica se rompe en el origen.

(b) $$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Como $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x \to 0} g(x)$ existe y es igual a 0. Observe que $g(0) = 2$, lo cual no afecta al $\lim_{x \to 0} g(x)$. ◀

$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

FIGURA 4

EJEMPLO 2

Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de h. **(b)** Determine, si existen, cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Solución

(a) La gráfica de h se muestra en la figura 4.

(b)

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (4 - x^2) = 3 \qquad \lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 + x^2) = 3$$

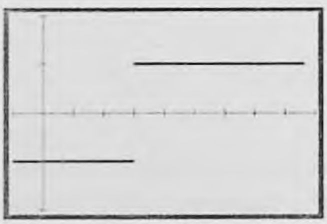
Como $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 3$. ◁

EJEMPLO 3

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

(a) Trace la gráfica de f y a partir de la gráfica haga una conjetura acerca de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. **(b)** Confirme analíticamente la conjetura del inciso (a).



$[-1, 8.4]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

FIGURA 5

Solución

(a) La figura 5 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-2, 2]$. Debido a que la gráfica se rompe en el punto donde $x = 3$, se sospecha que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

(b) Como

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \ge 3 \\ 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \frac{|x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ge 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Al calcular los límites laterales se obtiene

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} 1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, se ha confirmado analíticamente que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe. ◁

EJEMPLO 4

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Determine cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 6

Solución

(a) La gráfica de f se muestra en la figura 6.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (x + 5)$ $= 2$

$\displaystyle\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2}$ $= 0$

Como $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} f(x) \ne \lim_{x \to -3^+} f(x)$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe.

$\displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2}$ $= 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (3 - x)$ $= 0$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x)$ existe y es igual a 0. ◀

EJERCICIOS 1.6

En los ejercicios 1 a 22, dibuje la gráfica de la función y si existe, determine el límite indicado; si el límite no existe, diga por qué razón.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{si } t \le -4 \\ 4 - t & \text{si } -4 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -4^+} f(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to -4^-} f(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{si } s \le -2 \\ 3 - s & \text{si } -2 < s \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{s \to -2^+} g(s)$; **(b)** $\lim\limits_{s \to -2^-} g(s)$; **(c)** $\lim\limits_{s \to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 8 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{si } r < 1 \\ 2 & \text{si } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{si } 1 < r \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{r \to 1^+} g(r)$; **(b)** $\lim\limits_{r \to 1^-} g(r)$; **(c)** $\lim\limits_{r \to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 0 & \text{si } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{si } -2 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -2^+} g(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to -2^-} g(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

11. $F(x) = |x - 5|$

(a) $\lim\limits_{x \to 5^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 5^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 5} F(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$

(a) $\lim\limits_{x \to 3/2^+} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 3/2^-} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 3/2} G(x)$

14. $F(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1 - x| & \text{si } -1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -1^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -1^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -1} F(x)$

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

16. $S(x) = |\operatorname{sgn} x|$ (la función sgn x se definió en el ejemplo ilustrativo 1)

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} S(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} S(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **(d)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **(d)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$

20. $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -3^-} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -3} F(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$

22. $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t + 1} & \text{si } t \leq -1 \\ \sqrt{1 - t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t - 1} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -1^-} G(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to -1^+} G(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to -1} G(t)$; **(d)** $\lim\limits_{t \to 1^-} G(t)$; **(e)** $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t)$; **(f)** $\lim\limits_{t \to 1} G(t)$

23. Sea $F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.

24. Sea $h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1 y U es la función salto unitario definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Si existen, determine **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

25. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!]$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!]$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$.

26. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 4^+} [\![x - 3]\!]$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x - 3]\!]$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 4} [\![x - 3]\!]$.

27. Sea $h(x) = (x - 1) \operatorname{sgn} x$. Dibuje la gráfica de h. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

28. Sea $G(x) = [\![x]\!] + [\![4 - x]\!]$. Dibuje la gráfica de G. Si existen, determine **(a)** $\lim\limits_{x \to 3^+} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 3^-} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 3} G(x)$.

29. Dada $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 4 \\ 5x + k & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$, determine el valor de k, tal que $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista.

30. Dada $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + k & \text{si } -1 < x \end{cases}$, determine el valor de k tal que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ exista.

31. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$, determine valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existan.

32. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & \text{si } 3 < x \end{cases}$, determine los valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existan.

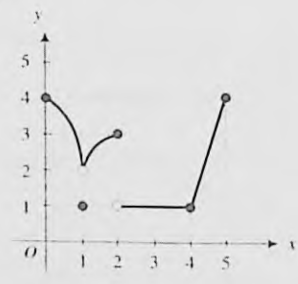
33. Sea $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, y que $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ existe.

34. Demuestre el teorema 1.6.3.

En los ejercicios 35 y 36, si existen, evalúe los límites de los incisos (a)-(k) a partir de la gráfica mostrada en la figura adjunta.

35. El dominio de f es $[-1, 5]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; **(k)** $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

36. El dominio de f es $[0, 5]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$; **(k)** $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.



En los problemas 37 y 38, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

37. El dominio de f es $[-1, 3]$. $f(-1) = -2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$.

38. El dominio de f es $[-4, 4]$. $f(-4) = 3$; $f(-2) = -3$; $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(4) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$.

39. En el inciso (a) del ejercicio 5 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo total de un embarque como una función de su peso. Si f es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 50^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 50^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 200^-} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 200^+} f(x)$.

40. En el inciso (a) del ejercicio 6 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el porte de correo de primera clase para una carta que no pese más de 11 oz como una función de su peso. Si F es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} F(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 10^-} F(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 10^+} F(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 11} F(x)$.

41. En el inciso (a) del ejercicio 7 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo de una llamada telefónica, que no dure más de 5 min, de Mendocino a San Francisco como una función de su duración. Si g es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x)$.

42. En el inciso (a) del ejercicio 8 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el precio de admisión al Coast Cinema como una función de la edad de la persona. Si G es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to 12^-} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 12^+} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 60^-} G(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 60^+} G(x)$.

43. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

(b) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existe.

(c) Obtenga una fórmula para $f(x) \cdot g(x)$.

(d) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ existe probando que $\lim\limits_{x \to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)]$.

44. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ 1 + x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existen.

(b) Defina la función $f + g$.

(c) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$ existe.

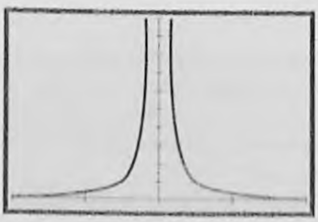
(d) De los resultados de los incisos (a) y (c) se tiene

$$\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x \to 1} f(x) + \lim_{x \to 1} g(x).$$

¿Contradice este hecho al teorema 4 de límites (1.5.5)? ¿Por qué?

45. Sin utilizar las palabras *límite* o *se aproxima* y sin emplear símbolos tales como ϵ y δ, exprese en palabras lo que significa cada uno de los siguientes simbolismos: **(a)** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$; **(b)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

1.7 LÍMITES INFINITOS



$[-2, 2]$ por $[0, 100]$

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

FIGURA 1

En esta sección, se estudian las funciones cuyos valores *crecen* o *decrecen sin límite* conforme la variable independiente se acerca cada vez más a un número fijo. Para iniciar, considere la función definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0, mientras que su contradominio es el conjunto de todos los números reales positivos. La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[0, 100]$. Observe que conforme las coordenadas x de los puntos de la gráfica se aproximan a 0, por la derecha o por la izquierda, las coordenadas y, o $f(x)$, crecen. A continuación se calcularán algunos valores de la función cuando x tiende a 0. Aproxime x a 0 por la derecha, es decir, considere los siguientes valores de x: 1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.01, 0.001, y determine los valores correspondientes de $f(x)$, los cuales se muestran en la

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.25	48
0.1	300
0.01	30 000
0.001	3 000 000

la tabla 1. Observe en esta tabla que $f(x)$ crece conforme x se aproxima cada vez más a 0, a través de valores mayores que 0. En realidad, se puede hacer $f(x)$ tan grande como se desee para todos los valores de x suficientemente cercanos a 0 y mayores que 0. Debido a este hecho, se dice que $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 mediante valores mayores que 0, lo cual se escribe como

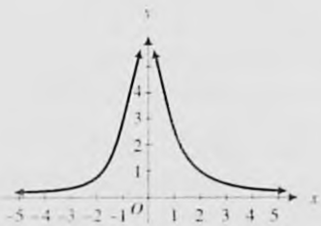
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Ahora aproxime x a 0 por la izquierda; en particular, considere para x los valores -1, -0.5, -0.25, -0.1, -0.01 y -0.001. Debido a la simetría con respecto al eje y, los valores de la función son los mismos que los correspondientes a los valores positivos de x. Así, otra vez, $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 a través de valores menores que 0, lo cual se expresa como

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Por tanto, conforme x se aproxima a 0 por la derecha o por la izquierda, $f(x)$ *crece sin límite*, lo que se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$



$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

FIGURA 2

A partir de la información anterior, se obtiene la gráfica de f, mostrada en la figura 2, la cual, por supuesto, corresponde a la gráfica trazada en la figura 1. Observe que las dos "ramas" de la curva se acercan cada vez más al eje y conforme x se aproxima a 0. Para esta gráfica, el eje y es una *asíntota vertical*, la cual se definirá posteriormente en esta sección.

1.7.1 Definición de valores de función que crecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \textbf{(1)}$$

si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

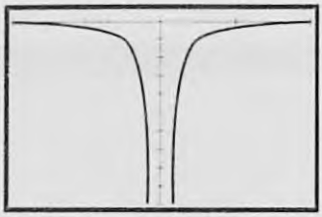
$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Esta definición también puede establecerse en otra forma como sigue: "Los valores de función $f(x)$ crecen sin límite conforme x tiende a un número a si $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee (esto es, mayor que cualquier número positivo N) para todos los valores de x suficientemente cercanos a a, pero sin considerar a a, mismo.

Se insiste una vez más, como se hizo cuando se analiza la notación de intervalos en la sección A-1 del apéndice, que $+\infty$ no es un símbolo para representar un número real; en consecuencia, cuando se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, no tiene el mismo significado que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, donde L es un número real. La ecuación (1) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito positivo (o más infinito)". En tal caso, el límite no existe, pero el símbolo $+\infty$ indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

De manera análoga, puede indicarse el comportamiento de una función cuyos valores *decrecen sin límite*. Para llegar a esto, considere la función g definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{-3}{x^2}$$



$[-2, 2]$ por $[-100, 0]$

$g(x) = \frac{-3}{x^2}$

FIGURA 3

La figura 3 muestra la gráfica de esta función trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[-100, 0]$. Los valores de función dada por $g(x) = \frac{-3}{x^2}$, son los negativos de los valores proporcionados por $f(x) = \frac{3}{x^2}$. De modo que para la función g, conforme x se aproxima a 0, por la derecha o por la izquierda, $g(x)$ *decrece sin límite*, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to 0} \frac{-3}{x^2} = -\infty$$

1.7.2 Definición de valores de función que decrecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{2}$$

si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

Nota: La ecuación (2) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito negativo (o menos infinito)". Observe, otra vez, que el límite no existe, y que el símbolo $-\infty$ sólo indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

También se pueden considerar los límites "infinitos" laterales. Se establece que y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si f está definida en cada número de un intervalo abierto (a, c) y si para cualquier número $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Definiciones semejantes pueden darse para $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$. Se le pedirá que escriba estas definiciones en el ejercicio 52.

Ahora suponga que h es la función definida por la ecuación

$$h(x) = \frac{2x}{x - 1} \tag{3}$$

$h(x) = \frac{2x}{x - 1}$

FIGURA 4

La gráfica de h se presenta en la figura 4, en esta figura también se muestra la recta $x = 1$ como una recta punteada (una *asíntota vertical* de la gráfica). Consulte las figuras 1, 3 y 4, y observe la diferencia entre el comportamiento de la función de la figura 4 y las funciones de las otras dos figuras. Note que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty \tag{5}$$

Esto es, para la función definida por (3), conforme x se aproxima a 1 a través de valores menores que 1, los valores de función decrecen sin límite, mientras que cuando x se aproxima a 1 mediante valores mayores que 1, los valores de función crecen sin límite.

Antes de presentar algunos ejemplos, se necesitan dos teoremas de límites que implican límites "infinitos".

1.7.3 Teorema 11 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

Demostración Se probará el inciso (i). La demostración del inciso (ii) es análoga y se deja como ejercicio. (Vea el ejercicio suplementario 3). Se debe probar que para cualquier $N > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

o, equivalentemente, como $x > 0$ y $N > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x^r < \frac{1}{N}$$

o, de modo equivalente, como $r > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

El enunciado anterior se cumple si $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$. Por tanto, cuando $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$ ■

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 A partir del teorema 11(i) de límites

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Del teorema 11(ii) de límites

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$ ◀

El teorema 12 de límites, que a continuación se presenta, implica el límite de una función racional para la cual el límite del denominador es cero y el límite del numerador es una constante diferente de cero. Esta situación se presenta en (4) y (5).

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lím_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

La demostración del inciso (i) se presenta en el suplemento de esta sección. Las demostraciones de los otros incisos se dejan como ejercicios. Consulte los ejercicios suplementarios 4 a 6).

Cuando se aplica el teorema 12 de límites, con frecuencia se obtiene alguna indicación de si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$, tomando *valores adecuados* de x próximos a a para determinar si el cociente es positivo o negativo, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En (4) se tiene

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1}$$

Se puede aplicar el teorema 12 de límites ya que $\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$ y $\lim_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$. Se desea determinar si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$. Puesto que $x \to 1^-$, se toma un valor cercano a 1 pero menor que 1; por ejemplo, tome $x = 0.9$ y al calcular el cociente se obtiene

$$\frac{2(0.9)}{0.9 - 1} = -18$$

El cociente negativo conduce a sospechar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (ii) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^-$, $x - 1$ se aproxima a 0 mediante valores negativos.

Para el límite de (5), como $x \to 1^+$, se toma $x = 1.1$ y se calcula

$$\frac{2(1.1)}{1.1 - 1} = 22$$

Debido a que el cociente es positivo se sospecha que

$$\lím_{x \to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (i) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^+$, $x - 1$ se aproxima a 0 por medio de valores positivos. ◀

Cuando utilice el procedimiento mostrado en el ejemplo ilustrativo 2, tenga cuidado al elegir el valor de x, asegúrese de que esté suficientemente cerca de a al determinar el comportamiento verdadero del cociente. Por ejemplo, cuando se calculó el $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x-1}$, el valor elegido de x no debe ser sólo menor que 1, sino que también debe ser mayor que 0.

▶ ***EJEMPLO 1*** Sea

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$. **(c)** Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de F.

Solución

(a) $$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

El límite del numerador es 14, lo cual puede verificarse fácilmente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^+} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. Entonces, del teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

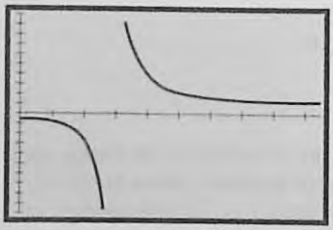
Como en el inciso (a), el límite del numerador es 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^-} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

En este caso, el límite del denominador es cero, pero el denominador se aproxima a cero por medio de valores negativos. Del teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

(c) La figura 5 muestra la gráfica de F trazada en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [−10, 10], la cual apoya las respuestas de los incisos (a) y (b). ◀



[0, 9.4] por [−10, 10]

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

FIGURA 5

EJEMPLO 2 Sean

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$$

Determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$. Apoye cada respuesta trazando la gráfica de la función.

Solución

(a) Como $x \to 2^+$, $x - 2 > 0$; de modo que $x - 2 = \sqrt{(x - 2)^2}$. Así

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}}{\sqrt{(x - 2)^2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x - 2}\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}\sqrt{x - 2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}\end{aligned}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. En consecuencia, por el teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = +\infty$$

La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [2, 5] por [0, 10], y mostrada en la figura 6, apoya la respuesta.

[2, 5] por [0, 10]

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

FIGURA 6

(b) Como $x \to 2^-$, $x - 2 < 0$; de modo que $x - 2 = -\sqrt{(2 - x)^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 - x}\sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x}\sqrt{2 - x}} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x}}\end{aligned}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores negativos. En consecuencia, por el teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty$$

La figura 7 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de [0, 2] por [−10, 0], la cual apoya la respuesta. ◀

[0, 2] por [−10, 0]

$g(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$

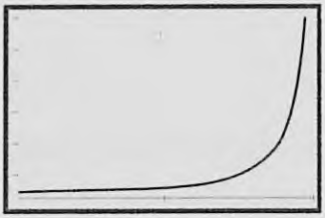
FIGURA 7

EJEMPLO 3 Dada

$$h(x) = \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$$

(a) Trace la gráfica de h, y a partir de la gráfica elabore un enunciado acerca del comportamiento aparente de $h(x)$ conforme x se aproxima a 4 por medio de valores menores que 4.

(b) Confirme el enunciado del inciso (a) analíticamente determinando el $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x)$.



$[3, 4]$ por $[0, 30]$

$h(x) = \dfrac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$

FIGURA 8

Solución

(a) La figura 8 muestra la gráfica de h trazada en el rectángulo de inspección de $[3, 4]$ por $[0, 30]$. En la figura, parece que $h(x)$ crece sin límite conforme x se aproxima a 4 mediante valores menores que 4.

(b) Como $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x]\!] = 3$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 4^-} ([\![x]\!] - 4) = -1$. Además, $\lim\limits_{x \to 4^-} (x - 4) = 0$, y $x - 4$ se aproxima a 0 por medio de valores negativos. En consecuencia, del teorema 12(iv) de límites,

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4} = +\infty$$

Este resultado confirma el enunciado del inciso (a). ◀

Recuerde que como $+\infty$ y $-\infty$ no son símbolos para representar números reales, los teoremas 1 a 10 de límites de la sección 1.5 no se cumplen para límites "infinitos". Sin embargo, las propiedades concernientes a dichos límites se presentan en los teoremas siguientes, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios suplementarios 7 a 9).

1.7.5 Teorema

(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Como

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

se deduce del teorema 1.7.5(i) que $\lim\limits_{x \to 2^+} = \left[\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2}\right] = +\infty$ ◀

1.7.6 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

EJEMPLO ILUSTRADO 4

$$\lim_{x \to 3} \frac{5}{(x - 3)^2} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x + 4}{x - 4} = -7$$

Por tanto, del teorema 1.7.6 (ii),

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{5}{(x-3)^2}\cdot\frac{x+4}{x-4}\right] = -\infty$$ ◀

1.7.7 Teorema

Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$;
(ii) si $c < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 En el ejemplo 2(b) se mostró que

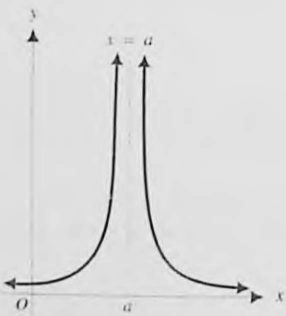
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

Además,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, del teorema 1.7.7(ii)

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x+2}\right] = +\infty$$ ◀



$f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 9

Se pueden aplicar límites infinitos para determinar las *asíntotas verticales* de una gráfica, si es que posee alguna. Consulte la figura 9 que muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{6}$$

Cualquier recta paralela al eje x y por encima de éste intersectará esta gráfica en dos puntos, un punto a la izquierda del la recta $x = a$ y el otro en el lado derecho de dicha recta. Así, para cualquier $k > 0$, no importa qué tan grande sea, la recta $y = k$ intersectará a la gráfica de f en dos puntos; la distancia de estos dos puntos a la recta $x = a$ es cada vez más pequeña conforme k crece. Por esto, se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

1.7.8 Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
(iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
(iv) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Cada una de las figuras 10 a 13 muestra una porción de la gráfica de una función para la cual la recta $x = a$ es una asíntota vertical. En la figura 10 se aplica el inciso (i) de la definición 1.7.8; en la figura 11, se aplica el inciso (ii); y en las figuras 12 y 13 se aplican los incisos (iii) y (iv), respectivamente.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

FIGURA 10

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 11

$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

FIGURA 12

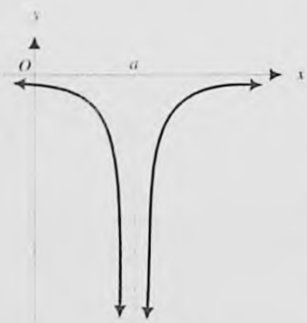
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

FIGURA 13 ◀

Para la función definida por (6), los incisos (i) y (iii) de la definición anterior son verdaderos. *Véase* la figura 9. Si g es la función definida por

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

entonces los incisos (ii) y (iv) son verdaderos, por lo que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de g. La figura 14 muestra esta situación.



$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 14

EJEMPLO 4 Determine la asíntota vertical de la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica de f y la asíntota en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se estudiarán los límites

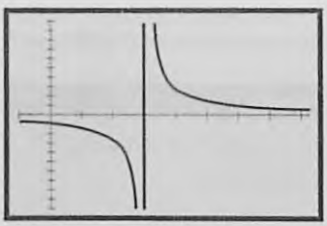
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) \text{ y } \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

porque en los dos casos, el límite del denominador es cero.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty$$

De la definición 1.7.8 se concluye que la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

La gráfica de f y de la recta $x = 3$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$, mostradas en la figura 15, apoyan la respuesta. ◀



$[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = \frac{3}{x-3}$

FIGURA 15

EJERCICIOS 1.7

En los ejercicios 1 a 12, haga lo siguiente: (a) utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $f(x)$ para los valores de x indicados, y a partir de estos valores elabore un enunciado concerniente al comportamiento aparente de $f(x)$. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de f. (c) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando el límite indicado.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; x es 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001, 5.0001; $\displaystyle\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$; x es 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999, 4.9999; $\displaystyle\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$; x es 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001, 5.0001 y x es 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999, 4.9999; $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$; x es 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999; $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

5. $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$; x es 2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001; $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{1-x}$

6. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$; x es 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999 y x es 2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001; $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; x es 0, −0.5, −0.9, −0.99, −0.999, −0.9999; $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1}$

8. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$; x es −2, −1.5, −1.1, −1.01, −1.001, −1.0001; $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{x+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$; x es −5, −4.5, −4.1, −4.01, −4.001, −4.0001; $\displaystyle\lim_{x \to -4^-} \frac{x}{x+4}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$; x es 5, 4.5, 4.01, 4.001, 4.0001; $\displaystyle\lim_{x \to 4^+} \frac{x}{x-4}$

11. $f(x) = \dfrac{4x}{9-x^2}$; x es −4, −3.5, −3.1, −3.01, −3.001, −3.0001; $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9-x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{4x^2}{9-x^2}$; x es 4, 3.5, 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001; $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{4x^2}{9-x^2}$

En los ejercicios 13 a 32, determine el límite analíticamente y apoye la respuesta trazando la gráfica de la función en la graficadora.

13. $\displaystyle\lim_{t \to 2^+} \frac{t+2}{t^2-4}$

14. $\displaystyle\lim_{t \to 2} \frac{-t+2}{(t-2)^2}$

15. $\displaystyle\lim_{t \to 2^-} \frac{t+2}{t^2-4}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

17. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

18. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$

19. $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

20. $\displaystyle\lim_{x \to 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

21. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

22. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-3}{x^3+x^2}$

23. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$

24. $\displaystyle\lim_{s \to 2^-} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4}\right)$

25. $\displaystyle\lim_{t \to -4^-} \left(\frac{2}{t^2+3t-4} - \frac{3}{t+4}\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$

27. $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{[\![x]\!]-x}{3-x}$

28. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1}$

29. $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12}$

30. $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$

31. $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2-1}}$

32. $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}}$

33. Sea

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-5, 5]$. A partir de la gráfica elabore una conjetura acerca de los límites siguientes y, después, confirme analíticamente la conjetura: **(b)** $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x)$; **(c)** $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x)$; **(d)** $\displaystyle\lim_{x \to 4^-} f(x)$; **(e)** $\displaystyle\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

34. Sea

$$f(x) = \frac{x^2+x^2-3}{x^2+x-6}$$

(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-5, 5]$. A partir de la gráfica elabore una conjetura acerca de los límites siguientes y, después, confirme analíticamente la conjetura: **(b)** $\displaystyle\lim_{x \to -3^-} f(x)$; **(c)** $\displaystyle\lim_{x \to -3^+} f(x)$; **(d)** $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x)$; **(e)** $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

En los ejercicios 35 y 36, determine la asíntota vertical de la gráfica de la función y dibújela.

35. **(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $F(x) = \dfrac{1}{x^3}$ **(d)** $G(x) = \dfrac{1}{x^4}$

36. **(a)** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ **(b)** $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(c) $F(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ **(d)** $G(x) = -\dfrac{1}{x^4}$

En los ejercicios 37 a 44, (a) determine la(s) asíntota(s) vertical(es) de la gráfica de la función, y (b) aplique la respuesta del inciso (a) para dibujar la gráfica.

37. $f(x) = \dfrac{2}{x-4}$ **38.** $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

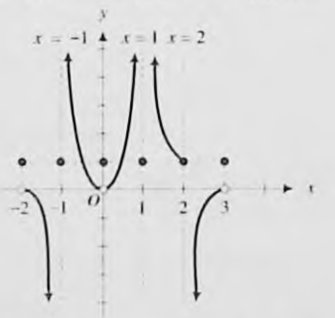
39. $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$ **40.** $f(x) = \dfrac{-4}{x-5}$

41. $f(x) = \dfrac{-2}{(x+3)^2}$ **42.** $f(x) = \dfrac{4}{(x-5)^2}$

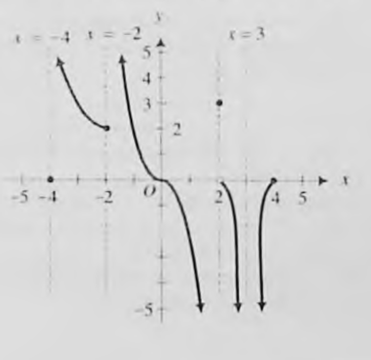
43. $f(x) = \dfrac{5}{x^2+8x+15}$ **44.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-6}$

En los ejercicios 45 y 46, evalúe los límites de los incisos (a) a (j) a partir de la gráfica de la función f dibujada en la figura adjunta.

45. El dominio de f es $[-2, 3]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.



46. El dominio de f es $[-4, 4]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.



En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

47. El dominio de f es $[-5, 5]$. $f(-5) = 0$; $f(-3) = 2$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(3) = -2$; $f(5) = -4$; $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -\infty$.

48. El dominio de f es $[-2, 2]$. $f(-2) = 0$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 5$; $f(1) = -5$; $f(2) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$.

49. Si $C(t)$ dólares es el costo total por hora de luz en una fábrica con n lámparas fluorescentes, cada una con un promedio de vida de t horas, entonces

$$C(t) = n\left(\frac{r}{t} + \frac{cpk}{1\,000}\right)$$

donde r dólares es el costo de renovación, c es la constante de eficiencia comercial, p watts es la potencia de cada lámpara, y k dólares es el costo de la energía por cada 1 000 watts. Determine $\lim\limits_{t \to 0^+} C(t)$.

50. Dadas

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{2-x}$$

(a) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existen. **(b)** Defina la función $f + g$. **(c)** Demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ existe. **(d)** De los resultados de los incisos (a) y (c),

$$\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$$

¿Contradice este hecho al teorema 4 de límites (1.5.5)?

51. De acuerdo con la teoría especial de la relatividad de Einstein, ninguna partícula con masa positiva puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. La teoría especifica que si $m(v)$ es la medida de la masa de una partícula que se mueve con una velocidad de medida v, entonces

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

donde m_0 es la medida constante de la masa de la partícula en reposo relativa a algún sistema de referencia, y c es la medida constante de la velocidad de la luz. Explique porque ninguno de los siguientes límites existen: $\lim\limits_{v \to c^-} m(v)$; $\lim\limits_{v \to c^+} m(v)$; $\lim\limits_{v \to c} m(v)$. En su explicación indique el comportamiento de $m(v)$ conforme v tiende a c mediante valores menores que c.

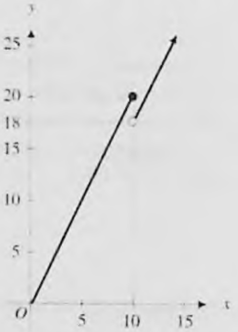
52. Escriba una definición formal de cada uno de los siguientes límites laterales: **(a)** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; **(b)** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$; **(c)** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

En los ejercicios 53 y 54, establezca con palabras lo que significa el simbolismo indicado sin utilizar las palabras límite, se *aproxima, infinito, crece sin límite o decrece sin límite, y sin emplear símbolos como N y δ.*

53. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ **54.** $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

55. Si $P(x)$ es un polinomio y $Q(x) = x - a$, entonces la gráfica de la función f definida por $f(x) = P(x)/Q(x)$ puede tener a la recta $x = a$ como asíntota o un agujero en el punto donde $x = a$. ¿Cuál es la relación entre estos dos conceptos geométricos y $\lim_{x \to a} f(x)$?

1.8 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN NÚMERO



$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$

FIGURA 2

$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

FIGURA 3

En el ejemplo 2 de la sección 1.3 y en el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.6 se trató la función definida por

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases} \tag{1}$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de x libras de un producto. Se mostró que $\lim_{x \to 10} C(x)$ no existe debido a que $\lim_{x \to 10^+} C(x) \neq \lim_{x \to 10^-} C(x)$. La gráfica de C, dibujada en la figura 1, se rompe en el punto donde $x = 10$ porque C es la *discontinua* en el número 10. Esta *discontinuidad* es causada por el hecho de que $\lim_{x \to 10} C(x)$ no existe. Se hará referencia a esta función otra vez en el ejemplo ilustrativo 1.

En la sección 1.4, se consideró la función f definida por

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} \tag{2}$$

La gráfica de f consiste de todos los puntos de la recta $y = 2x + 3$ excepto $(1, 5)$, y se muestra en la figura 2. La gráfica se rompe en el punto $(1, 5)$ debido a que la función es *discontinua* en el número 1. Esta *discontinuidad* ocurre porque $f(1)$ no existe.

Suponga que la función F tiene los mismos valores que la función f definida por (2) donde $x \neq 1$, y suponga que, por ejemplo, $F(1) = 2$. Entonces F está definida para todos los valores de x, pero existe una rotura en la gráfica (consulte la figura 3), y la función es *discontinua* en 1. Sin embargo, si se define $F(1) = 5$, la gráfica no se rompe, y se dice que la función F es *continua* en todos los valores de x.

1.8.1 Definición de función continua en un número

Se dice que la función f es **continua** en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;
(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La gráfica de la función C definida por (1) se muestra en la figura 1. Como la gráfica se rompe en el punto donde $x = 10$, se investigarán las condiciones de la definición anterior en ese número.

(i) $C(10) = 10$

(ii) $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$ no existe.

Así, la condición (i) se satisface, pero la condición (ii) no se cumple en 10. Por tanto, se concluye que C es discontinua en 10. ◀

El siguiente ejemplo ilustrativo presenta otra situación, en la cual la fórmula para calcular el costo de más de 10 lb de un producto es diferente de la fórmula para el cálculo del costo de 10 lb o menos. Sin embargo, para esta situación la función costo es continua en 10.

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 4

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Un mayorista distribuye un producto que se vende por libra (o fracción de libra) cobra \$2 por libra si se ordenan 10 o menos libras. Si se ordenan más de 10 libras, el mayorista cobra \$20 más \$1.40 por cada libra que exceda de las 10. Por tanto, si se compran x libras por un costo total de $C(x)$ dólares, entonces $C(x) = 2x$ si $0 \le x \le 10$ y $C(x) = 20 + 1.4(x - 10)$ si $10 < x$; esto es,

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

La gráfica de C se muestra en la figura 4. Para esta función, $C(10) = 20$ y

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} 2x = 20 \qquad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} (1.4x + 6) = 20$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$ existe y es igual a $C(10)$. En consecuencia, C es continua en 10. ◀

Ahora se presentarán algunos ejemplos de funciones discontinuas. En cada ejemplo se dibuja la gráfica de la función dada, se determinan los puntos donde la gráfica se rompe y se muestran cuáles de las tres condiciones de la definición 1.8.1 no se cumplen en cada discontinuidad.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \ne 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta función, la cual se muestra en la figura 3, se rompe en el punto donde $x = 1$, por lo que se investigarán en ese punto las condiciones de la definición 1.8.1.

(i) $f(1) = 2$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \ne f(1)$

Las condiciones (i) y (ii) se satisfacen pero la condición (iii) no se cumple. Por tanto, la función f es discontinua en 1. ◀

Observe que si en el ejemplo ilustrativo 3, se definirá $f(1)$ como 5, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $f(1)$ serían iguales y f sería continua en 1. Por esta razón, la discontinuidad del ejemplo ilustrativo 3 se denomina *discontinuidad removible*.

En general, suponga que f es una función discontinua en el número a para la cual $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. Entonces $f(a)$ no existe, o bien, $f(a) \ne \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Dicha discontinuidad es una **discontinuidad removible (o eliminable)** porque si f se redefine en a de modo que $f(a)$ es igual a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, la nueva función es continua en a. Si la discontinuidad no es removible, entonces se le llama **discontinuidad esencial.**

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

FIGURA 5

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

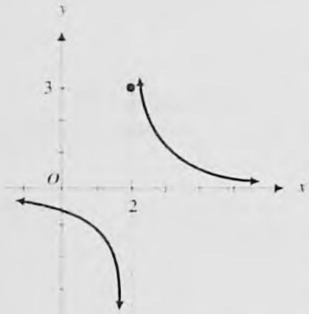
La gráfica de f, mostrada en la figura 5, se rompe en el punto donde $x = 2$; por lo que se investigarán las condiciones de la definición 1.8.1.

(i) $f(2)$ no está definida.

Como no se satisface la condición (i), f es discontinua en 2.

La discontinuidad es esencial porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe. ◀

La discontinuidad del ejemplo ilustrativo 4 recibe el nombre de **discontinuidad infinita.**



$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

FIGURA 6

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La gráfica de g se muestra en la figura 6. Se investigarán las tres condiciones de la definición 1.8.1 en 2.

(i) $g(2) = 3$

(ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe.

Como no se cumple la condición (ii), g es discontinua en 2.

La discontinuidad es infinita, y por supuesto, esencial. ◀

$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

La figura 7 muestra la gráfica de h. Como la gráfica de h se rompe en el punto donde $x = 1$, se investigarán las condiciones de la definición 1.8.1 en 1.

(i) $h(1) = 4$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 + x) = 4 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$

Debido a que $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe.

La condición (ii) no se cumple en 1; de modo que h es discontinua en 1.

Puesto que $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe, la discontinuidad es esencial. ◀

La discontinuidad del ejemplo ilustrativo 6 se denomina **discontinuidad de salto.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Sea F la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

La figura 8 muestra la gráfica de F. Se investigarán las tres condiciones de la definición 1.8.1 en 3.

(i) $F(3) = 2$

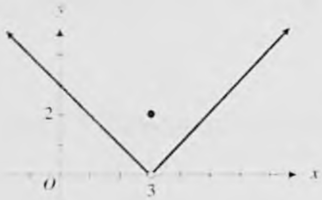
(ii) $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3 - x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 3} F(x) = 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to 3} F(x) \neq F(3)$

Debido a que la condición (iii) no se satisface, F es discontinua en 3.

Esta discontinuidad es removible porque si se redefine $F(3)$ como 0, entonces la nueva función será continua en 3. ◀



$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

FIGURA 8

EJEMPLO 1 La función definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

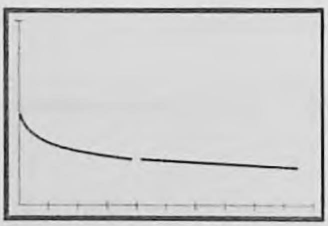
es discontinua en 4. **(a)** Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [0, 1]. La gráfica se rompe en el punto donde $x = 4$. ¿La discontinuidad mostrada es removible o esencial? Si la discontinuidad parece removible, especule sobre cuál sería el valor de $f(4)$ de modo que la discontinuidad sea eliminada. **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a).

Solución

(a) La figura 9 muestra la gráfica de f con un agujero en el punto donde $x = 4$. Al emplear el rastreo (*Trace*) de la graficadora, se sospecha que $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe y es 0.25. Así, la discontinuidad parece removible y puede eliminarse si se redefine $f(4)$ como 0.25.

(b) Al calcular $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



[0, 9.4] por [0, 1]

$F(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

FIGURA 9

Así, se ha confirmado la respuesta del inciso (a). Por tanto, se redefine la función f en 4 y se obtiene la nueva función definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Esta función es continua en 4. ◀

Los teoremas acerca de funciones continuas en un número son de gran ayuda al calcular límites, así como para demostrar otros teoremas. El primero de estos teoremas se obtiene al aplicar la definición 1.8.1 y algunos teoremas de límites.

1.8.2 Teorema

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

(i) $f + g$ es continua en a;
(ii) $f - g$ es continua en a;
(iii) $f \cdot g$ es continua en a;
(iv) f/g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

A fin de ilustrar el tipo de demostración requerida para cada inciso de este teorema, se probará el inciso (i).

Demostración de (i) Como f y g son continuas en a, de la definición 1.8.1

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

De estos dos límites y del teorema 4 de límites,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

la cual es la condición para que $f + g$ sea continua en a. ■

Las demostraciones para los incisos (ii), (iii) y (iv) son semejantes. Considere la función polinomial f definida por

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \qquad b_0 \neq 0$$

donde n es un número entero no negativo y $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son números reales. Mediante aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= b_0a^n + b_1a^{n-1} + b_2a^{n-2} + \ldots + b_{n-1}a + b_n \\ &= f(a) \end{aligned}$$

de modo que se establece el siguiente teorema.

1.8.3 Teorema

Una función polinomial es continua en todo número.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, entonces f es una función polinomial y por tanto, por el teorema 1.8.3,

f es continua en todo número. En particular, como f es continua en 3, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3}(x^3 - 2x^2 + 5x + 1) &= 3^3 - 2(3)^2 + 5(3) + 1 \\ &= 27 - 18 + 15 + 1 \\ &= 25\end{aligned}$$

◀

1.8.4 Teorema

Una función racional es continua en todo número de su dominio.

Demostración Si f es una función racional entonces se puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales. De modo que f se puede definir por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde g y h son dos funciones polinomiales, y el dominio de f consta de todos los números reales excepto aquellos para los que $h(x) = 0$.

Si a es cualquier número del dominio de f, entonces $h(a) \neq 0$; de modo que por el teorema 9 de límites

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} \tag{3}$$

Como g y h son funciones polinomiales, por el teorema 1.8.3 son continuas en a; por lo que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ y $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$. En consecuencia,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

Por tanto, f es continua en cada número de su dominio. ■

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$$

Solución El dominio de f es el conjunto R de números reales excepto aquellos para los que $x^2 - 9 = 0$. Como $x^2 - 9 = 0$ cuando $x = \pm 3$, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 3 y −3.

Debido a que f es una función racional, por el teorema 1.8.4, f es continua en todos los números diferentes de 3 y −3. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 9** Sea f la función del ejemplo 2. Puesto que 2 está en el dominio de f, entonces por el teorema 1.8.4

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} f(x) &= f(2) \\ &= \frac{2^3 + 1}{2^2 - 9} \\ &= -\frac{9}{5}\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 3 Determine los números en los que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Solución Las funciones cuyos valores son $2x - 3$ y x^2 son funciones polinomiales y, por tanto, son continuas en todo número real. De esta manera, 1 es el único número en el que la continuidad es cuestionable. Por esto, se investigarán las tres condiciones de continuidad en 1.

(i) $f(1) = -1$. Por lo que se cumple la condición (i).

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = -1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, el límite bilateral $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe. Por esto, f tiene una discontinuidad de salto en 1. Por tanto, f es continua en cada número real excepto 1. ◀

1.8.5 Teorema

Si n es un número entero positivo y

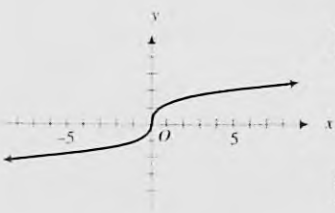
$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

entonces

(i) si n es impar, entonces f es continua en todo número,
(ii) si n es par, entonces f es continua en todo número positivo.

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema 1.5.13, el cual establece que si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

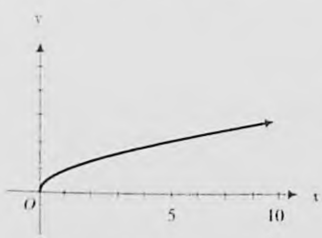


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 10

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10

(a) Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, entonces, por el teorema 1.8.5(i), f es continua en cada número real. La figura 10 muestra la gráfica de f.
(b) Si $g(x) = \sqrt{x}$, entonces, por el teorema 1.8.5(ii), g es continua en cada número real positivo. La gráfica de g se muestra en la figura 11. ◀



$f(x) = \sqrt{x}$

FIGURA 11

En ocasiones se necesita emplear una definición de continuidad en la que se utiliza la notación ϵ-δ. A fin de obtener esta definición alternativa, se comienza con la definición 1.8.1, la cual establece que la función f es continua en el número a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4}$$

Al aplicar la definición de límite de una función (1.5.1), donde L es igual a $f(a)$, (4) se cumple si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{5}$$

Si f es continua en a, debe existir $f(a)$; por tanto, la condición de que $|x - a| > 0$ no es necesaria en la proposición (5), debido a que cuando $x = a$, $|f(x) - f(a)|$ será 0 y así, menor que ϵ. Se tiene, entonces, el teorema siguiente, el cual servirá como la definición alternativa deseada de continuidad.

1.8.6 Teorema

La función f es continua en el número a si f está definida en algún intervalo abierto que contenga a a y si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

EJERCICIOS 1.8

En los ejercicios 1 a 14, dibuje la gráfica de la función. Observe donde la gráfica se rompe, determine el número en el que la función es discontinua, y muestre por qué la definición 1.8.1 no se satisface en este número.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

2. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

4. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

5. $h(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

6. $H(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

8. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

11. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{si } t < 2 \\ 4 & \text{si } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{si } 2 < t \end{cases}$

12. $H(x) = \begin{cases} 6 + x & \text{si } x \leq -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

13. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

14. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En los ejercicios 15 a 28, la función es discontinua en el número a. (a) Trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente y determine que la gráfica se rompe en el punto donde x = a. ¿Parece ser removible o esencial esta discontinuidad? Si parece ser removible, especule sobre cómo debe redefinirse f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a).

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $a = 2$

16. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$; $a = -3$

17. $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$; $a = 9$

18. $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2}$; $a = 5$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4} - 3}{x - 5}$; $a = 5$

20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{x}$; $a = 0$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{x + 2}}{x}$; $a = 0$

22. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{x - 3}$; $a = 3$

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$; $a = 8$

24. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$; $a = 0$

25. $f(x) = \dfrac{x + 3}{3 - |x|}$; $a = -3$

26. $f(x) = \dfrac{x + 5}{|x + 1| - 4}$; $a = -5$

27. $f(x) = \dfrac{x + 3}{3 - |x|}$; $a = 3$

28. $f(x) = \dfrac{x + 5}{|x + 1| - 4}$; $a = 3$

En los ejercicios 29 a 40, determine los números en los que la función es continua e indique la razón.

29. $f(x) = x^2(x + 3)^2$

30. $f(x) = (x - 5)^3(x^2 + 4)^5$

31. $g(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ **32.** $h(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 5}$

33. $F(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^2 - 4}$ **34.** $G(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{3 - x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{2}{9 - x} & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

39. $h(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & \text{si } x < 0 \\ x - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

40. $g(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt[3]{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x\sqrt{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, realice lo siguiente: (a) determine los valores de las constantes c y k que hagan a la función continua en todo número. (b) Dibuje la gráfica de la función resultante.

41. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

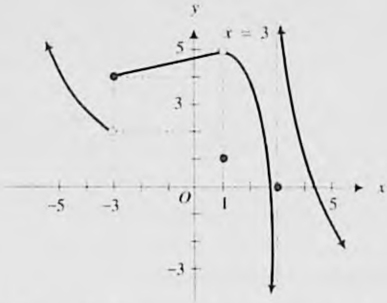
42. $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ kx^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

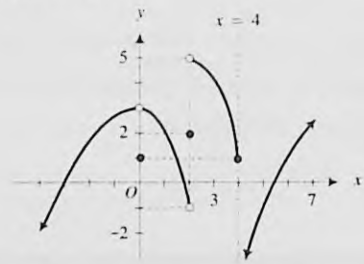
44. $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3cx + k & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Los ejercicios 45 y 46 tratan acerca de la función dibujada en la figura adjunta. En los incisos (a)-(c) confirme analíticamente por qué f es discontinua en el número indicado, señalando por qué no se cumple la definición 1.8.1.

45. **(a)** En $x = -3$; **(b)** en $x = 1$; **(c)** en $x = 3$. **(d)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son esenciales? ¿Por qué? **(e)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son removibles? ¿Qué haría para eliminar la discontinuidad?



46. **(a)** En $x = 0$; **(b)** en $x = 2$; **(c)** en $x = 4$. **(d)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son esenciales? ¿Por qué? **(e)** ¿Cuáles de las discontinuidades de los incisos (a)-(c) son removibles? ¿Qué haría para eliminar la discontinuidad?



En los ejercicios 47 y 48, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

47. El dominio de f es $(-4, 4)$. La función f es continua en cada número de los intervalos $(-4, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, 4)$ y f es discontinua en -2 y 2; $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$.

48. La función f es continua en cada número de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$ y f es discontinua en -1 y 1; $f(-1) = 0$ y $f(1) = 0$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ existen pero son diferentes de 0; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ no existen.

En los ejercicios 49 a 52, determine los números en los que la función indicada es discontinua, y muestre por qué no se cumple la definición 1.8.1 en cada discontinuidad.

49. La función del ejercicio 5 de la sección 1.3 y del ejercicio 39 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el costo total de un embarque como una función de su peso.

50. La función del ejercicio 6 de la sección 1.3 y del ejercicio 40 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el porte de correo de primera clase para una carta que no pese más de 11 oz como una función de su peso.

51. La función del ejercicio 7 de la sección 1.3 y del ejercicio 41 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, de Mendocino a San Francisco como una función de la duración de la llamada.

52. La función del ejercicio 8 de la sección 1.3 y del ejercicio 42 de la sección 1.6, la cual es un modelo matemático que expresa el precio de admisión al Coast Cinema como una función de la edad de la persona.

53. Suponga que a los t minutos, $r(t)$ metros es el radio del flujo circular de petróleo que se derrama por una fisura de un tanque y

$$r(t) = \begin{cases} 4t^2 + 20 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 16t + 4 & \text{si } 2 < t \end{cases}$$

Demuestre que r es continua en 2.

54. Si $A(t)$ metros cuadrados es el área de la fisura del tanque del ejercicio 53 a los t minutos, **(a)** defina $A(t)$, y **(b)** demuestre que A es continua en 2.

55. Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

donde n es un número entero positivo, tiene una discontinuidad removible en 1. *Sugerencia:* para el factor $x^n - 1$ utilice la fórmula (12) de la sección suplementaria 1.5.

56. La función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2nx}{n^2 - nx}$$

Dibuje la gráfica de f. ¿En qué valores de x es discontinua la función f?

57. Si $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

demuestre que f y g son discontinuas en 0 pero que el producto $f \cdot g$ es continuo en 0.

58. Proporcione un ejemplo para mostrar que el producto de dos funciones f y g puede ser continuo en a, donde f es continua en a, pero g es discontinua en a.

59. Dé un ejemplo de dos funciones que sean discontinuas en un número a, pero cuya suma sea continua en a.

60. Explique por qué la definición de función continua en un número a garantiza que la gráfica de la función no se rompe en el punto donde $x = a$.

61. Si la función f es continua en a y la función g es discontinua en a, ¿por qué puede concluirse que la suma de las dos funciones, $f + g$, es discontinua en a?

62. Si la función f es discontinua en a y la función g es continua en a, ¿es posible que el cociente de las dos funciones, f/g, sea continuo en a? Explique su respuesta.

1.9 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA Y CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Recuerde la definición (1.2.2) de función compuesta: dadas las funciones f y g, la función compuesta, denotada por $f \circ g$, está definida por

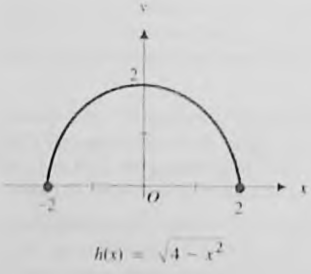
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$, y si h es la función compuesta $f \circ g$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4 - x^2) \\ &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Debido a que el dominio de g es el conjunto de todos los números reales y el dominio de f es el conjunto de todos los números no negativos, el conjunto de h es el conjunto de todos los números tales que $4 - x^2 \ge 0$, esto es, todos los números del intervalo cerrado $[-2, 2]$. La gráfica de h se muestra en la figura 1. ◀



$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

FIGURA 1

De la figura 1, parece que h es continua en cada número del intervalo abierto $(-2, 2)$. Antes de probar este hecho en el ejemplo 1, se necesitan dos teoremas más, el primero de los cuales trata acerca del límite de una función compuesta.

1.9.1 Teorema Límite de una función compuesta

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Demostración Puesto que f es continua en b, por el teorema 1.8.6, se tiene el siguiente enunciado: para cada $\epsilon_1 > 0$ existe una $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{si } |y - b| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{1}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, para cada $\delta_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - b| < \delta_1 \tag{2}$$

Si $0 < |x - a| < \delta_2$, se sustituye y por $g(x)$ en el enunciado (1) obteniéndose lo siguiente: para cada $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{si } |g(x) - b| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{3}$$

De los enunciados (2) y (3) se concluye que para cualquier $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1$$

de lo que se deduce que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$ ■

El teorema 1.9.1 tiene un papel importante en las demostraciones de los teoremas de límites 9 y 10, presentadas al final de la sección. A continuación se aplicará el teorema en la demostración del teorema siguiente que trata sobre la continuidad de una función compuesta.

1.9.2 Teorema Continuidad de una función compuesta

Si la función g es continua en a y la función f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en a.

Demostración Puesto que g es continua en a, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{4}$$

Como la función f es continua en $g(a)$, se puede aplicar el teorema 1.9.1 a la función compuesta $f \circ g$, de lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \to a} g(x)) \\ &= f(g(a)) \qquad (\text{por } (4)) \\ &= (f \circ g)(a)\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $f \circ g$ es continua en a. ■

El teorema 1.9.2 establece que *una función continua de una función continua es continua*. El siguiente ejemplo muestra como se emplea este teorema en la obtención de los números para los cuales una función particular es continua.

EJEMPLO 1 Determinar los números en los que la función siguiente es continua:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución La función h es la que se obtuvo en el ejemplo ilustrativo 1 como la función compuesta $f \circ g$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4 - x^2$. Como g es una función polinomial, es continua en todos los números reales. Además, por el teorema 1.8.5(ii), f es continua en cada número real positivo. En consecuencia, por el teorema 1.9.2, h es continua en cada número x para el cual $g(x) > 0$. Esto es, cuando $4 - x^2 > 0$. Por tanto, h es continua en el intervalo abierto $(-2, 2)$. ◀

Como la función h del ejemplo 1 es continua en cada número del intervalo abierto $(-2, 2)$, se dice que *h es continua en el intervalo abierto* $(-2, 2)$.

1.9.3 Definición de continuidad en un intervalo abierto

Se dice que una función es **continua en un intervalo abierto** si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Se hará referencia otra vez a la función h del ejemplo 1. Como h no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a -2 o 2, no se puede considerar $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$ o $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$. Por tanto, la definición 1.8.1 de continuidad en un número, no permite que h sea continua en -2 o 2. En consecuencia, para discutir la cuestión de la continuidad de h en el intervalo cerrado $[-2, 2]$, se debe extender el concepto de continuidad para incluir la continuidad en un extremo de un intervalo cerrado. Para esto, primero se define *continuidad por la derecha* y *continuidad por la izquierda*

1.9.4 Definición de continuidad por la derecha

Se dice que la función f es **continua por la derecha en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

1.9.5 Definición de continuidad por la izquierda

Se dice que la función f es **continua por la izquierda en el número a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

1.9.6 Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Se dice que una función, cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es **continua en el intervalo cerrado $[a, b]$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b), así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

EJEMPLO 2 Demuestre que la función h del ejemplo 1 es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Solución La función h está definida por

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

y en el ejemplo 1 se mostró que h es continua en el intervalo abierto $(-2, 2)$. Al aplicar el teorema 1.9.1 se calculan los límites $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} h(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} h(x) &= \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(2) \end{aligned}$$

De este modo, h es continua por la derecha en -2 y es continua por la izquierda en 2. En consecuencia, por la definición 1.9.6, h es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$. La gráfica de h se muestra en la figura 1. ◀

Observe la diferencia en la terminología utilizada en los ejemplos 1 y 2. En el ejemplo 1 se estableció que *h es continua en cada número del intervalo abierto* $(-2, 2)$, mientras que en el ejemplo 2 se concluyó que *h es continua en el intervalo cerrado* $[-2, 2]$.

1.9.7 Definición de continuidad en un intervalo semiabierto

(i) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $[a, b)$ es **continua en $[a, b)$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la derecha en a.

(ii) Una función cuyo dominio incluye al intervalo semiabierto $(a, b]$ es **continua en $(a, b]$** si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la izquierda en b.

Se tienen definiciones similares a las de la definición 1.9.7 para la continuidad en los intervalos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$.

EJEMPLO 3 Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función siguiente es continua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solución Primero se determina el dominio de f. La función está definida en todo número excepto cuando $x = 3$ o cuando $25 - x^2 < 0$ (esto es, cuando $x > 5$ o $x < -5$). Por tanto, el dominio de f es $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -5^+} f(x) &= 0 \\ &= f(-5) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 5^-} f(x) &= 0 \\ &= f(5) \end{aligned}$$

f es continua por la derecha en -5 y es continua por la izquierda en 5. Además, f es continua en los intervalos semiabiertos $(-5, 3)$ y $(3, 5)$. En consecuencia, f es continua en $[-5, 3) \cup (3, 5]$. ◀

La importancia de la continuidad de una función en un intervalo será más evidente a medida que avance en el estudio del Cálculo. Esta propiedad es parte de las hipótesis de muchos teoremas esenciales , tales como *el teorema del valor medio, los teoremas fundamentales del Cálculo,* y *el teorema del valor extremo.*

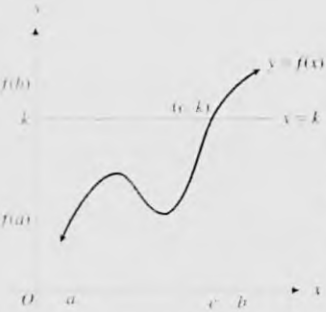


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se obtuvo como modelo matemático la función V definida por

$$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$$

y expresa el volumen de una caja de cartón como función de la longitud del cuadrado cortado en cada una de las esquinas de un trozo de cartón de forma rectangular. Debido a que V es una función polinomial, es continua en todo número, y por tanto, es continua en su dominio, el intervalo cerrado $[0, 5]$. Este hecho es necesario para aplicar el teorema del valor extremo de la sección 3.2 para determinar el valor de x, el cual hace que $V(x)$ sea un máximo. ◀

Otro teorema importante concerniente a la continuidad de una función en un intervalo cerrado es *el teorema del valor intermedio*, el cual se tratará a continuación.

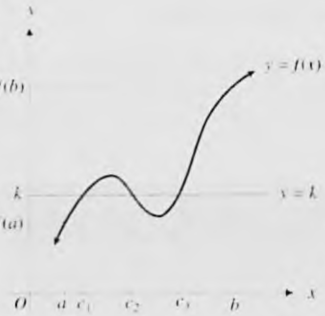


FIGURA 3

1.9.8 Teorema del valor intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor k entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.

La demostración del teorema del valor intermedio está más allá de los objetivos de este libro y puede encontrarse en un texto de Cálculo avanzado.

En términos geométricos, el teorema del valor intermedio establece que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado debe intersectar a cada recta $y = k$ entre las rectas $y = f(a)$ y $y = f(b)$ al menos una vez. Observe la figura 2, donde $(0, k)$ es cualquier punto sobre el eje y entre los puntos $(0, f(a))$ y $(0, f(b))$; la recta $y = k$ intersecta la gráfica de f en el punto (c, k), donde c está entre a y b.

Para algunos valores de k, puede tenerse más de un valor posible para c. El teorema establece que existe al menos un valor de c pero tal valor no es necesariamente único. La figura 3 muestra tres valores posibles para c (c_1, c_2 y c_3) para una k particular.

El teorema del valor intermedio afirma que si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ conforme x toma todos los valores entre a y b. Los dos ejemplos ilustrativos siguientes muestran la importancia de la continuidad de f en $[a, b]$ para poder garantizar esta afirmación.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

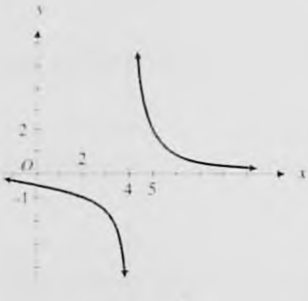
FIGURA 4

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 4.

La función f es discontinua en 2, el cual está en el intervalo cerrado $[0, 3]$; $f(0) = -1$ y $f(3) = 9$. Si k es cualquier número entre 1 y 4, entonces no hay ningún valor de c tal que $f(c) = k$ porque no existen valores de la función entre 1 y 4. ◀



$g(x) = \dfrac{2}{x-4}$

FIGURA 5

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

La figura 5 muestra la gráfica de esta función.

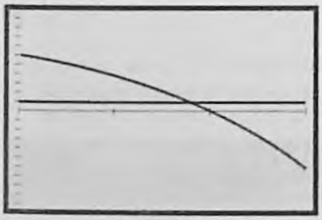
La función g es discontinua en 4, el cual pertenece al intervalo cerrado $[2, 5]$; $g(2) = -1$ y $g(5) = 2$. Si k es cualquier número entre -1 y 2, no hay ningún valor de c entre 2 y 5, tal que $g(c) = k$. En particular, si $k = 1$, entonces $g(6) = 1$, pero 6 no pertenece al intervalo $(2, 5)$. ◀

EJEMPLO 4

Dada la función f definida por

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \le x \le 5$$

(a) Verifique que el teorema del valor intermedio se cumpla para $k = 1$ trazando la gráfica de f y la recta $y = 1$; estime, con cuatro cifras decimales, el número c del intervalo $(2, 5)$, tal que $f(c) = 1$. **(b)** Confirme la estimación del inciso *(a)* analíticamente. **(c)** Dibuje la gráfica de f en el intervalo $[2, 5]$ y muestre el punto $(c, 1)$.



$[2, 5]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = 4 + 3x - x^2$

$y = 1$

FIGURA 6

Solución

(a) Como f es una función polinomial, es continua en todo número, en particular en $[2, 5]$. La figura 6 muestra la gráfica de f y la recta $y = 1$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[2, 5]$ por $[-10, 10]$. En la graficadora, se estima $c = 3.7913$.

(b) Se resuelve la ecuación cuadrática

$$4 + 3c - c^2 = 1$$
$$c^2 - 3c - 3 = 0$$
$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2}$$
$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Se rechaza $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{21})$ porque este número es negativo y no pertenece al intervalo $(2, 5)$. El número $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})$ está en el intervalo $(2, 5)$, y

$$f\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

Como $(3 + \sqrt{21})/2 = 3.7913$, se confirma la estimación.

(c) La gráfica requerida se muestra en la figura 7. ◀

$f(x) = 4 + 3x - x^2, x \in [2, 5]$

FIGURA 7

El teorema siguiente es una consecuencia directa, un corolario, del teorema del valor intermedio.

1.9.9 Teorema del cero intermedio

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$; es decir, c es un cero de f.

Demostración La función f satisface las hipótesis del teorema del valor intermedio, y como $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, se considera a 0 como un número k entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, existe un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$. ■

En el ejemplo siguiente se aplica el teorema del cero intermedio para localizar ceros de una función.

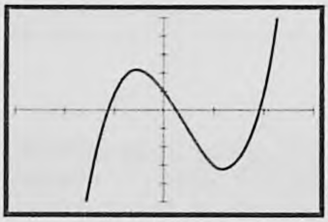
▶ ***EJEMPLO 5*** **(a)** Aplique el teorema del cero intermedio para mostrar que la función definida por

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$$

tiene tres ceros entre −2 y 2. **(b)** Estime en una graficadora estos ceros con dos cifras decimales.

Tabla 1

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−15	1	1	−3	1



$[-3, 3]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

FIGURA 8

Solución

(a) Se calculan los valores de $f(x)$ para los valores enteros de −2 a 2 y se forma la tabla 1. Como $f(-2)$ y $f(-1)$ tienen signos opuestos, f tiene un cero entre −2 y −1; también f tiene un cero entre 0 y 1, y otro entre 1 y 2 por la misma razón.

(b) La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$ se muestra en la figura 8. En la graficadora se estima que los ceros son −1.14, 0.23 y 1.91. ◀

Ahora se demostrarán los teoremas 9 y 10 como se indicó en la sección 1.5. Observe la aplicación del teorema 1.9.1 (límite de una función compuesta).

Teorema 9 de límites **Límite del cociente de dos funciones**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \qquad \text{si } M \neq 0$$

Demostración Sea h la función definida por $h(x) = 1/x$. Entonces la función compuesta $h \circ g$ está definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. La función h es continua en todo número excepto en 0, lo cual se deduce del teorema 1.5.12. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} &= \lim_{x\to a} h(g(x))\\ &= h(\lim_{x\to a} g(x)) \qquad \text{(por el teorema 1.9.1)}\\ &= h(M)\\ &= \frac{1}{M}\end{aligned}$$

Del teorema 6 de límites y del resultado anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}\\ &= L \cdot \frac{1}{M}\\ &= \frac{L}{M}\end{aligned}$$

■

Teorema 10 de límites — Límite de la raíz n-ésima de una función

Si n es un número entero positivo y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

Demostración Sea h la función definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$. Entonces la función compuesta $h \circ f$ está definida por $h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$. Del teorema 1.8.5, h es continua en L si n es impar, o si n es par y $L > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} &= \lim_{x \to a} h(f(x)) \\
&= h(\lim_{x \to a} f(x)) \qquad \text{(por el teorema 1.9.1)} \\
&= h(L) \\
&= \sqrt[n]{L}
\end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 1.9

En los ejercicios 1 a 6, defina $f \circ g$ y determine los números en los que $f \circ g$ es continua.

1. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$
2. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 16 - x^2$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 4$
3. (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 2}$;
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x}$
4. (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$;
   (b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{x - 1}}$; $g(x) = |x|$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4 - x}}$; $g(x) = |x|$

En los ejercicios 7 a 16, determine el dominio de la función, y después determine para cual de los intervalos indicados es continua la función.

7. $f(x) = \dfrac{2}{x + 5}$; $(3, 7)$, $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $(-5, +\infty)$, $[-5, +\infty)$, $[-10, -5)$
8. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$; $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, $(0, 2)$, $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(2, +\infty)$
9. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$; $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $[0, 1]$, $(-1, 0]$, $(-\infty, -1]$, $(1, +\infty)$
10. $f(r) = \dfrac{r + 3}{r^2 - 4}$; $(0, 4]$, $(-2, 2)$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$, $[-4, 4]$, $(-2, 2]$
11. $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; $(-\infty, -3)$, $(-\infty, -3]$, $(3, +\infty)$, $[3, +\infty)$, $(-3, 3)$
12. $f(x) = [\![x]\!]$; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(1, 2)$, $[1, 2)$, $(1, 2]$
13. $f(t) = \dfrac{|t - 1|}{t - 1}$; $(-\infty, 1)$, $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$, $(1, +\infty)$
14. $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ x - 5 & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$; $(-\infty, 1)$, $(-2, +\infty)$, $(-2, 1)$, $[-2, 1)$, $[-2, 1]$
15. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $[-2, 2)$, $(-2, 2]$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$
16. $F(y) = \dfrac{1}{3 + 2y - y^2}$; $(-1, 3)$, $[-1, 3]$, $[-1, 3)$, $(-1, 3]$

En los ejercicios 17 a 22, determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función $f \circ g$ del ejercicio indicado es continua.

17. Ejercicio 1
18. Ejercicio 2
19. Ejercicio 3
20. Ejercicio 4
21. Ejercicio 5
22. Ejercicio 6
23. Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función del ejercicio 17 de la sección 1.6 es continua.
24. Determine el intervalo más grande (o unión de intervalos) en el que la función del ejemplo 4 de la sección 1.6 es continua.

En los ejercicios 25 a 28, dibuje la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

25. f es continua en $(-\infty, 2]$ y $(2, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$

26. f es continua en $(-\infty, -2)$, $[-2, 4]$ y $(4, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 0$

27. f es continua en $(-\infty, -3]$, $(-3, 3)$ y $[3, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$

28. f es continua en $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$

En los ejercicios 29 a 34, demuestre que la función obtenida como un modelo matemático en el ejercicio indicado de la sección 1.3 es continua en su dominio.

29. **(a)** Ejercicio 13 **(b)** Ejercicio 15

30. **(a)** Ejercicio 14 **(b)** Ejercicio 16

31. **(a)** Ejercicio 17 **(b)** Ejercicio 19

32. **(a)** Ejercicio 18 **(b)** Ejercicio 20

33. **(a)** Ejercicio 21 **(b)** Ejercicio 23

34. **(a)** Ejercicio 22 **(b)** Ejercicio 24

En los ejercicios 35 a 42, determine si se cumple el teorema del valor intermedio para la función f, el intervalo cerrado [a, b] y el valor de k indicado. Si el teorema no se cumple, establezca la razón y apoye gráficamente su respuesta. Si el teorema se cumple: (a) trace la gráfica de f y la recta y = k en la graficadora y estime, con cuatro cifras decimales, el número c del intervalo (a, b) tal que f(c) = k. (b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente. (c) Dibuje la gráfica de f en [a, b] y muestre el punto (c, k).

35. $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$; $k = 1$

36. $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$; $[a, b] = [0, 8]$; $k = -8$

37. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4.5, 3]$; $k = 3$

38. $f(x) = x^2 + 5x - 6$; $[a, b] = [-1, 2]$; $k = 4$

39. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$; $[a, b] = [-3, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

40. $f(x) = \dfrac{5}{2x - 1}$; $[a, b] = [0, 1]$; $k = 2$

41. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \le x \le 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$; $k = -1$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -4 \le x < -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 < x \le 1 \end{cases}$; $[a, b] = [-4, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

En los ejercicios 43 a 46, haga lo siguiente: (a) aplique el teorema del cero intermedio para mostrar que la función f tiene el número indicado de ceros entre a y b. (b) Estime estos ceros con dos cifras decimales en la graficadora.

43. $f(x) = x^3 - 6x + 3$; tres ceros; $a = -5$; $b = 5$

44. $f(x) = x^4 + 7x^3 + x - 8$; dos ceros; $a = -10$; $b = 5$

45. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$; dos ceros; $a = -3$; $b = 3$

46. $f(x) = 3x^4 - 21x^3 + 36x^2 + 2x - 8$; cuatro ceros; $a = -5$; $b = 5$

47. Muestre que el teorema del cero intermedio garantiza que la ecuacion $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2, y utilice la graficadora para estimar esta raíz con dos cifras decimales.

48. Muestre que el teorema del cero intermedio garantiza que la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$ tiene una raíz entre -2 y 2, y utilice la graficadora para estimar esta raíz con dos cifras decimales.

49. De la ecuación que define a $m(v)$, que trata de la teoría especial de la relatividad de Einstein del ejercicio 51 de la sección 1.7, determine el intervalo más grande en el que m es continua.

50. Demuestre que si la función f es continua en a, entonces

$$\lim_{t \to 0} f(a - t) = f(a)$$

51. Demuestre que si $f(x)$ es no negativo para todo valor de x en su dominio y $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^2$ existe y es positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to a} [f(x)]^2}$$

52. Demuestre que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

53. Suponga que f es una función para la cual

$$0 \le f(x) \le 1 \quad \text{si } 0 \le x \le 1$$

Demuestre que si f es continua en $[0, 1]$, entonces existe al menos un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$. *Sugerencia:* si c no es 0 ni 1, entonces $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Considere la función g para la cual $g(x) = f(x) - x$ y aplique el teorema del valor intermedio a g en $[0, 1]$.

54. Encuentre el valor mayor de k para el cual la función definida por $f(x) = [\![x^2 - 2]\!]$ es continua en el intervalo $[3, 3 + k)$.

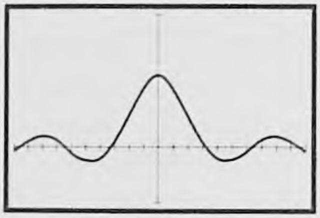
55. ¿Son equivalentes los dos enunciados siguientes: (i) la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$; (ii) la función f es continua en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$? Justifique su respuesta.

1.10 CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TEOREMA DE ESTRICCIÓN

Se supondrá que usted estudió trigonometría previamente; sin embargo, debido a la importancia de las funciones trigonométricas en Cálculo, se presenta un breve repaso de ellas en la sección A.9 del apéndice.

En un curso de trigonometría, las gráficas de las funciones trigonométricas se dibujan mediante consideraciones intuitivas, debido a que dos conceptos de Cálculo, *continuidad* y *diferenciación*, son necesarios para una presentación formal de dichas gráficas. En esta sección se tratará la continuidad de las funciones trigonométricas, mientras que en la sección 2.7, donde se obtendrán las gráficas, se dedicará a la diferenciación de estas funciones. En el estudio de la continuidad de las funciones trigonométricas se considerará el límite siguiente:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \tag{1}$$



$[-10, 10]$ por $[-1, 2]$

$f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

FIGURA 1

Observe que la función definida por $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ no existe cuando $t = 0$, pero existe para todos los otros valores de t. A fin de tener una idea intuitiva acerca de la existencia del límite (1), primero se trazará la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-1, 2]$, mostrada en la figura 1. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero en el eje y. De la figura, se sospecha que probablemente el límite de (1) existe y es igual a 1. A fin de examinar el límite a mayor profundidad, se calculan los valores de la función para conformar las tablas 1 y 2. De las dos tablas, se sospecha otra vez que si el límite en (1) existe, puede ser igual a 1. El hecho de que el límite exista y sea igual a 1 se demuestra en el teorema 1.10.2, pero en la demostración de este teorema se necesita el siguiente teorema, al cual se hará referencia como el *teorema de estricción*. Este último no sólo es importante en la demostración del teorema 1.10.2, sino que también se utiliza en la demostración de teoremas importantes en secciones posteriores.

Tabla 1

t	$\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$
1.0	0.84147
0.9	0.87036
0.8	0.89670
0.7	0.92031
0.6	0.94107
0.5	0.95885
0.4	0.97355
0.3	0.98507
0.2	0.99335
0.1	0.99833
0.01	0.99998

Tabla 2

t	$\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$
−1.0	0.84147
−0.9	0.87036
−0.8	0.89670
−0.7	0.92031
−0.6	0.94107
−0.5	0.95885
−0.4	0.97355
−0.3	0.98507
−0.2	0.99335
−0.1	0.99833
−0.01	0.99998

1.10.1 El teorema de estricción

Suponga que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a, y que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para toda x en I para la cual $x \neq a$. También suponga que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ existen y son iguales a L. Entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe y es igual a L.

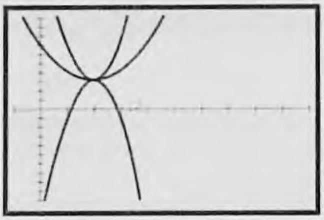
Se demostrará el teorema de estricción en el suplemento de esta sección. Sin embargo, ahora se interpretará el teorema geométricamente en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Sean f, g y h las funciones definidas por

$$f(x) = -4(x-2)^2 + 3$$

$$g(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$$

$$h(x) = 4(x-2)^2 + 3$$



$[-1, 10]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = -4(x - 2)^2 + 3$

$g(x) = \dfrac{(x-2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$

$h(x) = 4(x - 2)^2 + 3$

FIGURA 2

Las gráficas de estas funciones están trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 10]$ por $[-10, 10]$ de la figura 2. Las gráficas de f y h son parábolas que tienen su vértice en el punto $(2, 3)$. La gráfica de g es una parábola con su vértice en $(2, 3)$ suprimido. La función g no está definida cuando $x = 2$; sin embargo, para toda $x \neq 2$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Además, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 3$. Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema de estricción, de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** Considere que $|g(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$ para toda x. Utilice el teorema de estricción para determinar $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Solución Como $|g(x) - 2| \leq 3(x - 1)^2$ para toda x, se infiere que

$$-3(x - 1)^2 \leq g(x) - 2 \leq 3(x - 1)^2 \qquad \text{para toda } x$$

$$\Leftrightarrow \qquad -3(x - 1)^2 + 2 \leq g(x) \leq 3(x - 1)^2 + 2 \qquad \text{para toda } x$$

Sea $f(x) = -3(x - 1)^2 + 2$ y $h(x) = 3(x - 1)^2 + 2$. Entonces

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} h(x) = 2 \tag{2}$$

Además, para toda x,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{3}$$

Por tanto, de (2), (3) y el teorema de estricción

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 2$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Utilice el teorema de estricción para probar que

$$\lim_{x\to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

Apoye este hecho gráficamente.

Solución Como $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ para toda t, entonces

$$0 \leq \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1 \qquad \text{si } x \neq 0$$

Por tanto, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| &= |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x| \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \qquad \text{si } x \neq 0 \tag{4}$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, se deduce de la desigualdad (4) y del teorema de estricción que

$$\lim_{x\to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

$[-1, 1]$ por $[0, 1]$

$f(x) = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$

FIGURA 3

La gráfica de la función que tiene valores $\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$, trazada en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[0, 1]$, se muestra en la figura 3. Observe el inusual comportamiento oscilante de la función cuando $-0.32 \leq x \leq 0.32$. La gráfica apoya el hecho de que el límite es 0. ◀

1.10.2 Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Demostración Primero suponga que $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Refiérase a la figura 4, la cual muestra la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y el sector sombreado BOP, donde B es el punto $(1, 0)$ y P es el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. El área del sector circular de radio r y ángulo central cuya medida en radianes es t está determinada por $\frac{1}{2}r^2t$; de modo que si S unidades cuadradas es el área del sector BOP,

$$S = \tfrac{1}{2}t \tag{5}$$

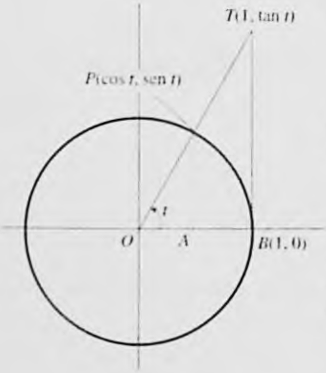


FIGURA 4

Considere ahora el triángulo BOP, y sea K_1 unidades cuadradas el área de este triángulo. Como $K_1 = \frac{1}{2}|\overline{AP}| \cdot |\overline{OB}|$, $|\overline{AP}| = \operatorname{sen} t$ y $|\overline{OB}| = 1$, se tiene

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t \tag{6}$$

Si K_2 unidades cuadradas es el área del triángulo rectángulo BOT, donde T es el punto $(1, \tan t)$, entonces $K_2 = \frac{1}{2}|\overline{BT}| \cdot |\overline{OB}|$. Debido a que $\overline{BT} = \tan t$ y $\overline{OB} = 1$, se tiene

$$K_2 = \tfrac{1}{2}\tan t \tag{7}$$

En la figura 4 se observa que

$$K_1 < S < K_2$$

Al sustituir de (5), (6) y (7) en esta desigualdad se obtiene

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t < \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{2}\tan t$$

Si se multiplica cada miembro de esta desigualdad por $2/\operatorname{sen} t$, el cual es positivo porque $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, se tiene

$$1 < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{t}{\cos t} \qquad \left(\text{porque } \frac{\tan t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\cos t}\right)$$

Al considerar el recíproco de cada miembro de esta desigualdad (lo cual hace que cambie de sentido el signo de desigualdad), se obtiene

$$\cos t < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \tag{8}$$

De la parte derecha de la desigualdad anterior se tiene

$$\operatorname{sen} t < t \tag{9}$$

y de una identidad trigonométrica de semivalor, se obtiene

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} t \tag{10}$$

Al sustituir t por $\frac{1}{2}t$ en la desigualdad (9), y si se eleva al cuadrado, se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{4}t^2 \tag{11}$$

Por tanto, de (10) y (11) se infiere que

$$\frac{1 - \cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}t^2 < \cos t \tag{12}$$

De (8) y (12) y como $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, se deduce que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{-t} < 1 \qquad \text{si } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi \tag{13}$$

Si $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$, entonces $0 < -t < \frac{1}{2}\pi$, y de (13),

$$1 - \frac{1}{2}(-t)^2 < \frac{\operatorname{sen}(-t)}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0$$

Pero $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$; de modo que lo anterior puede escribirse como

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0 \tag{14}$$

De (13) y (14) se concluye que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{si } -\tfrac{1}{2}\pi < t < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{y} \quad t \neq 0 \tag{15}$$

Como $\lim\limits_{t \to 0}(1 - \frac{1}{2}t^2) = 1$ y $\lim\limits_{t \to 0} 1 = 1$, se deduce de (15) y del teorema de estricción que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

■

▶ EJEMPLO 3

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$$

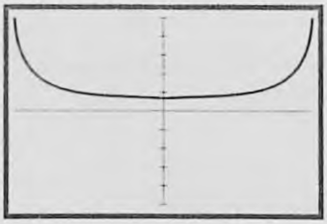
(a) Trace la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x se acerca a 0? **(b)** Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solución

(a) La figura 5 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-0.6, 0.6]$ por $[-5, 5]$. Como $f(0)$ no existe, la gráfica tiene un agujero en el punto donde $x = 0$. En la graficadora parece que $f(x)$ se aproxima a 0.6 cuando x se acerca a 0.

(b) Para determinar el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ se desea escribir el cociente $\operatorname{sen} 3x/\operatorname{sen} 5x$ de tal forma que pueda aplicarse el teorema 1.10.2. Si $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)}$$



$[-0.6, 0.6]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

FIGURA 5

Conforme x se aproxima a cero, $3x$ y $5x$ también lo hacen. En consecuencia,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = \lim_{5x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x} &= \frac{3 \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } 3x}{3x} \right)}{5 \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } 5x}{5x} \right)} \\ &= \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Este resultado confirma la respuesta del inciso (a). ◀

Del teorema 1.10.2 se puede demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en 0.

1.10.3 Teorema

La función seno es continua en 0.

Demostración Se demostrará que se cumplen las tres condiciones necesarias para la continuidad en un número.

(i) $\text{sen } 0 = 0$

(ii) $$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \text{sen } t &= \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} \cdot t \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} t \\ &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} \text{sen } t = \text{sen } 0$

Por tanto, la función seno es continua en 0. ■

1.10.4 Teorema

La función coseno es continua en 0.

Demostración Se verificará que se cumplen las tres condiciones necesarias para la continuidad en un número. En la verificación de la condición (ii) se utilizará el hecho de que la función seno es continua en 0, y se sustituirá $\cos t$ por $\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$ porque $\cos t > 0$ cuando $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$.

(i) $\cos 0 = 1$

(ii) $$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \cos t &= \lim_{t \to 0} \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \\ &= \sqrt{\lim_{t \to 0} (1 - \text{sen}^2 t)} \\ &= \sqrt{1 - 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} \cos t = \cos 0$

De este modo, la función coseno es continua en 0. ∎

El límite del enunciado del siguiente teorema, el cual se aplicará posteriormente, se obtiene a partir de los tres teoremas previos y de los teoremas de límites.

1.10.5 Teorema

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1+\cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}\end{aligned}$$

Por el teorema 1.10.2

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

y como las funciones seno y coseno son continuas en 0, se infiere que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} &= \frac{0}{1+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto,

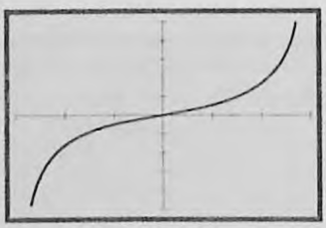
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} &= 1\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

∎

EJEMPLO 4 Sea g la función definida por

$$g(x) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

(a) Trace la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima $g(x)$ cuando x tiende o se acerca a 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando el $\lim_{x\to 0} g(x)$.



$[-3, 3]$ por $[-5, 5]$

$g(x) = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$

FIGURA 6

Solución

(a) La figura 6 muestra la gráfica de la función g trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$. La gráfica tiene un agujero en $x = 0$ porque $g(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $g(x)$ se aproxima a 0 conforme x tiende a 0.

(b) Puesto que $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$, los teoremas de límites no pueden aplicarse al cociente $(1 - \cos x)/\operatorname{sen} x$. Sin embargo, si el numerador y el denominador se dividen entre x, lo cual está permitido ya que $x \neq 0$, se podrán aplicar los teoremas 1.10.2 y 1.10.5. Así,

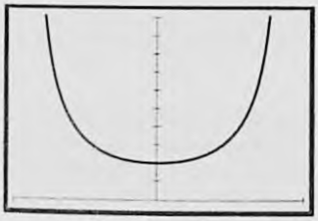
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}\\ &= \frac{0}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo que se ha confirmado la respuesta del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Sea h la función definida por

$$h(x) = \frac{2\tan^2 x}{x^2}$$

(a) Trace la gráfica de h en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima $h(x)$ cuando x tiende o se acerca a 0? **(b)** Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente calculando $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$



$[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ por $[0, 10]$

$$h(x) = \frac{2\tan^2 x}{x^2}$$

FIGURA 7

Solución

(a) Se traza la gráfica de h en el rectángulo de inspección de $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ por $[0, 10]$ para obtener la figura 7. La gráfica tiene un agujero en $x = 0$ porque $h(0)$ no existe. En la gráfica, parece que $h(x)$ se aproxima a 2 conforme x se acerca a 0.

(b) Se aplica la identidad trigonométrica

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\tan^2 x}{x^2} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\cdot\cos^2 x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\\ &= 2\end{aligned}$$

Este resultado confirma la respuesta del inciso (a). ◀

Del teorema 1.5.15 y de los hechos de que las funciones seno y coseno son continuas en 0, se puede demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en todo número, como se establece en el teorema siguiente.

1.10.6 Teorema

Las funciones seno y coseno son continuas en cada número real.

Demostración El conjunto de números reales es el dominio de las funciones seno y coseno. Por tanto, se debe demostrar que si a es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

o, equivalentemente, del teorema 1.5.15,

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(t + a) = \operatorname{sen} a \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0} \cos(t + a) = \cos a \tag{16}$$

En la demostración se utilizarán las identidades

$$\operatorname{sen}(t + a) = \operatorname{sen} t \cos a + \cos t \operatorname{sen} a \tag{17}$$

$$\cos(t + a) = \cos t \cos a - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a \tag{18}$$

De (17),

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \operatorname{sen}(t + a) &= \lim_{t \to 0} (\operatorname{sen} t \cos a + \cos t \operatorname{sen} a) \\
&= \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t \cdot \lim_{t \to 0} \cos a + \lim_{t \to 0} \cos t \cdot \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} a \\
&= 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \operatorname{sen} a \\
&= \operatorname{sen} a
\end{aligned}$$

Por tanto, se cumple la primera ecuación de (16); de modo que la función seno es continua en cada número real. De (18),

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \cos(t + a) &= \lim_{t \to 0} (\cos t \cos a - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} a) \\
&= \lim_{t \to 0} \cos t \cdot \lim_{t \to 0} \cos a - \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t \cdot \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} a \\
&= 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \operatorname{sen} a \\
&= \cos a
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple la segunda ecuación de (16); así, la función coseno es continua en cada número real. ■

Mediante el uso de identidades trigonométricas, el teorema 1.8.4, acerca de la continuidad de una función racional, y el teorema 1.10.6 se puede demostrar que las otras cuatro funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

1.10.7 Teorema

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son continuas en sus dominios.

La demostración del teorema 1.10.7 se deja como ejercicios (consulte los ejercicios 37 a 40).

EJERCICIOS 1.10

En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{x \to 0} f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 6x}$

5. $f(x) = \dfrac{3x}{\operatorname{sen} 5x}$

6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}$

8. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

10. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

11. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 4x}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{4x}$

13. $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x}$

14. $f(x) = \dfrac{1 - \cos^2 x}{2x^2}$

15. $f(x) = \dfrac{\tan x}{2x}$

16. $f(x) = \dfrac{\tan^4 2x}{4x^4}$

17. $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

18. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{\operatorname{sen} x}$

20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x^2 + 2x}$

En los ejercicios 21 y 22, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué se parece el comportamiento de g(t) conforme t se aproxima a 0 mediante valores mayores que 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{t \to 0^+} g(t)$.

21. $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2}$ **22.** $g(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 4t}{\cos 3t - 1}$

En los ejercicios 23 y 24, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de h en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima h(t) conforme t tiende o se acerca a π/2? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim_{t \to \pi/2} h(t)$. *Sugerencia: considere* $x = \frac{1}{2}\pi - t$.

23. $h(t) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} t}{\frac{1}{2}\pi - t}$ **24.** $h(t) = \dfrac{\frac{1}{2}\pi - t}{\cos t}$

En los ejercicios 25 y 26, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección conveniente. ¿A qué valor parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a π mediante valores mayores que π? (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim_{x \to \pi^+} f(x)$. *Sugerencia: considere* $t = x - \pi$.

25. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$ **26.** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x - \pi}$

27. Si $R(\theta)$ pies es el alcance de un proyectil, entonces

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi$$

donde v_0 pie/s es la velocidad inicial, g pie/s^2 es la constante de aceleración debida a la gravedad, y θ es la medida en radianes del ángulo que el cañón forma con la horizontal. Demuestre que R es continua en su dominio.

28. Si un cuerpo cuyo peso es de W libras es arrastrado a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud F libras y dirigida en un ángulo de θ radianes con respecto al piso, entonces

$$F(\theta) = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción* y $0 < k < 1$. Demuestre que F es continua en $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

En los ejercicios 29 a 32, utilice el teorema de estricción para determinar el límite. En los ejercicios 29 y 30, apoye su respuesta gráficamente.

29. $\lim_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$ **30.** $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

31. $\lim_{x \to 3} g(x)$, si $|g(x) + 4| < 2(3 - x)^4$ para toda x

32. $\lim_{x \to -2} g(x)$, si $|g(x) - 3| < 5(x + 2)^2$ para toda x

En los ejercicios 33 y 34, determine el límite si existe y apoye su respuesta gráficamente.

33. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$ **34.** $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. Dado que $1 - \cos^2 x \le f(x) \le x^2$, para toda x en el intervalo abierto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, determine $\lim_{x \to 0} f(x)$.

36. Dado que $-\operatorname{sen} x \le f(x) \le 2 + \operatorname{sen} x$, para toda x en el intervalo abierto $(-\pi, 0)$, determine $\lim_{x \to -\pi/2} f(x)$.

En los ejercicios 37 a 40, demuestre que la función es continua en su dominio.

37. La función tangente

38. La función cotangente

39. La función secante

40. La función cosecante

41. Si $|f(x)| \le M$ para toda x, donde M es una constante, utilice el teorema de estricción para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.

42. Considere que $|f(x)| \le M$ para toda x, donde M es una constante. Además suponga que $\lim_{x \to a} |g(x)| = 0$. Utilice el teorema de estricción para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

43. Si $|f(x)| \le k|x - a|$ para toda $x \ne a$, donde k es una constante, demuestre que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

44. Dada $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, trace la gráfica de f en cada uno de los siguientes rectángulos de inspección: **(a)** $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$; **(b)** $[-1, 1]$ por $[-2, 2]$; **(c)** $[-0.5, 0.5]$ por $[-2, 2]$; **(d)** $[-0.25, 0.25]$ por $[-2, 2]$; **(e)** $[-0.1, 0.1]$ por $[-2, 2]$; **(f)** $[-0.01, 0.01]$ por $[-2, 2]$; **(g)** ¿Sospecha que el $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe? Si es así, ¿qué número sospecha que es y por qué? O, ¿sospecha que el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe? Si es así, ¿por qué?

45. Haga el ejercicio 44 considerando ahora que $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$.

46. Haga el ejercicio 44 considerando ahora que $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 1

1. Defina *función* y en su definición incluya los conceptos de *dominio* y *contradominio*.

2. Invente un ejemplo de una función que tenga la propiedad indicada:

   (a) El dominio es el conjunto de todos los números reales.

   (b) El dominio es el conjunto de todos los números no negativos.

(c) El dominio es el conjunto de todos los números negativos.

(d) El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 0.

(e) El contradominio es el conjunto de todos los números enteros.

3. ¿Qué se entiende por *gráfica de una función*?

4. Invente un ejemplo de una función que tenga la propiedad indicada:

(a) La gráfica de f tiene un "agujero" en $x = 4$, cuando $f(4)$ no está definido.

(b) La gráfica de f tiene un "agujero" en $x = 4$, cuando $f(4)$ está definido.

(c) La función f está definida a trozos para $x < 2$ y $2 \leq x$, donde la gráfica de f se rompe en $x = 2$.

(d) La función f está definida a trozos para $x < 2$ y $2 \leq x$, donde la gráfica de f no se rompe en $x = 2$.

5. Defina la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de dos funciones f y g, y establezca cómo se relaciona el dominio de la función resultante con los dominios de las funciones f y g.

6. Invente un ejemplo de dos funciones f y g, tales que al menos una no sea una función polinomial, y defina $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y $(f/g)(x)$. Determine los dominios de f y g y los dominios de las funciones resultantes.

7. Defina la *función compuesta* de dos funciones f y g, y establezca cómo se relaciona el dominio de la función compuesta con los dominios de las funciones f y g.

8. Invente un ejemplo de dos funciones f y g, tales que al menos una no sea una función polinomial, y defina $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. Determine los dominios de f y g, así como los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$.

9. ¿Qué se entiende por: **(a)** *función par*, **(b)** *función impar*? Describa la simetría de las gráficas de cada uno de estos tipos de funciones.

10. Invente un ejemplo de una función, diferente de una polinomial, que sea **(a)** par, **(b)** impar y **(c)** ni par ni impar.

11. Defina con precisión, empleando la notación ϵ-δ, lo que se entiende por: *el límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es igual a L*. Ahora establezca en palabras lo que significa sin utilizar la notación ϵ-δ y sin usar las palabras *límite* y *tiende* o *se aproxima*.

12. ¿Cómo se utiliza la definición del límite de una función para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

13. Describa en términos geométricos la relación entre ϵ y δ de la definición del límite de una función.

14. Invente un ejemplo de una función para la cual:

(a) $f(a)$ no existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(b) $f(a)$ existe, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe;

(c) tanto $f(a)$ como $\lim_{x \to a} f(x)$ existen, pero no son iguales.

15. ¿Qué se entiende cuando se dice que *el límite de una función, cuando existe es único*? Establezca el teorema que garantiza este hecho.

16. ¿Cómo se utilizan los teoremas de límites para calcular el límite de una función?

17. Establezca los teoremas que tratan sobre los límites de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

18. ¿Por qué no es preciso el siguiente enunciado: *El límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites*? Invente un ejemplo de dos funciones para las cuales el enunciado es incorrecto.

19. Invente un ejemplo de dos funciones f y g tales que al menos una no sea una función polinomial, y muestre cómo se aplican los teoremas de la sugerencia 17.

20. Defina con precisión, utilizando la notación ϵ-δ, cada uno de los siguientes *límites laterales*: **(a)** $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$; **(b)** $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Ahora establezca en palabras lo que significa cada una de estas definiciones sin utilizar la notación ϵ-δ ni usar las palabras *límite* y *tiende* o *se aproxima*.

21. ¿Cómo están relacionados los límites laterales y los límites bilaterales?

22. ¿Cuándo es necesario emplear los límites laterales para calcular un límite bilateral? Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

23. ¿Cuándo pueden emplearse los límites laterales para demostrar que un límite bilateral no existe? Invente un ejemplo para ilustrar su respuesta.

24. Defina con precisión, empleando la notación δ-N, cada una de las siguientes expresiones: **(a)** conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite; **(b)** conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite. Ahora establezca en palabras lo que significa cada una de estas definiciones sin utilizar la notación δ-N y sin usar las palabras *límite, tiende a* o *se aproxima a, infinito, crece sin límite* o *decrece sin límite*.

25. ¿Cómo se evalúa el límite de una función racional para la cual el límite del denominador es cero y el límite del numerador es una constante diferente de cero?

26. ¿Qué es la *asíntota vertical* de la gráfica de una función?

27. ¿Cómo puede determinarse cualquier asíntota vertical para la gráfica de una función?

28. Invente ejemplos de dos funciones racionales tales que la gráfica de una tenga un agujero en el punto donde $x = 3$ y la otra tenga a la recta $x = 3$ como una asíntota vertical.

29. Defina: la función f es continua en el número a.

30. Invente un ejemplo de una función discontinua en el número 1, debido a las condiciones indicadas:

(a) $f(1)$ no existe, pero $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe; **(b)** $f(1)$ existe pero $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe; **(c)** tanto $f(1)$ como $\lim_{x \to 1} f(x)$ existen, pero no son iguales.

31. ¿Cuál es la diferencia entre *discontinuidad esencial* y *discontinuidad removible*?

32. Invente un ejemplo de una función que tenga una discontinuidad esencial en $x = 2$. Después invente un ejemplo de una función que tenga una discontinuidad removible en $x = 2$ y muestre cómo puede removerse o eliminarse esta discontinuidad.

33. Establezca los teoremas concernientes a la continuidad de funciones polinominales y racionales. ¿Cómo se aplican estos teoremas para calcular los límites de estas funciones?

34. ¿Qué condiciones de continuidad de las funciones f y g son necesarias para que la función compuesta $f \circ g$ sea continua en el número a?

35. Invente un ejemplo de dos funciones f y g tales que la función compuesta $f \circ g$ sea continua en cada número del intervalo abierto $(-3, 3)$. Muestre que las funciones f y g de su ejemplo cumplen las condiciones de la respuesta de la sugerencia 34.

36. Invente un ejemplo de una función que sea discontinua en el número c y que sea continua por la derecha de c. Muestre que su función satisface los requerimientos.

37. Defina: la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

38. Establezca el *teorema del valor intermedio*.

39. Invente un ejemplo de una función que ilustre el teorema del valor intermedio. Muestre que la hipótesis y la conclusión del teorema son satisfechas por su función.

40. Establezca el *teorema de estricción*. Invente un ejemplo de tres funciones f, g y h que satisfagan las hipótesis de este teorema y muestre que se cumple la conclusión.

41. Invente un ejemplo de tres funciones f, g y h que ilustren cómo se aplica el teorema de estricción para calcular el límite de $g(x)$ cuando los límites de $f(x)$ y $h(x)$ se conocen.

42. ¿A qué es igual el $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ y cómo se utiliza su valor para demostrar que la función seno es continua en 0?

43. ¿Cómo se emplea la continuidad de la función seno en 0 para demostrar que la función coseno es continua en 0?

44. ¿Cómo se usa el hecho de que las funciones seno y coseno son continuas en 0 para demostrar que dichas funciones son continuas en cada número real?

45. ¿Cómo se demuestra la continuidad de las otras cuatro funciones trigonométricas a partir de la continuidad de las funciones seno y coseno?

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 1

1. Dada $f(x) = 4 - x^2$, determine: **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(-2)$; **(c)** $f(3)$; **(d)** $f(x - 1)$; **(e)** $f(x^2)$; **(f)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

2. Dada $g(x) = \sqrt{1 - x}$, determine: **(a)** $g(1)$; **(b)** $g(-3)$; **(c)** $g(x + 1)$; **(d)** $g(1 - x^2)$; **(e)** $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$

En los ejercicios 3 a 6, defina las siguientes funciones y determine los dominios de las funciones resultantes: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f; (f) $f \circ g$; (g) $g \circ f$.

3. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $g(x) = x^2 - 4$

4. $f(x) = x^2 - 9$; $g(x) = \sqrt{x + 5}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

En los ejercicios 7 y 8, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

7. **(a)** $f(x) = 2x^3 - 3x$ **(b)** $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$ **(c)** $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$ **(d)** $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

8. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ **(c)** $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ **(d)** $F(x) = x^2 [\![x]\!]$

En los ejercicios 9 y 10, trace la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

9. **(a)** $f(x) = 4 - 2x$ **(b)** $g(x) = x^2 - 4$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ **(d)** $F(x) = \sqrt{16 - x^2}$ **(e)** $f(x) = |5 - x|$ **(f)** $g(x) = 5 - |x|$

10. **(a)** $g(x) = 3x + 2$ **(b)** $f(x) = 9 - x^2$ **(c)** $H(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **(d)** $G(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ **(e)** $g(x) = |x + 4|$ **(f)** $f(x) = |x| + 4$

En los ejercicios 11 a 14, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

11. **(a)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$ **(b)** $G(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$

12. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ **(b)** $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

13. **(a)** $F(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + 2x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

(b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

14. (a) $G(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(b) $H(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ (x + 2)^2 & \text{si } -1 \leq x \end{cases}$

En los ejercicios 15 a 20, se han dado $f(x)$, a, L y ϵ. (a) Utilice una figura y un argumento semejante a los de los ejemplos 1 y 3 de la sección 1.4 para determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con la graficadora. (c) Confirme analíticamente, empleando las propiedades de las desigualdades, la elección de δ del inciso (a).

15. $f(x) = 2x - 5$; $a = 3$; $L = 1$; $\epsilon = 0.05$

16. $f(x) = 3x + 2$; $a = 1$; $L = 5$; $\epsilon = 0.2$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$; $a = 5$; $L = 10$; $\epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 10}{x + 2}$; $a = -2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.03$

19. $f(x) = x^2 + 4$; $a = 2$; $L = 8$; $\epsilon = 0.3$

20. $f(x) = x^2 - 3x$; $a = 3$; $L = 0$; ϵ 0.08

En los ejercicios 21 a 26, demuestre que el límite es el número indicado aplicando la definición 1.5.1; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$, determine una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

21. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 5) = 1$

22. $\lim\limits_{x \to -2} (8 - 3x) = 14$

23. $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 8) = 5$

24. $\lim\limits_{x \to 5} (4x - 11) = 9$

25. $\lim\limits_{x \to -3/4} \dfrac{16x^2 - 9}{4x + 3} = -6$

26. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{1 - 9x^2}{1 - 3x} = 2$

En los ejercicios 27 a 34, calcule el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites empleados.

27. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 5)$

28. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x - 14}$

29. $\lim\limits_{z \to -3} \dfrac{z^2 - 9}{z + 3}$

30. $\lim\limits_{h \to -1} \dfrac{h^2 - 4}{3h^3 + 6}$

31. $\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt[3]{\dfrac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}}$

32. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + t}}{t}$

33. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - t} - 3}{t}$

34. $\lim\limits_{y \to -4} \sqrt{\dfrac{5y + 4}{y - 5}}$

En los ejercicios 35 a 42, calcule el límite si existe, y apoye su respuesta trazando la gráfica de la función en un rectángulo de inspección adecuado.

35. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5}$

36. $\lim\limits_{y \to 3} \sqrt{\dfrac{y - 3}{y^3 - 27}}$

37. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9}$

38. $\lim\limits_{y \to 5} \sqrt{\dfrac{25 - y^2}{y - 5}}$

39. $\lim\limits_{s \to 7} \dfrac{5 - \sqrt{4 + 3s}}{7 - s}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 - 3x^2}$

41. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{[\![x]\!] - 1}{[\![x]\!] - x}$

42. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$

En los ejercicios 43 a 48, dibuje la gráfica de la función y calcule el límite indicado si existe; si el límite no existe, establezca la razón.

43. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 3 \\ x + 5 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

44. $g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

45. $h(t) = \dfrac{|t - 1|}{t - 1}$

(a) $\lim\limits_{t \to 1^-} h(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to 1^+} h(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to 1} h(t)$

46. $f(r) = \begin{cases} |r - 2| & \text{si } r \neq 2 \\ 3 & \text{si } r = 2 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{r \to 2^-} f(r)$; (b) $\lim\limits_{r \to 2^+} f(r)$; (c) $\lim\limits_{r \to 2} f(r)$.

47. $g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \leq x \leq 4 \\ 4 - x & \text{si } 4 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to -4} g(x)$,
(d) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x)$; (e) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$; (f) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

48. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ x - 2 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$;
(d) $\lim\limits_{x \to 4^-} h(x)$; (e) $\lim\limits_{x \to 4^+} h(x)$; (f) $\lim\limits_{x \to 4} h(x)$.

En los ejercicios 49 a 54, calcule el límite y apoye su respuesta gráficamente.

49. (a) $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{2x}{16 - x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{2x}{16 - x^2}$

50. (a) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (b) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

51. (a) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{2x}{16 - x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2x}{16 - x^2}$

52. (a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

53. **(a)** $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{\sqrt{t-4}}{(t-5)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{t\to 5^+} \dfrac{4-t}{\sqrt{t-5}}$

54. **(a)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{3-x}}{(x+2)^2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+2}}$

En los ejercicios 55 a 62, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de f en un rectángulo de inspección adecuado. ¿A qué número parece que se aproxima f(x) conforme x tiende o se acerca a 0? (b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente, calculando el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

55. $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

56. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

57. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

58. $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$

59. $f(x) = \dfrac{1-\cos^2 x}{x}$

60. $f(x) = \dfrac{4x}{\tan x}$

61. $f(x) = \dfrac{\csc 3x}{\cot x}$

62. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{2\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 63 a 68, determine las asíntotas verticales de la gráfica de la función y utilícelas para dibujar la gráfica.

63. $f(x) = \dfrac{x+8}{x-4}$

64. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$

65. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

66. $f(x) = \dfrac{-2}{x^2-x-6}$

67. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2-4}$

68. $h(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

En los ejercicios 69 a 74, dibuje la gráfica de la función; después observe donde se rompe la gráfica, determine los valores de x en los que la función es discontinua y muestre por qué la definición 1.8.1 no se satisface en cada discontinuidad.

69. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

70. $g(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

71. $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le -2 \\ x-2 & \text{si } -2 < x \le 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

72. $F(x) = \begin{cases} |4-x| & \text{si } x \ne 4 \\ -2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

73. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

74. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 9-x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

En los ejercicios 75 a 78, demuestre que la función es discontinua en el número a. Después determine si la discontinuidad es esencial o removible. Si la discontinuidad es removible, redefina f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada.

75. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2+3x-4}$; $a = -4$

76. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x+3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $a = 1$

77. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x \ne 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$; $a = 2$

78. $f(x) = \dfrac{|2x-6|}{2x-6}$; $a = 3$

En los ejercicios 79 a 82, la función es discontinua en el número a. (a) Trace la gráfica de f, la cual se rompe en el punto donde x = a. ¿Es esencial o removible la discontinuidad? Si parece que es removible, especule acerca de cómo debe redefinirse f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada. (b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente.

79. $f(x) = \dfrac{|4-x|-3}{x-1}$, $a = 1$

80. $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$; $a = 0$

81. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$; $a = 0$

82. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; $a = 1$

En los ejercicios 83 y 84, (a) defina $f \circ g$ y (b) determine los números en los que $f \circ g$ es continua y establezca la razón.

83. **(a)** $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 25 - x^2$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{3-x}}$ y $g(x) = |x|$

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y $g(x) = x^2 - 1$

84. **(a)** $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 25$

(b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ y $g(x) = x^2 - x$

En los ejercicios 85 y 86, determine los valores de las constantes a y b que hagan a la función continua en todo número y dibuje la gráfica de la función resultante.

85. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \le 3 \\ ax+b & \text{si } 3 < x < 5 \\ x^2+2 & \text{si } 5 \le x \end{cases}$

86. $f(x) = \begin{cases} 3x+6a & \text{si } x < -3 \\ 3ax-7b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ x-12b & \text{si } 3 < x \end{cases}$

87. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número entero} \\ 0 & \text{si } x \text{ no es un número entero} \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** ¿Para qué valores de a existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$? **(c)** ¿En qué números reales es continua f?

88. Proporcione un ejemplo de una función f para la cual $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$ exista pero que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no exista.

En los ejercicios 89 a 92, determine el intervalo más grande (o unión de intervalos), donde la función es continua. Apoye la respuesta con la graficadora.

89. **(a)** $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

90. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x| + 1}{|x| - 1}$
(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$

91. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$
(b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

92. $F(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \leq x \leq 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 < x \end{cases}$

En los ejercicios 93 a 96, haga lo siguiente: (a) verifique que se cumpla el teorema del valor intermedio para la función f, el intervalo cerrado [a, b] y el valor dado de k; (b) trace la gráfica de f y la recta y = k en la graficadora y estime, con cuatro cifras decimales, el número c de (a, b) tal que f(c) = k; (c) confirme analíticamente la estimación del inciso (b); (d) dibuje la gráfica de f en el intervalo [a, b] y muestre el punto (c, k).

93. $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $[a, b] = [-10, 0]$; $k = 10$

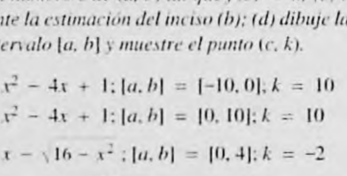
94. $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $[a, b] = [0, 10]$; $k = 10$

95. $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$; $[a, b] = [0, 4]$; $k = -2$

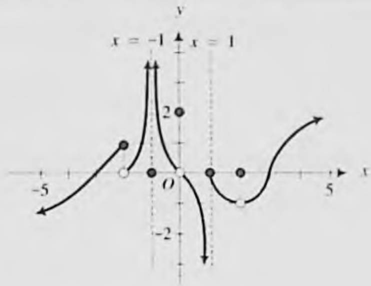
96. $f(x) = x - \sqrt{16 - x^2}$; $[a, b] = [-4, 0]$; $k = -2$

En los ejercicios 97 y 98, responda las preguntas a partir de la gráfica adjunta de la función f.

97. ¿Cuál es el valor de cada uno de los límites siguientes: **(a)** $\lim_{x \to -3} f(x)$; **(b)** $\lim_{x \to -2} f(x)$; **(c)** $\lim_{x \to 0} f(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, **(e)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, **(f)** $\lim_{x \to 3^-} f(x)$; **(g)** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$? **(h)** ¿En qué números es discontinua f? **(i)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son esenciales? **(j)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son removibles? ¿Cómo redefiniría la función para eliminar las discontinuidades?



98. ¿Cuál es el valor de cada uno de los límites siguientes: **(a)** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$; **(b)** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$; **(c)** $\lim_{x \to -1} f(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, **(f)** $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; **(g)** $\lim_{x \to 2} f(x)$? **(h)** ¿En qué números es discontinua f? **(i)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son esenciales? **(j)** ¿Cuáles de las discontinuidades del inciso (h) son removibles? ¿Cómo redefiniría la función para eliminar las discontinuidades?



En los ejercicios 99 a 102, dibuje la gráfica de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

99. −5, −3, −2, −1, 0, y 2 son los únicos ceros de f; $\lim_{x \to -3} f(x) = 4$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$; f es continua en todos los números de los intervalos abiertos $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

100. f es continua en $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, 3]$, y $(3, +\infty)$; $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$.

101. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$; $f(-4) = 2$; −2, 0, 2, 4 y 6 son los únicos ceros de f; $\lim_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$; $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$; f es continua en todos los números excepto −4, −2, 0, y 4.

102. f es continua en $(-\infty, -4]$, $(-4, 4)$ y $[4, +\infty)$; $\lim_{x \to -6} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -2$; $\lim_{x \to 6} f(x) = 0$.

En los ejercicios 103 a 106, obtenga un modelo matemático de la situación particular. Estos modelos se tratarán más adelante cuando se aplique el Cálculo a la situación. Defina la variable independiente y los valores de función como números, e indique las unidades de medición. Asegúrese de completar el ejercicio escribiendo una conclusión.

103. Se construye una cacerola abierta cortando cuadrados del mismo tamaño en las esquinas de un trozo rectangular de lámina de 14 por 18 pulg y doblando los lados hacia arriba. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la cacerola como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán.

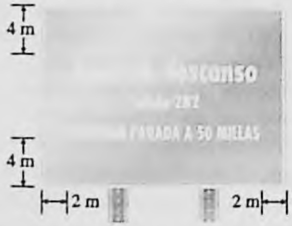
(b) ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)?

(c) Demuestre que la función es continua en su dominio.

(d) En la graficadora, estime con aproximación de centésimos de pulgada la longitud del lado de los cuadrados que deben cortarse de modo que el volumen de la cacerola sea un máximo.

104. Una caja abierta tiene base cuadrada y un volumen de 4000 pulg^3. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área de la superficie total de la caja, como una función de la longitud del lado de la base cuadrada. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Demuestre que la función es continua en su dominio. **(d)** En la graficadora, determine, con aproximación de pulgadas, las dimensiones de la caja que pueda construirse con la mínima cantidad de material.

105. Se requiere que un anuncio, que contiene 50 m^2 de material impreso, tenga márgenes de 4 m en las partes superior e inferior y 2 m en los otros dos lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total del anuncio como una función de la dimensión horizontal de la región cubierta por el material impreso. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Demuestre que la función es continua en su dominio. **(d)** En la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del anuncio más pequeño que cumpla con estas especificaciones.



106. Un estanque puede mantener a 10 000 peces, la tasa de crecimiento de la población de peces es conjuntamente proporcional al número de peces presentes y a la diferencia entre 10 000 y el número de peces presentes. La tasa de crecimiento es de 90 peces semanales cuando se encuentran presentes 1 000 peces. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento de la población, como una función de la cantidad de peces presentes. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Demuestre que la función es continua en su dominio. **(d)** En la graficadora, determine el tamaño de la población de peces, de modo que la tasa de crecimiento sea un máximo.

107. U y sgn son las funciones salto unitario y signo definidas en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. Encuentre fórmulas para la función F definida por

$$F(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot U(x+1)$$

y dibuje su gráfica. ¿En qué números es F discontinua y por qué?

En los ejercicios 108 y 109, utilice el teorema de estricción para calcular los límites.

108. $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ si $|g(x) + 5| < 3(4 - x)^2$ para toda x

109. $\lim\limits_{x \to 1}\left[(x-1)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right]$

110. Dibuje la gráfica de f si $f(x) = [\![1 - x^2]\!]$ y $-2 \le x \le 2$. **(a)** ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? **(b)** ¿Es f continua en 0?

111. Dibuje la gráfica de g si $g(x) = (x-1)[\![x]\!]$ y $0 \le x \le 2$. **(a)** ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$? **(b)** ¿Es g continua en 1?

112. **(a)** Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x excepto a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ si los límites existen. **(b)** Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para todos los valores de x excepto a, entonces si $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe. *Sugerencia:* muestre que la suposición de que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe conduce a una contradicción.

113. **(a)** Demuestre que si $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, entonces $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x-h)$

(b) Demuestre que el inverso del teorema del inciso (a) es falso proporcionando un ejemplo de una función para la cual $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x-h)$, pero $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) \neq f(x)$.

114. Si el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y f es continua en 0, demuestre que si

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

para todo a y b, entonces f es continua en todo número real.

115. Si el dominio de f es el conjunto de todos los números reales y f es continua en 0, demuestre que si

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

para todo a y b, entonces f es continua en todo número real.

116. Suponga que la función f está definida en el intervalo abierto $(0, 1)$ y que

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(x-1)}$$

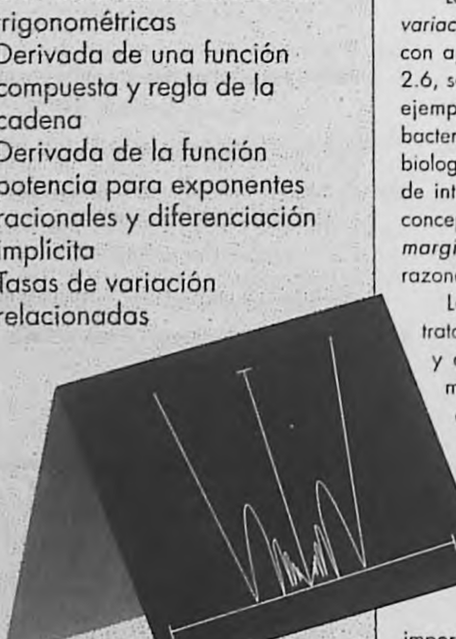
Defina f en 0 y 1 de modo que f sea continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Capítulo 2

Derivada y diferenciación

VISIÓN PRELIMINAR

2.1 Recta tangente y derivada
2.2 Diferenciabilidad y continuidad
2.3 Derivada numérica
2.4 Teoremas sobre diferenciación de funciones algebraicas y derivadas de orden superior
2.5 Movimiento rectilíneo
2.6 Derivada como tasa de variación
2.7 Derivadas de las funciones trigonométricas
2.8 Derivada de una función compuesta y regla de la cadena
2.9 Derivada de la función potencia para exponentes racionales y diferenciación implícita
2.10 Tasas de variación relacionadas



En la sección 2.1 se introduce la *derivada*, considerando primero su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Una función que tiene una derivada se dice *diferenciable*, y en la sección 2.2 se estudiará la relación entre diferenciabilidad y continuidad. La *derivada numérica* se aplica en la sección 2.3 para aproximar la derivada de una función en una graficadora y en secciones posteriores para apoyar gráficamente los cálculos de derivadas.

Una derivada se calcula mediante la operación de *diferenciación* o *derivación*. Los teoremas que permiten efectuar este cálculo sobre funciones algebraicas se establecen y demuestran en la sección 2.4, en la cual también se introducen las *derivadas de orden superior*.

La interpretación de la derivada como una *tasa de variación* (o *razón de cambio*), se inicia en la sección 2.5 con aplicaciones al movimiento rectilíneo. En la sección 2.6, se extienden las aplicaciones a otras disciplinas. Por ejemplo, la tasa de crecimiento de una población de bacterias proporciona una aplicación de la derivada en biología. La tasa de variación en una reacción química es de interés para un químico. Los economistas tratan con conceptos marginales tales como *ingreso marginal*, *costo marginal* y *utilidad marginal*, los cuales son tasas (o razones) de variación.

La diferenciación de funciones trigonométricas se trata en la sección 2.7, y en la sección 2.8 se establece y demuestra la *regla de la cadena*, un poderoso medio empleado para diferenciar funciones compuestas. La regla de la cadena se aplica en la sección 2.9 para obtener la fórmula que proporciona la derivada de la función potencia con exponentes racionales así como en la diferenciación de funciones definidas implícitamente. Los problemas que involucran tasas de variación relacionadas, tratadas en la sección 2.10, proporcionan otra aplicación importante de la derivada.

2.1 RECTA TANGENTE Y DERIVADA

FIGURA 1

Muchos problemas importantes en Cálculo dependen de la determinación de la *recta tangente* a la gráfica de una función en un punto específico de su gráfica. Esta sección se inicia con la definición de lo que significará *recta tangente*.

Recuerde de su curso de geometría plana que la recta tangente en un punto de una circunferencia se definió como la recta que intersecta a la circunferencia en sólo un punto. Tal definición no es suficiente para una curva en general. Por ejemplo, en la figura 1 la recta que debería ser la recta tangente a la curva en el punto P intersecta a la recta en otro punto Q. Para obtener una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, se emplea el concepto de límite a fin de definir la *pendiente de la recta tangente* en el punto. Después, la recta tangente se determina por medio de su pendiente y el punto de tangencia.

Considere que la función f es continua en x_1. Se desea definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Sea I un intervalo abierto que contiene a x_1, en el cual está definida f. Sea $Q(x_2, f(x_2))$ otro punto sobre la gráfica de f tal que x_2 también esté en I. Dibuje la recta que pasa por P y Q. Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se denomina **recta secante;** por tanto, la recta que pasa por P y Q es una recta secante. En la figura 2 se muestra la recta secante para varios valores de x_2. La figura 3 muestra una recta secante particular. En esta figura Q está a la derecha de P. Sin embargo, Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P, como se muestra en la figura 2.

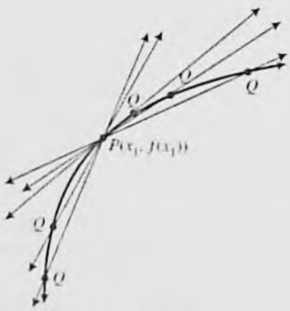


FIGURA 2

La diferencia de las abscisas (las coordenas x) de Q y P se denota por Δx (y se lee "delta x") de modo que

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observe que Δx representa el cambio en el valor de x de x_1 a x_2 y puede ser positivo o negativo. Este cambio recibe el nombre de **incremento de x.** Note que el símbolo Δx para el incremento de x no significa "delta multiplicado por x".

Considere la recta secante PQ de la figura 3; su pendiente está determinada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

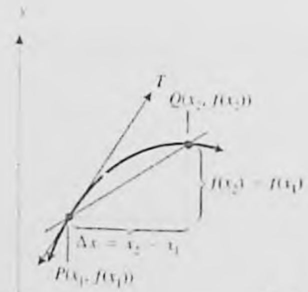


FIGURA 3

Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora considere el punto P como un punto fijo y que el punto Q se mueve a lo largo de la curva hacia P; esto es, Q tiende o se aproxima a P. Esto equivale a decir que Δx tiende a cero.

Conforme esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P. Si la recta secante PQ tiene una posición límite, es esta posición límite la que se quiere como la recta tangente a la gráfica de f en el punto P. Se desea así, que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en P sea el límite de m_{PQ} conforme Δx tiende a cero, si este límite existe. Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ es igual a

$+\infty$ o a $-\infty$, entonces conforme Δx tiende a cero la recta PQ tiende a la recta que pasa por P y es paralela al eje y. En este caso se desearía que la recta tangente sea la recta $x = x_1$. Esta discusión conduce a la siguiente definición.

2.1.1 Definición de recta tangente a la gráfica de una función

Suponga que la función f es continua en x_1. La **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es

(i) la recta que pasa por P y tiene pendiente $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (1)$$

si este límite existe.

(ii) la recta $x = x_1$ si

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty$$

y

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ o } -\infty$$

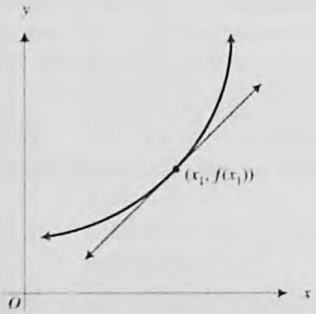


FIGURA 4

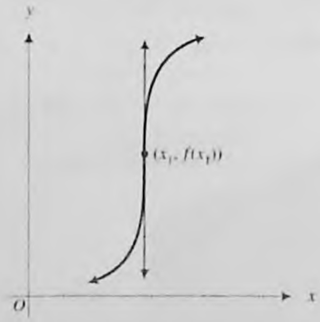


FIGURA 5

La figura 4 muestra la gráfica de una función f y su recta tangente cuando $m(x_1)$ existe. La figura 5 muestra la gráfica de una función f con una recta tangente vertical en el punto $(x_1, f(x_1))$.

Si no se cumple ninguno de los incisos de la definición 2.1.1, entonces no existe la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$.

La *pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función* en un punto se denomina **pendiente de la gráfica** en el punto.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 1$ en el punto $(2, 3)$. Dibuje la parábola y muestre un segmento de la recta tangente en $(2, 3)$.

Solución Primero se calcula la pendiente de la recta tangente en $(2, 3)$. Con $f(x) = x^2 - 1$, se tiene de (1)

$$\begin{aligned}
m(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2 + \Delta x)^2 - 1] - 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Así, la recta tangente en (2, 3) tiene pendiente 4. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene

$$y - 3 = 4(x - 2)$$
$$4x - y - 5 = 0$$

La figura 6 presenta la parábola y un segmento de la recta tangente en (2, 3). ◀

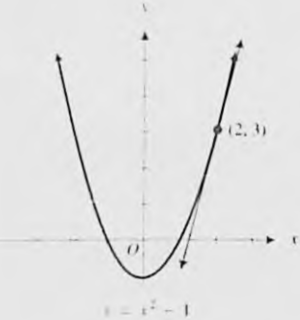


FIGURA 6

2.1.2 Definición de recta normal a una gráfica

La **recta normal** a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La recta normal a la gráfica del ejemplo 1 en el punto (2, 3) es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Como la pendiente de la recta tangente en (2, 3) es 4, entonces la pendiente de la recta normal en (2, 3) es $-\frac{1}{4}$, y una ecuación de esta recta normal es

$$y - 3 = -\tfrac{1}{4}(x - 2)$$
$$4y - 12 = -x + 2$$
$$x + 4y - 14 = 0$$

La figura 7 muestra la parábola y la recta normal en (2, 3). ◀

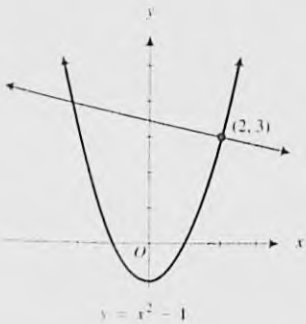


FIGURA 7

EJEMPLO 2 (a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x) = x^3 - 3x$$

en el punto $(x_1, f(x_1))$. (b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice estos puntos para dibujar la gráfica de f.

Solución

(a) Al calcular $f(x_1)$ y $f(x_1 + \Delta x)$ se obtiene

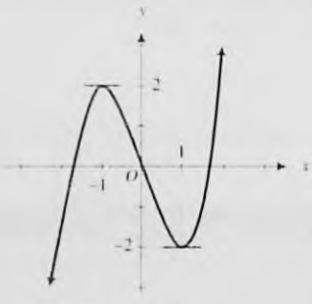
$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1$$
$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x)$$

De (1)

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) - (x_1^3 - 3x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x - x_1^3 + 3x_1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, el numerador y el denominador pueden dividirse entre Δx para obtener

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$
$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3 \qquad (2)$$



$f(x) = x^3 - 3x$

FIGURA 8

(b) La recta tangente es horizontal en los puntos donde la pendiente es cero. Considerando $m(x_1) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3 &= 0 \\ x_1^2 &= 1 \\ x_1 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. Al localizar estos puntos y algunos otros se obtiene la gráfica mostrada en la figura 8. ◀

El tipo de límite en (1), empleado para definir la pendiente de una recta tangente, es uno de los más importantes en Cálculo. Este límite es de uso frecuente y recibe un nombre específico.

2.1.3 Definición de la derivada de una función

La **derivada** de la función f es aquella función, denotada por f', tal que su valor en un número x del dominio de f está dado por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

si este límite existe.

Si x_1 es un número particular del dominio de f, entonces

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{4}$$

si este límite existe. Observe que el dominio de f' es un subconjunto del dominio de f.

Al comparar las fórmulas (1) y (4), se observa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$ es precisamente la derivada de f evaluada en x_1.

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine la derivada de f si

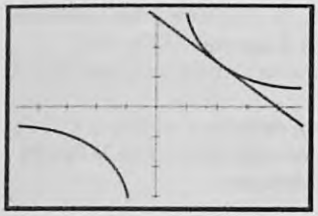
$$f(x) = \frac{3}{x}$$

Solución Si x es un número del dominio de f, entonces de (3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3}{x + \Delta x} - \dfrac{3}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x - 3(x + \Delta x)}{\Delta x(x)(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x)(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{x(x + \Delta x)} \\ &= -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la derivada de f es la función f' definida por $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$.

El dominio de f' es el conjunto de todos los números reales excepto 0, el cual es el mismo que el dominio de f. ◀



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

$f(x) = \frac{3}{x}$

FIGURA 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Para la función f del ejemplo 3 se puede aplicar $f'(x)$ a fin de obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto particular. Por ejemplo, en el punto $(2, \frac{3}{2})$ la pendiente de la recta tangente es $f'(2) = -\frac{3}{4}$. Por tanto, una ecuación de esta recta tangente es

$$\begin{aligned} y - \tfrac{3}{2} &= -\tfrac{3}{4}(x - 2) \\ 4y - 6 &= -3x + 6 \\ 3x + 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

La figura 9 muestra la gráfica de f y su recta tangente trazadas en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. ◀

Considere ahora la fórmula (4), la cual es

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

En esta fórmula considere

$$x_1 + \Delta x = x \tag{5}$$

Entonces,

$$\text{“}\Delta x \to 0\text{” equivale a “}x \to x_1\text{”} \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) se obtiene la fórmula siguiente para $f'(x_1)$:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{7}$$

si este límite existe. La fórmula (7) es una fórmula alternativa a la (4) para calcular $f'(x_1)$.

Los cocientes $\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ en (4) y $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ en (7) reciben el nombre de **cocientes de diferencias estándar** de la función f en el número x_1.

EJEMPLO 4 Para la función del ejemplo 3, calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (7).

Solución De la fórmula (7)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{3(2 - x)}{2x(x - 2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 2} \frac{-3}{2x}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

lo cual concuerda con $f'(2)$ del ejemplo ilustrativo 2. ◀

El uso del símbolo f' para la derivada de la función f fue introducido por el matemático francés **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) en el siglo XVIII. Esta notación destaca que la función f' se *deriva* (o proviene) de la función f y su valor en x es $f'(x)$.

Si (x, y) es un punto de la gráfica de f, entonces $y = f(x)$, y y' se utiliza también como una notación para la derivada de $f(x)$. Con la función f definida por la ecuación $y = f(x)$ se considera que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{8}$$

donde Δy se denomina **incremento de y** y denota un cambio en el valor de la función cuando x varía en Δx. Al utilizar (8) y escribir $\frac{dy}{dx}$ en lugar de $f'(x)$, la fórmula (3) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ fue empleado como notación para la derivada por primera vez por el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716). En el siglo XVII Leibniz y **Sir Isaac Newton** (1642–1727), trabajando de manera independiente, dieron a conocer casi simultáneamente la derivada. Leibniz probablemente pensó en dx y dy como pequeños cambios o variaciones de las variables x y y, y de la derivada de y con respecto a x como la razón de dy a dx cuando dy y dx son pequeños. El concepto de límite, como se acepta actualmente, fue desconocido por Leibniz y Newton.

En la notación de Lagrange el valor de la derivada en $x = x_1$ se indica por $f'(x_1)$. Con la notación de Leibniz se escribiría

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Se debe recordar que cuando $\frac{dy}{dx}$ se utiliza como notación para la derivada de una función, a dy y dx no se les ha dado significado independiente hasta ahora en el texto, aunque posteriormente se definirán por separado. De modo que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada y no debe considerarse como una razón. De hecho, se puede considerar $\frac{d}{dx}$ como un operador (un símbolo para la operación de calcular la derivada), y cuando se escribe $\frac{dy}{dx}$, significa $\frac{d}{dx}(y)$, esto es, la derivada de y con respecto a x.

EJEMPLO 5 Calcule $\frac{dy}{dx}$ si

$$y = \sqrt{x}$$

Solución Se ha dado $y = f(x)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\end{aligned}$$

A fin de evaluar este límite se racionaliza el numerador.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x - \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Δx (ya que $\Delta x \neq 0$) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

◀

Otras dos notaciones para la derivada de una función f son

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{y} \quad D_x[f(x)]$$

Cada una de estas notaciones permite indicar la función original en la expresión para la derivada. Por ejemplo, se puede escribir el resultado del ejemplo 5 como

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{o como} \quad D_x(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Por supuesto, si la función y las variables se denotan por otras letras diferentes de f, x y y, las notaciones para la derivada deben incluir esas letras. Por ejemplo, si la función g está definida por la ecuación $s = g(t)$, entonces la derivada de g puede indicarse en cada una de las siguientes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[g(t)] \qquad D_t[g(t)]$$

EJERCICIOS 2.1

En los ejercicios 1 a 6, obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto dado. Dibuje la gráfica de la ecuación y muestre un segmento de la recta tangente en el punto.

1. $y = 9 - x^2$; $(2, 5)$
2. $y = x^2 + 4$; $(-1, 5)$
3. $y = 2x^2 + 4x$; $(-2, 0)$
4. $y = x^2 - 6x + 9$; $(3, 0)$
5. $y = x^3 + 3$; $(1, 4)$
6. $y = 1 - x^3$; $(2, -7)$

En los ejercicios 7 a 10, (a) determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$. (b) Determine los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal y utilice estos puntos para dibujar la gráfica.

7. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

8. $f(x) = 7 - 6x - x^2$

9. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 2$

10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

En los ejercicios 11 a 16, obtenga ecuaciones de la recta tangente y de recta normal a la gráfica de la ecuación en el punto indicado. Trace en la graficadora la gráfica junto con las rectas tangente y normal en el mismo rectángulo de inspección.

11. $y =$

12. $y = \sqrt{4 - x}; (-5, 3)$

13. $y = 2x - x^3; (-2, 4)$

14. $y = x^3 - 4x; (0, 0)$

15. $y = \dfrac{4}{x^2}; (2, 1)$

16. $y = -\dfrac{8}{\sqrt{x}}; (4, -4)$

17. Sea $f(x) = 3x^2 - 7x$. **(a)** En la calculadora determine los valores del cociente de diferencias estándar

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

cuando Δx es igual a 0.10, 0.09, 0.08, . . . , 0.01, y −0.10, −0.09, −0.08, . . . , −0.01. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme Δx tiende a 0? **(b)** Calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (4) y compare este número con la respuesta del inciso (a). **(c)** En la calculadora determine los valores del cociente de diferencias estándar

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

cuando x es igual a 2.10, 2.09, 2.08, . . . , 2.01, y 1.90, 1.91, 1.92, . . . , 1.99. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a 2? **(d)** Calcule $f'(2)$ aplicando la fórmula (7) y compare este número con la respuesta del inciso (c).

18. Haga el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = x^3$.

19. Resuelva el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = \sqrt{6 - x}$.

20. Haga el ejercicio 17 considerando ahora $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$.

En los ejercicios 21 a 30, determine $f'(x_1)$ en dos formas: (a) aplique la fórmula (7); (b) aplique la fórmula (4).

21. $f(x) = \dfrac{8}{x - 2}; x_1 = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1; x_1 = 4$

23. $f(x) = \operatorname{sen} x; x_1 = 0$

24. $f(x) = \cos x; x_1 = 0$

25. $f(x) = \operatorname{sen} x; x_1 = \frac{1}{2}\pi$

26. $f(x) = \cos x; x_1 = \frac{1}{2}\pi$

27. $f(x) = \sec x; x_1 = 0$

28. $f(x) = \tan x; x_1 = 0$

29. $f(x) = \cot x; x_1 = \frac{1}{2}\pi$

30. $f(x) = \csc x; x_1 = \frac{1}{2}\pi$

En los ejercicios 31 a 36, determine $f'(x)$ aplicando la fórmula (3).

31. $f(x) = -4$

32. $f(x) = 10$

33. $f(x) = 7x + 3$

34. $f(x) = 8 - 5x$

35. $f(x) = 4 + 5x - 2x^2$

36. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

En los ejercicios 37 a 40, calcule la derivada indicada.

37. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$

38. $\dfrac{d}{dt}(t^3 + t)$

39. $D_r\left(\dfrac{2r + 3}{3r - 2}\right)$

40. $D_x\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$

En los ejercicios 41 a 44, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

41. $y = 3x + \dfrac{6}{x^2}$

42. $y = \sqrt[3]{x}$

43. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

44. $y = \dfrac{4}{2x - 5}$

45. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.

46. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4$ que sea paralela a la recta $3x + y = 4$.

47. Encuentre una ecuación de la recta normal a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea paralela a la recta $x - y = 0$.

48. Obtenga una ecuación de cada recta normal a la curva $y = x^3 - 3x$ que sea paralela a la recta $2x + 18y - 9 = 0$.

49. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto (1, 5) que sea tangente a la curva $y = 4x^2$.

50. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto (1, 2) que sea tangente a la curva $y = 4 - x^2$.

51. Si g es continua en a y $f(x) = (x - a)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

52. Si g es continua en a y $f(x) = (x^2 - a^2)\, g(x)$, determine $f'(a)$. *Sugerencia:* utilice la fórmula (7).

53. Si

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

calcule $f''(x)$ si $f(x) = ax^2 + bx$.

54. Emplee la fórmula del ejercicio 53 para determinar $f''(x)$ si $f(x) = a/x$.

55. Si $f'(a)$ existe, demuestre que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Sugerencia: $f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)$
$= f(a + \Delta x) - f(a) + f(a) - f(a - \Delta x)$

56. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para toda a y b. Además, suponga que $f(0) = 1$ y que $f'(0)$ existe. Demuestre que $f'(x)$ existe para toda x y que

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

57. Trace la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ y su recta tangente en el punto $(2, 1)$ en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. Conforme aplique el aumento (*zoom*) de la graficadora en el punto $(2, 1)$ describa lo que sucede. ¿Por qué ocurre esto?

58. Trace la parábola $y = \sqrt{x}$ y su recta tangente en el punto $(1, 1)$ en el rectángulo de inspección de $[-1, 3.7]$ por $[-1, 2.1]$. Conforme aplique el aumento (*zoom*) de la graficadora en el punto $(1, 1)$ describa lo que sucede. ¿Por qué ocurre esto?

2.2 DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El proceso de calcular la derivada de una función se denomina *diferenciación*; esto es, la **diferenciación** es la operación mediante la cual se obtiene la función f' a partir de la función f.

Si una función tiene una derivada en x_1, se dice que la función es **diferenciable** en x_1. Una función es **diferenciable en un intervalo abierto** si es diferenciable en cada número del intervalo. Si una función es diferenciable en cada número de su dominio, entonces se dice que es una **función diferenciable.**

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 En el ejemplo 3 de la sección 2.1, $f(x) = 3/x$ y $f'(x) = -3/x^2$. Como el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0, y $f'(x)$ existe en cada número real excepto en 0, entonces f es una función diferenciable. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Sea g la función definida por $g(x) = \sqrt{x}$. El dominio de g es $[0, +\infty)$. Del ejemplo 5 de la sección 2.1,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $g'(0)$ no existe, g no es diferenciable en 0. Sin embargo, g es diferenciable en cualquier otro número de su dominio. Por tanto, g es diferenciable en el intervalo abierto $(0, +\infty)$. ◀

Se comienza la discusión acerca de diferenciabilidad y continuidad con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Sea

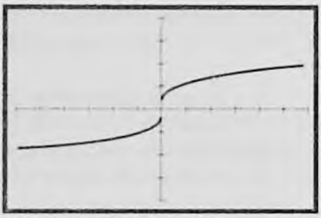
$$f(x) = x^{1/3}$$

(a) Muestre que f no es diferenciable en 0 aunque es continua en 0. **(b)** Trace la gráfica de f.

Solución

(a) Al aplicar la fórmula (7) de la seccion 2.1, se tiene, si el límite existe,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \end{aligned}$$



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 1

Pero este límite no existe. Por tanto, f no es diferenciable en 0. No obstante, f es continua en 0 porque

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3}\\ &= 0\\ &= f(0)\end{aligned}$$

(b) La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Para la función f del ejemplo 1, como

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

se concluye, por la definición 2.1.1 (ii), que $x = 0$ es la recta tangente a la gráfica de f en el origen. ◀

Del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 3, la función definida por $f(x) = x^{1/3}$ tiene las siguientes propiedades:

1. f es continua en 0.
2. f no es diferenciable en 0.
3. La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en el punto donde $x = 0$.

En el siguiente ejemplo ilustrativo se tiene otra función que es continua pero no diferenciable en cero. La gráfica de esta función no tiene recta tangente en el punto donde $x = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Sea f la función valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$

$f(x) = |x|$

FIGURA 2

La gráfica de esta función se muestra en la figura 2. De la fórmula (7) de la sección 2.1, si el límite existe,

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x}\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}\end{aligned}$$

Como $|x| = x$ si $x > 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$, se consideran los límites laterales en 0:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x}\\ &= \lim_{x \to 0^+} 1\\ &= 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x}\\ &= \lim_{x \to 0^-} (-1)\\ &= -1\end{aligned}$$

Debido a que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$, se deduce que el límite bilateral $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe. Por tanto, $f'(0)$ no existe, de modo que f no es diferenciable en 0.

Dado que no se cumple la definición 2.1.1 cuando $x = 0$, la gráfica de la función valor absoluto no tiene recta tangente en el origen. ◀

Como las funciones del ejemplo ilustrativo 4 y del ejemplo 1 son continuas en un número pero no son diferenciables en ese número, se puede concluir que la continuidad de una función en un número *no implica* la diferenciabilidad de la misma en el punto en cuestión. Sin embargo, la diferenciabilidad *implica* continuidad, lo cual se establece en el teorema siguiente.

2.2.1 Teorema

Si una función f es diferenciable en un número x_1, entonces f es continua en x_1.

Demostración Para demostrar que f es continua se debe probar que se cumplen las tres condiciones de la definición 1.8.1. Esto es, se debe probar que (i) $f(x_1)$ existe, (ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe y (iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótesis, f es diferenciable en x_1. Por tanto, existe $f'(x_1)$. Debido a la fórmula (7) de la sección 2.1

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$f(x_1)$ existe; en otro caso el límite anterior no tendría significado. Por tanto, se cumple la condición (i) en x_1. Ahora considere

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right] \tag{1}$$

Como

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

se aplica el teorema del límite de un producto (1.5.7) al miembro derecho de (1) y se obtiene

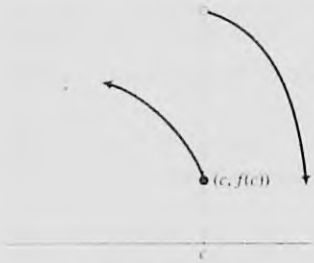
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por el teorema 1.5.14, este límite equivale a

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

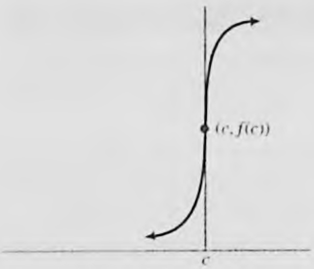
De esta ecuación se concluye que se cumplen las condiciones (ii) y (iii) para la continuidad de f en x_1. Por tanto, el teorema se ha demostrado. ■

Una función f puede no ser diferenciable en un número c por alguna de las siguientes razones:



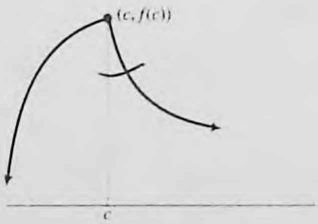
f no es diferenciable en c
f es discontinua en c

FIGURA 3



f no es diferenciable en c
f es continua en c

FIGURA 4



f no es diferenciable en c
f es continua en c

FIGURA 5

1. La función f es discontinua en c. La gráfica de la figura 3 es de este tipo.
2. La función f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en el punto donde $x = c$. La figura 4 muestra la gráfica de una función que tiene esta propiedad. Esta situación también ocurre en el ejemplo 1.
3. La función f es continua en c pero la gráfica de f no tiene recta tangente en el punto donde $x = c$. La figura 5 muestra la gráfica de una función que satisface esta condición. Observe un "cambio brusco" (o pico) en la gráfica en $x = c$. En el ejemplo ilustrativo 4 se tiene otra función de este tipo.

Antes de mostrar un ejemplo más de una función continua pero no diferenciable en un número, se presenta el concepto de *derivada lateral*.

2.2.2 Definición de derivada lateral

(i) Si la función f está definida en x_1, entonces la **derivada por la derecha** de f en x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, está definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

si existe el límite.

(ii) Si la función f está definida en x_1, entonces la **derivada por la izquierda** de f en x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, está definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

si existe el límite.

A partir de esta definición y del teorema 1.6.3, se deduce que una función f definida en un intervalo abierto que contiene a x_1 es diferenciable en x_1 si y sólo si $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ existen y son iguales. Por supuesto, $f'(x_1)$, $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ son iguales.

EJEMPLO 2

Sea f la función definida por

$$f(x) = |1 - x^2|$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Demuestre que f es continua en 1.
(c) Determine si f es diferenciable en 1.

Solución Por la definición de valor absoluto, si $x < -1$ o $x > 1$, entonces $f(x) = -(1 - x^2)$, y si $-1 \le x \le 1$, entonces $f(x) = 1 - x^2$. Por tanto, f puede definirse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

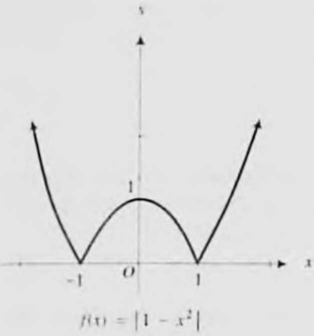


FIGURA 6

(a) La gráfica de f se muestra en la figura 6.

(b) Para demostrar que f es continua en 1 se verifican las tres condiciones para la continuidad.

(i) $f(1) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

Así, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Como se cumplen las condiciones (i)–(iii), entonces f es continua en 1.

(c)

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} [-(1 + x)] = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$$

Debido a que $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, se concluye que $f'(1)$ no existe, de modo que f no es diferenciable en 1. ◀

La función del ejemplo 2 tampoco es diferenciable en -1. En el ejercicio 32 se le pedirá que pruebe esto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

En el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.8, se obtuvo el modelo matemático

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.4x + 6 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

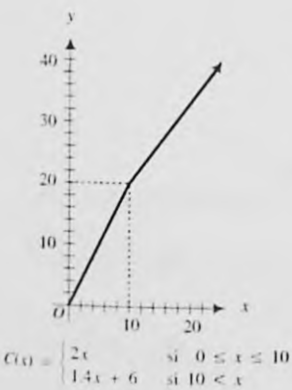


FIGURA 7

donde $C(x)$ dólares es el costo total de x libras de un producto. La gráfica de C se presenta en la figura 7. En la sección 1.8 se mostró que C es continua en 10. Ahora se determinará si C es diferenciable en 10. Puesto que C está definida a trozos, se calcularán las derivadas laterales en 10.

$$C'_-(10) = \lim_{x \to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{2x - 20}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{2(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^-} 2 = 2$$

$$C'_+(10) = \lim_{x \to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} \frac{(1.4x + 6) - 20}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} \frac{1.4(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10^+} 1.4 = 1.4$$

Como $C'_-(10) \neq C'_+(10)$, entonces C no es diferenciable en 10. ◀

EJEMPLO 3 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

(a) Determine un valor de b tal que f sea continua en b. **(b)** Dibuje la gráfica de f con el valor de b determinado en el inciso (*a*). **(c)** ¿Es diferenciable f en el valor de b determinado en el inciso (*a*)?

Solución

(a) La función f será continua en b si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} \left(1 - \tfrac{1}{4}x\right) = 1 - \tfrac{1}{4}b$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$; por tanto, f será continua en b si

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= 1 - \frac{1}{4}b \\ 4 &= 4b - b^2 \\ b^2 - 4b + 4 &= 0 \\ (b - 2)^2 &= 0 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Así

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

y f es continua en 2.

(b) La gráfica de f se presenta en la figura 8.

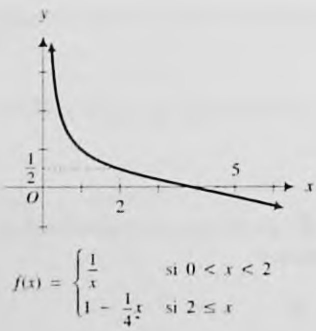


FIGURA 8

(c) Para determinar si f es diferenciable en 2 se calcularán $f'_-(2)$ y $f'_+(2)$.

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{2x} \\ &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\left(1 - \frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{2 - x}{4(x - 2)} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{4} \\ &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, se concluye que $f'(2)$ existe, y en consecuencia, f es diferenciable en 2. ◀

EJEMPLO 4 En la planeación de una cafetería, se estimó que la ganancia diaria es de \$16 por lugar si se tienen de 40 a 80 lugares de capacidad. Sin embargo, si se cuenta con más de 80 lugares, la ganancia diaria por cada lugar disminuirá en \$0.08 veces el número de lugares que exceden a 80. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la ganancia diaria como una función del número de lugares de la cafetería. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 80.

Solución

(a) Sea x el número de lugares para la capacidad de la cafetería y $P(x)$ dólares la ganancia diaria. $P(x)$ se obtiene al multiplicar x por el número de dólares de la ganancia por cada lugar. Cuando $40 \le x \le 80$, la ganancia por lugar es \$16, de modo que $P(x) = 16x$. Cuando $x > 80$, el número de dólares de la ganancia por cada lugar es $16 - 0.08(x - 80)$; de donde se obtiene $P(x) = x[16 - 0.08(x - 80)]$; esto es, $P(x) = 22.40x - 0.08x^2$. Por tanto,

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 40 \le x \le 80 \\ 22.40x - 0.08x^2 & \text{si } 80 < x \le 280 \end{cases}$$

El límite superior de 280 para x se obtiene al observar que $22.40x - 0.08x^2 = 0$ cuando $x = 280$; $22.40x - 0.08x^2 < 0$ cuando $x > 280$.

Aunque, por definición, x es un número entero no negativo, para tener continuidad se considerará que x toma todos los valores reales del intervalo $[40, 280]$.

(b) Como $P(x)$ es un polinomio en $[40, 80]$ y $(80, 280]$, entonces P es continua en esos intervalos. Para determinar la continuidad en 80 se calcularán los límites laterales en ese valor:

$$\lim_{x \to 80^-} P(x) = \lim_{x \to 80^-} 16x = 1280 \qquad \lim_{x \to 80^+} P(x) = \lim_{x \to 80^+} (22.40x - 0.08x^2) = 1280$$

Como $P(80) = 1280$ y $\lim_{x \to 80} P(x) = 1280$, P es continua en 80. En consecuencia, P es continua en su dominio $[40, 280]$.

(c) Para determinar si P es diferenciable en 80, se calcularán las derivadas laterales en 80.

$$\begin{aligned} P'_-(80) &= \lim_{x \to 80^-} \frac{P(x) - P(80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^-} \frac{16x - 1280}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^-} \frac{16(x - 80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^-} 16 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_+(80) &= \lim_{x \to 80^+} \frac{P(x) - P(80)}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^+} \frac{(22.40x - 0.08x^2) - 1280}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^+} \frac{-0.08(x^2 - 280x + 16\,000)}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^+} \frac{-0.08(x - 80)(x - 200)}{x - 80} \\ &= \lim_{x \to 80^+} [-0.08(x - 200)] \\ &= 9.60 \end{aligned}$$

Como $P'_-(80) \neq P'_+(80)$, entonces P no es diferenciable en 80. ◀

En la sección 3.2, se considerará otra vez la situación del ejemplo 4 y se determinará la capacidad necesaria para obtener la máxima ganancia diaria.

EJERCICIOS 2.2

En los ejercicios 1 a 20, haga lo siguiente: (a) dibuje la gráfica de la función; (b) determine si f es continua en x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$ si existen; (d) determine si f es diferenciable en x_1.

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{si } -4 < x \end{cases} \quad x_1 = -4$

2. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 7 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 2$

3. $f(x) = |x - 3| \quad x_1 = 3$

4. $f(x) = 1 + |x + 2| \quad x_1 = -2$

5. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 0$

6. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 2$

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \\ (1 - x)^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 1$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ -1 - 2x & \text{si } -1 \leq x \end{cases} \quad x_1 = -1$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x - 11 & \text{si } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x < 3 \\ 6x - 18 & \text{si } 3 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 3$

13. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \quad x_1 = -1$

14. $f(x) = (x - 2)^{-2} \quad x_1 = 2$

15. $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{si } x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases} \quad x_1 = 3$

16. $f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & \text{si } x \leq 0 \\ x^{2/3} & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad x_1 = 0$

17. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 0$

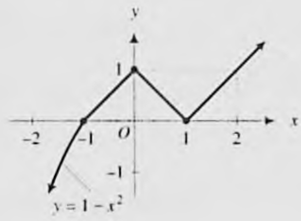
18. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad x_1 = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } 2 < x \end{cases} \quad x_1 = 2$

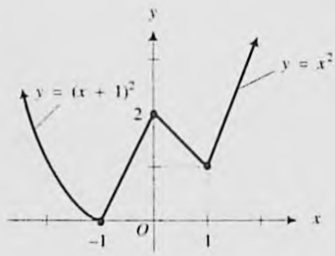
20. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \end{cases} \quad x_1 = 1$

Los ejercicios 21 a 26 tratan acerca de la función continua f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y cuya gráfica se muestra en la figura adjunta. Suponga que cada porción de la gráfica que parece ser un segmento de la recta es un segmento de recta. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) defina f como una función a trozos. Encuentre (b) $f'_-(-1)$; (c) $f'_+(-1)$, (d) $f'_-(0)$, (e) $f'_+(0)$, (f) $f'_-(1)$ y (g) $f'_+(1)$. (h) ¿En qué números f no es diferenciable?

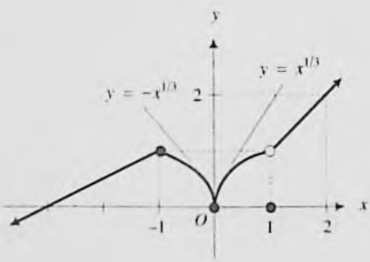
21.



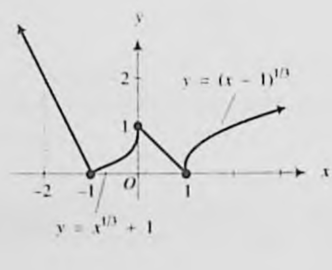
22.



23.

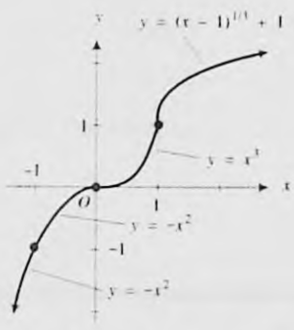


24.



25.

26.



En los ejercicios 27 a 30, dibuje la gráfica de alguna función continua f, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales, la cual satisfaga las condiciones indicadas.

27. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en 0 y 3; $f(-3) = -1$; $f(0) = 0$; $f(3) = 1$; $f'_-(0) = 1$; $f'_+(0) = 0$;

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty.$$

28. El contradominio de f es $[0, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en -2, 0 y 2; $f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(2) = 0$; $f'_-(-2) = -1$; $f'_+(-2) = 1$; $f'_-(2) = -1$;

$$f'_+(2) = 1, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty.$$

29. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en -2, 0 y 2; $f(-2) = 3$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 0$; $f(1) = 0$; $f(2) = -3$; $f'_-(-2) = 1$; $f'_+(-2) = -1$; $f'_-(2) = -1$; $f'_+(2) = 1$;

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty; \ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty.$$

30. El contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; f es diferenciable en todo número excepto en 0, y 4; $f(-2) = 0$; $f(0) = -1$; $f(4) = 1$; $f(5) = 0$; $f'_+(0) = 2$; $f'_-(4) = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty; \ \lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = -\infty.$$

31. Para la fuga de petróleo del ejercicio 53 de la sección 1.8, determine si la función r es diferenciable en 2.

32. Demuestre que la función del ejemplo 2 es continua en -1 pero no es diferenciable en ese número.

33. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } 0 \le x \le b \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } b < x \end{cases}$$

(a) Determine un valor de b tal que f sea continua en b. **(b)** Dibuje la gráfica de f con el valor de b determinado en el inciso (a). **(c)** ¿Es diferenciable f en el valor de b determinado en el inciso (a)?

34. Sea $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. **(a)** Demuestre que $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$ no existen. **(b)** Demuestre que $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$. **(c)** Dibuje la gráfica de f.

35. Determine los valores de a y b tales que la función f sea diferenciable en 1 y después dibuje la gráfica de f si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

36. Determine los valores de a y b tales que la función f sea diferenciable en 2 y después dibuje la gráfica de f si

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

En los ejercicios 37 a 40, obtenga una función como modelo matemático de la situación particular. Aunque por definición la variable independiente represente un número entero no negativo, considere que dicha variable representa un número real no negativo a fin de tener los requerimientos necesarios de continuidad.

37. Una agencia de excursiones escolares puede transportar a 250 estudiantes con un costo de \$15 si no más de 150 estudiantes asisten a la excursión; sin embargo, el costo por alumno se reducirá en \$0.05 por cada alumno que exceda a los 150 hasta que el costo sea de \$10 por estudiante. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese el ingreso en bruto como una función del número de estudiantes que asistirán a la excursión. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 150.

38. Realice el ejercicio 37 considerando ahora que la reducción por cada estudiante que exceda a 150 es \$0.07.

39. Los naranjos que crecen en California producen 600 naranjas por año si no se plantan más de 20 árboles por acre. Por cada naranjo adicional plantado por acre el rendimiento por árbol decrece en 15 naranjas. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el número de naranjas producidas por año como una función del número de naranjos plantados por acre. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 20.

40. Un club privado cobra una cuota de membresía anual de \$100 por miembro, menos \$0.50 por cada miembro que exceda a 600 y más \$0.50 por cada miembro que falte para completar 600. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el ingreso por las cuotas anuales como una función del número de sus miembros. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 600.

41. En el ejemplo ilustrativo 4 se mostró que la función valor absoluto no es diferenciable en 0. Demuestre que

$$D_x(|x|) = \frac{|x|}{x} \qquad \text{si } x \neq 0$$

Sugerencia: considere $|x| = \sqrt{x^2}$.

42. Dada $f(x) = [\![x]\!]$, determine $f'(x_1)$ si x_1 no es un número entero. Demuestre que $f'(x_1)$ no existe si x_1 es un número entero. Si x_1 es un número entero, ¿qué se puede decir acerca de $f'_-(x_1)$ y de $f'_+(x_1)$?

43. Sea $f(x) = (x - 1)[\![x]\!]$. Trace la gráfica de f para x en $[0, 2]$. Calcule, si existen: **(a)** $f'_-(1)$, **(b)** $f'_+(1)$, **(c)** $f'(1)$.

44. Sea $f(x) = (5 - x)[\![x]\!]$. Trace la gráfica de f para x en $[4, 6]$. Calcule, si existen, **(a)** $f'_-(5)$, **(b)** $f'_+(5)$, **(c)** $f'(5)$.

45. Dada $f(x) = (x - a)[\![x]\!]$, donde a es un número entero, muestre que $f'_-(a) + 1 = f'_+(a)$.

46. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ g'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Demuestre que si $g'(a)$ existe, entonces f es continua en a.

47. **(a)** Sean $f(x) = |x|$ y $g(x) = -|x|$. Encuentre una fórmula para $(f + g)(x)$ y demuestre que $f + g$ es diferenciable en 0. Utilice las funciones f y g como ejemplos para explicar por qué es posible que la suma de dos funciones es diferenciable en un número aunque ninguna sea diferenciable en el número en cuestión. **(b)** Sean $F(x) = x^{-1}$ y $G(x) = -x^{-1}$. Encuentre una fórmula para $(F + G)(x)$. ¿Es diferenciable $F + G$ en 0? ¿Pueden emplearse las funciones F y G en lugar de f y g como ejemplos para la explicación del inciso (a)? Explique su respuesta.

2.3 DERIVADA NUMÉRICA

La *derivada numérica* es importante debido a que su gráfica puede trazarce en una gráficadora. Además, la derivada numérica puede emplearse para obtener una aproximación de la derivada de una función en un número particular siempre que la derivada exista.

Para desarrollar el concepto de derivada numérica, recuerde que $f'(a)$, la derivada de la función f evaluada en el número a, está definida como el límite del cociente de diferencias estándar

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1}$$

si este límite existe. En el ejercicio 55 de la sección 2.1 se le pidió que demostrara que si $f'(a)$ existe, entonces

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{2}$$

Si no realizó este ejercicio cuando estudió la sección 2.1, regrese y hágalo ahora. El cociente

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{3}$$

que aparece en (2) se denomina **cociente de diferencias simétricas** de la función f en el número a. El término *simétricas* es apropiado porque el cociente es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a - \Delta x, f(a - \Delta x))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Consulte la figura 1. Al valor elegido de Δx se le llama **tolerancia.**

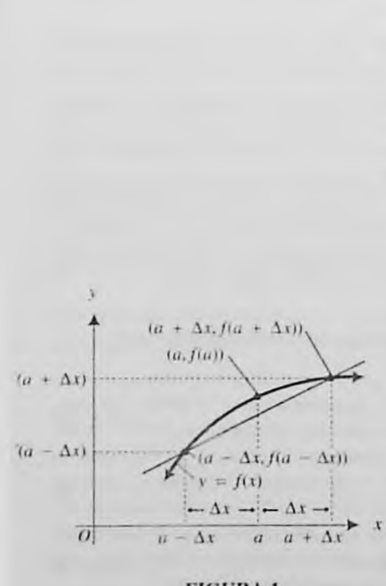


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \sqrt{x}$$

(a) Utilice el resultado del ejemplo 5 de la sección 2.1 para calcular el valor exacto de $f'(4)$. Obtenga una aproximación de $f'(4)$ empleando el cociente de diferencias simétricas de f en 4 con cada una de las tolerancias siguientes: **(b)** 0.1; **(c)** 0.01 y **(d)** 0.001.

Solución

(a) Del ejemplo 5 de la sección 2.1

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Así, $f'(4) = 0.25$.

(b)-(d) De (3), el cociente de diferencias simétricas de f en 4 es

$$\frac{\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4 - \Delta x}}{2\Delta x}$$

Ahora se evaluará el cociente con la tolerancia Δx indicada.

(b) $\Delta x = 0.1$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.1} - \sqrt{4 - 0.1}}{2(0.1)} = 0.2500195366$$

(c) $\Delta x = 0.01$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.01} - \sqrt{4 - 0.01}}{2(0.01)} = 0.2500001953$$

(d) $\Delta x = 0.001$

$$\frac{\sqrt{4 + 0.001} - \sqrt{4 - 0.001}}{2(0.001)} = 0.2500000019$$ ◀

Observe en el ejemplo 1 que el cociente de diferencias simétricas de f en 4 proporciona una buena aproximación de $f'(4)$, y la menor tolerancia da la mejor aproximación. Si para una tolerancia específica se compara la aproximación de $f'(a)$ determinada mediante el cociente de diferencias simétricas con la obtenida por medio del cociente de diferencias estándar (1), se observará que el cociente de diferencias simétricas proporciona una mejor aproximación. En los ejercicios 1 a 4 se le pedirá que realice algunas de estas comparaciones.

Se utilizará el cociente de diferencias simétricas para calcular la *derivada numérica* de una función en un número, exactamente como lo hacen algunas graficadoras con la elección de la tolerancia del usuario. Por tanto, se presenta la siguiente definición formal:

2.3.1 Definición de derivada numérica

La **derivada numérica** de la función f en el número a, denotada por NDER($f(x)$, a), está definida por

$$\text{NDER}(f(x), a) = \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

donde la elección de Δx depende de la aproximación deseada de NDER($f(x)$, a) a $f'(a)$.

En este texto, se calculará NDER($f(x)$, a) con una tolerancia de 0.001; esto es,

$$\text{NDER}(f(x), a) = \frac{f(a + 0.001) - f(a - 0.001)}{0.002} \tag{4}$$

Observe en el enunciado del ejercicio 55 de la sección 2.1 que NDER($f(x)$, a) proporciona una aproximación para $f'(a)$ sólo si $f'(a)$ existe; es decir,

$$\text{NDER}(f(x), a) \approx f'(a) \qquad \text{si } f'(a) \text{ existe} \tag{5}$$

Consulte el manual del usuario acerca de cómo obtener la derivada numérica en su graficadora particular. Si su calculadora no tiene esta función, usted puede emplear un programa o el cociente de diferencias simétricas de (4).

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

(a) Aproxime $f'(5)$ con cinco cifras decimales calculando NDER($f(x)$, 5) en la graficadora. **(b)** Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $f'(5)$ a partir del resultado del ejemplo 3 de la sección 2.1.

Solución

(a) En la graficadora se tiene

$$\text{NDER}\left(\frac{3}{x}, 5\right) = -0.1200000048$$

Por tanto, con cinco cifras decimales, $f'(5) \approx -0.12000$.

(b) Del ejemplo 3 de la sección 2.1,

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

Así, $f'(5) = -0.12$, lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a). ◀

La notación NDER($f(x)$, x) denota la derivada numérica de la función f en x; esto es,

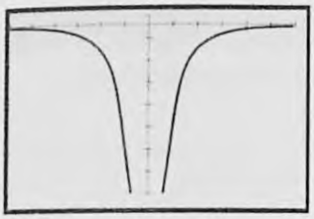
$$\text{NDER}(f(x), x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Tanto para las funciones lineales como para las cuadráticas NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$. Se le pidará que demuestre esto en los ejecicios 21 y 22.

En la graficadora puede trazarse la gráfica de NDER($f(x)$, x). Comprenderá la importancia de esta característica de la graficadora conforme avance en el texto.

EJEMPLO 3 La función del ejemplo 3 de la sección 2.1 está definida por

$$f(x) = \frac{3}{x}$$



$[-6, 6]$ por $[-7, 1]$

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ y NDER$\left(\frac{3}{x}, x\right)$

FIGURA 2

Utilice la gráfica de NDER$(f(x), x)$ para apoyar el valor de $f'(x)$ calculado en la sección 2.1.

Solución La figura 2 muestra el resultado de trazar las gráficas de NDER$\left(\frac{3}{x}, x\right)$ y de la función f' definida por

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-7, 1]$. El hecho de que las dos gráficas aparecen idénticas apoya el valor de $f'(x)$. ◀

De (5), NDER$(f(x), a) = f'(a)$ si $f'(a)$ existe. La condición de que $f'(a)$ debe existir a fin de que NDER$(f(x), a)$ proporcione una aproximación de $f'(a)$ es indispensable, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

▶ ***EJEMPLO 4*** El ejercicio 55 de la sección 2.1 establece que si $f'(a)$ existe, entonces

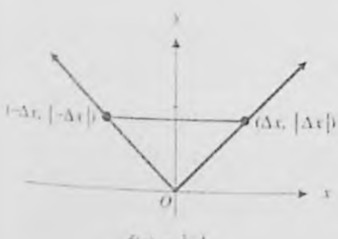
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Demuestre, empleando la función valor absoluto, que es posible que exista el límite de la ecuación anterior aunque $f'(a)$ no exista.

Solución Con $f(x) = |x|$ y $a = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0 - \Delta x|}{2\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - |-\Delta x|}{2\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Así, el límite existe y es igual a 0. Sin embargo, se sabe, del ejemplo ilustrativo 4 de la sección 2.2, que la derivada de la función valor absoluto no existe en cero. ◀



$f(x) = |x|$

FIGURA 3

Si se calcula NDER$(|x|, 0)$ en la graficadora, se obtendrá 0. Este resultado es consistente con lo aprendido en el ejemplo 4, pero, por supuesto, esto no proporciona la derivada de la función valor absoluto en 0. La figura 3 también apoya el resultado del ejemplo 4. Esta figura es el caso especial de la figura 1, donde $f(x) = |x|$. El cociente de diferencias simétricas es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(-\Delta x, |-\Delta x|)$ y $(\Delta x, |\Delta x|)$, la cual es 0 para cualquier elección de Δx.

La discusión del párrafo anterior debe convencerlo de ser muy cuidadoso cuando emplee el valor de la derivada numérica de la función f en a para aproximar el valor de $f'(a)$. Los dos valores son aproximadamente iguales únicamente si $f'(a)$ existe. Vea los ejercicios 27 a 29 para otros ejemplos que muestran este hecho.

EJERCICIOS 2.3

En los ejercicios 1 a 4, haga lo siguiente: (a) en la calculadora, obtenga los valores del cociente de diferencias simétricas $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2 - \Delta x)}{2\,\Delta x}$ *y elabore una tabla para la función f dada cuando* Δx *es igual a* 0.10, 0.09, 0.08, . . ., 0.01 y −0.10, 0.09, −0.08, . . ., −0.01. *¿A qué valor parece que se aproxima el cociente de diferencias simétricas conforme* Δx *tiende a 0? (b) En la graficadora, determine* NDER($f(x)$, 2) *y compare este número con la respuesta del inciso (a) y el valor exacto de* $f'(2)$ *calculado en el inciso (b) del ejercicio indicado de la sección 2.1. (c) Compare los valores calculados en el inciso (a) de este ejercicio con los valores correspondientes tabulados en el inciso (a) del ejercicio indicado de la sección 2.1, donde se utilizó el cociente de diferencias estándar. ¿Qué tabla de valores proporciona la mejor aproximación a* $f'(2)$*?*

1. $f(x) = 3x^2 - 7x$; ejercicio 17.
2. $f(x) = x^3$; ejercicio 18.
3. $f(x) = \sqrt{6 - x}$; ejercicio 19.
4. $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$; ejercicio 20.

En los ejercicios 5 a 8, utilice la gráfica de la derivada numérica en x trazada en la graficadora para apoyar el valor de la derivada determinada en el ejercicio indicado de la sección 2.1.

5. **(a)** Ejercicio 33 **(b)** Ejercicio 35 **(c)** Ejercicio 37
6. **(a)** Ejercicio 34 **(b)** Ejercicio 36 **(c)** Ejercicio 38
7. **(a)** Ejercicio 39 **(b)** Ejercicio 41 **(c)** Ejercicio 43
8. **(a)** Ejercicio 40 **(b)** Ejercicio 42 **(c)** Ejercicio 44

En los ejercicios 9 a 20, haga lo siguiente: (a) utilice la derivada numérica de la función f en el número x_1*, calculadada en la graficadora, para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto donde* $x = x_1$*; (b) encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(x_1, f(x_1))$*; (c) trace la gráfica de f y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.*

9. $f(x) = (x - 1)^2$; $x_1 = 2$
10. $f(x) = 2 + 2x - x^2$; $x_1 = -1$
11. $f(x) = x^2 - 2x - 4$; $x_1 = 3$
12. $f(x) = (2 - x)^2 + 5$; $x_1 = 4$
13. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; $x_1 = -5$
14. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $x_1 = 3$
15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$; $x_1 = 1$
16. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{1 + x^2}$; $x_1 = -2$
17. $f(x) = x \operatorname{sen} x$; $x_1 = 1$
18. $f(x) = x^2 \cos x$; $x_1 = 2$
19. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$; $x_1 = 2$
20. $f(x) = \tan(\operatorname{sen} x)$; $x_1 = 3$
21. Demuestre que si f es una función lineal, entonces NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$.
22. Demuestre que si f es una función cuadrática, entonces NDER($f(x)$, x) es exactamente $f'(x)$.
23. Sea $f(x) = x^2 + 2$. **(a)** Trace las gráficas de f y de NDER($f(x)$, x) en el mismo rectángulo de inspección. ¿Para qué valores de x se tiene que **(b)** NDER($f(x)$, x) > 0 y **(c)** NDER($f(x)$, x) < 0? ¿Para qué valores de x parece que **(d)** $f(x)$ crece conforme x crece, y **(e)** $f(x)$ decrece conforme x crece? **(f)** Compare las respuestas de los incisos (b) y (d) y de los incisos (c) y (e).
24. Realice el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
25. Haga el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
26. Efectúe el ejercicio 23 considerando ahora que $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
27. Sea $f(x) = x^{1/3}$. En el ejemplo 1 de la sección 2.2, se mostró que $f'(0)$ no existe. **(a)** Calcule NDER($f(x)$, 0) mediante la ecuación (4). **(b)** Apoye la respuesta del inciso (a) determinando NDER($f(x)$, 0) en la graficadora. **(c)** Explique por qué existe NDER($f(x)$, 0) para esta función aunque no existe $f'(0)$. **(d)** Trace la gráfica de NDER($f(x)$, x). ¿Qué es lo que observa cuando $x = 0$? **(e)** ¿Es consistente la respuesta del inciso (d) con lo aprendido en el ejemplo 1 de la sección 2.2? Explique su respuesta.
28. Sea $f(x) = x^{1/5}$. **(a)** Utilice la fórmula (7) de la sección 2.1 para mostrar que $f'(0)$ no existe. **(b)** Calcule NDER($f(x)$, 0) mediante la ecuación (4). **(c)** Apoye la respuesta del inciso (b) determinando NDER($f(x)$, 0) en la graficadora. **(d)** Explique por qué existe NDER($f(x)$, 0) para esta función aunque no existe $f'(0)$. **(e)** Trace la gráfica de NDER($f(x)$, x). ¿Qué es lo que observa cuando $x = 0$? **(f)** ¿Es consistente la respuesta del inciso (e) con la respuesta del inciso (a)? Explique su respuesta.
29. Siga las instrucciones del ejercicio 28 para $f(x) = x^{2/3}$.
30. Compare los cálculos de $f'(0)$ de los ejercicios 27 y 29. Después compare el valor de NDER($f(x)$, 0) calculado en el inciso (a) del ejercicio 27 con el valor de NDER($f(x)$, 0) calculado en el inciso (b) del ejercicio 29. Explique por qué se obtiene una conclusión semejante para $f'(0)$ en las dos funciones pero resultados completamente diferentes para NDER($f(x)$, 0).

2.4 TEOREMAS SOBRE DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Debido a que el proceso del cálculo de la derivada de una función a partir de la definición 2.1.3 es muy largo, se estudiarán ahora algunos teoremas que permitirán determinar las derivadas con mayor facilidad. Estos teoremas se demostrarán a partir de la definición 2.1.3. En el enunciado de los teoremas se emplea la notación de Lagrange para la derivada, y la conclusión se expresa con la notación $D_x(f(x))$ y en palabras.

2.4.1 Teorema Regla de diferenciación de una constante

Si c es una constante y si $f(x) = c$, entonces

$$f'(x) = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$D_x(c) = 0$$ ■

La derivada de una constante es cero.

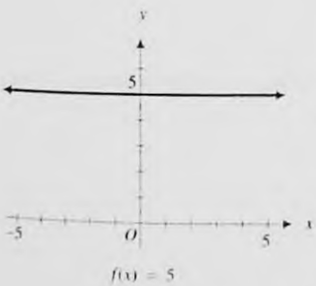


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si $f(x) = 5$, entonces por el teorema 2.4.1

$$f'(x) = 0$$

Este resultado es apoyado por la gráfica de $f(x) = 5$ de la figura 1. Como la gráfica es una recta paralela al eje x, entonces la pendiente de la gráfica será 0 en cualquier parte. ◀

2.4.2 Teorema Regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros positivos)

Si n es un número entero positivo y si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Demostración

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

Al aplicar el teorema del binomio a $(x + \Delta x)^n$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Si se divide el numerador y el denominador entre Δx se obtiene

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Cada término excepto el primero tienen un factor Δx; por tanto, todos los términos excepto el primero tienden a cero conforme Δx se aproxima a 0. Así,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$ ■

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $f(x) = x^8$, entonces $f'(x) = 8x^7$. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función identidad; esto es, $f(x) = x$. Por el teorema 2.4.2

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$

Observe que si $x = 0$, x^0 se transforma en 0^0 lo cual no está definido, pero si $x \neq 0$, $x^0 = 1$, de modo que

$$f'(x) = 1 \qquad \text{si } x \neq 0$$

Para calcular $f'(0)$ para la función identidad, se aplica la fórmula (7) de la sección 2.1:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, para toda x, $D_x(x) = 1$. ◀

2.4.3 Teorema Regla de diferenciación para el producto de una función por una constante

Si f es una función, c es una constante y g es la función definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

y si f' existe, entonces

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

■

$$D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)$$

La derivada de la multiplicación de una función por una constante es igual a la derivada de la función multiplicada por la constante.

Al combinar los teoremas 2.4.2 y 2.4.3, se obtiene el resultado siguiente: Si $f(x) = cx^n$, donde n es un número entero positivo y c es una constante, entonces

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$D_x(cx^n) = cnx^{n-1}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Si $f(x) = 5x^7$, entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 \\
&= 35x^6
\end{aligned}$$

◀

2.4.4 Teorema Regla de diferenciación para la suma

Si f y g son funciones y si h es la función definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

■

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

El resultado del teorema anterior puede extenderse a cualquier número finito de funciones mediante inducción matemática. Este hecho se establece en el siguiente teorema.

2.4.5 Teorema

La derivada de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas derivadas existen.

De los teoremas anteriores, se tiene que la derivada de cualquier función polinominal puede calcularse fácilmente.

EJEMPLO 1 Determine $f'(x)$ si

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

La derivada del producto de dos funciones no es lo que usted espera; esto es, no es el producto de las derivadas, como se mostrará en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Sea

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Se puede calcular la derivada $h'(x)$ con los teoremas anteriores si se desarrolla el miembro derecho y se diferencía el polinomio resultante como sigue:

$$\begin{aligned} h(x) &= 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4 \\ h'(x) &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

Ahora considere

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 4x^2 \quad \text{de modo que} \quad f'(x) = 6x^2 - 8x \\ g(x) &= 3x^5 + x^2 \quad \text{de modo que} \quad g'(x) = 15x^4 + 2x \end{aligned}$$

Observe que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ pero $h'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.

2.4.6 Teorema Regla de diferenciación para el producto

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

A continuación se realizará un poco de manipulación hábil que conducirá a los límites que definen $f'(x)$ y $g'(x)$. Al restar y sumar $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ en el numerador se obtiene

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como f es diferenciable en x, por el teorema 2.2.1, f es continua en x; por tanto, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. También $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

por lo que se obtiene

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ ■

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera si estas derivadas existen.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Se aplica la regla del producto para calcular $h'(x)$ para la función h del ejemplo ilustrativo 5:

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

De la regla del producto,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

Lo cual es acorde con lo obtenido para $h'(x)$ en el ejemplo ilustrativo 5. ◀

No dude en concluir que el cálculo de $h'(x)$ en el ejemplo ilustrativo 5 fue más simple que en el cálculo del ejemplo ilustrativo 6. Pero recuerde que $h(x)$ en estos ejemplos es un polinomio. Se aplicará la regla del producto a muchas otras funciones diferentes de los polinomios.

Puesto que la derivada del producto de dos funciones no es el producto de sus derivadas, la derivada del cociente de dos funciones no es el cociente de sus derivadas, como se verá en el siguiente teorema.

2.4.7 Teorema Regla de diferenciación para el cociente

Si f y g son funciones y h es la función definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{donde } g(x) \neq 0$$

y si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces

$$h(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demostración

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Como se hizo en la demostración de la regla del producto, se efectuará otra hábil manipulación. En esta ocasión se resta y suma $f(x) \cdot g(x)$ en el numerador para obtener

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g es diferenciable en x, entonces g es continua en x; de modo que se tiene $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. También $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Con estos resultados y las definiciones de $f'(x)$ y $g'(x)$ se obtiene

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \blacksquare$$

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la fracción que tiene como denominador el cuadrado del denominador original, y como su numerador tiene al denominador original por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador original si estas derivadas existen.

EJEMPLO 2 Determine

$$D_x\left(\frac{2x^3+4}{x^2+1}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} D_x\left(\frac{2x^3+4}{x^2+1}\right) &= \frac{(x^2+1)(6x^2)-(2x^3+4)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{6x^4+6x^2-4x^4-8x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^4+6x^2-8x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

2.4.8 Teorema Regla de diferenciación de potencias (para potencias con exponentes enteros negativos)

Si $f(x) = x^{-n}$, donde $-n$ es un número entero negativo y $x \neq 0$, entonces

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Demostración Puesto que $-n$ es un número entero negativo, entonces n es un número entero positivo. En consecuencia, se expresa $f(x)$ como un cociente y se aplica la regla del cociente. Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^n} \\ f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Determine

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) &= \frac{d}{dx}(3x^{-5}) \\ &= 3(-5x^{-6}) \\ &= -\frac{15}{x^6} \end{aligned}$$

Si r es cualquier número entero positivo o negativo, entonces se tiene la regla para potencias:

$$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

De esta fórmula y de la regla del producto de una función por una constante se obtiene

$$D_x(cx^r) = crx^{r-1}$$

si c es una constante y r es cualquier número entero negativo o positivo.

Si la función f es diferenciable, entonces su derivada f' se llama, en ocasiones, **primera derivada** de f o **primera función derivada.** Si la función f' es diferenciable, entonces la derivada de f' se denomina **segunda derivada** de f o **segunda función derivada.** La segunda derivada de f se denota por f'' (que se lee "f biprima"). De la misma manera, la **tercera derivada** de f o la **tercera función derivada,** está definida como la derivada de f'', suponiendo que la derivada de f'' existe. La tercera derivada de f se representa por f''' (lo cual se lee como "f triprima").

La **n-ésima derivada** de la función f, donde n es número entero mayor que 1, es la derivada de la $(n - 1)$-ésima derivada de f. La n-ésima derivada se denota por $f^{(n)}$. De modo que si $f^{(n)}$ es la n-ésima derivada, entonces se puede representar la función f misma como $f^{(0)}$.

EJEMPLO 4 Encuentre todas las derivadas de la función f definida por

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

Solución

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 32x^3 + 15x^2 - 2x \\
f''(x) &= 96x^2 + 30x - 2 \\
f'''(x) &= 192x + 30 \\
f^{(4)}(x) &= 192 \\
f^{(5)}(x) &= 0 \\
f^{(n)}(x) &= 0 \qquad n \geq 5
\end{aligned}$$

La notación de Leibniz para la primera derivada es $\dfrac{dy}{dx}$. Para la segunda derivada de y con respecto a x la notación de Leibniz es $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, debido a que representa $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}(y)\right]$. El símbolo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ es una notación para la n-ésima derivada de y respecto a x.

Otros símbolos para la n-ésima derivada de f son

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

Para denotar la segunda derivada numérica de la función f en x se utiliza la notación NDER2($f(x)$, x); esto es,

$$\text{NDER2}(f(x), x) = \text{NDER}(\text{NDER}(f(x), x), x)$$

EJEMPLO 5 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx^2}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

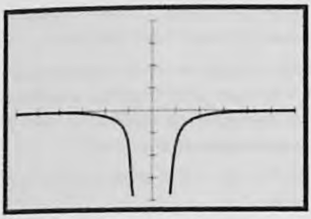
y apoye las respuestas gráficamente.

Solución Sea $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^{-3}) = -3x^{-4}$$

$$\frac{d}{dx^2}(x^{-3}) = 12x^{-5}$$

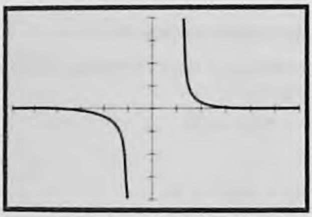
Para apoyar gráficamente las respuestas, primero se traza la gráfica de la función definida por $f'(x) = -3x^{-4}$ y NDER(x^{-3}, x) en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$. La figura 2 muestra que las gráficas son idénticas, lo cual apoya la respuesta de la primera derivada. Ahora se trazan las gráficas de las funciones definidas por $f''(x) = 12x^{-5}$ y NDER2(x^{-3}, x) o, equivalentemente, NDER$(-3x^{-4}, x)$, en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, para obtener la figura 3. En esta figura se muestra que las dos gráficas son idénticas, lo que apoya la respuesta para la segunda derivada. ◀



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f'(x) = -3x^{-4}$ y NDER(x^{-3}, x)

FIGURA 2



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f''(x) = 12x^{-5}$ y NDER2(x^{-3}, x)

FIGURA 3

EJERCICIOS 2.4

En los ejercicios 1 a 24, obtenga la derivada de la función por medio de los teoremas de esta sección.

1. $f(x) = 7x - 5$
2. $g(x) = 8 - 3x$
3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$
4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$
8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$
9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$
10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$
11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$
13. $F(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$
15. $g(x) = 4x^4 - \dfrac{1}{4x^4}$
16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 41x^{-4}$
17. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^4}$
18. $H(x) = \dfrac{5}{6x^5}$
19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$
20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$
21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$
22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$
23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$
24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

En los ejercicios 25 a 36, calcule la derivada aplicando los teoremas de esta sección. En los ejercicios 25 a 30, apoye la respuesta trazando en la graficadora la gráfica de su respuesta y de la derivada numérica en x, en el mismo rectángulo de inspección.

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$
26. $D_x\left(\dfrac{2x}{x + 3}\right)$
27. $D_x\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$
28. $D_y\left(\dfrac{2y + 1}{3y + 4}\right)$
29. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$
30. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4 - 3x - x^2}{x - 2}\right)$
31. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t}{1 + 2t^2}\right)$
32. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}\right)$
33. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$
34. $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}\right)$
35. $D_x\left[\dfrac{2x + 1}{x + 5}(3x - 1)\right]$
36. $D_x\left[\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 3}(x^2 - 2x^{-1} + 1)\right]$

En los ejercicios 37 y 38, determine todas las derivadas de la función

37. $f(x) = 6x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 9$

38. $f(x) = 2x^7 - x^5 + 5x^3 - 8x + 4$

39. Calcule $D_t^3\left(\frac{1}{6t^3}\right)$

40. Determine $\frac{d^4}{dx^4}\left(x^5 - \frac{1}{15x^5}\right)$

En los ejercicios 41 y 42, determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ *y apoye gráficamente su respuesta trazando en la graficadora la gráfica de la respuesta y la segunda derivada numérica en x, en el mismo rectángulo de inspección.*

41. $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ **42.** $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^3}$

En los ejercicios 43 a 46, encuentre una ecuación de la recta tangente o de la recta normal, según se indica, y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

43. La recta tangente a la curva $y = x^3 - 4$ en el punto $(2, 4)$.

44. La recta tangente a la curva $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ en el punto $(2, 1)$.

45. La recta normal a la curva $y = \frac{10}{14 - x^2}$ en el punto $(4, -5)$.

46. La recta normal a la curva $y = 4x^2 - 8x$ en el punto $(1, -4)$.

47. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$. Apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

48. Determine una ecuación de cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que son paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

49. Encuentre una ecuación de cada una de las rectas normales a la curva $y = x^3 - 4x$ que sean paralelas a la recta $x + 8y - 8 = 0$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

50. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 6x$ que sea perpendicular a la recta $x - 2y + 6 = 0$. Apoye su respuesta trazando la curva y las dos rectas en el mismo rectángulo de inspección.

51. Determine una ecuación de cada una de las rectas que pasan por el punto $(4, 13)$ y que sean tangentes a la curva $y = 2x^2 - 1$. Apoye sus respuestas trazando la curva y las rectas en el mismo rectángulo de inspección.

52. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 5$. Muestre que $f'(x) \geq 0$ para todos los valores de x.

53. Si f, g y h son funciones y $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, demuestre que si $f'(x)$, $g'(x)$ y $h'(x)$ existen, entonces

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

Sugerencia: aplique la regla del producto dos veces.

Utilice el resultado del problema 53 para diferenciar las funciones de los ejercicios 54 a 57.

54. $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$

55. $h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1)$

56. $g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5)$

57. $\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

58. Si f y g son dos funciones tales que sus primeras y segundas derivadas existen y si h es la función definida por la ecuación $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, demuestre que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

59. Si $y = x^n$, donde n es cualquier número entero positivo, demuestre por inducción matemática que $\frac{d^ny}{dx^n} = n!$

60. Dé una demostración alternativa de la regla de diferenciación de potencias (para potencias enteras positivas) mostrando que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(a) = na^{n-1}$ aplicando la fórmula (7) de la sección 2.1.

Sugerencia: factorice $x^n - a^n$, empleando la fórmula (12) de la sección suplementaria 1.5.

61. Demuestre que si f y g son dos funciones diferenciables tales que $f(0) = g(0) = 0$, entonces el producto de f y g no puede ser la función identidad; esto es $f(x) \cdot g(x) \neq x$. *Sugerencia:* aplique la regla de diferenciación del producto.

62. Explique por qué tres teoremas sobre diferenciación permiten diferenciar cualquier polinomio. Incluya los enunciados de los teoremas en su explicación.

2.5 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

La derivada de una función f en el número x_1 tiene una interpretación importante como la *tasa de variación* (o *razón de cambio*) *instantánea de* f en x_1, la cual se tratará en esta sección y la siguiente. Esta sección se inicia considerando una aplicación en física: el movimiento de una partícula sobre una recta. Dicho movimiento recibe el nombre de **movimiento rectilíneo**. Se elige arbitrariamente un sentido como positivo en la recta, y el sentido opuesto es el negativo. Para simplificar esta discusión, suponga que la partícula se mueve sobre una recta horizontal, cuyo sentido (o dirección) positivo es hacia la derecha y el sentido negativo hacia la izquierda. Seleccione algún punto sobre la recta y denótelo por la letra O. Sea f la función que determina la distancia dirigida de la partícula a partir de O en cualquier tiempo particular.

Para ser más específicos, sea s metros (m) la distancia dirigida desde O a los t segundos (s). Entonces s es la función definida por

$$s = f(t)$$

la cual proporciona la distancia dirigida desde el punto O hasta la partícula en un instante particular.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Entonces, cuando $t = 0$, $s = -3$; por tanto, la partícula está a 3 m a la izquierda del punto O cuando $t = 0$. Cuando $t = 1$, $s = 0$; de modo que la partícula se encuentra en el punto O en el segundo 1. Cuando $t = 2$, $s = 5$; por lo que la partícula se encuentra a 5m a la derecha del punto O a los 2s. Cuando $t = 3$, $s = 12$; de manera que la partícula está ubicada a 12m a la derechadel punto O a los 3s.

La figura 1 ilustra las diferentes posiciones de la partícula para valores específicos de t.

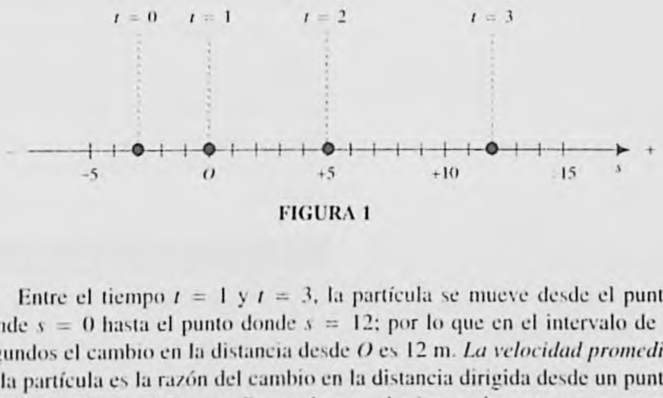


FIGURA 1

Entre el tiempo $t = 1$ y $t = 3$, la partícula se mueve desde el punto donde $s = 0$ hasta el punto donde $s = 12$; por lo que en el intervalo de 2 segundos el cambio en la distancia desde O es 12 m. *La velocidad promedio* de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo al cambio en el tiempo. De modo que el número de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula desde $t = 1$ a $t = 3$ es $\frac{12}{2} = 6$. Desde $t = 0$ a $t = 2$, el cambio en la distancia dirigida desde O hasta la partícula es de 8 m, por lo que el números de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula, en este intervalo de 2 segundos, es $\frac{8}{2} = 4$. ◀

En el ejemplo ilustrativo 1, la velocidad promedio de la partícula evidentemente no es constante; y la velocidad promedio no proporciona información específica acerca del movimiento de la partícula en cualquier instante particular. Por ejemplo, si un automóvil recorre una distancia de 100 kilómetros (km) en el mismo sentido en 2 horas (h), se dice que la velocidad promedio (o velocidad media) con que recorre esa distancia es de 50 km/h. Sin embargo, a partir de esta información no se puede determinar la lectura del velocímetro del automóvil en ningún tiempo particular en el intervalo de 2 horas. La lectura del velocímetro en un instante determinado se conoce como *velocidad instantánea*. La discusión siguiente permitirá llegar a una definición de lo que significa *velocidad instantánea*.

Suponga que la ecuación $s = f(t)$ define a s (el número de metros de la distancia dirigida de la partícula desde el punto O) como una función de t (el número de segundos en el tiempo). Cuando $t = t_1$, $s = s_1$. El cambio en la distancia dirigida desde O es $(s - s_1)$ metros durante el intervalo de tiempo $(t - t_1)$ segundos, y el número de metros por segundo de la velocidad promedio de la partícula durante este intervalo de tiempo está dado por

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

o, como $s = f(t)$ y $s_1 = f(t_1)$, la velocidad promedio se determina a partir de

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \tag{1}$$

Ahora, entre más corto sea el intervalo de t_1 a t, más cerca estará la velocidad promedio de lo que pensaríamos que es la velocidad instantánea en t_1.

Por ejemplo, si la lectura del velocímetro de un automóvil al pasar por el punto P_1 es de 80 km/h, y si un punto P está a 10 m de P_1 entonces la velocidad promedio del automóvil conforme recorre esos 10 metros estará próxima a 80 km/h ya que la variación de la velocidad del automóvil en este pequeño espacio probablemente es ligera. Ahora bien, si la distancia de P_1 a P se acortará a 5 m, la velocidad promedio del automóvil en este intervalo estaría aún más próxima a la lectura del velocímetro en P_1. Este proceso se puede continuar y la lectura del velocímetro en P_1 puede representarse como el límite de la velocidad promedio entre P_1 y P conforme P tiende a P_1. Esto es, la *velocidad instantánea* puede definirse como el límite del cociente (1) conforme t tiende a t_1, suponiendo que este límite existe. Este límite es la derivada de la función f en t_1. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

2.5.1 Definición de velocidad instantánea

Si f es una función definida por la ecuación

$$s = f(t)$$

y una partícula se desplaza a lo largo de una recta, tal que s es el número de unidades de la distancia dirigida de la partícula desde un punto fijo sobre la recta en t unidades de tiempo, entonces la **velocidad instantánea** de la partícula a las t unidades de tiempo es v unidades de velocidad, donde

$$v = f'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}$$

si existe.

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, dependiendo de que si la partícula se desplaza en el sentido positivo o negativo. Cuando la velocidad instantánea es cero, la partícula está en reposo. La **rapidez** de una partícula en cualquier tiempo es el valor absoluto de la velocidad instantánea. En consecuencia, la rapidez es un número no negativo. Los términos "rapidez" y "velocidad instantánea" se confunden con frecuencia. Observe que la rapidez sólo indica qué tan rápido se está moviendo la partícula, en cambio la velocidad instantánea también indica el sentido del movimiento.

▶ **EJEMPLO 1** Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \qquad t \geq 0$$

Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula se está moviendo a la derecha y en los que se mueve hacia la izquierda. También determine el instante cuando la partícula cambia de sentido.

Solución

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 3t^2 - 24t + 36 \\ &= 3(t^2 - 8t + 12) \\ &= 3(t - 2)(t - 6) \end{aligned}$$

La velocidad instantánea es cero cuando $t = 2$ y cuando $t = 6$. Por tanto, la partícula está en reposo en estos instantes. La partícula se mueve hacia la derecha cuando v es positiva y se mueve hacia la izquierda cuando v es negativa. Se determina el signo de v en diferentes intervalos de t, y los resultados se muestran en la tabla 1. ◀

Tabla 1

	$t - 2$	$t - 6$	*Conclusión*
$0 \leq t < 2$	−	−	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha
$t = 2$	0	−	v es cero; la partícula está en reposo
$2 < t < 6$	+	−	v es negativo; la partícula se mueve hacia la izquierda
$t = 6$	+	0	v es cero; la partícula está en reposo
$6 < t$	+	+	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Para interpretar visualmente el movimiento de la partícula del ejemplo 1, consulte la figura 2 donde el movimiento de la partícula es a lo largo de la recta horizontal de la figura. Sobre la recta se ha indicado el comportamiento de la partícula, descrito en la tabla 1, donde las flechas indican el sentido del movimiento de la partícula sobre el eje horizontal. La tabla 2 proporciona los valores de s y v para los valores enteros de t de 0 a 8. El valor de s indica la posición de la partícula sobre la recta horizontal para un valor determinado de t.

Tabla 2

t	s	v
0	−24	36
1	1	15
2	8	0
3	3	−9
4	−8	−12
5	−19	−9
6	−24	0
7	−17	15
8	8	36

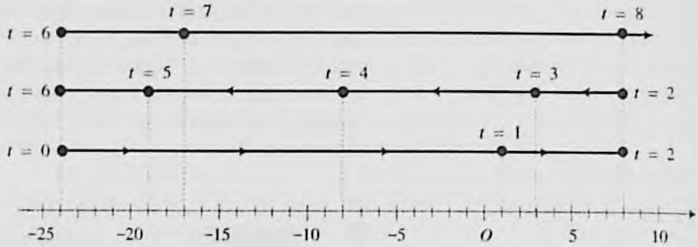
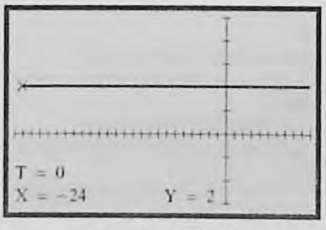


FIGURA 2

Ahora se describirá el movimiento de la partícula. Cuando $t = 0$, la partícula está a 24 unidades a la izquierda de O y se desplaza hacia la derecha; en $t = 1$, la partícula se encuentra a 1 unidad a la derecha de O y sigue moviéndose hacia la derecha; cuando $t = 2$, la partícula está a 8 unidades a la derecha de O y en reposo (se detiene por un instante) y después cambia de sentido e inicia el movimiento hacia la izquierda; cuando $t = 3$, la partícula se encuentra a 3 unidades a la derecha de O y se desplaza hacia la izquierda; en $t = 4$, la partícula está a 8 unidades a la izquierda de O y sigue desplazándose hacia la izquierda; cuando $t = 5$, la partícula se encuentra a 19 unidades a la izquierda de O y el movimiento es hacia la izquierda; en $t = 6$, la partícula está a 24 unidades a la izquierda de O y en reposo, después cambia de sentido e inicia el movimiento hacia la derecha; cuando $t = 7$, la partícula está a 17 unidades a la izquierda de O y se desplaza hacia la derecha; en $t = 8$, la partícula se encuentra a 8 unidades a la derecha de O y sigue moviéndose hacia la derecha; después la partícula continúa moviéndose hacia la derecha. ◀

El movimiento rectilíneo puede simularse en la graficadora. El método implica la representación del movimiento mediante ecuaciones paramétricas, por lo que se debe activar el modo paramétrico de la graficadora. Si usted no ha estudiado ecuaciones paramétricas en algún curso anterior al de Cálculo, consulte la sección 9.1. El ejemplo ilustrativo siguiente muestra el procedimiento para el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2.



[−25, 10] por [−3, 5]

$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24, \quad y_1(t) = 2$

FIGURA 3

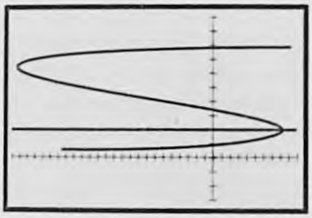
EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Para aclarar estas ideas, se simulará el movimiento de la partícula sobre la recta $y = 2$ en lugar del eje x. Active la graficadora en modo paramétrico. Sean

$$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \quad \text{y} \quad y_1(t) = 2$$

En el rectángulo de inspección de [−25, 10] por [−3, 5], considere $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 10$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Ahora presione la tecla TRACE (*rastreo*) y después presione la tecla *flecha a la izquierda* y manténgala oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 3 muestra la pantalla de la graficadora con su nuevo aspecto. Observe la información en la parte inferior de la pantalla: $t = 0$, $x = -24$ y $y = 2$.

De este modo, se está preparado para iniciar el movimiento de la partícula. Se presiona la tecla *flecha a la derecha* y se mantiene oprimida. El cursor representa la partícula que se mueve a lo largo de la recta $y = 2$. Observe que la partícula se desplaza hacia la derecha hasta que $t = 2$ y $x = 8$, cuando se detiene y cambia de sentido. Después, la partícula se mueve hacia la izquierda hasta $t = 6$ y $x = -24$, cuando otra vez se detiene y cambia de sentido. Luego, el cursor se desplaza hacia la derecha y se pierde de la pantalla por el lado derecho. Este movimiento apoya los resultados del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2. ◀

El movimiento rectilíneo puede visualizarse en otra forma en la graficadora, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.



[-25, 10] por [-3, 10]

$x_1(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24,\ y_1(t) = 2$
$x_2(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24,\ y_2(t) = t$

FIGURA 4

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** Se considera otra vez el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y de los ejemplos ilustrativos 2 y 3. A la graficadora en modo paramétrico se le proporciona la información siguiente:

$$x_2(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 24 \quad \text{y} \quad y_2(t) = t$$

En esta ocasión se utiliza el rectángulo de inspección de [−25, 10] por [−3, 10] con t considerada como en el ejemplo ilustrativo 3. Se trazan las gráficas para $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$, y $y_2(t)$ en el mismo rectángulo de inspección, y se selecciona SIMUL (*simultáneo*) del menú MODE. La figura 4 muestra las dos gráficas: la recta $y = 2$ sobre la que realmente se desplaza la partícula; y la curva sobre la cual las coordenadas son $(x_2(t), y_2(t))$, y que representa una amplificación vertical del movimiento de la partícula. Se puede observar que la partícula primero se mueve sobre la recta horizontal como en el ejemplo ilustrativo 3. Después se ve que la partícula se mueve sobre la curva (recuerde, esta curva no es la trayectoria real de la partícula). Para esto, primero se presiona la tecla *flecha hacia arriba* o *flecha hacia abajo* hasta que el cursor esté sobre la curva. Luego, como anteriormente se hizo, se presiona la tecla *flecha a la izquierda* y se mantiene oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. Ahora se presiona la tecla *flecha a la derecha* y se mantiene oprimida. Este segundo procedimiento muestra el movimiento de la partícula de izquierda a derecha, después de derecha a izquierda y luego de izquierda a derecha otra vez. Observe en esta curva que la partícula cambia de sentido en el punto donde $x = 8$ y $y = 2$ (8 unidades a la derecha de O a los 2 s) y después otra vez en el punto donde $x = -24$ y $y = 6$ (24 unidades a la izquierda de O a los 6 s). ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 64 pies/s. Si el sentido positivo de la distancia desde su punto inicial es hacia arriba, t segundos es el tiempo que transcurre desde que la pelota fue lanzada, y s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, entonces la ecuación del movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t$$

(a) Simule el movimiento de la pelota en la graficadora. **(b)** Estime qué tan alto llegará la pelota y cuántos segundos le tomará para alcanzar su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Obtenga la velocidad instantánea de la pelota en 1 s y 3 s. **(e)** Calcule la rapidez de la pelota en 1 s y 3 s. **(f)** Calcule la velocidad instantánea cuando llega al piso.

Solución

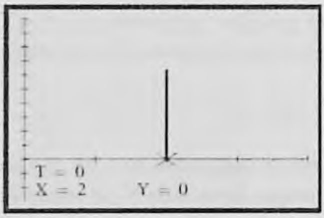
(a) Suponga que la pelota se mueve sobre la recta vertical $x = 2$. Active la graficadora en modo paramétrico. Sean

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$$

Para determinar los valores de t de interés, en la ecuación dada se considera $s = 0$ y se obtiene

$$-16t(t - 4) = 0$$
$$t = 0 \qquad t = 4$$

Por tanto, la pelota está en el piso a los 0 s y 4 s, lo que indica que $0 \leq t \leq 4$. En el rectángulo de inspección de $[0, 4]$ por $[-25, 100]$, sean $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 4$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Ahora se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda* manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 5 muestra la pantalla de la graficadora con su nueva apariencia. Presione la tecla *flecha a la derecha* y observe que la pelota, representada por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta vertical $x = 2$.



$[0, 4]$ por $[-25, 100]$

$x_1(t) = 2, \; y_1(t) = -16t^2 + 64t$

FIGURA 5

(b) Al aproximar el valor de y como 64 y el valor de t como 2 cuando la pelota está en su punto más alto, se estima que la pelota alcanzará su altura máxima de 64 pie a los 2 s.

(c) Para confirmar analíticamente las estimaciones del inciso (b), primero se calcula $v(t)$, el número de pies por segundo de la velocidad instantánea de la pelota a los t segundos. Como $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v(t) = -32t + 64 \tag{2}$$

Debido a que la pelota alcanzará su altura máxima cuando el sentido del movimiento cambia, esto es, cuando $v(t) = 0$, se sustituye $v(t)$ por 0 en la ecuación (2) y se obtiene

$$-32t + 64 = 0$$
$$t = 2$$

De la ecuación de movimiento cuando $t = 2$, resulta que $s = 64$. Por tanto, la pelota alcanza su máxima altura en el punto a 64 pie del punto inicial a los 2 s. Estos resultados confirman las estimaciones del inciso (b).

(d) $v(1) = -32(1) + 64 \Leftrightarrow v(1) = 32$; de modo que al final de 1 s la pelota se eleva con una velocidad instantánea de 32 pie/s. $v(3) = -32(3) + 64 \Leftrightarrow v(3) = -32$; de manera que al final de 3 s la pelota cae con una velocidad instantánea de -32 pie/s.

(e) $|v(t)|$ es el número de pies por segundo de la rapidez de la pelota a los t segundos; así, $|v(1)| = 32$ y $|v(3)| = 32$.

(f) Se determinó anteriormente que la pelota llegará al piso a los 4 s. Como $v(4) = -64$, su velocidad instantánea cuando alcance el piso será de -64 pie/s. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 En el ejemplo 2, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la pelota están dadas por

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = -16t^2 + 64t \tag{3}$$

y sus gráficas se muestran en la figura 5. La ecuación de movimiento es

$$s = -16t^2 + 64t$$

Para trazar la gráfica de esta ecuación en modo paramétrico, se consideran

$$x_2(t) = t \quad \text{y} \quad y_2(t) = -16t^2 + 64t \tag{4}$$

La gráfica es una parábola cuyo punto más alto, el vértice, está en el punto (2, 64). La gráfica se muestra en la figura 6. La velocidad v de la pelota está dada por la ecuación

$$v = -32t + 64$$

cuya gráfica es una recta que tiene pendiente negativa. Las ecuaciones paramétricas de esta ecuación son

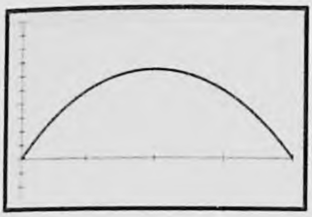
$$x_3(t) = t \quad \text{y} \quad y_3(t) = -32t + 64 \tag{5}$$

La figura 7 muestra esta recta. Refiérase ahora a la figura 8 que muestra las gráficas de los tres conjuntos de ecuaciones paramétricas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que la velocidad es cero (en el punto donde la recta intersecta al eje x) cuando la pelota está en su punto más alto. También observe que cuando la pelota se está elevando, la velocidad es positiva, mientras que al caer, su velocidad es negativa. Además, la velocidad es siempre decreciente como lo indica la pendiente de la recta que representa la velocidad.

Como la rapidez de una partícula es el valor absoluto de su velocidad, las ecuaciones paramétricas de la rapidez de la pelota son

$$x_4(t) = t \quad \text{y} \quad y_4(t) = |-32t + 64| \tag{6}$$

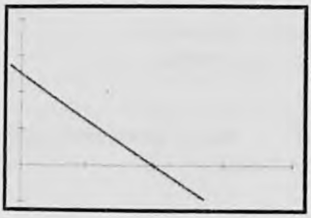
La figura 9 presenta las gráficas de (3), (4) y (6) trazadas en el mismo rectángulo de inspección. Observe que la rapidez es decreciente cuando la pelota se está elevando, la rapidez es cero cuando la pelota alcanza su punto más alto, y la rapidez es creciente cuando la pelota está cayendo. ◀



[0, 4] por [−25, 100]

$x_2(t) = t,\quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$

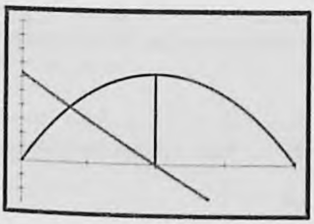
FIGURA 6



[0, 4] por [−25, 100]

$x_3(t) = t,\quad y_3(t) = -32t + 64$

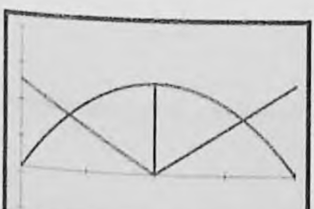
FIGURA 7



[0, 4] por [−25, 100]

$x_1(t) = 2,\quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$
$x_2(t) = t,\quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$
$x_3(t) = t,\quad y_3(t) = -32t + 64$

FIGURA 8



[0, 4] por [−25, 100]

$x_1(t) = 2,\quad y_1(t) = -16t^2 + 64t$
$x_2(t) = t,\quad y_2(t) = -16t^2 + 64t$
$x_4(t) = t,\quad y_4(t) = |-32t + 64|$

FIGURA 9

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 6** Ahora se considerará el movimiento del ejemplo 1 y los ejemplos ilustrativos 2 a 4. Observe en la tabla 2 que la velocidad parece ser decreciente cuando $0 < t < 4$ y creciente cuando $4 < t$. Este hecho puede apoyarse gráficamente observando que el movimiento de la partícula de los ejemplos ilustrativos 3 y 4. Cuando $0 \le t \le 2$, $v \ge 0$ y la rapidez de la partícula es decreciente; cuando $2 \le t \le 4$, $v \le 0$ y la rapidez de la partícula es creciente de modo que para $0 < t < 4$, v es decreciente. Cuando $4 \le t \le 6$, $v \le 0$ y la rapidez es decreciente; cuando $6 \le t \le 8$, $v \ge 0$ y la rapidez es creciente; de manera que para $4 < t < 8$, v es creciente. ◀

En física, a la tasa de variación (o razón de cambio) instantánea de la velocidad se le llama **aceleracion instantánea.** Por tanto, si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde a los t segundos la velocidad instantánea es v metros por segundo y la aceleración instantánea es a metros por segundo por segundo, entonces a es la primera derivada de v con respecto a t o, equivalentemente, la segunda derivada de s con respecto a t; esto es,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Cuando $a > 0$, v es creciente, y cuando $a < 0$, v es decreciente. Cuando $a = 0$, v no está cambiando. Como la rapidez de la partícula a los t segundos es $|v(t)|$ m/s, se tienen los resultados siguientes:

(i) Si $v \geq 0$ y $a > 0$, entonces la rapidez es creciente.
(ii) Si $v \geq 0$ y $a < 0$, entonces la rapidez es decreciente.
(iii) Si $v \leq 0$ y $a > 0$, entonces la rapidez es decreciente.
(iv) Si $v \leq 0$ y $a < 0$, entonces la rapidez es creciente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Para el movimiento rectilíneo del ejemplo 1 y los ejemplos ilustrativos 2 a 4,

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = 3t^2 - 24t + 36$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = 6t - 24$$

Por tanto, $a = 6(t - 4)$; de modo que para $0 < t < 4$, $a < 0$, y para $4 < t < 8$, $a > 0$. Estos resultados son consistentes con la discusión del ejemplo ilustrativo 6. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Para la pelota del ejemplo 2

$$s = -16t^2 + 64t \quad \text{y} \quad v = -32t + 64$$

La aceleración de la pelota es a pies por segundo por segundo donde

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = -32$$

Por tanto, la aceleración es -32 pies/s^2. Esta aceleración constante de la pelota en la dirección hacia abajo, ya sea que la pelota suba o baje, se debe a la fuerza de gravedad. ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea a los t segundos, encuentre v y a en términos de t. Describa la posición y movimiento de la partícula en una tabla que incluya los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda, y en los que se mueve a la derecha, los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura análoga a la figura 2.

Solución Como $s = 3t^2 - t^3$ y $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{8}$$

Puesto que $a = \dfrac{dv}{dt}$,

$$a = 6 - 6t \tag{9}$$

Ahora se determinarán los valores de t cuando alguna de las cantidades s, v o a es cero. De (7),

$$s = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 3$$

De (8),

$$v = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 0 \quad \text{o} \quad t = 2$$

De (9),

$$a = 0 \quad \text{cuando} \quad t = 1$$

La tabla 3 muestra los valores de s, v y a cuando t es igual a 0, 1, 2 y 3. También se ha indicado el signo de s, v y a en los intervalos de t sin incluir a 0, 1, 2 y 3. Entonces se puede hacer una conclusión acerca de la posición y del movimiento de la partícula para los diferentes valores de t.

Tabla 3

	s	v	a	*Conclusión*
$t = 0$	0	0	6	La partícula está en el origen. La velocidad es 0 y es creciente. La rapidez es creciente.
$0 < t < 1$	+	+	+	La partícula está a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$t = 1$	2	3	0	La partícula está a 2 metros a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha a 3 m/s. La velocidad no cambia, de modo que la rapidez tampoco.
$1 < t < 2$	+	+	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la derecha. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$t = 2$	4	0	−6	La partícula está a 4 metros a la derecha del origen y cambia el sentido de su movimiento de derecha a izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$2 < t < 3$	+	−	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$t = 3$	0	−9	−12	La partícula está en el origen y su movimiento es hacia la izquierda a 9 m/s. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$3 < t$	−	−	−	La partícula está a la izquierda del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.

La figura 10 presenta el movimiento de la partícula a lo largo de la recta horizontal. El comportamiento de la partícula, descrito en la tabla 3, se indica sobre la recta donde las flechas señalan el sentido del movimiento de la partícula sobre el eje horizontal. ◀

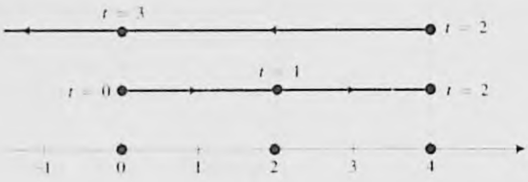


FIGURA 10

Los resultados del ejemplo 3 se pueden apoyar al simular el movimiento de la partícula en la graficadora, como se hizo en el ejemplo ilustrativo 3 para el movimiento del ejemplo 1 y del ejemplo ilustrativo 2. En el ejercicio 24 se le pedirá que haga esto.

EJEMPLO 4 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Si v metros por segundo es la velocidad instantánea y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula a los t segundos, determine t, s y v cuando $a = 0$.

Solución

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad\qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Al considerar $a = 0$ se tiene

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

De donde el único valor real de t se obtiene de la raíz cúbica principal de 8, de modo que $t + 1 = 2$; esto es, $t = 1$. Cuando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad\qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= 2.5 \qquad\qquad = 2$$

<u>**Conclusión:**</u> La aceleración es 0 en 1 s cuando la partícula está a 2.5 m del origen y se mueve hacia la derecha a una velocidad de 2 m/s. ◀

EJERCICIOS 2.5

En los ejercicios 1 a 8, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del origen a los t segundos. Determine la velocidad instantánea $v(t)$ metros por segundo a los t segundos, después calcule $v(t_1)$ para el valor particular de t_1.

1. $s = 3t^2 + 1$; $t_1 = 3$
2. $s = 8 - t^2$; $t_1 = 5$
3. $s = \frac{1}{4t}$; $t_1 = \frac{1}{2}$

4. $s = \dfrac{3}{t^2}$; $t_1 = -2$

5. $s = 2t^3 - t^2 + 5$; $t_1 = -1$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1$; $t_1 = \dfrac{1}{2}$

7. $s = \dfrac{2t}{4+t}$; $t_1 = 0$

8. $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2}$; $t_1 = 2$

En los ejercicios 9 a 14, una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación indicada, donde s metros es la distancia dirigida a partir del punto O a los t segundos. El sentido positivo es hacia la derecha. Determine los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve hacia la derecha y en los que se mueve hacia la izquierda. También determine dónde la partícula cambia su dirección. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 2, y elija valores de t al azar pero incluya los valores de t cuando la partícula cambia de sentido. Apoye sus resultados simulando el movimiento de la partícula en la graficadora.

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$

10. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

11. $s = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 - 2t + 4$

12. $s = \dfrac{t}{1+t^2}$

13. $s = \dfrac{t}{9+t^2}$

14. $s = \dfrac{t+1}{t^2+4}$

15. Para el movimiento rectilíneo del ejercicio 9, trace en el mismo rectángulo de inspección la recta $y = 2$ sobre la cual se desplaza la partícula realmente y una curva la cual represente una amplificación del movimiento de la partícula, semejante a la del ejemplo ilustrativo 4. Apoye los resultados del ejercicio 9 visualizando la partícula que se mueve sobre la curva (la cual no es en realidad la trayectoria de la partícula). Dibuje lo que ve en la pantalla de la graficadora y describa el movimiento de la partícula sobre la curva.

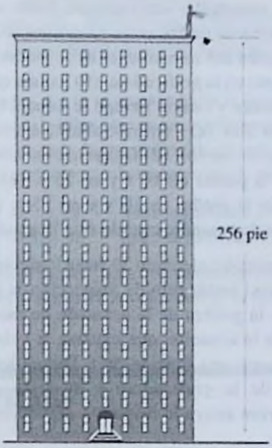
16. Siga las instrucciones del ejercicio 15 para el movimiento rectilíneo del ejercicio 10.

Para los ejercicios 17 a 21, utilice la siguiente ecuación de movimiento para un objeto que se mueve sobre una recta vertical y sujeto sólo a la fuerza de gravedad, donde el sentido (o dirección) positivo es hacia arriba:

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0 \tag{10}$$

donde s pies es la altura del objeto a los t segundos, s_0 pies es la altura inicial del objeto y v_0 pies por segundo es su velocidad inicial.

17. Una piedra cae desde un edificio de 256 pie de altura. **(a)** Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento de la piedra y simule este movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea de la piedra en 1 s y 2 s. **(c)** Determine el tiempo que le tomará a la piedra llegar al piso. **(d)** ¿Cuál es la rapidez de la piedra cuando llega al piso?



18. En un teatro, la base de un candil está a 160 pie de altura sobre el piso del vestíbulo. Suponga que el fantasma de la ópera suelta el candil y lo deja caer desde el reposo hasta estrellarse en el piso. **(a)** Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento del candil y simule su movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea del candil en 1 s y en 1.5 s. **(c)** Determine el tiempo que le tomará al candil llegar hasta el piso. **(d)** ¿Cuál es la rapidez del candil cuando llega al piso?

19. Realice el ejercicio 18 considerando ahora que el fantasma es capaz de darle al candil una velocidad inicial de 48 pie/s.

20. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 32 pie/s. **(a)** Emplee (10) para escribir una ecuación del movimiento de la pelota y simule este movimiento en la graficadora. **(b)** Estime que tan alto llegará la pelota y cuánto tiempo le tomará llegar hasta su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Determine la velocidad instantánea de la pelota en 0.75 s y en 1.25 s. **(e)** Determine la rapidez de la pelota en 0.75 s y en 1.25 s **(f)** Determine la rapidez de la pelota cuando ésta llega al piso.

21. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 560 pie/s. **(a)** Utilice (10) para escribir una ecuación del movimiento de la piedra y simule este movimiento en la graficadora. **(b)** Estime que tan alto llegara la piedra y cuánto tiempo le tomará llegar hasta su punto más alto. **(c)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (b). **(d)** Determine la velocidad instantánea de la piedra en 10 s y en 25 s. **(e)** Determine la rapidez de la piedra en 10 s y en 25 s. **(f)** Determine la rapidez de la piedra cuando ésta llega al piso.

22. Para la pelota del ejercicio 20, haga lo siguiente: **(a)** Trace en el mismo rectángulo de inspección la trayectoria de la pelota, la gráfica de la ecuación de movimiento y la gráfica de la ecuación que expresa la velocidad instantánea v como una función de t. Dibuje lo que ve en la pantalla de la graficadora y describa por qué esta visualización apoya la respuesta del inciso (b) del ejercicio 20.

23. Siga las instrucciones del ejercicio 22 para la piedra del ejercicio 21.

24. Simule el movimiento de la partícula del ejemplo 3 en la graficadora. Explique por qué esto apoya los resultados del ejemplo 3.

En los ejercicios 25 y 26, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine el tiempo en el que la aceleración instantánea es cero, después determine la distancia dirigida de la partícula desde el origen y la velocidad instantánea en ese tiempo.

25. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1;\ t \geq 0$

26. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4;\ t \geq 0$

En los ejercicios 27 y 28, una partícula se desplaza a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación indicada donde a los t segundos, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad instantánea de la partícula y a metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea de la partícula. Determine v y a en términos de t. Elabore una tabla semejante a la tabla 3 que proporcione una descripción de la posición y del movimiento de la partícula. Incluya en la tabla los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve hacia la derecha y en los que se desplaza a la izquierda, los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente, los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente, y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 10.

27. $s = t^3 - 9t^2 + 15t;\ t \geq 0$

28. $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2;\ t \geq 0$

29. Simule el movimiento de la partícula del ejercicio 27 en la graficadora y explique por qué esto apoya sus resultados.

30. Simule el movimiento de la partícula del ejercicio 28 en la graficadora y explique por qué esto apoya sus resultados.

31. En la ecuación (10), el coeficiente -16 de t^2 es igual a $\frac{1}{2}(-32)$ donde -32 pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad de un objeto que se mueve sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Tierra, donde la resistencia del aire no se considera. Como la aceleración debida a la gravedad de la Luna es -5.5 pie/s^2, la ecuación de movimiento para un objeto que se desplaza sobre una recta vertical cercano a la superficie de la Luna es

$$s = -2.75t^2 + v_0t + s_0$$

Suponga que un astronauta deja caer una piedra desde la orilla de un risco y la piedra llega al piso en 4 s. Después un segundo astronauta, en la parte inferior del risco, toma la piedra y la lanza de regreso al primer astronauta. **(a)** ¿Cuál es la altura del risco? **(b)** ¿Con qué velocidad llega la piedra al piso? **(c)** ¿Con qué velocidad, por lo menos, debe lanzar la piedra el segundo astronauta de modo que le llegue al primero?

32. En lugar de la Luna, suponga que los dos astronautas del ejercicio 31 realizan lo mismo en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de -12 pie/s^2. Escriba la ecuación correspondiente al movimiento y responda las mismas preguntas que en el ejercicio 31, considerando ahora que la piedra llega al piso en 3 s.

33. Suponga que un corredor en una carrera de 100 metros está a s metros de la línea de meta t segundos después del inicio de la carrera, donde

$$s = 100 - \frac{1}{4}(t^2 + 33t)$$

Determine la rapidez del corredor **(a)** al inicio de la carrera, y **(b)** cuando el corredor cruza la línea de meta.

34. Si se empuja una pelota en un plano inclinado con una velocidad inicial de 24 pie/s, entonces $s = 24t + 10t^2$, donde s pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los t segundos, y la dirección positiva se considera hacia abajo sobre el plano inclinado. **(a)** ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota a los t_1 segundos? **(b)** ¿Cuánto tardará la velocidad en llegar a 48 pies/s?

35. Se golpea una bola de billar de modo que se desplaza en línea recta. Si s centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t segundos, entonces $s = 100t^2 + 100t$. Si la bola golpea una banda que se encuentra a 39 cm de su posición inicial, ¿a qué velocidad la golpea?

36. Dos partículas, A y B, se mueven hacia la derecha sobre una recta horizontal. Ellas inician su movimiento en un punto O, s metros es cada distancia dirigida de cada partícula desde O a los t segundos, y las ecuaciones de movimiento son

$$s = 4t^2 + 5t \qquad \text{(para la partícula } A\text{)}$$
$$s = 7t^2 + 3t \qquad \text{(para la partícula } B\text{)}$$

Si $t = 0$ en el inicio, ¿para qué valores de t la velocidad de la partícula A excederá la velocidad de la partícula B?

2.6 DERIVADA COMO TASA DE VARIACIÓN

En la sección 2.5 se dijo que si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, entonces la velocidad de la partícula a las t unidades de tiempo está determinada por la derivada de s con respecto a t. Este concepto de velocidad en el movimiento rectilíneo corresponde al concepto más general de *tasa instantánea de variación*; esto es, la tasa de variación de s por unidad de variación de t es la derivada de s con respecto a t.

De manera semejante, si una cantidad y es función de una cantidad x se puede expresar la tasa de variación de y por unidad de variación de x. Esta discusión es análoga a la discusión de la pendiente de la recta tangente a la gráfica y a la de la velocidad instantánea de una partícula que se mueve a lo largo de una recta.

Si la relación funcional entre y y x está dada por

$$y = f(x)$$

y si x varía del valor x_1 al $x_1 + \Delta x$, entonces y varía de $f(x_1)$ a $f(x_1 + \Delta x)$. De modo que la variación de y, denotada por Δy, es $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ cuando la variación de x es Δx. La tasa promedio de variación de y por unidad de variación de x, conforme x varía de x_1 a $x_1 + \Delta x$, está dada por

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

Si el límite de este cociente existe cuando $\Delta x \to 0$, este límite es el que se considera como la tasa instantánea de variación de y por unidad de variación de x en x_1. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

2.6.1 Definición de tasa de variación instantánea

Si $y = f(x)$, entonces la **tasa de variación instantánea de y por unidad de variación de x en x_1** es $f'(x_1)$ o, equivalentemente, la derivada de y con respecto a x en x_1, si ésta existe.

Para ilustrar esta definición geométricamente, sea $f'(x_1)$ la tasa instantánea de variación de y por unidad de variación de x en x_1. Entonces, si $f'(x_1)$ se multiplica por Δx (la variación de x), el producto es la variación que ocurriría en y si el punto (x, y) se desplazara a lo largo de la recta tangente a

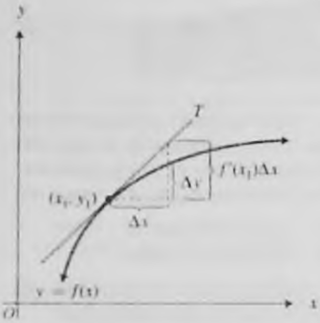


FIGURA 1

(x_1, y_1) de la gráfica de $y = f(x)$. Vea la figura 1. La tasa promedio de variación de y por unidad de variación de x está dada por la fracción en (1), y cuando esta fracción se multiplica por Δx, el producto es Δy, la cual es la variación real de y causada por una variación Δx en x cuando el punto (x, y) se mueve a lo largo de la gráfica.

EJEMPLO 1 Sea $V(x)$ centímetros cúbicos el volumen de un cubo cuyas aristas miden x centímetros, medidas con cuatro dígitos significativos. En una calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $V(x)$ con respecto a x conforme x varía de **(a)** 3.000 a 3.200; **(b)** 3.000 a 3.100; **(c)** 3.000 a 3.010; **(d)** 3.000 a 3.001. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando $x = 3.000$?

Solución

La tasa promedio de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando x varía de x_1 a $x_1 + \Delta x$ es

$$\frac{V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)}{\Delta x}$$

(a) $x_1 = 3.000, \ \Delta x = 0.200$

$$\frac{V(3.200) - V(3.000)}{0.200} = \frac{(3.200)^3 - (3.000)^3}{0.200}$$
$$= 28.84$$

(b) $x_1 = 3.000, \ \Delta x = 0.100$

$$\frac{V(3.100) - V(3.000)}{0.100} = \frac{(3.100)^3 - (3.000)^3}{0.100}$$
$$= 27.91$$

(c) $x_1 = 3.000, \ \Delta x = 0.010$

$$\frac{V(3.010) - V(3.000)}{0.010} = \frac{(3.010)^3 - (3.000)^3}{0.010}$$
$$= 27.09$$

(d) $x_1 = 3.000, \ \Delta x = 0.001$

$$\frac{V(3.001) - V(3.000)}{0.001} = \frac{(3.001)^3 - (3.000)^3}{0.001}$$
$$= 27.01$$

En el inciso (a) se ve que conforme la longitud de las aristas del cubo varía de 3.000 cm a 3.200 cm, la tasa promedio de variación del volumen es 28.84 cm^3 por centímetro de variación en la longitud de las aristas. Los incisos (b)-(d) pueden interpretarse de manera semejante.

(e) La tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando $x = 3$ es $V'(3)$.

$$V'(x) = 3x^2 \qquad V'(3) = 27$$

<u>**Conclusión:**</u> Cuando la longitud de las aristas del cubo es de 3 cm, la tasa instantánea de variación del volumen es 27 cm^3 por centímetro de variación en la longitud de las aristas.

EJEMPLO 2 En un circuito eléctrico, si E volts es la fuerza electromotriz, I amperes es la corriente y R ohms es la resistencia, entonces de la ley de Ohms

$$IR = E$$

(a) Si se supone que E es una constante positiva, demuestre que I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R. **(b)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de I con respecto a R en un circuito eléctrico de 90 volts cuando la resistencia es de 15 ohms?

Solución

(a) Si se resuelve la ecuación dada para I, se obtiene

$$I = E \cdot R^{-1}$$

Al diferenciar I con respecto a R, se tiene

$$\frac{dI}{dR} = -E \cdot R^{-2}$$

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{E}{R^2} \tag{2}$$

Esta ecuación establece que la tasa de variación de I con respecto a R es negativa y proporcional a $1/R^2$. Por tanto, I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R.

(b) De la ecuación (2) con $E = 90$ y $R = 15$, se tiene

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{90}{225}$$
$$= -0.4$$

<u>**Conclusión:**</u> La corriente decrece a una tasa de 0.4 amperes por ohm. ◀

En economía, la variación de una cantidad con respecto a otra puede describirse mediante el concepto de *variación promedio* o del concepto de *variación marginal*. El concepto de **variación promedio** expresa la variación de una cantidad sobre un intervalo de valores de una segunda cantidad, mientras que el concepto de **variación marginal** es la variación instantánea de la primera cantidad que resulta de una pequeña unidad de variación de la segunda cantidad. Se inician los ejemplos en economía con la definición de *costo promedio* y *costo marginal*.

Suponga que $C(x)$ es el costo total para producir x unidades de un artículo. La función C se denomina **función de costo total.** En circunstancias normales x y $C(x)$ son positivos. Debido a que x representa la cantidad de unidades de un artículo, usualmente x es un número entero no negativo. Sin embargo, a fin de aplicar el Cálculo, se supondrá que x es un número real no negativo para satisfacer los requerimientos de continuidad de la función C.

El **costo promedio** de producción de cada unidad de un artículo se obtiene al dividir el costo total entre el número de unidades producidas. Si $Q(x)$ dólares es el costo promedio, entonces

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

y Q se conoce como **función de costo promedio.**

Ahora suponga que el número de unidades producidas es x_1, y que se incrementa en Δx. Entonces la variación del costo total está determinado por $C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)$, y la variación promedio en el costo total con respecto a la variación del número de unidades producidas está dado por

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas utilizan el término *costo marginal* para el límite de este cociente cuando Δx tiende a 0, suponiendo que el límite existe. Este límite, que es la derivada de C en x_1, establece que el **costo marginal,** cuando $x = x_1$, está dado por $C'(x_1)$, si existe. La función C' recibe el nombre de **función de costo marginal,** y $C'(x_1)$ puede interpretarse como la tasa de variación del costo total cuando se producen x_1 unidades de cierto artículo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Supongase que $C(x)$ dólares es el costo total por la fabricación de x juguetes, y que

$$C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$$

(a) La función de costo marginal es C' y está definida por

$$C'(x) = 4 + 0.04x$$

(b) El costo marginal cuando $x = 50$ es $C'(50)$, y

$$\begin{aligned} C'(50) &= 4 + 0.04(50) \\ &= 6 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> La tasa de variación del costo total, cuando se fabrican 50 juguetes, es \$6 por juguete.

(c) El número de dólares del costo real de fabricación del juguete 51 es $C(51) - C(50)$, y

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) &= [110 + 4(51) + 0.02(51)^2] - [110 + 4(50) + 0.02(50)^2] \\ &= 366.02 - 360 \\ &= 6.02 \end{aligned}$$

Observe que las respuestas de (b) y (c) difieren por 0.02. Esta discrepancia es debida a que el costo marginal es la tasa instantánea de variación de $C(x)$ con respecto a una variación de una unidad de x. En consecuencia, $C'(50)$ es el número aproximado de dólares del costo de fabricación del juguete 51. ◀

Note que el cálculo de $C'(50)$ en el ejemplo ilustrativo 1 es más simple que calcular $C(51) - C(50)$. Con frecuencia, los economistas aproximan el costo de producción de una unidad adicional utilizando la función de costo marginal.

Específicamente, $C'(k)$ dólares es el costo aproximado de la $(k + 1)$-ésima unidad después de que las primeras k unidades se han producido.

Otra función importante en economía es la **función de ingreso total,** denotada por R, la cual está definida por

$$R(x) = px$$

donde $R(x)$ dólares es el ingreso total recibido cuando se venden x unidades a p dólares por unidad.

El **ingreso marginal**, cuando $x = x_1$, está determinado por $R'(x_1)$, si existe. La función R' se denomina **función de ingreso marginal.** $R'(x_1)$ puede ser positivo, negativo o cero, y puede interpretarse como la tasa de variación del ingreso total cuando se venden x_1 unidades. $R'(k)$ dólares es el ingreso aproximado por la venta de la $(k + 1)$-ésima unidad después de que las primeras k unidades se han vendido.

EJEMPLO 3 Suponga que $R(x)$ dólares es el ingreso total por la venta de x mesas, y que

$$R(x) = 300x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Determine **(a)** la función de ingreso marginal; **(b)** el ingreso marginal cuando $x = 40$; **(c)** el ingreso real por la venta de la mesa 41.

Solución

(a) La función de ingreso marginal es R' y está definida por

$$R'(x) = 300 - x$$

(b) El ingreso marginal cuando $x = 40$ está dado por $R'(40)$, y

$$\begin{aligned} R'(40) &= 300 - 40 \\ &= 260 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> La tasa de variación del ingreso total cuando se han vendido 40 mesas es $260 por mesa.

(c) El número de dólares del ingreso real por la venta de la mesa 41 es $R(41) - R(40)$, y

$$\begin{aligned} R(41) - R(40) &= \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2}\right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right] \\ &= 11\,459.50 - 11\,200 \\ &= 259.50 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El ingreso real por la venta de la mesa 41 es $259.50. ◀

Observe que en el inciso (b) del ejemplo 3 se obtuvo $R'(40) = 260$, y $260 es una aproximación del ingreso recibido por la venta de la mesa 41, el cual es $259.50, según el inciso (c).

Como $f'(x)$ proporciona la tasa instantánea de variación de $f(x)$ con respecto a x, $f''(x)$, la cual es la derivada de $f'(x)$, proporciona la tasa instantánea de variación de $f'(x)$ respecto a x. Además, si (x, y) es cualquier punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx}$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (x, y). Por tanto, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es la tasa de variación de la pendiente de la recta tangente con respecto a x en el punto (x, y).

EJEMPLO 4 Sea $m(x)$ la pendiente de la recta tangente a la curva

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

en el punto (x, y). Determine la tasa instantánea de variación de $m(x)$ con respecto a x en el punto $(2, 2)$.

Solución

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

La tasa instantánea de variación de $m(x)$ con respecto a x está determinada por $m'(x)$ o, equivalentemente, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} \\ &= 6x - 4 \end{aligned}$$

En el punto $(2, 2)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8$. ◀

EJERCICIOS 2.6

1. Sea $A(x)$ centímetros cuadrados el área de un cuadrado cuyos lados miden x centímetros, medidos con cuatro cifras significativas. En la calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $A(x)$ con respecto a x cuando x varía **(a)** de 4.000 a 4.600; **(b)** de 4.000 a 4.300; **(c)** de 4.000 a 4.100; **(d)** de 4.000 a 4.050. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $A(x)$ con respecto a x cuando $x = 4.000$?

2. El largo de un rectángulo mide 4 pulg más que su ancho, y las 4 pulg de diferencia se mantienen conforme el rectángulo aumenta de tamaño. Sea $A(w)$ pulgadas cuadradas el área del rectángulo cuyo ancho es de w pulgadas, medido con cuatro cifras significativas. En la calculadora obtenga la tasa promedio de variación de $A(w)$ con respecto a w cuando w varía **(a)** de 3.000 a 3.200; **(b)** de 3.000 a 3.100; **(c)** de 3.000 a 3.010; **(d)** de 3.000 a 3.001. **(e)** ¿Cuál es la tasa instantánea de variación de $A(w)$ con respecto a w cuando $w = 3.000$?

3. La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo con la fórmula $R = kT^4$, donde R es la medida de la tasa de emisión de energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Determine **(a)** la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T se incrementa de 200 a 300; **(b)** la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$.

4. Suponga que un cilindro circular recto tiene una altura constante de 10.00 pulg. Sea V pulgadas cúbicas el volumen del cilindro circular recto, y r pulgadas el radio de su base. Determine la tasa promedio de variación de V con respecto a r cuando r varía de **(a)** de 5.00 a 5.40; **(b)** de 5.00 a 5.10; **(c)** de 5.00 a 5.01. **(d)** Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a r cuando $r = 5.00$.

5. Sea r pulgadas el radio de un plato metálico circular de área $A(r)$ pulgadas cuadradas y circunferencia de $C(r)$ pulgadas. Si el calor expande el plato, determine **(a)** la tasa instantánea de variación de $A(r)$ con respecto a r, y **(b)** la tasa instantánea de variación de $C(r)$ con respecto a r. **(c)** Compare las respuestas de los incisos (a) y (b) y explique en cuánto difieren estas tasas.

6. Un sólido consiste de un cilindro circular recto y una semiesfera en cada extremo, y la longitud del cilindro es el doble de su radio. Sean r unidades el radio del cilindro y de las semiesferas y $V(r)$ unidades cúbicas el volumen del sólido. Determine la tasa instantánea de variación de $V(r)$ con respecto a r.

7. Sean x la longitud total del sólido del ejercicio 6, y $V(x)$ unidades cúbicas el volumen del sólido en términos de x. Determine la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x.

8. La *ley de Boyle* para la expansión de un gas es $PV = C$, donde P unidades de fuerza por unidad cuadrada de área es la presión, V unidades cúbicas es el volumen del gas y C es una constante. **(a)** Muestre que V decrece a un tasa proporcional al inverso del cuadrado de P. **(b)** Determine la tasa instantánea de variación de V con respecto a P cuando $P = 4$ y $V = 8$.

9. La temperatura de una persona es $f(t)$ grados Fahrenheit t días después de adquirir una enfermedad que dura 10 días, donde

$$f(t) = 98.6 + 1.2t - 0.12t^2 \qquad 0 \le t \le 10$$

(a) Determine la tasa de variación de $f(t)$ con respecto a t cuando $0 < t < 10$. ¿Cuál es la temperatura de la persona y la tasa de variación de la temperatura cuando la persona ha estado enferma por **(b)** 3 días, y **(c)** 8 días? **(d)** Trace la gráfica de f, estime cuando la temperatura es un máximo así como la temperatura máxima.

10. Suponga que un tumor del cuerpo de una persona tiene forma esférica. Determine la tasa de variación del volumen del tumor con respecto a su radio cuando éste mide **(a)** 0.5 cm, y **(b)** 1 cm.

11. Una bacteria tiene forma esférica. Determine la tasa de variación del volumen de la bacteria con respecto al radio cuando éste mide **(a)** 1.5 μm (micras), y **(b)** 2 μm.

12. Para el tumor del ejercicio 10, determine la tasa de variación del área de la superficie del tumor con respecto al radio cuando éste mide **(a)** 0.5 cm, y **(b)** 1 cm.

13. Para la bacteria del ejercicio 11, determine la tasa de variación del área de la superficie de la bacteria con respecto al radio cuando éste mide **(a)** 1.5 μm (micras), y **(b)** 2 μm.

14. Se vierte arena en un montículo de forma cónica de modo que la altura de éste es el doble de su radio. Determine la tasa de variación del volumen del montículo con respecto al radio cuando la altura de éste es **(a)** 4 m, y **(b)** 8 m.

15. Una masa de aire frío se aproxima a un campus universitario de modo que si la temperatura es $T(t)$ grados Fahrenheit t horas después de la media noche, entonces

$$T(t) = 0.1(400 - 40t + t^2) \qquad 0 \leq t \leq 12$$

(a) Determine la tasa promedio de variación de $T(t)$ con respecto a t entre 5 a.m. y 6 a.m. **(b)** Determine la tasa instantánea de variación de $T(t)$ con respecto a t a las 5 a.m.

16. Se estimó que un trabajador en una tienda donde se fabrican marcos para pinturas puede pintar y marcos x horas después de comenzar a trabajar a las 8 a.m., donde

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \leq x \leq 4$$

(a) Determine la tasa a la que el trabajador está pintando a las 10 a.m. **(b)** Determine el número de marcos que el trabajador pintará entre las 10 y las 11 a.m.

17. Se está extrayendo el agua de una piscina y el volumen del agua, después de t minutos de iniciada la extracción, es $V(t)$ litros, donde $V(t) = 250(1600 - 80t + t^2)$. **(a)** Determine la tasa promedio de la salida del agua de la piscina durante los 5 primeros minutos, y **(b)** ¿qué tan rápido sale el agua de la piscina 5 minutos después de iniciada la extracción?

18. Se lanza una piedra a un charco, generándose ondas circulares concéntricas. Determine la tasa de variación del área de la superficie afectada cuando su radio es **(a)** 4 cm, y **(b)** 7 cm.

19. El número de dólares del costo total de fabricación de x relojes en cierta fábrica está dado por $C(x) = 1500 + 3x + x^2$. Determine **(a)** la función de costo marginal; **(b)** el costo marginal cuando $x = 40$; **(c)** el costo real de fabricación del reloj 41.

20. El ingreso total recibido por la venta de x escritorios es $R(x)$ dólares, donde $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Determine **(a)** la función de ingreso marginal; **(b)** el ingreso marginal cuando $x = 30$; **(c)** el ingreso real por la venta del escritorio 31.

21. Si $R(x)$ dólares es el ingreso total recibido por la venta de x equipos de televisión, donde $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$, determine **(a)** la función de ingreso marginal; **(b)** el ingreso marginal cuando $x = 20$; **(c)** el ingreso real por la venta del equipo de televisión 21.

22. Si $C(x)$ dólares es el costo total por fabricar x pisapapeles, y

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$$

determine **(a)** la función de costo marginal; **(b)** el costo marginal cuando $x = 10$; **(c)** el costo real por la fabricación del onceavo pisapapeles.

*En los ejercicios 23 a 25, se utiliza el concepto de tasa relativa definido como sigue: si $y = f(x)$, la **tasa relativa de variación** de y con respecto a x en x_1 está determinada por $\frac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ o, equivalentemente, $\frac{dy/dx}{y}$ y evaluada en $x = x_1$.*

23. Las utilidades anuales brutas de una compañía t años después del 1o. de enero de 1994 es p millones de dólares, donde $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Determine **(a)** la tasa a la que las utilidades brutas crecieron el 1o. de enero de 1996; **(b)** la tasa relativa de crecimiento de las utilidades brutas el 1o. de enero de 1996 con aproximación del 0.1 %; **(c)** la tasa a la que las utilidades brutas crecerán el 1o. de enero de 2000; **(d)** la tasa relativa de crecimiento prevista de las utilidades brutas el 1o. de enero de 2000 con aproximación del 0.1 %.

24. Cierta compañía inició sus operaciones el 1o. de abril de 1993. Las utilidades anuales brutas de la compañía después de t años de operación son p dólares, donde $p = 50\,000 + 18\,000t - 600t^2$. Determine **(a)** la tasa a la que crecieron las utilidades brutas el 1o. de abril de 1995; **(b)** la tasa relativa de crecimiento de las utilidades brutas el 1o. de abril de 1995 con aproximación del 0.1 %; **(c)** la tasa a la que crecerán las utilidades brutas el 1o. de abril de 2003; **(d)** la tasa relativa de crecimiento prevista de las utilidades brutas el 1o. de abril de 2003 con aproximación del 0.1 %.

25. Suponga que el número de personas de la población de cierta ciudad t años después del 1o. de enero de 1995 se espera que sea $40t^2 + 200t + 10\,000$. Determine **(a)** la tasa a la que se espera crezca la población el 1o. de enero de 2004; **(b)** la tasa relativa de crecimiento esperada de la población el 1o. de enero de 2004 con aproximación del 0.1 %; **(c)** la tasa a la que la población se espera que crezca el 1o. de enero de 2010; **(d)** la tasa relativa de crecimiento prevista de la población el 1o. de enero de 2010 con aproximación del 0.1 %.

26. Sea r el recíproco de un número n. Determine la tasa instantánea de variación de r con respecto a n y la tasa relativa de variación de r por unidad de variación de n cuando n es igual a **(a)** 4, y **(b)** 10.

27. Las utilidades de una tienda que vende al menudeo son $100y$ dólares cuando se gastan diariamente x dólares en publicidad y $y = 2500 + 36x - 0.2x^2$. Utilice la deri-

vada para determinar si sería ventajoso que se incrementase el presupuesto para publicidad si éste es de **(a)** \$60, y **(b)** \$300. **(c)** ¿Cuál es el valor máximo para x bajo el cual es ventajoso incrementar el presupuesto de publicidad?

28. La ecuación de oferta para cierto tipo de playeras es $x = 3p^2 + 2p$, donde p dólares es el precio rebajado por playera cuando se ofrecen $1000x$. **(a)** Determine la tasa promedio de variación de la oferta para una variación de \$1 en el precio rebajado cuando éste aumenta de \$10 a \$11. **(b)** Determine la tasa instantánea (o marginal) de variación para una variación de \$1 en el precio rebajado cuando ese precio es de \$10.

29. Calcule la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica de $y = x^4 + x^3 - 3x^2$ donde la tasa de variación de la pendiente es cero.

30. Determine la tasa instantánea de variación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ en el punto $(3, -2)$.

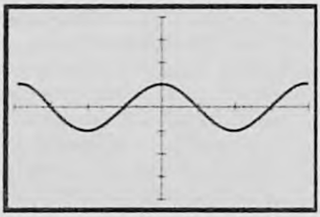
31. Para el derrame de petróleo del ejercicio 53 de la sección 1.8 y del ejercicio 31 de la sección 2.2, calcule la tasa a la que el radio de la abertura está variando a los **(a)** 0.4 min; **(b)** 2 min; **(c)** 3.2 min.

32. Demuestre que para cualquier función lineal f, la tasa promedio de variación de $f(x)$ cuando x varía de x_1 a $x_1 + k$ es la misma que la tasa instantánea de variación de $f(x)$ en x_1.

33. Demuestre que en cualquier instante **(a)** la razón de la tasa de variación del área de un círculo a la tasa de variación del radio es igual a la longitud de la circunferencia, y **(b)** la razón de la tasa de variación del volumen de una esfera a la tasa de variación del radio es igual al área de la superficie de la esfera.

2.7 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la sección 1.10 se demostró que las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios. En esta sección se demostrará que también son diferenciables en sus dominios. Después se emplearán estos hechos para dibujar de manera formal sus gráficas, las cuales se obtuvieron en los cursos previos al de Cálculo aplicando sólo consideraciones intuitivas.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

NDER(sen x, x)

FIGURA 1

Antes de calcular la derivada de la función seno, trace la gráfica de NDER(sen x, x) en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$, la cual se muestra en la figura 1. Puesto que esta gráfica se parece a la gráfica de la función coseno, con la que se familiarizó en los cursos previos al de Cálculo, puede sospecharse que la derivada de la función seno es la función coseno. A continuación se confirmará esta sospecha analíticamente al aplicar la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \tag{1}$$

así como los teoremas 1.10.2 y 1.10.5.

Sea f la función seno, de modo que

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

De la definición de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Se emplea la fórmula (1) para $\operatorname{sen}(x + \Delta x)$, por lo que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos(\Delta x) + \cos x \operatorname{sen}(\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

De los teoremas 1.10.5 y 1.10.2 se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \qquad (3)$$

Al sustituir de estas ecuaciones en (2) se obtiene

$$f'(x) = -0 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot 1$$
$$= \cos x$$

De este modo, se ha demostrado el teorema siguiente.

2.7.1 Teorema Derivada de la función seno

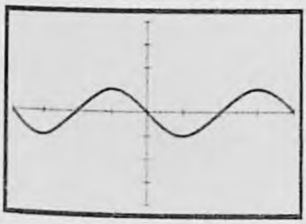
$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$

▶ ***EJEMPLO 1*** Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

Solución Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$f'(x) = x^2 D_x(\operatorname{sen} x) + D_x(x^2)\operatorname{sen} x$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ ◀



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

NDER($\cos x$, x)

FIGURA 2

Ahora está preparado para obtener la derivada de la función coseno, pero antes se trazará la gráfica de NDER($\cos x$, x) en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$, la cual se muestra en la figura 2. La gráfica se parece a la gráfica de la función seno reflejada con respecto al eje x, lo que sugiere que la derivada de la función coseno puede ser la negativa de la función seno. Para confirmar esta sospecha analíticamente, se procede como con la función seno. En este caso se aplicará la identidad

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (4)$$

Si g es la función coseno, entonces

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Se emplea la fórmula (4) para $\cos(x + \Delta x)$, de donde se tiene

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Si se sustituye de las ecuaciones (3) en (5) se obtiene

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\
&= -\operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

2.7.2 Teorema Derivada de la función coseno

$D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

Observe el signo menos antes de sen x para la derivada de cos x; esto es, la derivada de cos x es el negativo de sen x, mientras que la derivada de sen x es cos x.

EJEMPLO 2

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}$$

Solución

Al aplicar la regla del cociente se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 - 2\cos x)D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\
&= \frac{(1 - 2\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 3

Calcule

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3)$$

Solución

$$\frac{d}{dx}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) = 2\cos x - 3\operatorname{sen} x - 3x^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) = -2\operatorname{sen} x - 3\cos x - 6x$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \operatorname{sen} x + 3\cos x - x^3) = -2\cos x + 3\operatorname{sen} x - 6$$

Las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se obtiene de las identidades trigonométricas que contienen al seno y coseno, así como las derivadas de seno y coseno y los teoremas de diferenciación. Para la derivada de la función tangente se aplican las identidades

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

2.7.3 Teorema Derivada de la función tangente

$D_x(\tan x) = \sec^2 x$

Demostración

$$\begin{aligned}
D_x(\tan x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

■

2.7.4 Teorema Derivada de la función cotangente

$D_x(\cot x) = -\csc^2 x$

La demostración de este teorema, análoga a la del teorema 2.7.3, se deja como ejercicio (vea el ejercicio 1). En la demostración utilizará las identidades

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

2.7.5 Teorema Derivada de la función secante

$D_x(\sec x) = \sec x \tan x$

Demostración

$$\begin{aligned}
D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Calcule

$$\frac{d}{dx}(\tan x \sec x)$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x \sec x) &= \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\tan x) \cdot \sec x \\ &= \tan x(\sec x \tan x) + \sec^2 x(\sec x) \\ &= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x\end{aligned}$$

2.7.6 Teorema Derivada de la función cosecante

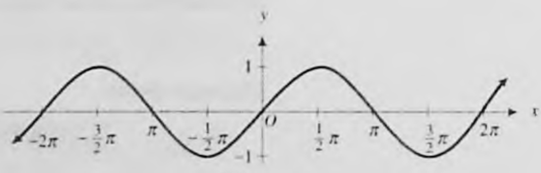
$$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$$

La demostración de este teorema también se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 2).

Como se dijo al principio de esta sección, ahora se mostrará cómo pueden dibujarse las gráficas de las funciones trigonométricas aplicando la continuidad y la diferenciabilidad de estas funciones. Primero se tratarán las gráficas de las funciones seno y coseno, cuyos dominios son el conjunto de los números reales y sus contradominios son el intervalo $[-1, 1]$. Sean

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad f'(x) = \cos x$$

Para determinar dónde tiene rectas tangentes horizontales la gráfica, se considera $f'(x) = 0$, de donde se obtiene que $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. En estos valores de x, sen x es igual a $+1$ o -1, y estos son los valores más grande y más pequeño que sen x puede tomar. La gráfica intersecta al eje x en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en los puntos en los que $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero. Además, cuando k es un número entero par, $f'(k\pi) = 1$, y cuando k es un número entero impar $f'(k\pi) = -1$. Así, en los puntos de intersección de la gráfica con el eje x la pendiente de la recta tangente es 1 o -1. A partir de esta información se dibuja la gráfica de la función seno la cual se muestra en la figura 3.



$f(x) = \operatorname{sen} x$

FIGURA 3

Para la gráfica de la función coseno se utiliza la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

Por lo que la gráfica del coseno se obtiene a partir de la gráfica del seno al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la derecha al eje y. Vea la figura 4.

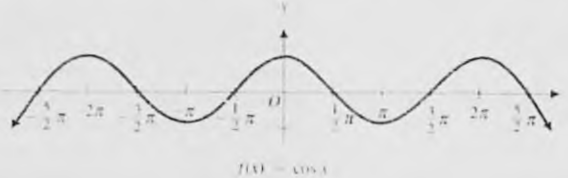


FIGURA 4

EJEMPLO 5 Obtenga una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función coseno en el punto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Solución

Si $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. Por lo que $f'(\frac{3}{2}\pi) = -\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi$. Como $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1$, $f'(\frac{3}{2}\pi) = 1$. De la forma punto-pendiente para la ecuación de la recta tangente que tiene pendiente 1 y que pasa por el punto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
y - 0 &= 1(x - \tfrac{3}{2}\pi) \\
y &= x - \tfrac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

Ahora se considerará la gráfica de la función tangente. Debido a que

$$\tan(-x) = -\tan x$$

la gráfica es simétrica con respecto al origen. Además,

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

por lo que la tangente es periódica con periodo π. La función tangente es continua en cualquier número de su dominio, el cual es el conjunto de todos los números reales excepto los puntos de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. El contradominio de esta función es el conjunto de todos los números reales. Si k es cualquier número entero, entonces $\tan k\pi = 0$. Por tanto, la gráfica intersecta al eje x en los puntos de la forma $(k\pi, 0)$. Sean

$$f(x) = \tan x \quad \text{y} \quad f'(x) = \sec^2 x$$

Como $f'(k\pi) = \sec^2 k\pi$ y $\sec^2 k\pi = 1$ para cualquier número entero k, se deduce que donde la gráfica intersecta al eje x, la pendiente de la recta tangente es 1. Si se considera $f'(x) = 0$, entonces $\sec^2 x = 0$. Puesto que $\sec^2 x \geq 1$ para toda x, se concluye que la gráfica no tiene rectas tangentes horizontales.

Considere el intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ en el que la función tangente está definida en cualquier número.

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x = 1$ y $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = 0$, donde $\cos x$ tiende a 0 a través de valores positivos, entonces

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$$

Tabla 1

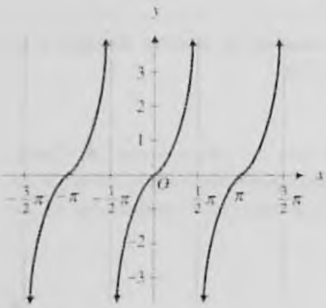
x	$\tan x$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1.73$

Por tanto, la recta $x = \frac{1}{2}\pi$ es una asíntota vertical de la gráfica. La tabla 1 muestra algunos valores de x del intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ y los valores correspondientes de $\tan x$. Al localizar los puntos cuyas coordenadas son los pares de números $(x, \tan x)$, se obtiene la porción de la gráfica para x en $[0, \frac{1}{2}\pi)$. Debido a la simetría con respecto al origen, se obtiene la porción de la gráfica para x en $(-\frac{1}{2}\pi, 0]$. Como el periodo de la función tangente es π, se completa la gráfica de $\tan x$, como se muestra en la figura 5.

La gráfica de la función cotangente se puede obtener a partir de la gráfica de la tangente empleando la identidad

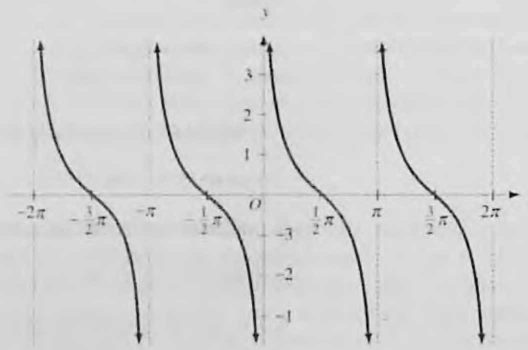
$$\cot x = -\tan(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

De esta identidad se deduce que la gráfica de la cotangente se obtiene de la gráfica de la tangente, al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la derecha al eje y después considerar la reflexión de la gráfica con respecto al eje x. La gráfica de la función cotangente se presenta en la figura 6.



$f(x) = \tan x$

FIGURA 5



$f(x) = \cot x$

FIGURA 6

Como

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

la función secante es periódica con periodo 2π. El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales excepto aquéllos de la forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, donde k es cualquier número entero. El contradominio de esta función es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La función es continua en todo número de su dominio. La gráfica no intersecta al eje x porque $\sec x$ nunca toma el valor cero.

Se utilizará la derivada para determinar si la gráfica tiene alguna recta tangente horizontal. Sean

$$f(x) = \sec x \quad \text{y} \quad f'(x) = \sec x \tan x$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se tiene que $\sec x \tan x = 0$. Como $\sec x \neq 0$, entonces $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 0$, lo que ocurre cuando $x = k\pi$, donde k es cualquier número entero.

Primero se obtendrá la gráfica para x en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Se tienen rectas tangentes horizontales en $x = 0$ y $x = \pi$. Además, como

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to -\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

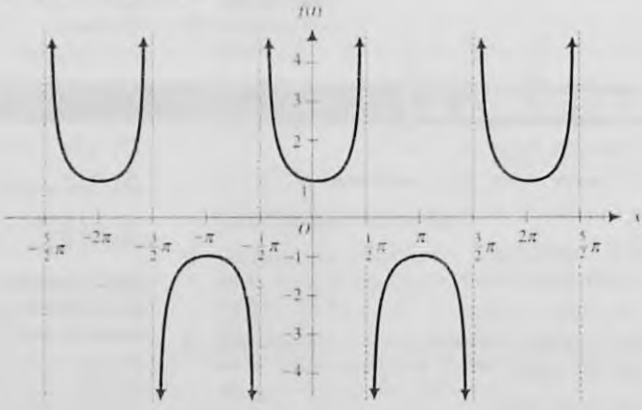
$$\lim_{x \to \pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3\pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to 3\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

entonces las rectas $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$ y $x = \frac{3}{2}\pi$ son asíntotas verticales de la gráfica.

Con la información anterior y localizando algunos puntos se dibuja la gráfica de la función secante para x en $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \cup (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Debido a que el periodo de esta función es 2π, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 7.

De la identidad

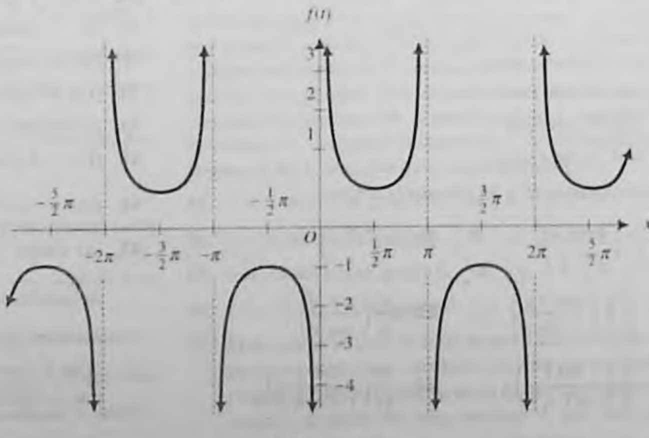
$$\csc x = \sec(x - \tfrac{1}{2}\pi)$$



$f(x) = \sec x$

FIGURA 7

se obtiene la gráfica de la función cosecante a partir de la gráfica de la secante al trasladar $\frac{1}{2}\pi$ unidades a la izquierda al eje y. La gráfica de la función cosecante se muestra en la figura 8.



$f(x) = \csc x$

FIGURA 8

EJEMPLO 6 Un péndulo de 10 cm de longitud ha oscilado de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta vertical. Si $h(\theta)$ centímetros es la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja, determine la tasa instantánea de variación de $h(\theta)$ con respecto a θ cuando $\theta = \frac{1}{6}\pi$.

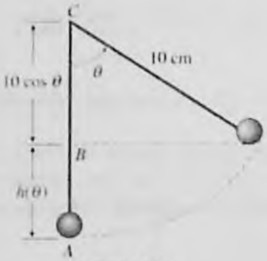


FIGURA 9

Solución

Refiérase a la figura 9. Como $h(\theta) = |\overline{AC}| - |\overline{BC}|$, se tiene

$$\begin{aligned} h(\theta) &= 10 - 10 \cos \theta \\ h'(\theta) &= -10(-\text{sen}\, \theta) \\ &= 10 \,\text{sen}\, \theta \end{aligned}$$

Así, $h'(\frac{1}{6}\pi) = 10 \,\text{sen}\, \frac{1}{6}\pi$, esto es, $h'(\frac{1}{6}\pi) = 5$.

<u>**Conclusión:**</u> Cuando $\theta = \frac{1}{6}\pi$ la tasa de variación instantánea de $h(\theta)$ con respecto a θ es 5 cm/rad. ◀

EJERCICIOS 2.7

1. Demuestre: $D_x(\cot x) = -\csc^2 x$.
2. Demuestre: $D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$.

En los ejercicios 3 a 18, calcule la derivada de la función.

3. $f(x) = 3 \,\text{sen}\, x$
4. $g(x) = \text{sen}\, x + \cos x$
5. $g(x) = \tan x + \cot x$
6. $f(x) = 4 \sec x - 2 \csc x$
7. $f(t) = 2t \cos t$
8. $f(x) = 4x^2 \cos x$
9. $g(x) = x \,\text{sen}\, x + \cos x$
10. $g(y) = 3 \,\text{sen}\, y - y \cos y$
11. $h(x) = 4 \,\text{sen}\, x \cos x$
12. $f(x) = x^2 \,\text{sen}\, x + 2x \cos x$
13. $f(x) = x^2 \cos x - 2x \,\text{sen}\, x - 2 \cos x$
14. $h(y) = y^3 - y^2 \cos y + 2y \,\text{sen}\, y + 2 \cos y$
15. $f(x) = 3 \sec x \tan x$
16. $f(t) = \text{sen}\, t \tan t$
17. $f(y) = \cos y \cot y$
18. $h(x) = \cot x \csc x$

En los ejercicios 19 a 30, obtenga la derivada.

19. $D_z\left(\dfrac{2 \cos z}{z + 1}\right)$
20. $D_t\left(\dfrac{\text{sen}\, t}{t}\right)$
21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \cos x}\right)$
22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x + 4}{\cos x}\right)$
23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\tan t}{\cos t - 4}\right)$
24. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\cot y}{1 - \text{sen}\, y}\right)$
25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1 + \text{sen}\, y}{1 - \text{sen}\, y}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{sen}\, x - 1}{\cos x + 1}\right)$
27. $D_x[(x - \text{sen}\, x)(x + \cos x)]$
28. $D_z[(z^2 + \cos z)(2z - \text{sen}\, z)]$
29. $D_t\left(\dfrac{2 \csc t - 1}{\csc t + 2}\right)$
30. $D_y\left(\dfrac{\tan y + 1}{\tan y - 1}\right)$

En los ejercicios 31 a 42, calcule NDER($f(x)$, a) *en la graficadora. Después confirme su respuesta analíticamente obteniendo el valor exacto de $f'(a)$.*

31. $f(x) = x \cos x;\ a = 0$
32. $f(x) = x \,\text{sen}\, x;\ a = \frac{3}{2}\pi$
33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x};\ a = \frac{1}{2}\pi$
34. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2};\ a = \pi$
35. $f(x) = x^2 \tan x;\ a = \pi$
36. $f(x) = x^2 \cos x - \text{sen}\, x;\ a = 0$
37. $f(x) = \text{sen}\, x(\cos x - 1);\ a = \pi$
38. $f(x) = (\cos x + 1)(x \,\text{sen}\, x - 1);\ a = \frac{1}{2}\pi$
39. $f(x) = x \cos x + x \,\text{sen}\, x;\ a = \frac{1}{4}\pi$
40. $f(x) = \tan x + \sec x;\ a = \frac{1}{6}\pi$
41. $f(x) = 2 \cot x - \csc x;\ a = \frac{2}{3}\pi$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\cot x - 1};\ a = \frac{1}{4}\pi$
43. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen}\, \frac{1}{3}\pi}{h}$ cuando h es igual a 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, y cuando h es igual a −1, −0.5, −0.1, −0.01, −0.001 ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? (b) Determine $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \text{sen}\, \frac{1}{3}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

44. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos n \frac{5}{6}\pi}{h}$ cuando h es igual a 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001, y cuando h es igual a −1, −0.5, −0.1, −0.01, −0.001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? (b) Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

45. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan \frac{1}{4}\pi}{h}$ cuando h es igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, y cuando h es igual a −0.1, −0.01, −0.001, −0.0001, −0.00001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? (b) Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan \frac{1}{4}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

46. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec \frac{1}{6}\pi}{h}$ cuando h es igual a 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, y cuando h es igual a −0.1, −0.01, −0.001, −0.0001, −0.00001. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme h tiende a 0? (b) Determine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec \frac{1}{6}\pi}{h}$ interpretándolo como una derivada.

47. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cos x - \cos \frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{19}{120}\pi$, $\frac{33}{200}\pi$, $\frac{199}{1200}\pi$, $\frac{333}{2000}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{11}{60}\pi$, $\frac{7}{40}\pi$, $\frac{101}{600}\pi$, $\frac{67}{400}\pi$, $\frac{1001}{6000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{1}{6}\pi$? (b) Determine $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos x - \cos \frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

48. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ cuando x es igual a $-\frac{3}{10}\pi$, $\frac{19}{60}\pi$, $\frac{33}{100}\pi$, $\frac{199}{600}\pi$, $\frac{333}{1000}\pi$, y cuando x es igual a $-\frac{11}{30}\pi$, $\frac{7}{20}\pi$, $\frac{101}{300}\pi$, $\frac{67}{200}\pi$, $\frac{1001}{3000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{1}{3}\pi$? (b) Determine $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

49. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\csc x - \csc \frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$, $\frac{33}{50}\pi$, $\frac{199}{300}\pi$, $\frac{333}{500}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{101}{150}\pi$, $\frac{67}{100}\pi$, $\frac{1001}{1500}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{2}{3}\pi$? (b) Determine $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\csc x - \csc \frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

50. (a) Utilice la calculadora para tabular con cuatro cifras decimales los valores de $\dfrac{\cot x - \cot \frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ cuando x es igual a $\frac{29}{40}\pi$, $\frac{59}{80}\pi$, $\frac{299}{400}\pi$, $\frac{599}{800}\pi$, $\frac{2999}{4000}\pi$, y cuando x es igual a $\frac{31}{40}\pi$, $\frac{61}{80}\pi$, $\frac{301}{400}\pi$, $\frac{601}{800}\pi$, $\frac{3001}{4000}\pi$. ¿A qué valor parece que se aproxima el cociente conforme x tiende a $\frac{3}{4}\pi$? (b) Determine $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \dfrac{\cot x - \cot \frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ interpretándolo como una derivada.

51. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función seno en el punto donde (a) $x = 0$, (b) $x = \frac{1}{3}\pi$, (c) $x = \pi$.

52. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función coseno en el punto donde (a) $x = \frac{1}{2}\pi$, (b) $x = -\frac{1}{2}\pi$, (c) $x = \frac{1}{6}\pi$.

53. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función tangente en el punto donde (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{1}{4}\pi$; (c) $x = -\frac{1}{4}\pi$.

54. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función secante en el punto donde (a) $x = \frac{1}{4}\pi$; (b) $x = -\frac{1}{4}\pi$; (c) $x = \frac{3}{4}\pi$.

En los ejercicios 55 a 58, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación, donde s centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. (a) ¿Cuáles son la velocidad instantánea y la aceleración instantánea de la partícula a los t_1 segundos? (b). Determine la velocidad instantánea y la aceleración instantánea a los t_1 segundos para cada valor de t_1.

55. $s = 4 \operatorname{sen} t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, y π

56. $s = 6 \cos t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, y π

57. $s = -3 \cos t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ y π

58. $s = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$; t_1 es igual a 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ y π

59. Si un cuerpo de peso W libras es arrastrado a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud F libras y dirigida en un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces F está dada por la ecuación

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción*. Si $k = 0.5$, determine la tasa instantánea de variación de F con respecto a θ cuando **(a)** $\theta = \frac{1}{4}\pi$; **(b)** $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

60. Se dispara un proyectil desde un cañón que tiene un ángulo de elevación de $\frac{1}{2}\alpha$ radianes y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si R pies es el alcance del proyectil, entonces

$$R = \frac{{v_0}^2}{g}\operatorname{sen}\alpha \qquad 0 \le \alpha \le \pi$$

donde g pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad. **(a)** Si $v_0 = 480$, determine la tasa de variación de R con respecto a α cuando $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (esto es, el ángulo de elevación tiene una medida en radianes de $\frac{1}{4}\pi$). Considere $g = 32$. **(b)** Determine los valores de α para los que $D_\alpha R > 0$.

61. Si k es un número entero positivo, demuestre por inducción matemática que

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k \\ \cos x & \text{si } n = 4k + 1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

62. Obtenga una fórmula semejante a la del ejercicio 61 para $D_x^n(\cos x)$.

2.8 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA Y REGLA DE LA CADENA

Para calcular la derivada de una función compuesta, se aplica la *regla de la cadena*, uno de los teoremas más importantes en Cálculo. Antes de establecer este teorema, se presentarán tres ejemplos ilustrativos que muestran cómo pueden emplearse los teoremas anteriores para determinar las derivadas de algunas funciones compuestas particulares. En cada ejemplo ilustrativo, se escribe la expresión final de la derivada en cierta forma que podrá parecerle inusual pero que puede ser fácilmente asociada con la regla de la cadena.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si

$$F(x) = (4x^3 + 1)^2$$

se puede obtener $F'(x)$ al aplicar la regla del producto como sigue:

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x^3 + 1)(4x^3 + 1) \\ F'(x) &= (4x^3 + 1)\,D_x(4x^3 + 1) + (4x^3 + 1)\,D_x(4x^3 + 1) \\ &= (4x^3 + 1)(12x^2) + (4x^3 + 1)(12x^2) \end{aligned}$$

Así,

$$F'(x) = 2(4x^3 + 1)(12x^2) \tag{1}$$

Observe que F es la función compuesta $f \circ g$, donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x^3 + 1$; esto es,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^3 + 1) \\ &= (4x^3 + 1)^2 \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 12x^2$, se tiene de (1)

$$F'(x) = f'(g(x))\,g'(x) \tag{2}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si

$$G(x) = \text{sen } 2x$$

para determinar $G'(x)$ se puede emplear la regla del producto con las identidades trigonométricas

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x \quad \text{y} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Se tiene

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \text{ sen } x \cos x \\ G'(x) &= (2 \text{ sen } x)\, D_x(\cos x) + (2 \cos x)\, D_x(\text{sen } x) \\ &= (2 \text{ sen } x)(-\text{sen } x) + (2 \cos x)(\cos x) \\ &= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$G'(x) = (\cos 2x)(2) \tag{3}$$

Si se consideran $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 2x$, entonces G es la función compuesta $f \circ g$; esto es,

$$\begin{aligned} G(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x) \\ &= \text{sen } 2x \end{aligned}$$

Debido a que $f'(x) = \cos x$ y $g'(x) = 2$, se puede escribir (3) en la forma

$$G'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Si

$$H(x) = (\cos x)^{-1}$$

se puede calcular $H'(x)$ usando primero la identidad $(\cos x)^{-1} = \sec x$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sec x \\ H'(x) &= \sec x \tan x \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} \\ &= (-1)\, \frac{1}{\cos^2 x}\, (-\text{sen } x) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$H'(x) = [-1(\cos x)^{-2}](-\text{sen } x) \tag{5}$$

Con $f(x) = x^{-1}$ y $g(x) = \cos x$, H es la función compuesta $f \circ g$; esto es,

$$\begin{aligned} H(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\cos x) \\ &= (\cos x)^{-1} \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ y $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, se puede expresar (5) en la forma

$$H'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{6}$$

◀

Observe que los miembros derechos de (2), (4) y (6) se expresan como $f'(g(x))\, g'(x)$, que es exactamente el miembro derecho de la regla de la cadena, la cual se establece en el teorema siguiente.

2.8.1 Teorema Regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x, y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{7}$$

La demostración de la regla de la cadena para todas las funciones diferenciables es sofisticada, por lo que se presenta en la sección suplementaria de esta sección. Una demostración simplificada concerniente a funciones que satisfacen una hipótesis adicional se bosqueja en el ejercicio 57.

A continuación se presentarán ejemplos y ejemplos ilustrativos que le ayudarán a familiarizarse con el enunciado de la regla de la cadena.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Sean

$$f(x) = x^{10} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Entonces la función compuesta $f \circ g$ está definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}\end{aligned}$$

Para aplicar (7) se necesita calcular $f'(g(x))$ y $g'(x)$. Como $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$, así

$$\begin{aligned}f'(g(x)) &= 10[g(x)]^9\\ f'(g(x)) &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9\end{aligned} \tag{8}$$

Además, como $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$,

$$g'(x) = 6x^2 - 10x \tag{9}$$

Por tanto, de (7), (8) y (9) se tiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Sean

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 3$$

Entonces la función compuesta $f \circ g$ está definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= \operatorname{sen}(x^2 + 3)\end{aligned}$$

A fin de aplicar (7), se calcula $f'(g(x))$ y $g'(x)$. Como $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$. En consecuencia,

$$f'(g(x)) = \cos[g(x)]$$
$$f'(g(x)) = \cos(x^2 + 3) \qquad \textbf{(10)}$$

Puesto que $g(x) = x^2 + 3$,

$$g'(x) = 2x \qquad \textbf{(11)}$$

Por tanto, de (7), (10) y (11) se obtiene

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= [\cos(x^2 + 3)](2x)\\ &= 2x\cos(x^2 + 3)\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Suponga que

$$h(x) = \left(\frac{2}{x - 1}\right)^5$$

Para determinar $h'(x)$, sean

$$f(x) = x^5 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Entonces

$$f'(x) = 5x^4 \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

Como $h(x) = f(g(x))$, de la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right) \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x - 1)^6}\end{aligned}$$

◀

Cuando se calculan derivadas por medio de la regla de la cadena, en realidad no se escriben las funciones f y g como se hizo en los ejemplos ilustrativos 4, 5 y 6, pero se deben tener en mente. Por ejemplo, en el ejemplo ilustrativo 6, como $h(x)$ es la quinta potencia de un cociente, cuando se aplica la regla de la cadena primero se utiliza la regla de la potencia y después la regla del cociente. Se puede escribir el cálculo como sigue:

$$\begin{aligned}h(x) &= \left(\frac{2}{x - 1}\right)^5\\ h'(x) &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right)^4 \cdot D_x\left(\frac{2}{x - 1}\right)\\ &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x - 1)^6}\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Determine $f'(x)$ mediante la regla de la cadena si

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solución Se escribe $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ y se aplica la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \\ &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7) \\ &= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right]$$

Solución De la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right] &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right) \\ &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)\frac{(3x-1)(2)-(2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5} \\ &= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5} \end{aligned}$$

Si se utiliza la notación de Leibniz para la derivada, la regla de la cadena puede enunciarse como sigue:

Si y es una función de u, definida por $y = f(u)$ y $\dfrac{dy}{du}$ existe, y si u es una función de x, definida por $u = g(x)$ y $\dfrac{du}{dx}$ existe, entonces y es una función de x y $\dfrac{dy}{dx}$ existe la cual está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{12}$$

Observe de esta ecuación la forma conveniente para recordar la regla de la cadena. El enunciado formal sugiere la "división" simbólica de du en el numerador y denominador del miembro derecho. Sin embargo, recuerde de la sección 2.1 cuando se introdujo la notación de Leibniz $\dfrac{dy}{dx}$, se enfatizó que dy ni dx se les ha dado significado independiente. Por tanto, debe considerarse a (12) como una ecuación que implica una notación especial de diferenciación.

Para escribir la regla de la cadena en otra forma, considere que $u = g(x)$. Entonces

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

Con estas sustituciones (7) se transforma en

$$D_x[f(u)] = f'(u)D_xu$$

Se utilizará esta forma de la regla de la cadena para establecer fórmulas de diferenciación importantes. En particular, se tiene de los teoremas 2.7.1-2.7.6 las fórmulas siguientes que implican las derivadas de las funciones trigonométricas. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$D_x(\operatorname{sen} u) = \cos u\, D_xu \qquad D_x(\cos u) = -\operatorname{sen} u\, D_xu$$
$$D_x(\tan u) = \sec^2 u\, D_xu \qquad D_x(\cot u) = -\csc^2 u\, D_xu$$
$$D_x(\sec u) = \sec u \tan u\, D_xu \qquad D_x(\csc u) = -\csc u \cot u\, D_xu$$

▶ EJEMPLO 3 Calcule $F'(t)$ si

$$F(t) = \tan(3t^2 + 2t)$$

Solución Al utilizar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1)\sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$ ◀

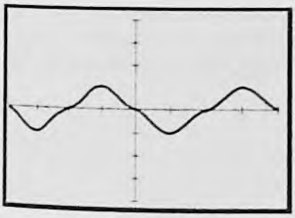
▶ EJEMPLO 4 Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ si

$$y = \operatorname{sen}(\cos x)$$

Solución Al aplicar la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\operatorname{sen} x] \\ &= -\operatorname{sen} x[\cos(\cos x)] \end{aligned}$$ ◀

Por supuesto, los cálculos de las derivadas de los ejemplos anteriores pueden apoyarse gráficamente. Para confirmar la respuesta del ejemplo 4, se trazan las gráficas de la funciones definidas por $f(x) = -\operatorname{sen} x[\cos(\cos x)]$ y NDER(sen(cos x), x) en el rectángulo de inspección de $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$ como se muestra en la figura 1. Las gráficas son idénticas.



$[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = -\operatorname{sen} x\,[\cos(\cos x)]$

y NDER(sen(cos x), x)

FIGURA 1

▶ EJEMPLO 5 Calcule

$$D_x(\sec^4 2x^2)$$

Solución Se empleará dos veces la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x(\sec^4 2x^2) &= 4\sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\ &= 4\sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \tan 2x^2)\, D_x(2x^2)] \\ &= (4\sec^4 2x^2 \tan 2x^2)(4x) \\ &= 16x \sec^4 2x^2 \tan 2x^2 \end{aligned}$$ ◀

EJEMPLO 6 En el ejemplo 3 de la sección 1.3, se tuvo la situación siguiente: en un bosque, un depredador se alimenta de su presa, y la población de depredadores es una función de x, el número de presas en el bosque, el cual es a su vez una función g de t, el número de semanas que han transcurrido desde que terminó la temporada de caza. Estas funciones se expresaron como

$$f(x) = \tfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \text{y} \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \leq t \leq 15$. Determine la tasa a la cual está creciendo la población de depredadores 11 semanas después de que se cerró la temporada de caza. Utilice la regla de la cadena sin expresar $f \circ g$ en términos de t.

Solución La tasa a la cual está creciendo la población de depredadores 11 semanas después de cerrada la temporada de caza está dada por $(f \circ g)'(11)$. Se empleará la regla de la cadena para calcular $(f \circ g)'(t)$. Como

$$f'(x) = \tfrac{1}{24}x - 2 \quad \text{y} \quad g'(t) = 4$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) &= f'(g(t))g'(t)\\ &= [\tfrac{1}{24}(4t + 52) - 2]4\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(11) &= \tfrac{1}{6}(44 + 52) - 8\\ &= 8\end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> Once semanas después de cerrada la temporada de caza, la población de depredadores está creciendo a la tasa de 8 animales por semana. ◀

Ahora se presentará una aplicación de las funciones seno y coseno en el *movimiento armónico simple*. Se dice que un objeto, el cual se mueve sobre una recta, tiene **movimiento armónico simple** si la medida de su aceleración es siempre proporcional a la medida de su desplazamiento a partir de un punto fijo sobre la recta, y su aceleración y desplazamiento tienen sentidos opuestos. Los modelos matemáticos que describen el movimiento armónico simple, vibraciones u oscilaciones, están dados por las funciones

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c) \qquad \textbf{(13)}$$

y

$$f(t) = a \cos b(t - c) \qquad \textbf{(14)}$$

donde $f(t)$ representa el desplazamiento del objeto después de t unidades de tiempo, y a, b y c son constantes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Se mostrará que la función definida por la ecuación (13) describe un movimiento armónico simple. El desplazamiento esta determinado por

$$f(t) = a \operatorname{sen} b(t - c)$$

y la función que proporciona la aceleración es $f''(t)$, la cual se calcula a continuación

$$f'(t) = ab \cos b(t - c) \quad \text{y} \quad f''(t) = -ab^2 \operatorname{sen} b(t - c)$$

Por tanto, $f''(t) = -b^2 f(t)$. Como $-b^2$ es una constante, la aceleración es proporcional al desplazamiento. Además, como $-b^2$ es negativa, la aceleración y el desplazamiento tienen sentido opuesto. En consecuencia, el movimiento es armónico simple. ◀

FIGURA 2

Un ejemplo de movimiento armónico simple se presenta cuando se suspende un cuerpo de un resorte, el cual vibra verticalmente. Sea s centímetros la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central, o de reposo, después de t segundos de tiempo. Vea la figura 2, donde un valor positivo de s indica que el cuerpo está por arriba de su posición central. Si en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se marcan los valores de s para valores específicos de t, y si la fricción no se toma en cuenta, entonces la gráfica resultante tendrá una ecuación de la forma (13) o (14). Las constantes a, b y c están determinadas por el peso del cuerpo y el resorte, así como la forma en que se pone en movimiento al cuerpo. Por ejemplo, cuanto más se tire del cuerpo hacia abajo antes de liberarlo, tanto mayor será a, la *amplitud* del movimiento. Además, cuanto más rígido sea el resorte, tanto más rápido vibrará el cuerpo de modo que el menor valor será el *periodo* del movimiento. Si P es el periodo, entonces $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$. La *frecuencia* de un movimiento armónico simple es el número de vibraciones u oscilaciones, por unidad de tiempo. Si n es la frecuencia del movimiento, entonces $n = \dfrac{1}{P}$.

▶ *EJEMPLO 7* Un cuerpo vibra verticalmente de acuerdo con la ecuación

$$s = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t$$

donde s centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. **(a)** Determine la velocidad y la aceleración del movimiento para cualquier t. **(b)** Muestre que el movimiento es armónico simple. **(c)** determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. **(d)** Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. **(e)** Trace la gráfica de la ecuación del movimiento.

Solución

(a) Si v centímetros por segundo es la velocidad y a centímetros por segundo por segundo es la aceleración, entonces

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 8\left(-\operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi t\right)\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \\ &= -\tfrac{8}{3}\pi \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= -\tfrac{8}{3}\pi\left(\cos \tfrac{1}{3}\pi t\right)\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \\ &= -\tfrac{8}{3}\pi^2 \cos \tfrac{1}{3}\pi t \end{aligned}$$

(b) Del valor de s en la ecuación dada y el valor de a del inciso (a), se observa que

$$a = -\tfrac{1}{9}\pi^2 s$$

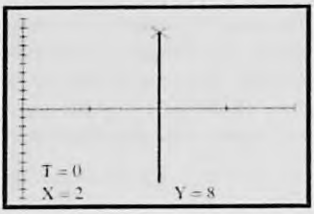
Como a es proporcional a s y de sentido opuesto, entonces el movimiento es armónico simple.

(c) La ecuación dada es el caso especial de (14) donde $a = 8$, $b = \tfrac{1}{3}\pi$ y $c = 0$. La amplitud del movimiento es a, la cual es 8; por tanto, el desplazamiento máximo es 8 cm. Si P es el periodo, $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$; esto es, $P = 6$. Por tanto, se necesitan 6 s para una vibración completa del cuerpo. Como la frecuencia n está dada por $1/P$, $n = \tfrac{1}{6}$. Así, se tiene $\tfrac{1}{6}$ de vibración por segundo.

(d) Para simular el movimiento, suponga que el cuerpo se mueve sobre la recta $x = 2$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$x_1(t) = 2 \quad \text{y} \quad y_1(t) = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t$$

El movimiento se efectúa indefinidamente, sin embargo, se simulará el movimiento para $0 \leq t \leq 12$. En el rectángulo de inspección de [0, 4] por [−10, 10], sean $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 12$ y $t_{\text{step}} = 0.05$. Ahora presione la tecla TRACE (*rastreo*) y después la tecla *flecha a la izquierda* manteniéndola oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 3 muestra la pantalla de la graficadora como se ha indicado. Presione la tecla *flecha a la derecha* y manténgala oprimida para observar que el cuerpo, representado por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta vertical $x = 2$.



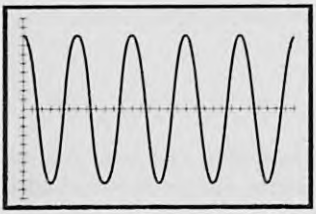
[0, 4] por [−10, 10]

$x_1(t) = 2$, $y_1(t) = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t$

FIGURA 3

Note que inicialmente, cuando $t = 0$, la velocidad v es igual a cero, la aceleración a es negativa y $s = 8$ de modo que el cuerpo está a 8 cm arriba del origen, la posición central. En el primer 1.5 s, la velocidad es negativa pero la rapidez, $|v|$, es creciente. Durante este tiempo, el cuerpo se mueve hacia abajo una distancia de 8 cm a su posición central porque cuando $t = 1.5$, $s = 0$. Observe que cuando $t = 1.5$, $a = 0$, de modo que la aceleración del cuerpo es cero en su posición central. En el siguiente 1.5 s, el movimiento del cuerpo continúa hacia abajo, cuando su rapidez es decreciente hasta después de un total de 3 s, el cuerpo está 8 cm debajo de su posición central. Entonces el cuerpo cambia su dirección y su rapidez es creciente hasta que alcanza su posición central; posteriormente, su rapidez decrece hasta que regresa a su posición inicial después de 6 s. Luego, el cuerpo cambia de dirección y el movimiento hacia arriba y hacia abajo se repite indefinidamente.

(e) La figura 4 muestra la gráfica de la ecuación de movimiento trazada en el rectángulo de inspección de [0, 30] por [−10, 10]. ◀



[0, 30] por [−10, 10]

$s = 8 \cos \tfrac{1}{3}\pi t$

FIGURA 4

En el ejemplo anterior no se consideró la fricción, la cual ocasiona que, eventualmente, el cuerpo alcance el estado de reposo. En la sección 5.4 se discutirá el *movimiento armónico amortiguado* en el que se toma en cuenta la fricción, como una aplicación de la *función exponencial natural*.

EJERCICIOS 2.8

En los ejercicios 1 a 12, calcule la derivada de la función.

1. $f(x) = (2x + 1)^3$
2. $f(x) = (10 - 5x)^4$
3. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
4. $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
5. $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$

6. $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$

7. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$

8. $g(x) = \operatorname{sen} x^2$

9. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 4x$

10. $G(x) = \sec^2 x$

11. $h(t) = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t$

12. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

En los ejercicios 13 a 16, determine la derivada de la función.

13. $\dfrac{d}{dx} (\sec^2 x \tan^2 x)$

14. $\dfrac{d}{dt} (2 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t)$

15. $\dfrac{d}{dt} (\cot^4 t - \csc^4 t)$

16. $\dfrac{d}{dx} [(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$

En los ejercicios 17 a 24, calcule la derivada de la función y apoye su respuesta trazando las gráficas de su respuesta y de la derivada numérica en x en el mismo rectángulo de inspección.

17. $f(x) = \left(\dfrac{x - 7}{x + 2}\right)^2$

18. $f(t) = \left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2$

19. $g(t) = \operatorname{sen}^2 (3t^2 - 1)$

20. $g(x) = \tan^2 x^2$

21. $f(x) = (\tan^2 x - x^2)^3$

22. $G(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^3$

23. $F(x) = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)$

24. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado, y apoye su respuesta trazando la gráfica de la curva y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

25. $y = (x^2 - 1)^2$ en el punto $(2, 9)$

26. $y = 4 \tan 2x$ en el punto $(\frac{1}{8}\pi, 4)$

En los ejercicios 27 a 30, la ecuación describe el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, donde s centímetros es la distancia del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Calcule la velocidad y la aceleración del movimiento para cualquier t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. (d) Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. (e) Trace la gráfica de la ecuación del movimiento.

27. $s = 6 \operatorname{sen} \frac{1}{4} \pi t$

28. $s = 3 \cos \frac{1}{6} \pi t$

29. $s = 4 \cos \pi(2t - \frac{1}{3})$

30. $s = 8 \operatorname{sen} \pi(3t + \frac{1}{2})$

En los ejercicios 31 y 32, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento dada, donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine (a) la velocidad y (b) la aceleración de la partícula a los t segundos, y (c) muestre que el movimiento es armónico simple.

31. $s = b \cos(kt + c)$, donde b, k y c son constantes.

32. $s = A \operatorname{sen} 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$, donde A, B y k son constantes.

En los ejercicios 33 a 36, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad y a pies por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. (a) Determine v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

33. $s = 5 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$

34. $s = \operatorname{sen}(6t - \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(6t + \frac{1}{6}\pi)$

35. $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$

36. $s = 8 \cos^2 6t - 4$

37. **(a)** Para el péndulo del ejemplo 6 de la sección 2.7, muestre que otra ecuación que define $h(\theta)$ es

$$h(\theta) = 20 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

Sugerencia: utilice una identidad trigonométrica. A partir de esta ecuación calcule la tasa instantánea de variación de $h(\theta)$ con respecto a θ cuando **(b)** $\theta = \frac{1}{6}\pi$; **(c)** $\theta = \frac{1}{3}\pi$; **(d)** $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

38. Si K unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo, 10 unidades es la longitud de la hipotenusa, y α es la medida en radianes de un ángulo agudo, entonces $K = 25 \operatorname{sen} 2\alpha$. Determine la tasa instantánea de variación con respecto a α, cuando **(a)** $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; **(b)** $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; **(c)** $\alpha = \frac{1}{3}\pi$.

39. La ley de Dulong establece que si P atmosferas es la presión absoluta de un vapor saturado a una temperatura de T grados Celsius, entonces

$$P = \left(\frac{40 + T}{140}\right)^5 \qquad T > 80$$

Calcule la tasa instantánea de variación de P con respecto a T, cuando **(a)** $T = 100$; **(b)** $P = 32$.

40. Si a los t segundos, q coulombs es la carga en un capacitor e i amperes es la corriente en el capacitor, entonces i es la tasa de variación de q con respecto a t. Suponga que para cierto capacitor

$$q = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Exprese i en términos de t.

41. Se construye un péndulo de torsión al suspender horizontalmente un disco metálico uniforme mediante un alambre desde su centro. Si se desplaza el péndulo y después se impulsa de manera perpendicular a dicho desplazamiento se obtendrá el movimiento armónico angular simple. Suponga que a los t segundos el desplazamiento angular de θ radianes desde la posición inicial está dado por la ecuación

$$\theta = 0.2 \cos \pi(t - 0.5)$$

Determine con aproximación de décimos de radián por segundo, que tan rápido cambia el ángulo a los 3.1 s.

42. Denote la función obtenida como modelo matemático en el ejercicio 28 de la sección 1.3 por V. Determine con aproximación de décimos la tasa instantánea de variación de $V(x)$ con respecto a x cuando **(a)** $x = 0.9$, **(b)** $x = 1.0$, y **(c)** $x = 1.1$.

43. La fuerza electromotriz para un circuito eléctrico con un generador simplificado es $E(t)$ volts a los t segundos, donde $E(t) = 50 \text{ sen } 120\pi t$. Calcule la tasa instantánea de variación de $E(t)$ con respecto a t cuando **(a)** $t = 0.02$ s y **(b)** $t = 0.2$ s.

44. Una onda producida por un sonido simple tiene la ecuación $P(t) = 0.003 \text{ sen } 1\,800pt$, donde $P(t)$ dinas por centímetro cuadrado es la diferencia entre la presión atmosférica y la presión del aire en el tímpano del oído a los t segundos. Determine la tasa instantánea de variación de $P(t)$ con respecto a t cuando t es igual a **(a)** $\frac{1}{9}$ s; **(b)** $\frac{1}{6}$ s; **(c)** $\frac{1}{2}$ s.

45. La ecuación de demanda para un juguete particular es $p^2x = 5\,000$ donde x es el número de juguetes que se venden por mes, cuando p dólares es el precio por juguete. Se espera que en t meses el precio del juguete será p dólares, donde $20p = t^2 + 7t + 100$ y $t \in [0, 6]$. ¿Cuál es la tasa de variación esperada de la demanda después de 5 meses? No exprese x en términos de t, utilice la regla de la cadena.

46. Para el derrame de petróleo y la función A del ejercicio 54 de la sección 1.8 haga lo siguiente: **(a)** Demuestre que A es diferenciable en 2. **(b)** Obtenga $A'(t)$. Determine la tasa a la que el área de la grieta está cambiando a los **(c)** 0.4 min, **(d)** 2 min y **(e)** 3.2 min.

47. Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = f(x^2)$. Calcule **(a)** $f'(x^2)$; **(b)** $g'(x)$.

48. Sean $f(u) = u^2 + 5u + 5$ y $g(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Determine la derivada de $f \circ g$ en dos formas: **(a)** primero calcule $(f \circ g)(x)$ y luego obtenga $(f \circ g)'(x)$, **(b)** utilice la regla de la cadena.

49. Obtenga la fórmula para la derivada de la función coseno empleando la fórmula de la derivada para la función seno, la regla de la cadena y las identidades

$$\cos x = \text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) \quad \text{y} \quad \text{sen } x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

50. Utilice la regla de la cadena para demostrar que **(a)** la derivada de una función par es una función impar, **(b)** la derivada de una función impar es una función par, suponiendo que las derivadas existen.

51. Emplee el resultado del ejercicio 50(*a*) para demostrar que si g es una función par y $g'(x)$ existe y si $h(x) = (f \circ g)(x)$ y f es diferenciable en cualquier número entonces $h'(0) = 0$.

52. Suponga que f y g son funciones tales que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $(f \circ g)(x) = x$. Demuestre que si $g'(x)$ existe, entonces $g'(x) = g(x)$.

53. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0. **(b)** Calcule $f'(x)$. **(c)** Demuestre que f' es discontinua en 0.

54. Si f'' y g'' existen y si $h = f \circ g$, exprese $h''(x)$ en términos de las derivadas de f y g.

55. Discuta el movimiento armónico simple del cuerpo del ejercicio 27, como se hizo en el inciso **(d)** del ejemplo 7.

56. Siga las instrucciones del ejercicio 55 para el movimiento armónico simple del cuerpo descrito por la ecuación del ejercicio 28.

57. Suponga que f y g son dos funciones tales que **(i)** $g'(x_1)$ y $f'(g(x_1))$ existen y **(ii)** para todo $x \neq x_1$ de algún intervalo abierto que contenga a x_1, $g(x) - g(x_1) \neq 0$. Entonces

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{x - x_1}$$

$$= \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

(a) Demuestre que conforme $x \to x_1$, $g(x) \to g(x_1)$ y en consecuencia que $(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$ simplificándose así la demostración de la regla de la cadena bajo la hipótesis adicional (ii). **(b)** Explique por qué la demostración de la regla de la cadena dada en el inciso **(a)** se aplica si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, pero no se aplica si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sgn } x$.

2.9 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA PARA EXPONENTES RACIONALES Y DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

En la sección 2.4 se mostró que la derivada de la **función potencia**, definida por

$$f(x) = x^r \tag{1}$$

está dada por la fórmula siguiente, donde r es un entero positivo o negativo:

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{2}$$

Ahora se demostrará que esta fórmula se cumple cuando r es un número racional, con ciertas estipulaciones cuando $x = 0$.

Primero considere que $x \neq 0$, y $r = 1/q$, donde q es un número entero positivo. Entonces la ecuación (1) se puede escribir como

$$f(x) = x^{1/q} \tag{3}$$

De la definición 2.1.3,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x} \tag{4}$$

A fin de evaluar el límite en (4) se debe racionalizar el numerador. Para lograr esto se emplea la fórmula siguiente:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

Puede considerar esta fórmula de sus cursos anteriores al de Cálculo. Si no, refiérase al suplemento de la sección 1.5 donde se obtuvo como la ecuación (12).

El numerador de la fracción en (4) se racionaliza al aplicar (5) donde $a = (x + \Delta x)^{1/q}$, $b = x^{1/q}$ y $n = q$. De modo que se multiplica el numerador y el denominador por

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)}x^{1/q} + \ldots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Entonces, de (4), $f'(x)$ es igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \tag{6}$$

Ahora, si se aplica (5) al numerador, se obtiene $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$, lo cual es Δx. Así, de (6),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-2)/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}}$$

como hay exactamente q términos en el denominador de la fracción anterior,

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \tag{7}$$

la cual es la fórmula (2) con $r = 1/q$. Con esto se ha completado una etapa crucial de la demostración. A continuación se debe mostrar que la función definida por (3) es diferenciable; además, que su derivada está dada por (7).

Ahora, en (1) con $x \neq 0$, sea $r = p/q$, donde p es cualquier número entero diferente de cero y q es cualquier número entero positivo; esto es, r es cualquier número racional excepto cero. Entonces, (1) se puede escribir como

$$f(x) = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x^{1/q})^p$$

De la regla de la cadena y de la regla de la potencia para números enteros positivos y negativos, se tiene

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q})$$

Al aplicar la fórmula (7) para $D_x(x^{1/q})$ se obtiene

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

Esta fórmula es la misma que (2) con $r = p/q$.

Si $r = 0$ y $x \neq 0$, (1) se transforma en $f(x) = x^0$; esto es, $f(x) = 1$. De modo que $f'(x) = 0$, lo cual puede escribirse como $f(x) = 0 \cdot x^{0-1}$. Por tanto, se cumple (2) si $r = 0$ y $x \neq 0$. En consecuencia, se ha mostrado que la fórmula (2) se cumple cuando r es cualquier número racional y $x \neq 0$.

Ahora bien, 0 está en el dominio de la función potencia f si y sólo si r es un número positivo, porque cuando $r \leq 0$, $f(0)$ no está definido. En consecuencia, se desea determinar para que valores positivos de r, $f'(0)$ estará dado por la fórmula (2). Se deben excluir los valores de r para los cuales $0 < r \leq 1$ porque para estos valores de r, x^{r-1} no es un número real cuando $x = 0$. Entonces, suponga que $r > 1$. Por la definición de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{r-1} \end{aligned}$$

Cuando $r > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{r-1}$ existe y es igual a cero, suponiendo que r es número tal que x^{r-1} está definido en algún intervalo abierto que contiene a 0. Por ejemplo, si $r = \frac{3}{2}$, entonces $x^{r-1} = x^{1/2}$, el cual no está definido en cualquier intervalo abierto que contenga a 0 (ya que $x^{1/2}$ no existe cuando $x < 0$). Sin embargo, si $r = \frac{5}{3}$, $x^{r-1} = x^{2/3}$, el cual está definido en cualquier intervalo abierto que contenga a 0. Por tanto, la fórmula (2) proporciona la derivada de la función potencia cuando $x = 0$, suponiendo que r es un número para el cual x^{r-1} está definido para algún intervalo que contiene a 0. De este modo se ha demostrado el teorema siguiente.

2.9.1 Teorema Regla de diferenciación de la función potencia (para exponentes racionales)

Si f es la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional, entonces f es diferenciable y

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para obtener $f'(0)$ a partir de esta fórmula, r debe ser un número tal que x^{r-1} esté definido en algún intervalo abierto que contenga a 0.

EJEMPLO 1 Calcule $f'(x)$ si

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solución Del teorema 2.9.1 con $f(x) = 4x^{2/3}$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}(x^{2/3-1}) \\ &= \tfrac{8}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{8}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

El próximo teorema se deduce inmediatamente a partir del teorema 2.9.1 y de la regla de la cadena.

2.9.2 Teorema

Si f y g son dos funciones tales que $f(x) = [g(x)]^r$, donde r es cualquier número racional, y si $g'(x)$ existe, entonces f es diferenciable, y

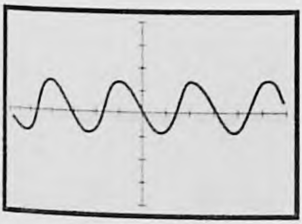
$$f'(x) = r[g(x)]^{r-1}g'(x)$$

EJEMPLO 2 Determine $f'(t)$ si

$$f(t) = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}$$

Solución Se escribe $f(t) = (4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t)^{1/2}$ y se aplica el teorema 2.9.2.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \tfrac{1}{2}(4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t)^{-1/2} \cdot D_t(4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t) \\ &= \frac{8\,\mathrm{sen}\, t \cdot D_t(\mathrm{sen}\, t) + 18\cos t \cdot D_t(\cos t)}{2\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}} \\ &= \frac{8\,\mathrm{sen}\, t\cos t + 18\cos t(-\,\mathrm{sen}\, t)}{2\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}} \\ &= \frac{-10\,\mathrm{sen}\, t\cos t}{2\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}} \\ &= -\frac{5\,\mathrm{sen}\, t\cos t}{\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}} \end{aligned}$$



$[-6, 6]$ por $[4, 4]$

$$f'(t) = -\frac{5\,\mathrm{sen}\, t\cos t}{\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}}$$

y NDER $(\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\cos^2 t}, t)$

FIGURA 1

Como es usual, los cálculos del ejemplo anterior pueden apoyarse gráficamente. En particular, la gráfica de la figura 1, la cual muestra que la gráfica de la respuesta y la gráfica de la derivada numérica de f parecen la misma, apoya el cálculo del ejemplo 2.

Ahora se tratará otra técnica de diferenciación llamada **diferenciación (o derivación) implícita,** la cual está basada en la regla de la cadena.

Si $f = \{(x, y) \mid y = 3x^2 + 5x + 1\}$, entonces la ecuación

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$

define a la función explícitamente. Sin embargo, no todas las funciones pueden ser definidas explícitamente mediante una ecuación. Por ejemplo, no se puede resolver la ecuación

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{8}$$

para y en términos de x. No obstante, pueden existir una o más funciones tales que si $y = f(x)$, entonces la ecuación (8) se satisface; es decir, funciones tales que la ecuación

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

se cumple para todos los valores de x en el dominio de f. En este caso, la función f está definida *implícitamente* por la ecuación dada.

Con la suposición de que (8) define a y como al menos una función diferenciable de x, la derivada de y con respecto a x puede determinarse mediante la *diferenciación implícita*.

La ecuación (8) es un tipo especial en el que aparecen x y y debido a que puede escribirse de modo que todos los términos que contienen x estén en un miembro de la ecuación y todos los términos en y se ubiquen en el otro miembro. Esta ecuación sirve como primer ejemplo para ilustrar el proceso de diferenciación implícita.

El miembro izquierdo de (8) es una función de x, y el miembro derecho es una función de y. Sea F la función definida por el miembro izquierdo y G la función definida por el miembro derecho. Así,

$$F(x) = x^6 - 2x \quad \text{y} \quad G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$$

donde y es una función de x, por decir $y = f(x)$. De este modo, (8) puede escribirse como

$$F(x) = G(f(x))$$

Esta ecuación es satisfecha por todos los valores de x del dominio de f para los cuales $G(f(x))$ existe.

Entonces, para todos los valores de x para los cuales f es diferenciable, se tiene

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \tag{9}$$

La derivada del miembro derecho de (9) se puede determinar fácilmente, por lo que se obtiene

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2 \tag{10}$$

Por medio de la regla de la cadena se determina la derivada del miembro derecho de (9).

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{11}$$

Al sustituir los valores de (10) y (11) en (9) se obtiene

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que al emplear la diferenciación implícita se ha obtenido una expresión para $\frac{dy}{dx}$ que contiene a las variables x y y. En el ejemplo ilustrativo siguiente se utiliza el método de diferenciación implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$ de un tipo más general de ecuación.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Considere la ecuación

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \tag{12}$$

y suponga que existe al menos una función diferenciable f tal que si $y = f(x)$, entonces la ecuación (12) se satisface. Al diferenciar ambos miembros de (12) (teniendo en mente que y es una función diferenciable de x) y aplicando la regla del producto, la regla de la potencia y la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned} 12x^3y^2 + 3x^4(2yD_xy) - 7y^3 - 7x(3y^2D_xy) &= 0 - 8\,D_xy \\ D_xy(6x^4y - 21xy^2 + 8) &= 7y^3 - 12x^3y^2 \\ D_xy &= \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8} \end{aligned}$$ ◀

Recuerde que se supuso que tanto (8) como (12) definen al menos una función diferenciable de x. Puede suceder que una ecuación en x y y no impliquen la existencia de cualquier función de valores reales, como es el caso para la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

la cual no se satisface por cualesquiera valores reales de x y y. Además, es posible que una ecuación en x y y pueda ser satisfecha por muchas funciones diferentes, de las cuales algunas son diferenciables y otras no. Una discusión general está más allá del alcance de este texto, pero puede encontrarse en un libro de Cálculo avanzado. En las discusiones siguientes cuando se indique que una ecuación en x y y define a y implícitamente como una función de x, se supondrá que al menos una de estas funciones es diferenciable. El ejemplo 5, el cual se tratará posteriormente, ilustra el hecho de que la diferenciación implícita proporciona la derivada de dos funciones diferenciables definidas por la ecuación dada.

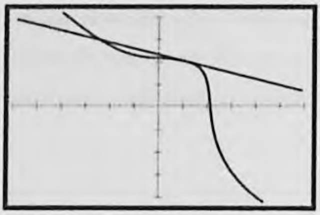
EJEMPLO 3 **(a)** Utilice la diferenciación implícita para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto $(1, 2)$. **(b)** Encuentre una ecuación de la recta tangente y apoye la respuesta gráficamente trazando la curva y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución

(a) Al diferenciar implícitamente con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^2}{y^2} \end{aligned}$$

En el punto $(1, 2)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$.



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$y = \sqrt[3]{9 - x^3}$ y $y = \frac{1}{4}(9 - x)$

FIGURA 2

(b) Una ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x - 1)$$
$$x + 4y - 9 = 0$$

La figura 2 muestra las gráficas de

$$y = \sqrt[3]{9 - x^3} \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{4}(9 - x)$$

trazadas en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$. La recta es tangente a la curva en el punto $(1, 2)$, lo que apoya la respuesta. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Dada $x \cos y + y \cos x - 1 = 0$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$1 \cdot \cos y + x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \operatorname{sen} y) = y \operatorname{sen} x - \cos y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$
◀

▶ ***EJEMPLO 5*** Dada la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, determine **(a)** $\dfrac{dy}{dx}$ mediante la diferenciación implícita; **(b)** dos funciones definidas por la ecuación; **(c)** la derivada de cada una de las funciones del inciso (b) por medio de la diferenciación explícita. **(d)** Verifique que el resultado obtenido en el inciso (a) es acorde con el resultado del inciso (c).

Solución

(a) Al diferenciar implícitamente se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Si la ecuación dada se resuelve para y, entonces

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sean f_1 y f_2 las dos funciones para las que

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

(c) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ y $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, de la regla de la cadena se obtiene

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{1/2}(-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(d) Para $y = f_1(x)$, donde $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, se deduce del inciso (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a).

Para $y = f_2(x)$, donde $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, se deduce del inciso (c) que

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$
$$= -\frac{x}{y}$$

lo cual es acorde con la respuesta del inciso (a). ◀

El ejemplo siguiente muestra cómo calcular la segunda derivada para funciones definidas implícitamente.

▶ ***EJEMPLO 6*** Dado que

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ mediante diferenciación implícita.

Solución Al diferenciar implícitamente con respecto a x se tiene

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y} \tag{13}$$

Para calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se obtiene la derivada de un cociente teniéndose en mente que y es una función de x. Así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Si se sustituye el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ de (13) en esta ecuación se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y + (36x)\frac{-4x}{9y}}{81y^2}$$
$$= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$
$$= \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}$$

Puesto que cualesquiera valores de x y y que satisfacen esta ecuación deben también satisfacer la ecuación original, entonces se puede sustituir $9y^2 + 9x^2$ por 36 para obtener

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-4(36)}{81y^3}\\ &= -\frac{16}{9y^3}\end{aligned}$$

◀

EJERCICIOS 2.9

En los ejercicios 1 a 12, obtenga la derivada de la función.

1. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$
2. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$
3. $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$
4. $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$
5. $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$
6. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$
7. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$
8. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$
9. $h(t) = 2\cos\sqrt{t}$
10. $f(x) = 4\sec\sqrt{x}$
11. $g(r) = \cot\sqrt{3r}$
12. $g(x) = \sqrt{3\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 13 a 16, calcule la derivada y apoye la respuesta trazando las gráficas de la respuesta y la derivada numérica en el mismo rectángulo de inspección.

13. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}}\right)$
14. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}}\right)$
15. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}})$
16. $D_x\left(\sqrt{x}\tan\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

En los ejercicios 17 a 32, determine $\dfrac{dy}{dx}$ por medio de diferenciación implícita.

17. $x^2 + y^2 = 16$
18. $4x^2 - 9y^2 = 1$
19. $x^3 + y^3 = 8xy$
20. $x^2 + y^2 = 7xy$
21. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$
22. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} = 2x$
23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
24. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
25. $x^2y^2 = x^2 + y^2$
26. $(2x + 3)^4 = 3y^4$
27. $y = \cos(x - y)$
28. $x = \operatorname{sen}(x + y)$
29. $\sec^2 x + \csc^2 y = 4$
30. $\cot xy + xy = 0$
31. $x\operatorname{sen} y + y\cos x = 1$
32. $\cos(x + y) = y\operatorname{sen} x$

En los ejercicios 33 a 36, encuentre una ecuación de la recta tangente o de la recta normal, según se indica, y apoye la respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

33. La recta tangente a la curva $y = \sqrt{x^2 + 9}$ en el punto $(4, 5)$.
34. La recta normal a la curva $y = x\sqrt{16 + x^2}$ en el origen
35. La recta normal a la curva $9x^3 - y^3 = 1$ en el punto $(1, 2)$.
36. La recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto $(1, 2)$.
37. ¿En qué punto de la curva $xy = (1 - x - y)^2$ la recta tangente es paralela al eje x?
38. Dos rectas que pasan por el punto $(-1, 3)$, son tangentes a la curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Encuentre una ecuación de cada una de las rectas.

En los ejercicios 39 a 42, haga lo siguiente: (a) Encuentre dos funciones definidas por la ecuación; (b) dibuje las gráficas de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a); (c) dibuje la gráfica de la ecuación; (d) calcule la derivada de cada una de las funciones obtenidas en el inciso (a) y determine los dominios de las derivadas; (e) obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita de la ecuación dada, y verifique que el resultado así obtenido es acorde con los resultados del inciso (d); (f) encuentre una ecuación de cada recta tangente en el valor indicado de x_1.

39. $y^2 = 4x - 8$; $x_1 = 3$
40. $y^2 - x^2 = 16$; $x_1 = -3$
41. $x^2 - y^2 = 9$; $x_1 = -5$
42. $x^2 + y^2 = 25$; $x_1 = 4$
43. Dado que $x^2 + y^2 = 1$, demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$.
44. Sea $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, pruebe que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$.
45. Si $x^3 + y^3 = 1$, muestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$.
46. Sea $x^2 + 25y^2 = 100$, demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4}{25y^3}$
47. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1; **(c)** 2.
48. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = \sqrt{5 + t^2}$, con $t \geq 0$. Determine el valor de t para el cual la medida de la velocidad es **(a)** 0; **(b)** 1.
49. Suponga que se produce un líquido mediante un proceso químico y que la función de costo total C está dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, donde $C(x)$ dólares es el costo total

al producir x litros del líquido. Determine **(a)** el costo marginal cuando se producen 16 litros, y **(b)** el número de litros producidos cuando el costo marginal es de \$0.40 por litro.

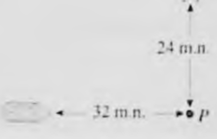
50. El número de dólares del costo total por producir x unidades de cierto artículo está dado por $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$. Determine **(a)** el costo marginal cuando se producen 50 unidades, y **(b)** el número de unidades producidas cuando el costo marginal es \$4.50.

51. Una compañía inmobiliaria renta cada departamento a p dólares por mes cuando x departamentos son rentados, y $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. Si $R(x)$ dólares son las utilidades totales recibidas por la renta de los x departamentos, entonces $R(x) = px$. ¿Cuántos departamentos deben rentarse antes de que las utilidades sean cero? *Nota:* como x es el número de departamentos rentados, x es un número entero no negativo. Sin embargo, para aplicar el Cálculo, suponga que x es un número real no negativo.

52. La producción diaria de una fábrica es $f(x)$ unidades cuando el capital invertido es x miles de dólares, y $f(x) = 200\sqrt{2x + 1}$. Si la capitalización actual es de \$760 000, utilice la derivada para estimar la variación de la producción diaria si el capital invertido es aumentado en \$1 000.

53. Un avión vuela en forma paralela al suelo a una altura de 2 km y con una rapidez de $4\frac{1}{2}$ km/min. Si el avión vuela directamente sobre la Estatua de la Libertad, ¿a qué tasa está variando la distancia de la recta visual entre el avión y la estatua 20 s después?

54. A las 8 a.m. un barco, que navega hacia el norte a 24 nudos (millas náuticas por hora), se encuentra en un punto P. A las 10 a.m. un segundo barco, que navega hacia el este a 32 nudos, está en el punto P. ¿A qué tasa está cambiando la distancia entre los dos barcos **(a)** a las 9 a.m.; **(b)** a las 11 a.m.?



(a) 9 A. M.

(b) 11 A. M.

55. En el ejercicio 41 de la sección 2.2, aplicó la definición de derivada para demostrar que

$$D_x(|x|) = \frac{|x|}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Ahora utilice la regla de la cadena y los teoremas de diferenciación para la demostración. *Sugerencia:* considere $|x| = \sqrt{x^2}$

56. Determine $D_x^2(|x|)$ cuando exista. Considere la sugerencia del ejercicio 55.

En los ejercicios 57 y 58, calcule la derivada de la función. Considere la sugerencia del ejercicio 55.

57. $f(x) = |x^2 - 4|$ **58.** $g(x) = x|x|$

59. Si $f(x) = |x|^3$, determine $f'(x)$ y $f''(x)$ cuando existan.

60. Sea $g(x) = |f(x)|$. Demuestre que si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, entonces $|g'(x)| = |f'(x)|$.

61. Se deja caer una pelota desde una ventana que se encuentra a h pies sobre el piso y rebota de modo que t segundos después de que la pelota cae, su altura es $s(t)$ pies, donde

$$s(t) = \frac{h|\cos t|}{(1 - t)^2}$$

Determine la tasa a la que la altura de la pelota está cambiando a los **(a)** 1.4 s, **(b)** 1.6 s, **(c)** 1.8 s y **(d)** 2.2 s.

62. Demuestre que la suma de las intercepciones x y y de la recta tangente a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$, donde k es una constante, es igual a k.

63. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el punto donde $x = -\frac{1}{8}$. Apoye la respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

64. Suponga que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $h(x) = f(g(x))$, donde f es diferenciable en 3. Demuestre que $h'(0) = 0$.

65. Demuestre que si $xy = 1$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 4$.

66. Sea f la función potencia definida por $f(x) = x^r$, donde r es cualquier número racional. Bajo la suposición de que f es diferenciable, utilice la diferenciación implícita para demostrar que $f'(x) = rx^{r-1}$. *Sugerencia:* sea $r = \frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q > 0$. Después sustituya $f(x)$ por y y escriba la ecuación como $y^q = x^p$. Emplee la diferenciación implícita y determine $\dfrac{dy}{dx}$.

67. Para una demostración rigurosa del teorema 2.9.1, la regla de diferenciación de la potencia (para potencias racionales), ¿pudo haberse empleado el procedimiento del ejercicio 66 en lugar del que se presentó en la sección? Explique su respuesta.

68. Calcule $(f \circ g)'(0)$ si $f(x) = x^6 + 7x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Explique por qué no se puede emplear la regla de la cadena para efectuar este cálculo.

2.10 TASAS DE VARIACIÓN RELACIONADAS

Un problema de *tasas de variación relacionadas* es aquel que involucra tasas de variación de variables relacionadas. En aplicaciones del mundo real que implican tasas de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de t, donde t es una medida de tiempo. En general, esta relación se expresa mediante una ecuación, la cual representa un modelo matemático. Esta sección se inicia con un ejemplo ilustrativo que muestra el camino paso a paso de cómo se resuelven la mayoría de los problemas de tasas de variación relacionadas.

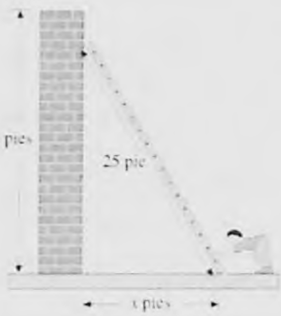


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Una escalera de 25 pie de longitud está apoyada contra una pared vertical como se muestra en la figura 1. La base de la escalera se jala horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s. Suponga que se desea determinar qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 15 pie de la pared.

Paso 1 Primero defina las variables comenzando con t.

t: el número de segundos del tiempo que ha transcurrido desde que la escalera comenzó a deslizarse hacia abajo sobre la pared.

x: el número de pies de la distancia desde la base de la escalera a la pared a los t segundos.

y: el número de pies de la distancia desde el piso a la parte superior de la escalera a los t segundos.

Paso 2 Escriba cualquier hecho numérico acerca de x, y y sus derivadas con respecto a t.

Como la base de la escalera es jalada horizontalmente alejándola de la pared a 3 pie/s, $\dfrac{dx}{dt} = 3$.

Paso 3 Escriba lo que desea determinar.

Se desea determinar $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 15$.

Paso 4 Escriba una ecuación que relacione a x y y.

Del teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Paso 5 Derive los dos miembros de (1) con respecto a t

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Paso 6 Sustituya los valores conocidos de x, y y $\frac{dx}{dt}$ en la ecuación anterior y resuélvala para $\frac{dy}{dt}$.

Cuando $x = 15$, de (1) $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, se obtiene de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\frac{15}{20} \cdot 3$$

$$= -\frac{9}{4}$$

El signo menos indica que y decrece conforme t aumenta.

Paso 7 Escriba una conclusión.

Conclusión: La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre la pared a la tasa de 2.25 pie/s cuando la base está a 15 pie de la pared. ◀

Ahora se hará un resumen de los pasos del ejemplo ilustrativo anterior. Ellos le darán un procedimiento a seguir. Conforme lea los ejemplos siguientes, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.

Sugerencias para resolver un problema de tasas de variación relacionadas

Lea el problema cuidadosamente de modo que lo entienda. Para poder entenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que contemple una situación semejante en la que todas las cantidades sean conocidas. Otra ayuda es dibujar una figura, si es factible, como en el ejemplo ilustrativo 1 y los ejemplo 1, 2 y 4. Después aplique los siguientes pasos.

1. Defina las variables de la ecuación que obtendrá. Debido a que éstas representan números, las definiciones de las variables deben indicar este hecho. Por ejemplo, si el tiempo se mide en segundos, entonces la variable t debe definirse como el número de segundos de tiempo o, equivalentemente, t segundos es el tiempo. Asegúrese de definir primero t, y las otras variables deben indicar su dependencia de t.
2. Escriba los hechos numéricos conocidos acerca de las variables y de sus derivadas con respecto a t.
3. Escriba lo que se desea determinar.
4. Escriba una ecuación que relacione las variables que dependen de t. Esa ecuación será un modelo matemático de la situación.
5. Derive con respecto a t los dos miembros de la ecuación obtenida en el paso 4 para relacionar las tasas de variación de las variables.
6. Sustituya los valores de las cantidades conocidas en la ecuación del paso 5, y despeje la cantidad deseada.
7. Escriba una conclusión que consista de una o más oraciones completas y que responda las preguntas del problema. No olvide que la conclusión debe contener las unidades correctas de medición.

EJEMPLO 1 Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$ hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado 5 m de profundidad?

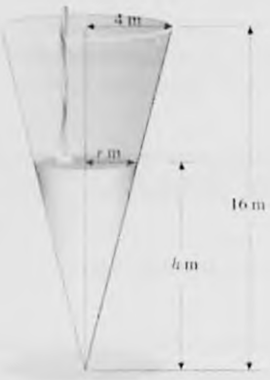


FIGURA 2

Solución Refiérase a la figura 2.

Paso 1 Se definen las variables, primero t y después las otras variables en términos de t.

t: el número de minutos del tiempo que ha transcurrido desde que el agua comenzó a fluir dentro del tanque.

h: el número de metros de la altura del nivel del agua a los t minutos.

r: el número de metros del radio de la superficie del agua a los t minutos.

V: el número de metros cúbicos del volumen de agua en el tanque a los t minutos. Observe que V, r y h, son funciones de t.

Paso 2 Puesto que el agua fluye dentro del tanque a una tasa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$, entonces $\dfrac{dV}{dt} = 2$.

Paso 3 Se desea determinar $\dfrac{dh}{dt}$ cuando $h = 5$.

Paso 4 En cualquier tiempo, el volumen del agua en el tanque puede expresarse como el volumen de un cono, como indica la figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \tag{3}$$

Como se estableció en los pasos 2 y 3, se conoce $\dfrac{dV}{dt}$, y se desea determinar $\dfrac{dh}{dt}$. Por tanto, se necesita una ecuación que involucre a V y h. Así, primero se expresa r en términos de h observando que, de los triángulos semejantes de la figura 2, se tiene

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{4}h$$

Si se sustituye este valor de r en (3), se obtiene

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h\right)^2(h) \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t, resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Paso 6 Ahora se sustituye 2 por $\dfrac{dV}{dt}$ y se resuelve la ecuación para $\dfrac{dh}{dt}$, obteniéndose

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Así,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$
$$\approx 0.4074$$

Al convertir metros a centímetros se tiene: 0.4074 m/min = 40.74 cm/min.

Paso 7 A continuación se escribirá la conclusión.

Conclusión: El nivel del agua sube a una tasa de 40.74 cm/min cuando el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m. ◀

▶ **EJEMPLO 2** Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de 90 km/h, y el otro hacia el sur a 60 km/h, se dirigen hacia la intersección de dos carreteras. ¿A qué tasa se están aproximando uno al otro en el instante en que el primer automóvil está a 0.2 km de la intersección y el segundo se encuentra a 0.15 km de dicha intersección?

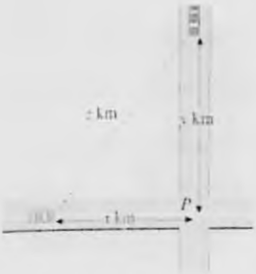


FIGURA 3

Solución Consulte la figura 3, donde el punto P es la intersección de las dos carreteras.

Paso 1

- t: el número de horas del tiempo que ha transcurrido desde que los automóviles empezaron a aproximarse a P.
- x: el número de kilómetros de la distancia a partir del primer automóvil a P a las t horas.
- y: el número de kilómetros de la distancia a partir del segundo automóvil a P a las t horas.
- z: el número de kilómetros de la distancia entre los dos automóviles a las t horas.

Paso 2 Como el primer carro se acerca a P a una tasa de 90 km/h, y x está decreciendo conforme t crece, entonces $\frac{dx}{dt} = -90$. De la misma manera, $\frac{dy}{dt} = -60$.

Paso 3 Se desea determinar $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$.

Paso 4 Del teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{4}$$

Paso 5 Al diferenciar los dos miembros de (4) con respecto a t, se obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \tag{5}$$

Paso 6 Cuando $x = 0.2$ y $y = 0.15$, de (4) se tiene que $z = 0.25$. En (5) se sustituyen $\frac{dx}{dt}$ por -90, $\frac{dy}{dt}$ por -60, x por 0.2, y por 0.15 y z por 0.25 para obtener

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0.25} = \frac{(0.2)(-90) + (0.15)(-60)}{0.25}$$
$$= -108$$

Paso 7

Conclusión: En el instante en cuestión, los carros se aproximan uno al otro a una tasa de 108 km/h. ◀

EJEMPLO 3 Suponga que en cierto mercado, x miles de canastillas de naranjas se surten diariamente cuando p dólares es el precio por canastilla. La ecuación de oferta es

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Si el suministro diario decrece a una tasa de 250 canastillas por día, ¿a qué tasa está variando el precio cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas?

Solución Sea t días el tiempo que ha transcurrido desde que el suministro diario empezó a decrecer.

Las variables p y x están definidas como funciones de t en el enunciado del problema.

Debido a que el suministro diario está decreciendo a una tasa de 250 canastillas por día, entonces $\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1\,000}$; esto es, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$. Se desea determinar $\frac{dp}{dt}$ cuando $x = 5$. De la ecuación de oferta dada, al diferenciar implícitamente con respecto a t se obtiene

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3 - p}{x - 20}\,\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 5$, se deduce de la ecuación de oferta que $p = 6$. Debido a que $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, se tiene de la ecuación anterior

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{20}$$

<u>**Conclusión:**</u> El precio de una canastilla de naranjas está decreciendo a la tasa de \$0.05 por día cuando la oferta diaria es de 5 000 canastillas.

EJEMPLO 4 Un avión vuela hacia el oeste con una velocidad de 500 pie/s a una altura de 4 000 pie y un rayo de luz de un faro de rastreo ubicado en tierra, incide en la parte inferior del avión. Si la luz se mantiene sobre el avión, ¿qué tan rápido gira el rayo de luz cuando el avión se encuentra a una distancia horizontal de 2 000 pie al este del faro.

FIGURA 4

Solución Consulte la figura 4, en la que el faro está en el punto L y en un instante particular el avión se encuentra en el punto P.

Sea t segundos el tiempo que transcurre desde que la luz del faro incidió en el avión.

x: el número de pies hacia el este de la distancia horizontal del avión desde el faro a los t segundos.

θ: el número de radianes del ángulo de elevación del avión desde el faro a los t segundos.

Puesto que $\frac{dx}{dt} = -500$, y como se desea determinar $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $x = 2\,000$, se considera

$$\tan\theta = \frac{4\,000}{x}$$

Al diferenciar los dos miembros de esta ecuación con respecto a t se obtiene

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4\,000}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

Si se sustituye $\frac{dx}{dt}$ por -500 en la ecuación anterior y al dividir entre $\sec^2 \theta$ se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,000\,000}{x^2 \sec^2 \theta} \qquad (6)$$

Cuando $x = 2\,000$, $\tan \theta = 2$. Como $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, $\sec^2 \theta = 5$. Al sustituir estos valores en (6) se tiene, cuando $x = 2\,000$,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\,000\,000}{4\,000\,000(5)} \\ &= \tfrac{1}{10}\end{aligned}$$

Conclusión: En el instante dado, la medida del ángulo está creciendo a la tasa de $\frac{1}{10}$ rad/s, y ésta es la rapidez con la que está girando el faro. ◀

EJERCICIOS 2.10

En los ejercicios 1 a 8, x y y son funciones de la tercera variable t.

1. Si $2x + 3y = 8$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, obtenga $\frac{dx}{dt}$.

2. Si $\frac{x}{y} = 10$ y $\frac{dx}{dt} = -5$, calcule $\frac{dy}{dt}$.

3. Si $xy = 20$ y $\frac{dy}{dt} = 10$, encuentre $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 2$.

4. Si $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ en $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.

5. Si $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ y $\frac{dx}{dt} = -1$, calcule $\frac{dy}{dt}$ en $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

6. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $\frac{dx}{dt} = 5$, calcule $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = 4$.

7. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ y $\frac{dy}{dt} = 3$, obtenga $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$.

8. Si $y(\tan x + 1) = 4$ y $\frac{dy}{dt} = -4$, determine $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = \pi$.

En los problemas de tasas de variación relacionadas de los ejercicios siguientes, defina precisamente todas las variables como cantidades (números y unidades de medición). Utilice la variable t para representar el tiempo y defina las otras variables de modo que dependan de t. Asegúrese de escribir una conclusión.

9. Un niño vuela una cometa a una altura de 40 pie, y lo hace moviéndose horizontalmente a una tasa de 3 pie/s. Si la cuerda está tensa, ¿a qué tasa se afloja cuando la longitud de la cuerda suelta es de 50 pie?

10. Se infla un globo esférico de modo que su volumen se incrementa a una tasa de 5 m³/min. ¿A qué tasa aumenta el diámetro cuando éste es de 12 m?

11. Se está formando una bola de nieve de modo que su volumen se incrementa a una tasa de 8 pie³/min. Determine la tasa a la que el radio aumenta cuando el diámetro de la bola es de 4 pie.

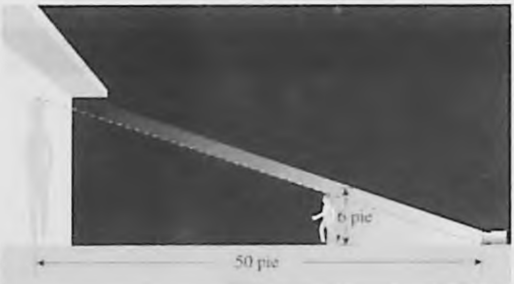
12. Suponga que cuando el diámetro de bola de nieve, del ejercicio 11, es de 6 pie se detiene su crecimiento y comienza a derretirse a una tasa de $\frac{1}{4}$ pie³/min. Calcule la tasa a la que el radio varía cuando éste es de 2 pie.

13. Se deja caer arena en un montículo de forma cónica a una tasa de 10 m³/min. Si la altura del montículo siempre es el doble del radio de la base, ¿a qué tasa se incrementa la altura cuando ésta es de 8 m?

14. Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pie sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pie de estatura camina alejándose de la lámpara a una tasa de 5 pie/s, ¿qué tan rápido se alarga su sombra?

15. En el ejercicio 14, ¿a qué tasa se desplaza la punta de la sombra del hombre?

16. Un hombre de 6 pie de estatura camina hacia un edificio a una tasa de 5 pie/s. si en el piso se encuentra una lámpara a 50 pie del edificio, ¿qué tan rápido se acorta la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando él está a 30 pie de éste?



17. Suponga que un tumor en el cuerpo de una persona es de forma esférica. Si cuando el radio del tumor es de 0.5 cm. éste crece a una tasa de 0.001 cm por día, ¿cuál es la tasa de crecimiento del volumen del tumor en ese tiempo?

18. Una bacteria celular es de forma esférica. Si el radio de la bacteria crece a una tasa de 0.01 μm (micra) por día cuando el radio de ésta es de 1.5 μm, ¿cuál es la tasa de crecimiento del volumen de la bacteria en ese tiempo?

19. Para el tumor del ejercicio 17, ¿cuál es la tasa de crecimiento del área de la superficie cuando el radio es de 0.5 cm?

20. Para la bacteria del ejercicio 18, ¿cuál es la tasa del área de la superficie de la bacteria cuando su radio es de 1.5 μm?

21. Un tanque para almacenar agua tiene la forma de un cono invertido y se está vaciando a una tasa de 6 m^3/min. La altura del cono es de 24 m y su radio mide 12 m. Determine qué tan rápido disminuye el nivel del agua cuando está tiene una profundidad de 10 m.

22. La longitud de un abrevadero es de 12 pie y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles invertido que tiene una altura de 3 pie y su base mide 3 pie. Se introduce agua al abrevadero a una tasa de 2 pie^3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 1 pie?

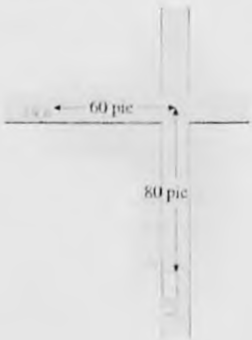
23. La ley de Boyle para la expansión de una gas es $PV = C$, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad cuadrada de área, V es el número de unidades cúbicas del volumen del gas y C es una constante. En cierto momento, la presión es de 3 000 lb/pie^2, el volumen es de 5 pie^3 y el volumen crece a una tasa de 3 pie^3/min. Determine la tasa de variación de la presión en ese momento.

24. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión del aire es $PV^{1.4} = C$, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad cuadrada de área, V es el número de unidades cúbicas del volumen y C es una constante. En un instante específico, la presión es de 40 lb/pulg^2 y está creciendo a una tasa de 8 lb/pulg^2 cada segundo. Si $C = 5/16$, ¿cuál es la tasa de variación del volumen en ese instante?

25. Se arroja una piedra en un estanque tranquilo, formándose ondas circulares concéntricas que se dispersan. Si el radio de la región afectada crece a una tasa de 16 cm/s, ¿a qué tasa crece el área de la región afectada cuando su radio es de 4 cm?

26. Cierta cantidad de aceite fluye hacia el interior de un depósito que tiene forma de cono invertido a una tasa de 3π m^3/min. Si el depósito tiene un radio de 2.5 m en su parte superior y una altura de 10 m, ¿qué tan rápido varía el nivel del aceite cuando éste ha alcanzado 8 m de profundidad?

27. Un automóvil se desplaza a una tasa de 30 pie/s y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 120 pie del crucero, un camión que viaja a una tasa de 40 pie/s pasa por el crucero. El automóvil y el camión se encuentran sobre carreteras que son perpendiculares. ¿Qué tan rápido se separan el automóvil y el camión 2 s después de que el camino deja el crucero?



28. Una cuerda está atada a un bote sobre la superficie del agua y una mujer, en el muelle, tira del bote a una tasa de 50 pie/min. Si sus manos están a 16 pie sobre el nivel del agua ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 20 pie?

29. Esta semana, en una fábrica se produjeron 50 unidades de un artículo determinado, y la cantidad producida aumenta a una tasa de 2 unidades por semana. Si $C(x)$ dólares es el costo total por producir x unidades y $C(x) = 0.08x^3 - x^2 + 10x + 48$, determine la tasa actual a la que el costo de producción crece.

30. La demanda de cierto cereal para el desayuno está dada por la ecuación de demanda $px + 50p = 16\ 000$, donde x miles de cajas de cereal son demandadas cuando el precio por caja es de p centavos. Si el precio actual de la caja de cereal es de \$1.6 y éste se incrementa a una tasa de 0.4 centavos cada semana, calcule la tasa de variación de la demanda.

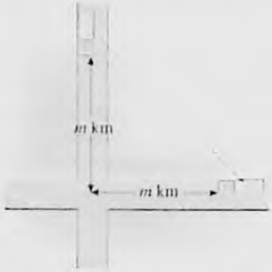
31. La ecuación de oferta para cierta mercancía es $x = 1\ 000\sqrt{3p^2 + 20p}$, donde cada mes se suministran x unidades cuando p dólares es el precio por unidad. Determine la tasa de variación de la oferta si el precio actual es de \$20 por unidad y el precio crece a una tasa de \$0.50 por mes.

32. Suponga que y trabajadores se necesitan para producir x unidades de cierta mercancía, y $x = 4y^2$. Si la producción de la mercancía este año es de 250 000 unidades y la producción crece a una tasa de 18 000 unidades por año, ¿cuál es la tasa actual a la que la fuerza laboral debe incrementarse?

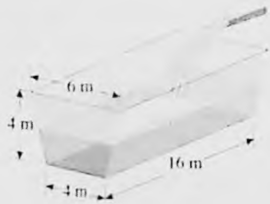
33. La ecuación de demanda para cierto tipo de camisa es $2px + 65p - 4\ 950 = 0$, donde x cientos de camisas son demandadas por semana cuando p dólares es el precio por camisa. Si una camisa se vende por \$30 esta semana, y el precio crece a una tasa de \$0.20 por semana, calcule la tasa de variación de la demanda.

34. La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo decrece a una tasa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Si la longitud de la hipotenusa es constante y de 40 cm, determine qué tan rápido varía el área del triángulo cuando la medida del ángulo agudo es de $\frac{1}{6}\pi$ rad.

35. Dos camiones, uno de los cuales viaja hacia el oeste y el otro hacia el sur, se aproximan a un crucero. Si los dos camiones se desplazan a una tasa de k km/h, muestre que ellos se aproximan a una tasa de $k\sqrt{2}$ km/h cuando cada uno de ellos se encuentra a m kilómetros del crucero.



36. Un depósito horizontal para agua mide 16 m de longitud y sus extremos son trapecios isósceles con una altura de 4 m, base menor de 4 m y base mayor de 6 m. Se vierte agua en el depósito a una tasa de 10 m^3/min. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado una profundidad de 2 m?

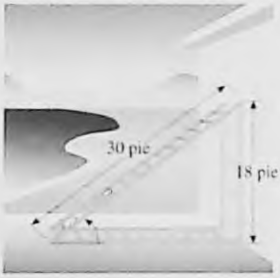


37. En el ejercicio 36, si el nivel del agua decrece a una tasa de 25 cm/min cuando el agua tiene una profundidad de 3 m, ¿a qué tasa sale el agua del depósito?

38. Una escalera de 7 m de longitud está apoyada sobre una pared. Si la base de la escalera se empuja horizontalmente hacia la pared a una tasa de 1.5 m/s, ¿qué tan rápido se desliza hacia arriba la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 2 metros de la pared?

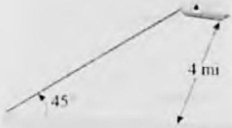
39. Una escalera de 20 pie de longitud está recargada sobre un terraplén inclinado a 60° con respecto a la horizontal. Si la base de la escalera se mueve horizontalmente hacia el terraplén a una tasa de 1 pie/s, qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera cuando la base está a 4 pies del terraplén.

40. Una escalera de 30 pie de longitud está apoyada contra una pared, de modo que su extremo superior se desliza hacia abajo a una tasa de $\frac{1}{2}$ pie/s, ¿cuál es la tasa de variación de la medida del ángulo agudo formado por la escalera con el piso cuando el extremo superior está a 18 pie sobre el piso?



41. Un avión que vuela con rapidez constante a una altura de 10 000 pie sobre una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador nota que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{1}{3}\pi$ rad y aumenta a una tasa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la rapidez del avión.

42. Un bote está ubicado a 4 millas de la costa y tiene un radar transmisor que gira 32 veces por minuto. ¿Qué tan rápido se desplaza la onda emitida por el radar a lo largo de la costa cuando dicha onda forma un ángulo de 45° con la costa.



43. Después de la explosión de despegue, un transbordador espacial se eleva verticalmente y un radar, ubicado a 1 000 yd de la rampa de lanzamiento, sigue al transbordador. ¿Qué tan rápido gira el radar 10 segundos después de la explosión de despegue si en ese instante la velocidad del transbordador es de 100 yd/s encontrándose éste a 500 yd del suelo?

44. Se vierte agua en un depósito que tiene forma de cono invertido a una tasa de 8 pie^3/min. El cono tiene una altura de 20 pie y un diámetro de 10 pie en la parte superior. Si hay una fuga en la parte inferior del depósito y el nivel del agua sube a una tasa de 1 pulg/min cuando el agua tiene una profundidad de 16 pies, ¿qué tan rápido escapa el agua del depósito?

45. Muestre que si el volumen de un globo decrece a una tasa proporcional al área de su superficie, el radio del globo se contrae a una tasa constante.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2

▶ SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 2

1. Defina la *recta tangente* a la gráfica de una función en el punto $P(x_1, f(x_1))$.
2. Defina la *recta normal* a una gráfica en un punto dado.
3. Defina la *derivada* de una función f en un número x del dominio de f.
4. Establezca dos fórmulas que proporcionen $f'(x_1)$, la derivada de la función f en el número x_1.
5. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de la función f en el número x_1?
6. ¿Cuál es la *notación de Lagrange* para la derivada de la función f en el número x_1? ¿Cuál es la *notación de Leibniz* para la derivada?
7. ¿Es posible que una función sea diferenciable en un número y no sea continua en ese número? Si la respuesta es sí, dé un ejemplo. Si la respuesta es no, establezca la razón.

8. ¿Es posible que una función sea continua en un número y no sea diferenciable en ese número? Si la respuesta es sí, dé un ejemplo, si la respuesta es no, establezca la razón.

9. Enuncie el teorema que proporciona la relación entre diferenciabilidad y continuidad de una función en un número.

10. Establezca tres razones por las que una función no sea diferenciable en un número c y dibuje la gráfica de tal función en cada caso.

11. Defina la *derivada por la derecha* y la *derivada por la izquierda* de una función f en el número x_1.

12. Invente un ejemplo de una función que no sea diferenciable en un número x_1 debido a que las derivadas por la derecha y por la izquierda de x_1 no son iguales aunque las dos derivadas laterales existan.

13. Invente un ejemplo de una función que no sea diferenciable en un numero x_1, para la cual la gráfica de la función en el punto donde $x = x_1$ tiene una recta tangente vertical.

14. Invente un ejemplo de una función que no sea continua ni diferenciable en un número particular de su dominio.

15. ¿Qué es el *cociente de diferencias simétricas* de la función f en el número a?

16. ¿Cuál es la mejor aproximación a $f'(a)$ para una tolerancia específica: el cociente de diferencias simétricas o el cociente de diferencias estándar?

17. Defina la *derivada numérica* de una función f en un número a.

18. ¿Por qué es más importante ahora la derivada numérica que antes del advenimiento de las computadoras electrónicas?

19. ¿La derivada numérica de una función en un número siempre proporciona una aproximación de la derivada real de la función en el número? Si la respuesta es sí, explique por qué. Si la respuesta es no, dé un ejemplo de una función que justifique su respuesta.

20. ¿Cómo se puede apoyar en la graficadora la derivada de una función calculada analíticamente?

21. Enuncie los tres teoremas que permiten diferenciar cualquier función polinomial.

22. Si la función h es el producto de las funciones f y g, establezca la regla de diferenciación para el producto que expresa la derivada de h en términos de f, g y sus derivadas.

23. Si la función h es el cociente (f/g) de las funciones f y g, establezca la regla de diferenciación para el cociente que expresa la derivada de h en términos de f, g y sus derivadas.

24. Si f es una función, ¿qué se entiende por la *segunda derivada* de f? ¿Qué se entiende por la *tercera derivada* de f?

25. ¿Cuántas derivadas diferentes tiene una función polinomial?

26. ¿Cuál es la notación de Leibniz para la segunda derivada?

27. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación $s = f(t)$. Defina la *velocidad* y la *aceleración* de la partícula en $t = t_1$.

28. ¿Cuál es la diferencia entre la velocidad y la rapidez en el movimiento rectilíneo?

29. Si $s = f(t)$ es la ecuación de movimiento de una partícula sobre una recta horizontal, ¿cómo se puede simular el movimiento en la graficadora?

30. Efectúe la sugerencia 29 si un objeto (por ejemplo, una pelota o una piedra) se mueve sobre una recta vertical.

31. Si $s = f(t)$ es una ecuación de movimiento de un objeto que se mueve sobre una recta vertical, describa cómo determinaría analíticamente lo siguiente: qué tan alto llegará el objeto y cuánto tiempo le tomará alcanzar el punto más alto; la velocidad instantánea del objeto en un tiempo particular; la rapidez del objeto en un tiempo particular, la velocidad instantánea del objeto cuando éste vuelve al punto inicial.

32. Interprete la derivada de una función f como una tasa de variación.

33. Suponga que $V(x)$ proporciona el volumen de un sólido en términos de la medida x. Interprete $V'(x_1)$ como una tasa de variación.

34. En economía, suponga que $C(x)$ proporciona el costo total de x unidades de cierta mercancía y que $R(x)$ es la utilidad total recibida cuando x unidades son vendidas. Interprete el costo marginal, $C'(x)$, y la utilidad marginal, $R'(x)$, como tasas de variación.

35. ¿Cómo aplican los economistas la derivada para aproximar el costo de producción de una unidad adicional después de que se han producido k unidades y cómo aproximan la utilidad por la venta de una unidad adicional después de que se han vendido k unidades?

36. Proporcione ejemplos en los que se aplique la derivada como tasa de variación en dos disciplinas diferentes de la geometría y de la economía.

37. Enuncie los teoremas que proporcionan las derivadas de sen x, cos x, tan x, cot x, sec x y csc x, donde x es un número real.

38. Indique dos de los límites importantes del capítulo 1 que se utilizan para demostrar los teoremas que proporcionan la derivada de sen x y cos x.

39. Para aplicar los teoremas de la sugerencia 37 a fin de obtener las derivadas de las funciones trigonométricas de θ, donde θ es la medida de un ángulo, ¿por qué θ debe medirse en radianes?

40. ¿Cómo se aplican las derivadas de las seis funciones trigonométricas para dibujar sus gráficas?

41. ¿Por qué es necesario el Cálculo para dibujar de manera formal las gráficas de las seis funciones trigonométricas, las cuales pueden obtenerse en cursos previos al de Cálculo sólo aplicando consideraciones intuitivas?

42. Si la función h es la composición de las funciones f y g, esto es, $h = f \circ g$, ¿en qué números deben ser diferenciables las funciones f y g si h es diferenciable en el número x_1?

43. Enuncie la *regla de la cadena* que proporciona la fórmula para la derivada de la composición de las funciones f y g.

44. Invente un ejemplo que muestre cómo se utiliza la regla de la cadena para calcular la derivada de una función h, la cual es la composición de dos funciones siendo una de ellas una función trigonométrica.

45. Invente un ejemplo que muestre cómo se aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de la función h, la cual es la composición de dos funciones algebraicas, siendo sólo una de ellas un polinomio.

46. ¿Qué condiciones son necesarias para que el movimiento de una partícula sobre una recta horizontal sea *armónico simple*?

47. Enuncie la fórmula para la derivada de la función potencia para exponentes racionales.

48. Invente un ejemplo que muestre el cálculo de la derivada de la función compuesta $f \circ g$, donde f es la función potencia para un exponente racional no entero y g es una función trigonométrica.

49. ¿Cómo se calcula la derivada de la función valor absoluto empleando teoremas de diferenciación en lugar de la definición de derivada? Muéstrelo al calcular la derivada de $|x - 5|$.

50. Distinga entre la definición de *función explícita* y *función implícita*.

51. ¿Qué significa *diferenciación implícita*?

52. ¿Cómo se aplica la regla de la cadena cuando se utiliza diferenciación implícita para determinar $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de una ecuación en x y y?

53. Cuando se calcula $\dfrac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita a partir de una ecuación en x y y, ¿para qué funciones $\dfrac{dy}{dx}$ es la derivada?

54. ¿Qué es un problema de *tasas de variación relacionadas*? Invente un ejemplo.

55. Cuando se definen las variables en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, ¿cuál es la variable que debe definirse primero y por qué?

56. Después de definir la primera variable en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, ¿cómo se deben definir las otras variables?

57. En la solución de un problema de tasas de variación relacionadas, cuando se obtiene una ecuación que relaciona las variables, ¿con respecto a qué variable se debe diferenciar?

58. ¿Cómo se utiliza la diferenciación implícita en la solución de un problema de tasas de variación relacionadas?

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 2

En los ejercicios 1 a 14, calcule la derivada de la función.

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$
2. $g(x) = 5(x^4 + 3x^7)$
3. $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}$
5. $F(x) = 2x^{1/2} - \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$
6. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$
7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1)$
8. $f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5)$
9. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$
10. $h(y) = \dfrac{y^2}{y^3 + 8}$
11. $f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4$
12. $F(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^{-1/3}$
13. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$
14. $g(x) = (x^4 - x)^{-3}(5 - x^2)^{-1}$

En los ejercicios 15 a 20, determine la derivada.

15. $D_x[(x + 1)\operatorname{sen} x - x\cos x]$
16. $D_t(\operatorname{sen}^2 3t)$
17. $\dfrac{d}{dt}(\sqrt{\tan 4t})$
18. $\dfrac{d}{dx}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)$
19. $D_w[\operatorname{sen}(\cos 3w) - \operatorname{sen} w \cos 3w]$
20. $D_x[\tan 2x \sec x + \tan(2\sec x)]$

En los ejercicios 21 a 24, calcule la derivada de la función y apoye la respuesta trazando las gráficas de la respuesta y la derivada numérica en x en el mismo rectángulo de inspección.

21. $f(x) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)^2$
22. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4 - x^2}}$
23. $g(x) = \dfrac{\tan x}{1 + x}$
24. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{\operatorname{sen} x}$

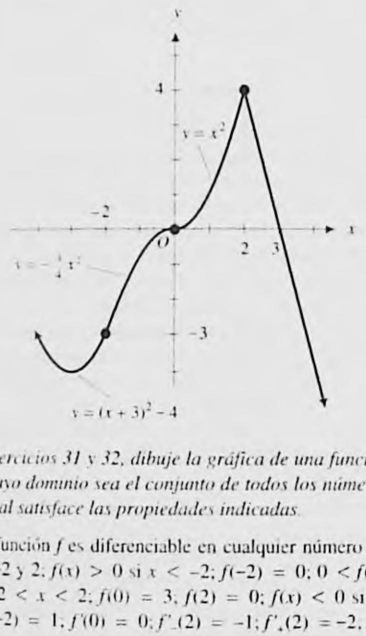
En los ejercicios 25 a 28, obtenga $\dfrac{dy}{dx}$.

25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$
26. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$
27. $\tan x + \tan y = xy$
28. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 1$

Los ejercicios 29 y 30 tratan acerca de la función continua f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y su gráfica se presenta en la figura adjunta. Suponga que cada parte de la gráfica que parece ser un segmento de recta es un segmento de recta. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) Defina f a trozos. Calcule (b) $f'_-(-2)$, (c) $f'_+(-2)$, (d) $f'_-(0)$, (e) $f'_+(0)$, (f) $f'_-(2)$ y (g) $f'_+(2)$. (h) ¿En qué números f no es diferenciable?

29.

30



En los ejercicios 31 y 32, dibuje la gráfica de una función continua f cuyo dominio sea el conjunto de todos los números reales, la cual satisface las propiedades indicadas.

31. La función f es diferenciable en cualquier número excepto en -2 y 2; $f(x) > 0$ si $x < -2$; $f(-2) = 0$; $0 < f(x) < 3$ si $-2 < x < 2$; $f(0) = 3$; $f(2) = 0$; $f(x) < 0$ si $x > 2$; $f'_-(-2) = 1$; $f'(0) = 0$; $f'_-(2) = -1$; $f'_+(2) = -2$,

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\infty.$$

32. La función f es diferenciable en cualquier número excepto en -1, 0, y 1; el contradominio de f es $(-\infty, +\infty)$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = 3$; $f'_-(-1) = 1$; $f'_+(-1) = 2$; $f'_-(1) = 0$; $f'_+(1) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$.

33. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x - 1$ en el punto $(2, 1)$ y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

34. Obtenga una ecuación de la recta normal a la curva $y = \dfrac{8x}{x^2 + 3}$ en el punto $(3, 2)$ y apoye su respuesta trazando la recta y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

35. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que tengan pendiente $\frac{1}{2}$, y apoye su respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

36. Determine una ecuación de la recta normal a la curva $x - y = \sqrt{x + y}$ en el punto $(3, 1)$.

37. Obtenga ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en el punto $(2, 1)$.

38. Encuentre ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 8 \operatorname{sen}^3 2x$ en el punto $(\frac{1}{12}\pi, 1)$ y apoye su respuesta trazando las rectas y la curva en el mismo rectángulo de inspección.

39. Demuestre que la recta tangente a la curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$ también es tangente a la curva en otro punto, y determine ese punto.

40. Demuestre que las rectas tangentes a las curvas

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$$

y

$$x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

son perpendiculares en el origen.

41. Encuentre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ si $y = \sqrt{3 - 2x}$

42. Sea $\dfrac{dy}{dx} = y^k$, donde k es una constante y y es una función de x. Exprese $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en términos de y y k.

43. Sea $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$. Para qué valores de x se tiene que $f''(x) > 0$?

44. Determine la tasa de variación de y con respecto a x en el punto $(3, 2)$ si $7y^2 - xy^3 = 4$.

En los ejercicios 45 y 46, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde s metros es la distancia dirigida de la partícula desde un punto O a los t segundos. El sentido positivo se considera hacia la derecha. Determine los intervalos de tiempo en los que el movimiento es hacia la derecha y en los que es a la izquierda. También determine cuándo la partícula cambia su sentido. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 2 de la sección 2.5, eligiendo los valores de t al azar pero de modo que incluya los valores de t donde la partícula cambia de sentido. Apoye los resultados simulando el movimiento de la partícula en la graficadora.

45. $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t - 5$

46. $s = \dfrac{t - 1}{t^2 - 2t + 5}$

En los ejercicios 47 y 48, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde a los t segundos s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad, y a metros por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. Calcule v y a en términos de t. Elabore una tabla semejante a la tabla 3 de la sección 2.5 que proporcione una descripción de la posición y movimiento de la par-

tícula. Incluya en la tabla los intervalos de tiempo en los que la partícula se mueve a la izquierda y en los que se mueve a la derecha; los intervalos en los que la velocidad es creciente y en los que es decreciente; los intervalos en los que la rapidez es creciente y en los que es decreciente; y la posición de la partícula con respecto al origen durante estos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento del movimiento mediante una figura similar a la figura 10 de la sección 2.5. Apoye los resultados simulando el movimiento de la partícula en la graficadora.

47. $s = 4 - 9t + 6t^2 - t^3 \quad t \geq 0$

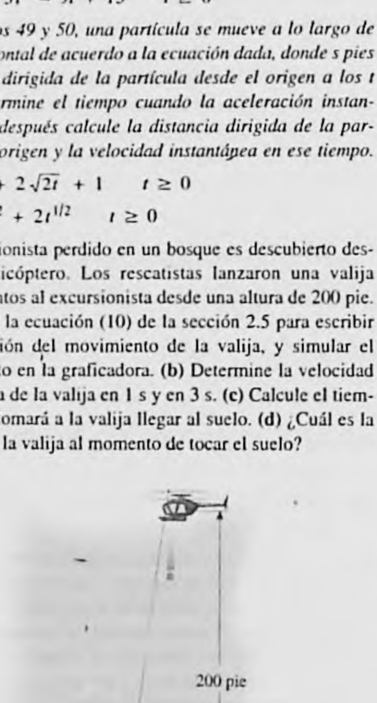
48. $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 13 \quad t \geq 0$

En los ejercicios 49 y 50, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación dada, donde s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine el tiempo cuando la aceleración instantánea es cero, después calcule la distancia dirigida de la partícula desde el origen y la velocidad instantánea en ese tiempo.

49. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t} + 1 \quad t \geq 0$

50. $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2} \quad t \geq 0$

51. Un excursionista perdido en un bosque es descubierto desde un helicóptero. Los rescatistas lanzaron una valija con alimentos al excursionista desde una altura de 200 pie. **(a)** Utilice la ecuación (10) de la sección 2.5 para escribir una ecuación del movimiento de la valija, y simular el movimiento en la graficadora. **(b)** Determine la velocidad instantánea de la valija en 1 s y en 3 s. **(c)** Calcule el tiempo que le tomará a la valija llegar al suelo. **(d)** ¿Cuál es la rapidez de la valija al momento de tocar el suelo?



52. Realice el ejercicio 51 considerando ahora que la valija con alimentos se lanza hacia abajo desde el helicóptero con una velocidad inicial de 20 pie/s.

53. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 112 pie de altura con una velocidad inicial de 96 pie/s. **(a)** Emplee la ecuación (10) de la sección 2.5 para escribir una ecuación del movimiento de la pelota, y simular el movimiento en la graficadora. **(b)** Estime qué tan alto llegará la pelota y cuánto tiempo le tomará alcanzar el punto más alto. **(c)** Confirme las estimaciones del inciso (b) analíticamente. **(d)** Estime cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al suelo. **(e)** Confirme la estimación del inciso (d) analíticamente. **(f)** Calcule la velocidad instantánea de la pelota a los 2 s y a los 4 s. **(g)** Determine la rapidez de la pelota a los 2 s y a los 4 s. **(h)** Obtenga la velocidad instantánea de la pelota cuando ésta alcanza el suelo.

En los ejercicios 54 a 56, una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo a la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v metros por segundo es la velocidad, y a metros por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. (a) Calcule v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

54. $s = 5 - 2\cos^2 t$

55. $s = \cos 2t + 2\,\text{sen}\, 2t$

56. $s = \text{sen}(4t + \frac{1}{3}\pi) + \text{sen}(4t + \frac{1}{6}\pi)$

57. Un fabricante puede obtener una ganancia de \$200 por cada artículo que no exceda a los 800 artículos producidos cada semana. La ganancia disminuye \$0.20 por artículo que exceda los 800. **(a)** Obtenga un modelo matemático que exprese la ganancia semanal del fabricante como una función del número de artículos producidos cada semana. Aunque la variable independiente, por definición, represente un número entero no negativo, considere que ésta denota un número real no negativo a fin de que se cumplan los requisitos necesarios para la continuidad. **(b)** Demuestre que la función del inciso (a) es continua en su dominio. **(c)** Determine si la función del inciso (a) es diferenciable en 800.

58. La ley de Stefan establece que un cuerpo emite energía radiante de acuerdo a la fórmula $R = kT^4$, donde R es la medida de la tasa de emisión de la energía radiante por unidad cuadrada de área, T es la medida de la temperatura Kelvin de la superficie, y k es una constante. Calcule **(a)** la tasa promedio de variación de R con respecto a T cuando T crece de 200 a 300; **(b)** la tasa instantánea de variación de R con respecto a T cuando $T = 200$.

59. Si A unidades cuadradas es el área de un triángulo rectángulo isósceles para el cual cada cateto mide x unidades de longitud, calcule **(a)** la tasa promedio de variación de A con respecto a x cuando x varía de 8.00 a 8.01; **(b)** la tasa instantánea de variación de A con respecto a x cuando $x = 8.00$.

60. Si $y = x^{2/3}$, calcule la tasa relativa de variación de y con respecto a x cuando **(a)** $x = 8$, y **(b)** $x = c$, donde c es una constante.

61. La ecuación de oferta para una calculadora es $y = m^2 + \sqrt{m}$, donde $100y$ calculadoras se suministran cuando el precio de cada calculadora es m dólares. Obtenga **(a)** la tasa promedio de variación de la oferta con respecto al precio cuando éste se incrementa de \$16 a \$17; **(b)** la tasa de variación instantánea (o marginal) de la oferta con respecto al precio cuando éste es de \$16.

62. El teorema del residuo de álgebra elemental establece que si $P(x)$ es un polinomio y x y r son cualesquiera dos números reales, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$. ¿Cuál es el valor de $\lim_{x \to r} Q(x)$?

63. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(-5)$ si $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$.

64. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(x)$ si $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

65. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{4x - 3}$.

66. Utilice la definición de derivada para calcular $f'(5)$ si $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

67. Determine $f'(\pi)$ si $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$.

68. Calcule $f''(x)$ si $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x$.

69. Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (|x + 1| - |x|)^2$.

70. Obtenga $f'(-3)$ si $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$.

En los ejercicios 71 y 72, la ecuación describe el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte que vibra verticalmente, donde s centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. (a) Obtenga la velocidad y la aceleración del cuerpo para cualquier t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento. (d) Simule el movimiento hacia arriba y hacia abajo del resorte en la graficadora. (e) Trace la gráfica de la ecuación de movimiento.

71. $s = 5 \operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi t$

72. $s = 6 \cos \pi(4t - \frac{1}{2})$

En los ejercicios 73 y 74, una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento dada, donde a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad y a pies por segundo es la aceleración. (a) Calcule v y a en términos de t. (b) Muestre que el movimiento es armónico simple. (c) Simule el movimiento en la graficadora.

73. $s = 2\cos(3t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen}(3t - \frac{1}{6}\pi)$

74. $s = 3 - 6 \operatorname{sen}^2 4t$

75. Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = \cos 2t + \cos t$, demuestre que el movimiento no es armónico simple.

76. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación de movimiento $s = \sqrt{a + bt^2}$, donde a y b son constantes positivas. Demuestre que la medida de la aceleración de la partícula es inversamente proporcional a s^3 para cualquier t.

77. Si $C(x)$ dólares es el costo total por fabricar x sillas, y $C(x) = x^2 + 40x + 800$, determine **(a)** la función de costo marginal; **(b)** el costo marginal cuando se producen 20 sillas; **(c)** El costo real por producir la silla 21.

78. La utilidad total recibida por la venta de x lámparas es $R(x)$ dólares y $R(x) = 100x - \frac{1}{6}x^2$. Calcule **(a)** la función de utilidad marginal; **(b)** la utilidad marginal cuando $x = 15$; **(c)** la utilidad real por la venta de la lámpara 16.

79. En un lago, un pez depredador se alimenta de un pez pequeño, y la población de depredadores en cualquier tiempo es una función del número de peces pequeños en el lago en ese tiempo. Suponga que cuando hay x peces pequeños en el lago, la población de depredadores es $y = \frac{1}{600\,000}x^2 - \frac{1}{100}x + 40$. Si la temporada de pesca terminó hace t semanas, $x = 300t + 375$. ¿A qué tasa crece la población de depredadores 10 semanas después de que se cerró la temporada de pesca. No exprese y en términos de t, utilice la regla de la cadena.

80. La ecuación de demanda para cierta barra de dulce es

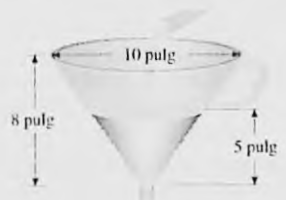
$$px + x + 20p = 3\,000$$

donde $1\,000x$ barras de dulce son requeridas por semana cuando p centavos es el precio por barra. Si el precio actual es de 49 centavos por barra y el precio por barra crece a una tasa de 0.2 centavos cada semana, determine la tasa de variación de la demanda.

81. Un barco zarpó a mediodía y viaja hacia el oeste a 20 nudos. A las 6 p.m. un segundo barco zarpó del mismo puerto y navega hacia el noroeste a 15 nudos. ¿Qué tan rápido se alejan los dos barcos cuando el segundo ha recorrido 90 millas náuticas?

82. Un recipiente mide 80 m de longitud y su sección tranversal es un trapecio isósceles con lados iguales de 10 m, base mayor de 17 m y base menor de 5 m. En el instante en que el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m, determine la tasa a la cual el agua escapa si su nivel disminuye a una tasa de 0.1 m/h.

83. Un embudo de forma cónica tiene un diámetro de 10 pulg en su parte superior y 8 pulg de profundidad. El agua entra al embudo a una tasa de 12 pulg^3/s y sale de él a una tasa de 4 pulg^3/s. ¿Qué tan rápido se eleva la superficie del agua cuando ésta tiene una profundidad de 5 pulg?



84. Conforme el último carro de un tren pasa debajo de un puente, un automóvil cruza, por encima del puente, las vías del ferrocarril en forma perpendicular a 30 pie encima de ellas. El tren se desplaza a una tasa de 80 pie/s y el automóvil a una tasa de 40 pie/s. ¿Qué tan rápido se separan el tren y el automóvil después de 2 s?

85. Un hombre de 6 pie de estatura camina hacia un edificio a una tasa de 4 pie/s. Si hay una lámpara en el piso a 40 pie del edificio, ¿qué tan rápido disminuye la sombra del hombre proyectada en el edificio cuando él está a 30 pie del edificio?

86. Una persona tiene una quemadura en su piel de forma circular. Si el radio de la quemadura decrece a una tasa de 0.05 cm por día, cuando éste es de 1.0 cm, ¿cuál es la tasa de decrecimiento del área de la quemadura en ese instante?

87. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 20 - x^2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Determine si f es continua en 3. **(c)** Determine si f es diferenciable en 3.

88. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{si } x < 4 \\ 8x - 32 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Determine si f es continua en 4. **(c)** Determine si f es diferenciable en 4.

89. Sea $f(x) = |x|^3$. **(a)** Dibuje la gráfica de f. **(b)** Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ si existe. **(c)** Obtenga $f'(0)$ si existe.

90. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$. **(a)** ¿En qué números es f diferenciable? **(b)** ¿Es f' continua en su dominio?

91. Sea

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

determine los valores de a y b tales que $f'(1)$ exista.

92. Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Determine los valores de a, b y c tales que $f''(1)$ exista.

93. Demuestre que la recta tangente en cualquier punto (x_1, y_1) de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es perpendicular a la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y el centro de la circunferencia.

94. Si $f(u) = \dfrac{1}{u^2}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x^3 - 6x + 1}}$, calcule la derivada de $f \circ g$ en dos formas: **(a)** primero obtenga $(f \circ g)(x)$ y después calcule $(f \circ g)'(x)$; **(b)** utilice la regla de la cadena.

95. Suponga que $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Demuestre que $f'(0)$ ni $g'(0)$ existen pero que $(f \circ g)'(0)$ existe.

96. Dé un ejemplo de dos funciones f y g de modo que f sea diferenciable en $g(0)$, que g no sea diferenciable en 0, y que $f \circ g$ sea diferenciable en 0.

97. Dé un ejemplo de dos funciones f y g de modo que f no sea diferenciable en $g(0)$, que g sea diferenciable en 0, y $f \circ g$ sea diferenciable en 0.

98. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

donde n es un número entero positivo. **(a)** ¿Para qué valores de n es f continua para todos los valores de x? **(b)** ¿Para qué valores de n es f diferenciable para todos los valores de x? **(c)** ¿Para qué valores de n es f' continua en todos los valores de x?

99. Si $f'(x)$ existe, demuestre que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

100. Sean f y g dos funciones cuyos dominios son el conjunto de todos los números reales. Además, suponga que **(i)** $g(x) = xf(x) + 1$; **(ii)** $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para toda a y b; **(iii)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

101. Si las dos funciones f y g son diferenciables en el número x_1, ¿es la función compuesta $f \circ g$ necesariamente diferenciable en el número x_1? Si la respuesta es sí, demuéstrelo. Si la respuesta es no, dé un contraejemplo.

102. Suponga que $g(x) = |f(x)|$. Si $f^{(n)}(x)$ existe y $f(x) \neq 0$, demuestre que

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x)$$

103. Demuestre que $D_x^{\,n}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$. *Sugerencia:* utilice inducción matemática y las fórmulas $\operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ o $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\operatorname{sen} x$ después de cada diferenciación.

104. Si $y = \dfrac{1}{1 - 2x}$, demuestre por medio de inducción matemática que $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{2^n\, n!}{(1 - 2x)^{n+1}}$

Comportamiento de las funciones y de sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

Capítulo 3

VISIÓN PRELIMINAR

3.1 Valores máximos y mínimos de funciones

3.2 Aplicaciones que involucran un extremo absoluto en un intervalo cerrado

3.3 Teorema del Rolle y teorema del valor medio

3.4 Funciones crecientes y decrecientes, y criterio de la primera derivada

3.5 Concavidad, puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada

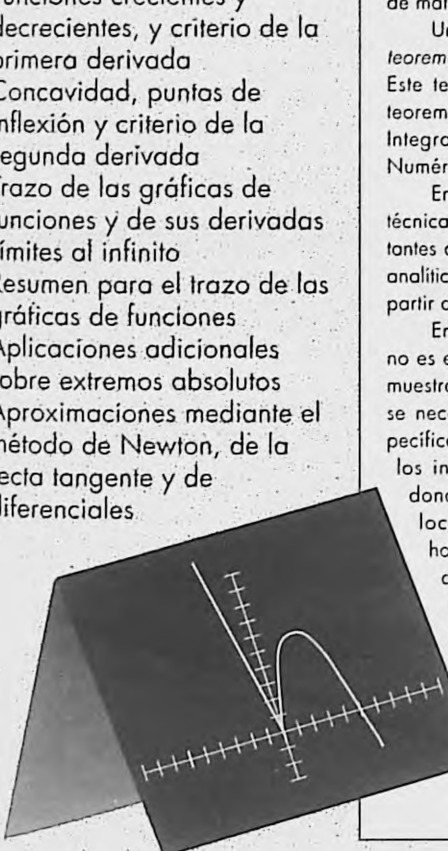
3.6 Trazo de las gráficas de funciones y de sus derivadas

3.7 Límites al infinito

3.8 Resumen para el trazo de las gráficas de funciones

3.9 Aplicaciones adicionales sobre extremos absolutos

3.10 Aproximaciones mediante el método de Newton, de la recta tangente y de diferenciales



La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y de sus gráficas. Se inicia la sección 3.1 con la definición y determinación de *valores de función máximos* y *mínimos*. Las aplicaciones del mundo real de máximos y mínimos se presentan en muchos campos diversos como lo averiguará cuando estudie las secciones 3.2 y 3.9. En particular, se determinará la viga más resistente que pueda cortarse de un tronco cilíndrico así como las dimensiones de la caja que requiere la mínima cantidad de material para un volumen específico.

Uno de los teoremas más importantes en Cálculo es el *teorema del valor medio* el cual se trata en la sección 3.3. Este teorema se utiliza en la demostración de muchos teoremas tanto del Cálculo Diferencial como del Cálculo Integral, así como de otras materias como el Análisis Numérico.

En las secciones 3.4 a 3.6 se aplica la derivada en técnicas para graficar funciones. Estas técnicas son importantes debido a que proporcionan medios de confirmación analítica que pueden aplicarse a las conjeturas obtenidas a partir de la graficadora.

En ocasiones, el comportamiento de cierta gráfica no es evidente, si pasa o no por ciertos puntos, según se muestra en la pantalla de la graficadora, de modo que se necesita el Cálculo para determinar propiedades específicas de las gráficas. Por ejemplo, la derivada revela los intervalos en donde la función es *creciente* y en donde es *decreciente*. La derivada también permite localizar los puntos donde la recta tangente es horizontal, así como determinar los intervalos en los que la gráfica está por arriba de la recta tangente y los intervalos en los que está por debajo de la recta tangente.

En la sección 3.7 se estudiarán los *límites al infinito* y se aplicarán en la determinación de *asíntotas horizontales* de las gráficas. En la sección final del capítulo se estudian tres procesos numéricos utilizados para aproximar valores de función.

3.1 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES

Una aplicación importante de la derivada es determinar dónde una función alcanza sus *valores máximos y mínimos (extremos)*. En esta sección se iniciará el estudio de los valores extremos de una función con los *extremos relativos*, *extremos absolutos* y el *teorema del valor extremo*. Las aplicaciones de estos conceptos se presentan en la próxima sección.

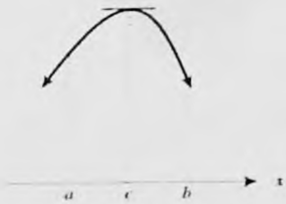


FIGURA 1

3.1.1 Definición de valor máximo relativo

La función f tiene un **valor máximo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

Las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor máximo relativo en c.

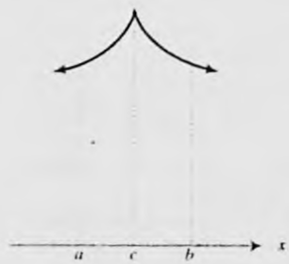


FIGURA 2

3.1.2 Definición de valor mínimo relativo

La función f tiene un **valor mínimo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x en este intervalo.

Las figuras 3 y 4 muestran una porción de la gráfica de una función que tiene un valor mínimo relativo en c.

Si una función tiene un valor máximo relativo o mínimo relativo en c entonces se dice que la función tiene un **extremo relativo** en c.

El teorema siguiente se utiliza para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo.

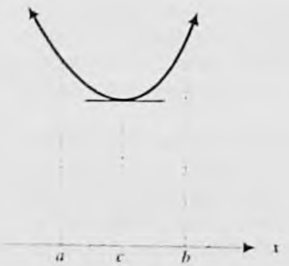


FIGURA 3

3.1.3 Teorema

Si $f(x)$ existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

La demostración de este teorema se dará al final de esta sección. En términos geométricos, el teorema establece que si f tiene un extremo relativo en c, y si $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de f debe tener una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$. Observe que esta situación se presenta en las gráficas de las figuras 1 y 3. El teorema también indica que si f es una función diferenciable, entonces los únicos números posibles c para los cuales f puede tener un extremo relativo son aquellos en los que $f'(c) = 0$.

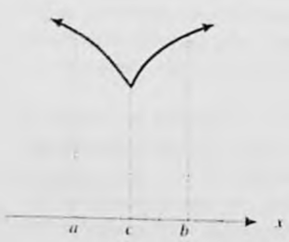


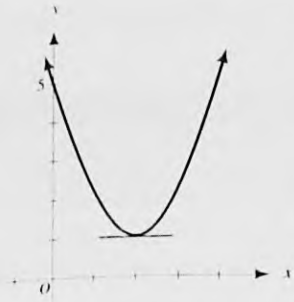
FIGURA 4

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Entonces $f'(x) = 2x - 4$. Como $f'(2) = 0$, f puede tener un extremo relativo en 2. Puesto que $f(2) = 1$ y $1 < f(x)$ cuando $x < 2$ o $x > 2$, la definición 3.1.2 garantiza que f tiene un valor mínimo relativo en 2. La f gura 5 muestra la gráfica de f, una parábola cuyo vértice está en el punto $(2, 1)$ en donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. ◀



$f(x) = x^2 - 4x + 5$

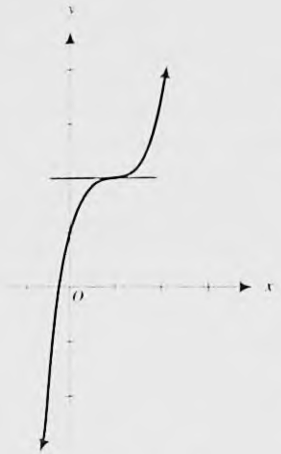
FIGURA 5

Observe que $f'(c)$ puede ser igual a cero aunque f no tenga un extremo relativo en c, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Considere la función f definida por

$$f(x) = (x - 1)^3 + 2$$

Entonces $f'(x) = 3(x - 1)^2$. Debido a que $f'(1) = 0$, f puede tener un extremo relativo en 1. Sin embargo, como $f(1) = 2$ y $2 > f(x)$ cuando $x < 1$, y $2 < f(x)$ cuando $x > 1$, no se puede aplicar ninguna de las definiciones 3.1.1 y 3.1.2. De modo que f no tiene un extremo relativo en 1. La gráfica de esta función, mostrada en la figura 6, tiene una recta tangente horizontal en el punto $(1, 2)$, lo cual es consistente con el hecho de que la derivada sea cero en ese punto. ◀



$f(x) = (x - 1)^3 + 2$

FIGURA 6

Una función puede tener un extremo relativo en un número en el que la derivada no exista. Esta situación se presenta para las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 2 y 4, así como para la función del ejemplo ilustrativo siguiente.

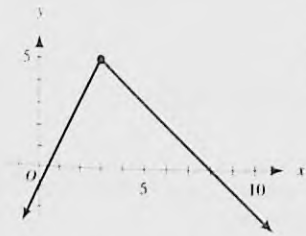
EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 7, la cual muestra que f tiene un valor máximo relativo en 3. La derivada por la izquierda en 3 está dada por $f'_-(3) = 2$, y la derivada por la derecha en 3 está determinada por $f'_+(3) = -1$. Por tanto, se concluye que $f'(3)$ no existe. ◀

El ejemplo ilustrativo 3 muestra por qué la condición "$f'(c)$ existe" debe incluirse en la hipótesis del teorema 3.1.3.

Es posible que una función pueda estar definida en un número c donde $f'(c)$ no exista y sin embargo, f no tenga un extremo relativo en ese número. El ejemplo ilustrativo siguiente presenta una de estas funciones.



$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$

FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Sea f la función definida por

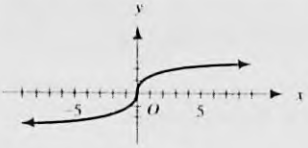
$$f(x) = x^{1/3}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{si } x \neq 0$$

Además, $f'(0)$ no existe. La figura 8 muestra la gráfica de f. La función no tiene extremos relativos. ◀

En resumen, si una función f está definida en un número c, una condición necesaria para que f tenga un extremo relativo en c es que $f'(c) = 0$



$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 8

o que $f'(c)$ no exista. Tenga en cuenta que esta condición es necesaria pero no suficiente.

3.1.4 Definición de número crítico

Si c es un número del dominio de la función f, y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces c es un **número crítico** de f.

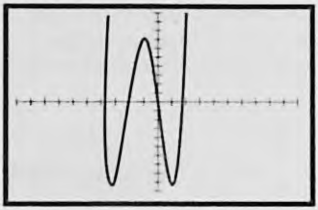
Debido a esta definición y a la discusión anterior, una condición necesaria, pero no suficiente, para que una función tenga un extremo relativo en c es que c sea un número crítico.

EJEMPLO 1 Sea f la función definida por

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$$

(a) Estime gráficamente con aproximación de décimos los números críticos de f.

(b) Confirme analíticamente las respuestas del inciso (a).



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

FIGURA 9

Solución

(a) Como $f(x)$ es un polinomio, $f'(x)$ existe en todo número. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos valores de x para los que $f'(x) = 0$, esto es, las coordenadas x de los puntos de la gráfica de f para los que la recta tangente es horizontal. La figura 9 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. En la graficadora la recta tangente parece horizontal en los puntos $(-3.0, -9.0)$, $(-1.0, 7.0)$ y $(1.0, -9.0)$. De este modo, se estima que los números críticos son -3.0, -1.0 y 1.0.

(b) Se calcula $f'(x)$, se iguala a cero y se despeja x.

$$\begin{aligned} 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 &= 0 \\ x^2(x + 3) - (x + 3) &= 0 \\ (x + 3)(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0 & \qquad x^2 - 1 &= 0 \\ x &= -3 & x^2 &= 1 \\ & & x &= \pm 1 \end{aligned}$$

De este modo se ha confirmado que los números críticos son -3, -1 y 1.

EJEMPLO 2

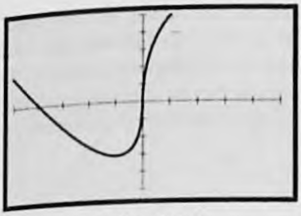
(a) Determine los números críticos de la función definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente en dos formas: **(b)** trace la gráfica de f; **(c)** trace la gráfica de NDER$(f(x), x)$.

Solución

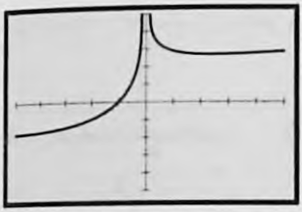
$$\textbf{(a)}\quad \begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \\ &= \frac{4(x + 1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 10



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

NDER $(x^{4/3} + 4x^{1/3}, x)$

FIGURA 11

Cuando $x = -1$, $f'(x) = 0$, y cuando $x = 0$, $f'(x)$ no existe. Tanto -1 como 0 están en el dominio de f; por tanto, los números críticos de f son -1 y 0.

(b) La figura 10 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. La gráfica parece tener una rectatangente horizontal en el punto $(-1, -3)$ y una recta tangente vertical en el punto $(0, 0)$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente es 0 cuando $x = -1$ y la recta tangente no tiene pendiente cuando $x = 0$. Estos hechos apoyan las respuestas del inciso (a).

(c) La figura 11 presenta la gráfica de NDER$(f(x), x)$ trazada en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. Como la gráfica de $f'(x)$ intersecta al eje x en $(-1, 0)$, $f'(-1) = 0$. La gráfica de $f'(x)$ tiene al eje y como asíntota vertical, lo cual indica que $f'(0)$ no existe. De nuevo, esto apoya las respuestas del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine los números críticos de la función definida por

$$g(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Solución Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \\ g'(x) &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2 \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

Puesto que $g'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos son aquellos para los que $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$ cuando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{donde } k \text{ es cualquier número entero}$$

así, los números críticos de g son $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, donde k es cualquier número entero. ◀

Con frecuencia se trata con funciones definidas en un intervalo dado, y se desea determinar el valor de función más grande o más pequeño en el intervalo. Estos intervalos pueden ser cerrados, abiertos o cerrados en un extremo y abiertos en el otro. El valor más grande de la función en un intervalo se denomina *valor máximo absoluto*, y el valor más pequeño de la función en el intervalo se llama *valor mínimo absoluto*. A continuación se dan las definiciones precisas.

3.1.5 Definición de valor máximo absoluto en un intervalo

La función f tiene un **valor máximo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f en el intervalo.

3.1.6 Definición de valor mínimo absoluto en un intervalo

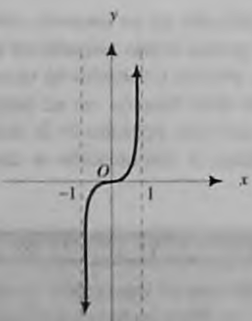
La función f tiene un **valor mínimo absoluto en un intervalo** si existe algún número c en el intervalo tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda x del intervalo. El número $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo.

$f(x) = 2x \quad x \in [1, 4)$

FIGURA 12

$f(x) = -x^2 \quad x \in (-3, 2]$

FIGURA 13



$f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2} \quad x \in (-1, 1)$

FIGURA 14

Un **extremo absoluto** de una función en un intervalo es un valor máximo absoluto o un valor mínimo absoluto de la función en el intervalo. Una función puede o no tener un extremo absoluto en un intervalo particular. En cada uno de los ejemplos ilustrativos siguientes se dan un intervalo y una función, y se determinan los extremos absolutos de la función en el intervalo, si es que existe alguno.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Suponga que f es la función definida por

$$f(x) = 2x$$

La gráfica de f en el intervalo $[1, 4)$ se presenta en la figura 12. Esta función tiene un valor mínimo absoluto de 2 en $[1, 4)$. No existe un valor máximo absoluto de f en $[1, 4)$ porque $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$, pero $f(x)$ siempre es menor que 8 en el intervalo dado.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Considere la función f definida por

$$f(x) = -x^2$$

La gráfica de f en el intervalo $(-3, 2]$ se muestra en la figura 13. Esta función tiene valor máximo absoluto de 0 en $(-3, 2]$. No existe un valor mínimo absoluto de f en $(-3, 2]$ debido a que $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -9$, pero $f(x)$ siempre es mayor que -9 en el intervalo dado.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 La función f definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto en el intervalo $(-1, 1)$. La figura 14 muestra la gráfica de f en $(-1, 1)$. Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

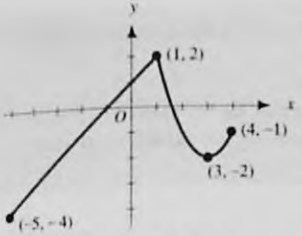
EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

La gráfica de f en $[-5, 4]$ se presenta en la figura 15. El valor máximo absoluto de f en $[-5, 4]$ ocurre en 1, y $f(1) = 2$; el valor mínimo absoluto de f en $[-5, 4]$ ocurre en -5, y $f(-5) = -4$. Observe que f tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. También note que 1 es un número crítco de f porque $f'(1)$ no existe, y 3 es un número crítico de f porque $f'(3) = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 9 La función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

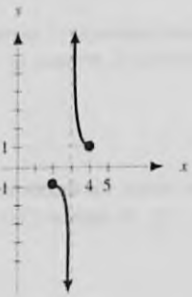


$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad x \in [-5, 4]$

FIGURA 15

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo obsoluto en [2, 4]. La figura 16 muestra la gráfica de f en este intervalo. Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $f(x)$ puede hacerse menor que cualquier número negativo tomando $3 - x > 0$ y menor que una δ positiva adecuada. También se tiene que $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, de modo que $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier número positivo tomando $x - 3 > 0$ y menor que una δ positiva conveniente. ◀

Se puede hablar del extremo absoluto de una función cuando no se ha especificado ningún intervalo. En tal caso se hace referencia al extremo absoluto de la función en su dominio.



$f(x) = \dfrac{1}{x - 3} \quad x \in [2, 4], x \neq 3$

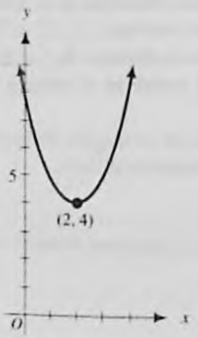
FIGURA 16

EJEMPLO ILUSTRATIVO 10 La gráfica de la función f definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

es la parábola mostrada en la figura 17. El punto más bajo de la parábola es el punto (2, 4), y la parábola abre hacia arriba. La función tiene un valor mínimo absoluto de 4 en $x = 2$. No existe el valor máximo absoluto de f. ◀

Con referencia a los ejemplos ilustrativos 5-10, se aprecia que el único caso en el que existen tanto el valor máximo absoluto como el valor mínimo absoluto de la función es en el ejemplo ilustrativo 8, donde la función es continua en el intervalo cerrado [−5, 4]. En los otros ejemplos ilustrativos no se tiene un intervalo cerrado o no se tiene una función continua. Si una función es continua en un intervalo cerrado, un teorema, llamado *teorema del valor extremo*, asegura que la función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. La demostración de este teorema, más allá del alcance de este texto y puede encontrarse en algún libro de Cálculo avanzado.



$f(x) = x^2 - 4x + 8$

FIGURA 17

3.1.7 Teorema del valor extremo

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$.

El teorema del valor extremo establece que la continuidad de una función en un intervalo cerrado es una condición suficiente para garantizar que la función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Sin embargo, no es una condición necesaria. Por ejemplo, la función cuya gráfica se muestra en la figura 18 tiene un valor máximo absoluto en $x = c$ y un valor mínimo absoluto en $x = d$, aunque la función es discontinua en el intervalo abierto (−1, 1).

Un extremo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado debe ser un extremo relativo o un valor de función en un extremo del intervalo. Debido a que una condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un número c es que c sea un número crítico, de modo que el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ puede determinarse mediante el procedimiento siguiente:

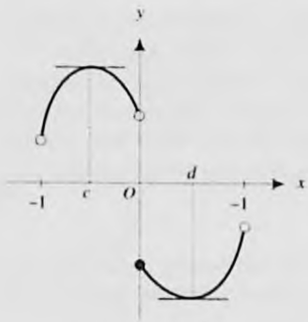


FIGURA 18

1. Determine los valores de la función en los números críticos de f en (a, b).
2. Determine los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
3. El mayor de los valores determinados en los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto, y el menor de los valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 4 Determine los extremos absolutos de f en $[-2, 3]$ si

$$f(x) = x^3 - 6x - 1$$

y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Como f es continua en $[-2, 3]$, puede aplicarse el teorema del valor extremo. Para determinar los números críticos de f, primero se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

Debido a que $f'(x)$ existe para todos los números reales, los únicos números críticos serán los valores de x para los que $f'(x) = 0$. Al igualar $f'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{2} \\ x &\approx \pm 1.41 \end{aligned}$$

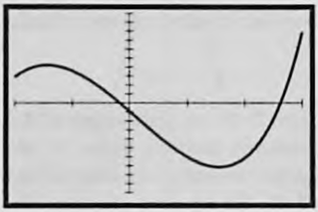
De modo que los números críticos de f son aproximadamente ± 1.41 y cada uno de estos números está en el intervalo cerrado $[-2, 3]$. Los valores de función de los números críticos y de los extremos se muestran en la tabla 1.

Tabla 1

x	-2	-1.41	1.41	3
$f(x)$	3	4.66	-6.66	8

Por tanto, el valor máximo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es 8, el cual ocurre en el extremo derecho 3, y el valor mínimo absoluto de f en el intervalo $[-2, 3]$ es aproximadamente -6.66, el cual ocurre en el número crítico 1.41.

La figura 19 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-2, 3]$ por $[-10, 10]$. Esta gráfica apoya las respuestas dadas. ◀



$[-2, 3]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = x^3 - 6x - 1$

FIGURE 19

EJEMPLO 5 Estime gráficamente los extremos absolutos de f en $[1, 5]$ si

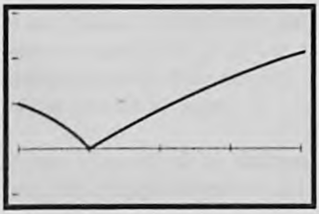
$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

y confirme las respuestas analíticamente.

Solución La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[1, 5]$ por $[-1, 3]$ se muestra en la figura 20. De la gráfica, el valor mínimo absoluto es 0 y ocurre en $x = 2$. El valor máximo absoluto se tiene en el extremo derecho 5, y en la calculadora, se estima que $f(5) = 2.08$.

Al aplicar el teorema del valor extremo se confirman las respuestas analíticamente, puesto que f es continua en $[1, 5]$. Como

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$



$[1, 5]$ por $[-1, 3]$

$f(x) = (x - 2)^{2/3}$

FIGURA 20

Tabla 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

no existe valor de x para el cual $f'(x) = 0$. Sin embargo, como $f'(x)$ no existe en 2, se concluye que 2 es un número crítico de f; de modo que el valor mínimo absoluto ocurre en 2 o en un extremo del intervalo. Los valores de función de estos números se muestran en la tabla 2.

De la tabla se concluye que el valor mínimo asbsoluto de f en $[1, 5]$ es 0 y el valor máximo absoluto es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, lo que confirma las respuestas anteriores. ◀

Antes de demostrar el teorema 3.1.3, como se indicó, se probará un teorema preliminar que se utilizará en la demostración del teorema 3.1.3, así como en las demostraciones de otros teoremas.

3.1.8 Teorema

(i) Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe y es positivo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) > 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

(ii) Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe y es negativo, entonces existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $f(x) < 0$ para toda $x \neq c$ del intervalo.

Demostración del inciso (i) Sea $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, donde, por hipótesis, $L > 0$. Al aplicar la definición de límite (1.5.1) con $\epsilon = \frac{1}{2}L$, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}L \tag{1}$$

Como $0 < |x - c| < \delta$ equivale a la proposición

$$x \text{ está en el intervalo abierto } (c - \delta, c + \delta) \text{ donde } x \neq c \tag{2}$$

y $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ equivale a la desigualdad continua

$$\tfrac{1}{2}L < f(x) < \tfrac{3}{2}L \tag{3}$$

Si se sustituyen (2) y (3) en (1), se tiene la proposición

si x está en el intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, donde $x \neq c$,
entonces $\frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L$

Como $L > 0$, esta proposición significa que $f(x) > 0$ para cada $x \neq c$ del intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$. ■

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 57).

Demostración del teorema 3.1.3 Se desea probar que si $f(x)$ existe para todos los valores de x del intervalo abierto (a, b), y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Suponga que $f'(c) \neq 0$. Entonces $f'(c) > 0$ o $f'(c) < 0$. Si $f'(c) > 0$ entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Por tanto, por el teorema 3.1.8 (i), existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \tag{4}$$

para toda $x \neq c$ en I. Además,

$$f(x) - f(c) = (x - c)\,\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si } x \neq c \tag{5}$$

De (4), el cociente del miembro derecho de (5) es positivo si x está en I. Por tanto, de (5) se concluye que si x está en I, entonces $f(x) - f(c)$ y $x - c$ tienen el mismo signo; esto es

$$f(x) > f(c) \quad \text{si} \quad x > c \tag{6}$$

y

$$f(x) < f(c) \quad \text{si} \quad x < c \tag{7}$$

De (6), f no puede tener un valor máximo relativo en c y de (7) f no puede tener un valor mínimo relativo en c, lo cual contradice la hipótesis de que f tiene un extremo relativo en c.

Si $f'(c) < 0$, se obtiene una contradicción semejante. Se le pedirá que pruebe esto en el ejercicio 58.

Así, la suposición de que $f'(c) \neq 0$ conduce a una contradicción, por tanto, $f'(c) = 0$. ∎

EJERCICIOS 3.1

En los ejercicios 1 a 8, (a) trace la gráfica de la función y estime los números críticos de la función gráficamente. (b) Confirme las respuestas del inciso (a) analíticamente.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

2. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$

3. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$

4. $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$

5. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

6. $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x^2 - 9}$

7. $G(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$

8. $F(x) = (5 + x)^3(2 - x)^2$

En los ejercicios 9 a 14, (a) determine los números críticos de la función f analíticamente. Apoye las respuestas del inciso (a) en dos formas: (b) trace la gráfica de f; (c) trace la gráfica de NDER $(f(x), x)$.

9. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

10. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

11. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$

12. $f(w) = (w^3 - 3w^2 + 4)^{1/3}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x - 1}$

En los ejercicios 15 a 18, determine los números críticos de la función.

15. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$

17. $F(x) = \sec^2 3x$

18. $G(x) = \tan^2 4x$

En los ejercicios 19 a 38, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado; (b) determine los extremos absolutos de la función en el intervalo, si existe alguno, y determine los valores de x en los que ocurren los extremos absolutos.

19. $f(x) = 4 - 3x;\ (-1, 2]$

20. $f(x) = x^2 - 2x + 4;\ (-\infty, +\infty)$

21. $g(x) = \dfrac{1}{x};\ [-2, 3]$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x};\ [2, 3)$

23. $f(x) = 2\cos x;\ [-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$

24. $G(x) = -3\operatorname{sen} x;\ [0, \frac{3}{4}\pi)$

25. $f(x) = \sqrt{3 + x};\ [-3, +\infty)$

26. $f(x) = \sqrt{4 - x^2};\ (-2, 2)$

27. $h(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2};\ [2, 5)$

28. $g(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2};\ (-3, 2)$

29. $F(x) = |x - 4| + 1;\ (0, 6)$

30. $f(x) = |4 - x^2|;(-\infty, +\infty)$

31. $g(x) = \sqrt{4 + 7x},\ [0, 3)$

32. $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases};\ [-2, 1]$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 2 & \text{si } x = 5 \end{cases};\ [3, 5]$

34. $F(x) = U(x) - U(x - 1)$ donde

$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases};\ (-1, 1)$

35. $f(x) = x - [\![x]\!];\ (1, 3)$

36. $h(x) = 2x + [\![2x - 1]\!];\ (1, 2]$

37. $g(x) = \sec 3x;\ [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

38. $f(x) = \tan 2x;\ [-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

En los ejercicios 39 a 46, determine los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado mediante el método del ejemplo 4 y apoye las respuestas gráficamente.

39. **(a)** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-4, 0]$
    (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-3, 2]$

40. **(a)** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [0, 3]$
    (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16;\ [-1, 4]$

41. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t;\ [-\pi, \pi]$

42. $g(t) = \frac{1}{2}\csc 2t;\ [-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

43. $g(w) = \dfrac{w}{w + 2},\ [-1, 2]$

44. $f(r) = \dfrac{r + 5}{r - 3};\ [-5, 2]$

45. $f(x) = (x + 1)^{2/3};\ [-2, 1]$

46. $g(x) = 1 - (x - 3)^{2/3};\ [-5, 4]$

En los ejercicios 47 a 52, (a) estime gráficamente los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado. (b) Confirme las respuestas analíticamente mediante el método del ejemplo 5.

47. $f(x) = x^3 + 5x - 4;\ [-3, -1]$

48. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x;\ [-4, 4]$

49. $g(t) = 2 \sec \frac{1}{2}t;\ [-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

50. $f(t) = 3 \cos 2t;\ [\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi]$

51. $f(x) = (x - 1)^{1/3} + 4;\ [0, 2]$

52. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3},\ [0, 1]$

En los ejercicios 53 a 56, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado. (b) Determine los extremos absolutos de la función en el intervalo.

53. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -3 \leq x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases};\ [-3, 3]$

54. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - x^2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases};\ [-1, 4]$

55. $F(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases};\ [-3, 3]$

56. $G(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{si } -6 \leq x \leq -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{si } -4 < x \leq 0 \end{cases};\ [-6, 0]$

57. Demuestre el inciso (ii) del teorema 3.1.8.

58. Demuestre el teorema 3.1.3 con la suposición de que $f'(c) < 0$.

59. Si la función f es diferenciable en todo número y $f'(c) = 0$, ¿puede concluirse que f tiene un extremo relativo en c? Explique su respuesta.

60. Si la función f tiene un extremo relativo en el número c, ¿puede concluirse que $f'(c) = 0$? Explique su respuesta.

61. Describa cómo obtendría analíticamente los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado.

3.2 APLICACIONES QUE INVOLUCRAN UN EXTREMO ABSOLUTO EN UN INTERVALO CERRADO

Ahora se aplicará el teorema del valor extremo a problemas en los que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado. Como se dijo en la sección anterior, el teorema 3.1.7 asegura que una función continua en un intervalo cerrado tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Se mostrará el procedimiento para obtener los extremos absolutos de una función en el ejemplo ilustrativo siguiente, al considerar la situación discutida en el ejemplo 4 de la sección 1.3 y en el ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón

FIGURA 1

con dimensiones de 10 pulg por 17 pulg, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible. La figura 1 muestra uno de los trozos de cartón indicados y la figura 2 representa la caja. En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se mostró que si x pulgadas es la longitud de los lados de los cuadrados que se cortarán y $V(x)$ pulgadas cúbicas es el volumen de la caja, entonces

$$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$$

y el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$. Como V es continua en $[0, 5]$, se sabe, por el teorema del valor extremo, que en este intervalo V tiene un valor máximo absoluto, el cual ocurre en un número crítico o en un extremo del intervalo. Para obtener los números críticos se calcula $V'(x)$ y se determinan los valores de x para los que $V'(x) = 0$ o $V'(x)$ no existe.

$$V'(x) = 170 - 108x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos los valores de x . Al igualar $V'(x)$ a cero y despejar x se tiene

$$2(6x^2 - 54x + 85) = 0$$

$$x = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4(6)(85)}}{12}$$

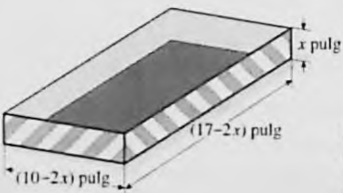


FIGURA 2

De donde se obtiene $x = 6.97$ y $x = 2.03$. De modo que el único valor crítico de V en $[0, 5]$ es 2.03. Como $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$, mientras que $V(2.03) = 156.03$, el valor máximo absoluto de V ocurre cuando $x = 2.03$. Este resultado puede apoyarse en la graficadora como se hizo en el ejemplo 4 de la sección 1.3.

<u>**Conclusión:**</u> El mayor volumen posible es 156.03 pulg^3, y se obtiene cuando la longitud de los lados de los cuadrados que se cortarán es de 2.03 pulg. ◀

FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 1*** Los puntos A y B están en las orillas de un río recto de 3 km de ancho y son opuestos uno del otro. El punto C está en la misma orilla que B pero a k kilómetros de B río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable de A a C donde el costo por kilómetro de cable en tierra es de \$10 000 y el de cable subacuático es de \$12 500. Sea P un punto en la misma orilla que B y C de modo que el cable se tienda de A a P y luego a C. Consulte la figura 3. **(a)** Si x kilómetros es la distancia de B a P, obtenga una ecuación que defina a $C(x)$ si $C(x)$ dólares es el costo total del cable tendido y establezca el dominio de C. **(b)** Si $k = 2$, estime en la graficadora el valor de x para el cual el costo del cable tendido sea el menor costo posible. Después confirme la estimación analíticamente.

Solución

(a) La distancia de P a C es $(k - x)$ kilómetros, y, del teorema de Pitágoras, la distancia de A a P es $\sqrt{3^2 + x^2}$ kilómetros. Por tanto,

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(k - x) \qquad (1)$$

El dominio de C es $[0, k]$.

(b) Con $k = 2$ en la ecuacion (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(2 - x) \tag{2}$$

con $x \in [0, 2]$. La gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 2]$ por $[0, 60\,000]$ se muestra en la figura 4, la cual indica que el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ ocurre en el extremo derecho. Al utilizar la tecla TRACE *(rastreo)* de la graficadora, se obtiene $C(2) = 45\,069$. Por tanto, se estima que el costo del cable tendido es mínimo cuando $x = 2$ y el costo mínimo es de \$45 069.

$[0, 2]$ por $[0, 60\,000]$

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(2 - x)$

FIGURA 4

Ahora se confirmará analíticamente esta estimación. Como C es continua en $[0, 2]$, se aplica el teorema del valor extremo; por lo que C tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en $[0, 2]$. Se desea determinar el valor mínimo absoluto. De la ecuación (2),

$$C'(x) = \frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000$$

$C'(x)$ existe para todos los valores de x. Al igualar $C'(x)$ a cero y resolver para x se tiene

$$\frac{12\,500x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10\,000 = 0$$

$$\begin{aligned} 12\,500x - 10\,000\sqrt{9 + x^2} &= 0 \\ 5x &= 4\sqrt{9 + x^2} \qquad (3) \\ 25x^2 &= 16(9 + x^2) \\ 9x^2 &= 16 \cdot 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

El número -4 es una raíz extraña de la ecuación (3), y 4 no está en el intervalo $[0, 2]$, lo cual indica que no existen números críticos de C en $[0, 2]$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ debe ocurrir en algún extremo del intervalo. Si se calcula $C(0)$ y $C(2)$, se obtiene

$$C(0) = 57\,500 \quad \text{y} \quad C(2) = 45\,069$$

De modo que el valor mínimo absoluto de C en $[0, 2]$ es 45 069 cuando $x = 2$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

Conclusión: El costo del cable es mínimo cuando éste se tiende directamente de A a C bajo el agua. ◀

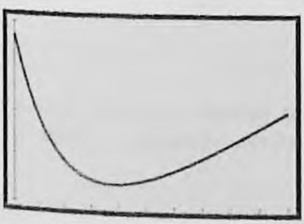
▶ *EJEMPLO 2*

Haga el inciso (b) del ejemplo 1 considerando ahora que $k = 10$.

Solución Con $k = 10$ en la ecuación (1), se tiene

$$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(10 - x) \tag{4}$$

para $x \in [0, 10]$. La figura 5 muestra la gráfica de esta ecuación trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[120\,000, 140\,000]$. Las coordenadas del punto más bajo de la curva son, aproximadamente, $(4, 122\,500)$. Por tanto, se estima que el costo del cable tendido, en este caso, es mínimo cuando $x = 4$ y el costo mínimo es de \$122 500.



$[0, 10]$ por $[120\,000, 140\,000]$

$C(x) = 12\,500\sqrt{9 + x^2} + 10\,000(10 - x)$

FIGURA 5

Esta estimación se confirma analíticamente en la misma forma en que se hizo en el ejemplo 1. De la ecuación (4), la expresión para $C'(x)$ es igual a la que se obtuvo de la ecuación (2). Por tanto, otra vez se obtiene $x = \pm 4$ cuando $C'(x)$ se iguala a cero y se resuelve para x. Como 4 está en el intervalo cerrado $[0, 10]$, ahora 4 es un número crítico de C. Si se calculan $C(0)$, $C(4)$ y $C(10)$ se obtiene

$$C(0) = 137\,500 \qquad C(4) = 122\,500 \qquad C(10) = 130\,504$$

En consecuencia, el valor mínimo absoluto de C en $[0, 10]$ es 122 500 cuando $x = 4$, lo cual confirma lo estimado anteriormente.

<u>Conclusión:</u> En este caso, el costo del cable es mínimo cuando se tiende de A a P el cual debe estar a 4 km de B. ◀

Para la función C definida por la ecuación (1) con $x \in [0, k]$, se mostró en el ejemplo 1 que cuando $k = 2$, el valor mínimo absoluto de C ocurre en el extremo derecho del intervalo $[0, 2]$ mientras que en el ejemplo 2, cuando $k = 10$, se mostró que el valor mínimo absoluto de C ocurre en el intervalo abierto $(0, 10)$. En el ejercicio 36 se le pedirá que determine los valores de k para los que el valor mínimo absoluto de C ocurrirá en un número del intervalo abierto $(0, k)$.

▶ ***EJEMPLO 3*** Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un río y se desea delimitar de modo que no se utilice cerca a lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$12 por pie colocado y \$18 por pie colocado para al lado paralelo al río, determine las dimesiones del terreno de mayor área posible que pueda limitarse con \$5 400 de cerca. Apoye gráficamente a la respuesta.

FIGURA 6

Solución Sean x pies la longitud de los lados del terreno no paralelos al río, y pies la longitud del lado paralelo al río y A pies cuadrados el área del terreno. Refiérase a la figura 6. En consecuencia,

$$A = xy \tag{5}$$

Como el costo del material para cada lado no paralelo al río es de \$12 por pie colocado y la longitud de estos lados es x pies, entonces el costo total de la cerca para cada uno de estos lados es $12x$ dólares. De manera similar, el costo de la cerca del tercer lado es $18y$ dólares. Por tanto,

$$12x + 12x + 18y = 5\,400 \tag{6}$$

A fin de expresar A en términos de sólo una variable, se resuelve (6) para y en términos de x y se sustituye este valor en (5), obteniéndose A como una función de x. Así

$$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x) \tag{7}$$

De (6), si $y = 0$, $x = 225$, y si $x = 0$, $y = 300$. Puesto que x y y no deben ser negativos, el valor de x que hará de A un máximo absoluto, debe estar en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Como A es continua en el intervalo $[0, 225]$

por el teorema del valor extremo, A tiene valor máximo absoluto en el intervalo. De (7), se tiene

$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$
$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x$$

Como $A'(x)$ existe para todo x, los números críticos de A se determinan al considerar $A'(x) = 0$, de lo que se obtiene

$$x = 112.5$$

El único número crítico de A es 112.5, el cual se encuentra en el intervalo cerrado $[0, 225]$. Por lo que el valor máximo absoluto de A debe ocurrir en 0, 112.5 o 225. Debido a que $A(0) = 0$, $A(225) = 0$ y $A(112.5) = 16\,875$, el valor máximo absoluto de A en $[0, 225]$ es 16 875, el cual ocurre cuando $x = 112.5$ y $y = 150$ (obtenido de (6) al sustituir 112.5 por x).

Con el fin de apoyar gráficamente la respuesta, se traza la gráfica de la función A definida por la ecuación (7) en el rectángulo de inspección de $[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$, como se muestra en la figura 7. Se determina que el punto más alto de la gráfica es $(112.5, 16\,875)$, lo cual confirma la respuesta.

$[0, 225]$ por $[0, 20\,000]$

$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x)$

FIGURA 7

Conclusión: El terreno de mayor área posible que se puede encerrar con \$5 400 de cerca tiene un área de 16 875 pie^2, obtenido cuando la longitud del lado paralelo al río mide 150 pie y la longitud de cada lado no paralelo al río es de 112.5 pie. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** En el ejemplo 6 de la sección 1.3, se tuvo la situación siguiente: En una comunidad de 8 000 personas, la tasa a la cual se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de persona que han escuchado el rumor y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste se difunde a una tasa de 200 personas por hora. Determine analíticamente cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste se difunde a la mayor tasa posible.

Solución En la sección 1.3 se obtuvo el modelo matemático

$$f(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000x - x^2)$$

donde $f(x)$ personas por hora es la tasa a la que se difunde el rumor cuando x personas lo han escuchado. Puesto que la comunidad tiene una población de 8 000, x está en el intervalo cerrado $[0, 8\,000]$. A fin de aplicar el concepto de continuidad, se considerará que x es cualquier número real de este intervalo. Como $f(x)$ es un polinomio, entonces f es continua en $[0, 8\,000]$, por lo que puede aplicarse el teorema del valor extremo. Al calcular $f'(x)$ se tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{798}(8\,000 - 2x)$$

El único número crítico de f se tiene cuando $f'(x) = 0$, y es $x = 4\,000$. Como

$$f(0) = 0 \qquad f(4\,000) = 20\,050.1 \qquad f(8\,000) = 0$$

el valor máximo absoluto de f ocurre cuando $x = 4\,000$. Este valor de x es acorde con el que se obtuvo gráficamente en la sección 1.3.

Conclusión: El rumor se difunde a la mayor tasa posible cuando 4 000 personas, la mitad de la población, han escuchado el rumor. ◀

EJEMPLO 5 En el ejemplo 4 de la sección 2.2 se tuvo la situación siguiente: En la planeación de una cafetería, la ganancia diaria se estima en \$16 por lugar si la capacidad es de 40 a 80 lugares. Sin embargo, si la capacidad es mayor que 80 lugares, la ganancia diaria por lugar disminuirá en \$0.08 veces el número de lugares que exceden a 80. ¿Cuál debe ser la capacidad de la cafetería de modo que se obtenga la máxima ganancia diaria?

Solución En la sección 2.2 se obtuvo el modelo matemático

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 22.40x - 0.08x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

donde $P(x)$ dólares es la ganancia diaria de la cafetería cuando su capacidad es de x lugares. Además, en la sección 2.2, se consideró que x toma todos los valores reales de su dominio $[40, 280]$ y se mostró que P es continua en el intervalo cerrado y que no es diferenciable en 80.

De la continuidad de P en $[40, 280]$, el teorema del valor extremo garantiza que P tiene un valor máximo absoluto en ese intervalo. Como $P'(80)$ no existe, 80 es un número crítico de P. Para determinar cualquier otro número crítico de P, se calcula $P'(x)$:

$$P'(x) = \begin{cases} 16 & \text{si } 40 < x < 80 \\ 22.40 - 0.16x & \text{si } 80 < x < 280 \end{cases}$$

$P'(x) = 0$ cuando

$$\begin{aligned} 22.40 - 0.16x &= 0 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

Por lo que 140 es un número crítico de P. Enseguida se calcula $P(x)$ en los extremos del intervalo $[40, 280]$ y en los números críticos de P:

$$P(40) = 640 \quad P(80) = 1\,280 \quad P(140) = 1\,568 \quad P(280) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de P es 1 568 y ocurre cuando $x = 140$.

<u>Conclusión:</u> La capacidad de la cafetería debe ser de 140 lugares, lo que proporcionará una ganancia diaria de \$1 568.

EJEMPLO 6 **(a)** En la graficadora, estime las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en un cono circular recto cuyo radio mide 5 cm y su altura es de 12 cm. **(b)** Confirme analíticamente las estimaciones del inciso (a).

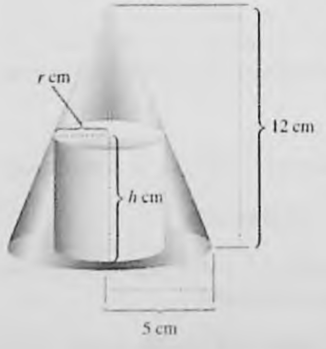


FIGURA 8

Solución

(a) Sean r centímetros la longitud del radio del cilindro, h centímetros su altura y V centímetros cúbicos su volumen.

La figura 8 muestra el cilindro inscrito en el cono, mientras que la figura 9 presenta una sección plana que contiene al eje del cono.

Si $r = 0$ y $h = 12$, se tiene un cilindro degenerado, el cual es el eje del cono. Si $r = 5$ y $h = 0$, también se tiene un cilindro degenerado, el cual es la base del cono. El número r está en el intervalo cerrado $[0, 5]$ y el número h pertenece al intervalo cerrado $[0, 12]$.

La fórmula siguiente expresa V en términos de r y h:

$$V = \pi r^2 h$$

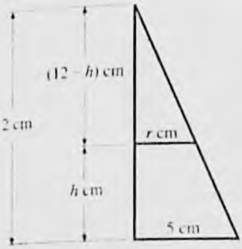


FIGURA 9

[0, 5] por [0, 150]

$V(x) = \frac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3)$

FIGURA 10

A fin de expresar V en términos de sólo una variable se necesita otra ecuación que contenga a r y h. De los triángulos semejantes de la figura 9, se tiene

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60 - 12r}{5} \tag{9}$$

Si se sustituye de (9) en la fórmula (8), se obtiene V como una función de r, lo que se escribe como

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad r \in [0, 5] \tag{10}$$

La figura 10 muestra la gráfica de V trazada en el rectángulo de inspección de [0, 5] por [0, 150]. En la graficadora, se determina que el punto más alto es (3.33, 139.63). Por tanto, se estima que el radio del cilindro circular recto mide 3.33 cm y, en consecuencia, de (9) se estima que su altura es de 4.01 cm.

(b) Para confirmar analíticamente las estimaciones, se aplica el teorema del valor extremo ya que V, definida por la ecuación (10), es continua en el intervalo cerrado [0, 5]. Se desea determinar los valores de r y h que proporcionen el valor máximo absoluto de V. De (10) se tiene

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Con objeto de determinar los números críticos de V, se considera $V'(r) = 0$ y se despeja r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad\qquad r = \tfrac{10}{3}$$

Como $V'(r)$ existe para todos los valores de r, los únicos números críticos de V son 0 y $\frac{10}{3}$, los cuales están en el intervalo cerrado [0, 5]. El valor máximo absoluto de V en [0, 5] debe ocurrir en 0, $\frac{10}{3}$ o 5. De (10) se obtiene

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de V es $\frac{400}{9}\pi = 139.63$, el cual se obtiene cuando $r = \frac{10}{3} \approx 3.33$. Cuando $r = \frac{10}{3}$, se obtiene de (9), $h = 4$. Estos resultados confirman las estimaciones anteriores y proporcionan los valores exactos de r y h.

Conclusión: El cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en el cono dado tiene un volumen de $\frac{400}{9}\pi$ cm^3, lo que ocurre cuando $r = \frac{10}{3}$ cm y $h = 4$ cm. ◀

EJERCICIOS 3.2

En estos ejercicios defina precisamente todas las variables como números. Asegúrese de escribir una conclusión al final de cada ejercicio.

1. Determine un número del intervalo $[\frac{1}{3}, 2]$ tal que la suma del número y su recíproco sea **(a)** un mínimo y **(b)** un máximo. Apoye gráficamente las respuestas.

2. Determine un número del intervalo $[-1, 1]$ tal que la diferencia del número menos su cuadrado sea **(a)** un máximo y **(b)** un mínimo. Apoye gráficamente las respuestas.

En los ejercicios 3 a 14, confirme analíticamente la estimación obtenida en la graficadora en el inciso (c) del ejercicio indicado de la sección 1.3.

3. Ejercicio 13 **4.** Ejercicio 14 **5.** Ejercicio 15

6. Ejercicio 16 **7.** Ejercicio 17 **8.** Ejercicio 18

9. Ejercicio 19 **10.** Ejercicio 20 **11.** Ejercicio 25

12. Ejercicio 26 **13.** Ejercicio 27 **14.** Ejercicio 28

15. ¿Cuántos estudiantes deben asistir a la excursión, del ejercicio 37 de la sección 2.2, para que la escuela reciba el máximo ingreso bruto?

16. ¿Cuántos estudiantes deben asistir a la excursión, del ejercicio 38 de la sección 2.2, para que la escuela reciba el máximo ingreso bruto?

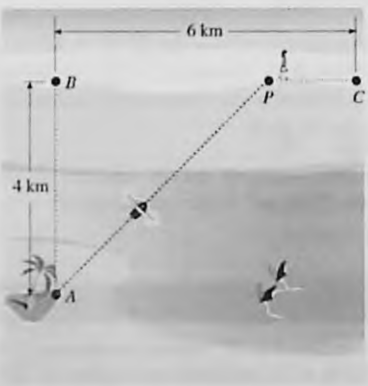
17. Del modelo matemático obtenido en el ejercicio 39 de la sección 2.2, determine cuántos naranjos deben plantarse por acre en California de modo que se obtenga el mayor número de naranjas.

18. ¿Cuántos miembros proporcionarán el mejor ingreso, debido a las cuotas anuales, al club privado del ejercicio 40 de la sección 2.2?

19. **(a)** Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 12 tales que su producto sea un máximo absoluto, y apoye gráficamente las respuestas. **(b)** Determine dos números no negativos cuya suma sea 12 tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo absoluto, y apoye gráficamente las respuestas.

20. Suponga que se tiene un cuerpo suspendido por debajo de la recta horizontal AB mediante un alambre en forma de Y. Si la distancia entre los puntos A y B es de 8 pie, **(a)** estime en la graficadora con aproximación de pies, la longitud más corta del alambre que pueda emplearse. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

21. Una isla está ubicada en el punto A, 4 km mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al punto C, a 6 km de B playa abajo. La mujer puede dirigirse hacia el punto P, entre B y C, en un bote de remos a 5 km/h y después caminar en forma recta de P a C a 8 km/h. **(a)** Estime en la graficadora la ruta de A a C que ella pueda recorrer en el menor tiempo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.



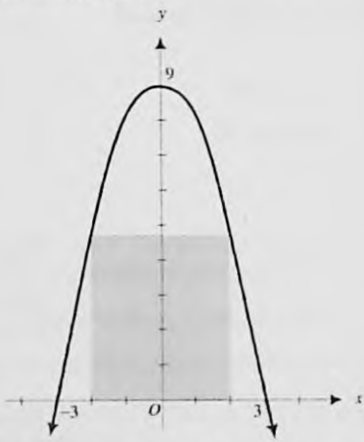
22. Resuelva el ejercicio 21 considerando ahora que el punto C está a 3 km de B playa abajo.

23. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor área lateral que pueda inscribirse en una esfera cuyo radio mide 6 pulg. **(b)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).

24. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en una esfera cuyo radio mide 6 pulg. **(b)** Confirme analíticamente la estimación del inciso (a).

25. Dada la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, determine **(a)** la distancia más corta del punto (4, 5) a un punto de la circunferencia, y **(b)** la distancia más grande del punto (4, 5) a un punto de la circunferencia. **(c)** Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) gráficamente.

26. **(a)** Determine el área del rectángulo más grande que tenga dos vértices en el eje x y los otros dos en la parábola $y = 9 - x^2$, por arriba del eje x. **(b)** Apoye gráficamente la respuesta del inciso (a).



27. Considere que la disminución de la presión sanguínea de una persona depende de la cantidad de cierta sustancia administrada a la persona. De modo que si se administran x miligramos de la sustancia, la disminución de la presión sanguínea es una función de x. Suponga que $f(x)$ define esta función y que

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(k - x)$$

si $x \in [0, k]$, donde k es una constante positiva. Determine el valor de x que ocasiona la mayor disminución de la presión sanguínea.

28. Al toser el radio de la tráquea de una persona disminuye. Suponga que el radio normal de la tráquea es de R centímetros, mientras que al toser, el radio de la misma es de r centímetros, donde R es una constante y r es una variable. La velocidad del aire a través de la tráquea puede expresarse como una función de r, y si $V(r)$ centímetros por segundo es esta velocidad, entonces

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

donde k es una constante positiva y r está en el intervalo $[\frac{1}{2}R, R]$. Determine el radio de la tráquea cuando se tose de modo que la velocidad del aire a través de la tráquea sea máxima.

29. La resistencia de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cuadrado de su espesor. Determine las dimensiones de la viga de mayor resistencia que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de 72 cm.

30. La rigidez de una viga rectangular es conjuntamente proporcional a su anchura y al cubo de su espesor. Determine las dimensiones de la viga de mayor rigidez que pueda cortarse de un tronco con forma de cilindro circular recto cuyo radio es de a centímetros.

31. Un trozo de alambre de 10 pie de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que **(a)** el área total de las dos figuras sea la mínima posible; **(b)** el área total de las dos figuras sea la máxima posible.

32. Resuelva el ejercicio 31 considerando ahora que una parte se dobla en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de cuadrado.

33. Si R pies es el alcance de un proyectil, entonces

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

donde v_0 pies por segundo es la velocidad inicial, g pie/s^2 es la aceleración debida a la gravedad, y θ es la medida en radianes del ángulo que el cañón forma con la horizontal. Determine el valor de θ que hace máximo el alcance del proyectil.

34. Si un cuerpo que pesa W libras se arrastra a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante mediante una fuerza de F libras de magnitud y dirigida un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces F está dada por la ecuación

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es una constante llamada *coeficiente de fricción* y $0 < k < 1$. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, determine $\cos \theta$ cuando F es mínima.

35. En una fábrica se elaboran dos productos, A y B. Si C es el costo total de producción de una jornada de 8 horas, entonces $C = 3x^2 + 42y$, donde x es el número de máquinas utilizadas en la elaboración del producto A, y y es el número de máquinas empleadas en la elaboración del producto B, y durante una jornada de 8 horas trabajan 15 máquinas. **(a)** Determine analíticamente cuántas de estas máquinas deben utilizarse para elaborar el producto A y cuántas para elaborar el producto B de modo que el costo total sea mínimo. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.

36. **(a)** En el ejemplo 1, ¿para qué valores de k ocurrirá el valor máximo absoluto de C en un número del intervalo abierto $(0, k)$? **(b)** Los ejemplos 1 y 2, y los ejercicios 21 y 22 son casos especiales del siguiente problema más general: Sea

$$f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x)$$

donde x está en el intervalo $[0, b]$ y $u > v > 0$. Demuestre que para que el valor máximo absoluto de f ocurra en un número del intervalo abierto $(0, b)$, se debe satisfacer la desigualdad siguiente: $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$.

3.3 TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Como se indicó en la introducción de este capítulo, uno de los teoremas más importantes del Cálculo es el *teorema del valor medio*, el cual se emplea en la demostración de muchos teoremas tanto de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral así como de otras materias como el Análisis Numérico. La demostración del *teorema del valor medio* está basada sobre un caso especial conocido como *teorema de Rolle*, el cual se discutirá primero.

FIGURA 1

El matemático francés **Michel Rolle** (1652–1719) demostró que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y si $f(a)$ y $f(b)$ son iguales a cero, entonces existe al menos un número c entre a y b para el cual $f'(c) = 0$.

A continuación se verá lo que significa geométricamente este teorema. La figura 1 muestra la gráfica de una función f que satisface las condiciones del párrafo anterior. Se aprecia intuitivamente que existe al menos un punto de la curva entre $(a, 0)$ y $(b, 0)$ en el que la recta tangente es paralela al eje x, esto es, la pendiente de la recta tangente es cero. Esta situación se ilustra en la figura 1 en el punto P. De modo que la abscisa de P es c, para la cual $f'(c) = 0$.

La función, cuya gráfica se muestra en la figura 1, no sólo es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) sino que también lo es en los extremos del intervalo. Sin embargo, la condición de que f sea diferenciable en los extremos del intervalo no es necesaria para que la gráfica tenga una recta tangente horizontal en algún punto del intervalo; la figura 2 ilustra esto. En la figura 2 se aprecia que la función no es diferenciable en a ni en b; sin embargo, existe la recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$, y c está entre a y b.

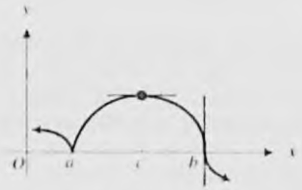


FIGURA 2

No obstante, es necesario que la función sea continua en los extremos del intervalo para garantizar una recta tangente horizontal en un punto interior del intervalo. La figura 3 muestra la gráfica de una función continua en el intervalo $[a, b)$ pero discontinua en b; la función es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y los valores de la función en los dos extremos son cero. Sin embargo, no existe un punto en el que la gráfica tenga una recta tangente horizontal.

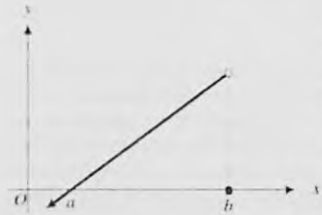


FIGURA 3

A continuación se establecerá y demostrará el teorema de Rolle.

3.3.1 Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

(i) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) es diferenciabe en el intervalo abierto (a, b);
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$.

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$

Demostración Se considerarán dos casos.

Caso 1: $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b); por tanto, cualquier número entre a y b puede considerarse como c.

Caso 2: $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b).

Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor máximo absoluto en $[a, b]$ y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Además, $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b). En consecuencia, f tendrá un valor máximo absoluto positivo en c_1 del intervalo (a, b), o un valor mínimo absoluto negativo en c_2 del intervalo (a, b), o ambos. Así, para $c = c_1$ o $c = c_2$, según sea el caso, existe un extremo absoluto en un punto interior del intervalo $[a, b]$. Por tanto, el extremo absoluto $f(c)$ es también un extremo relativo, y como $f'(c)$ existe por hipótesis, se deduce, por el teorema 3.1.3, que $f'(c) = 0$. Esto demuestra el teorema. ∎

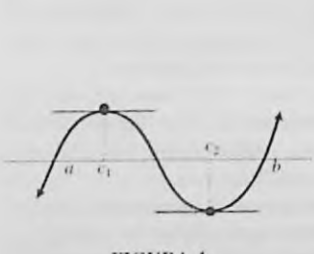


FIGURA 4

Puede haber más de un número en el intervalo abierto (a, b) para los cuales la derivada de f es cero. Esto se ilustra geométricamente en la figura 4 en la que se muestra una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c_1$ y también en el punto donde $x = c_2$, por lo que $f'(c_1) = 0$ y $f'(c_2) = 0$.

El recíproco del teorema de Rolle no es válido. Esto es, no se puede concluir que si una función f es tal que $f'(c) = 0$, con $a < c < b$, entonces las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen. Vea el ejercicio 36.

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = 4x^3 - 9x$$

verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle se satisfacen para cada uno de los intervalos siguientes: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ y $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Después haga una elección adecuada para c en cada uno de estos intervalos de modo que $f'(c) = 0$. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en el punto $(c, f(c))$.

Solución Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

Como $f'(x)$ existe para todos los valores de x, f es diferenciable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y por tanto, continua en en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Así, las condiciones (i) y (ii) del teorema de Rolle se cumplen en cualquier intervalo. A fin de determinar los intervalos en los que se cumple la condición (iii), se obtienen los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Si $f(x) = 0$, entonces

$$4x(x^2 - \tfrac{9}{4}) = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \tfrac{3}{2}$$

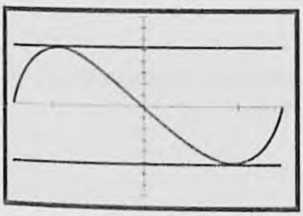
Con $a = -\frac{3}{2}$ y $b = 0$, el teorema de Rolle se cumple en $[-\frac{3}{2}, 0]$. De manera semejante, el teorema de Rolle se cumple en $[0, \frac{3}{2}]$ y $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Con el fin de determinar valores adecuados para c, considere $f'(x) = 0$, de donde se obtiene

$$12x^2 - 9 = 0$$
$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Por tanto, en el intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, una elección adecuada para c es $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. En el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$ se toma $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. En el intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ existen dos valores posibles para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ o $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

La figura 5, que muestra las gráficas de f y de las rectas tangentes horizontales en los puntos donde $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0.87$ y $x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.87$, trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1.5, 1.5]$ por $[-8, 8]$, apoya las elecciones de c. ◀



$[-1.5, 1.5]$ por $[-8, 8]$

$f(x) = 4x^3 - 9x$

FIGURA 5

Ahora se aplicará el teorema de Rolle en la demostración del teorema del valor medio. Debe conocer muy bien el significado de este teorema.

3.3.2 Teorema del valor medio

Sea f una función tal que

(i) es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;
(ii) es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demostrar este teorema, se interpretará geométricamente. Para-te. Para la gráfica de la función f, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente del segmento de recta que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. El teorema del valor medio establece que existe algún punto de la gráfica entre A y B en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por A y B; esto es, existe algún número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

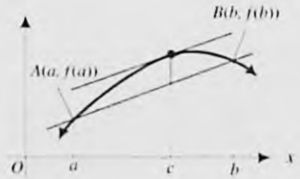


FIGURA 6

Refiérase a la figura 6.

Considere el eje x como el segmento AB y observe que el teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle, el cual se emplea en su demostración.

Demostración del teorema 3.3.2 Una ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B de la figura 6 es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Ahora, si $F(x)$ mide la distancia vertical entre el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función f y el punto correspondiente de la recta secante que pasa por A y B, entonces

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \tag{1}$$

Se mostrará que esta función F satisface las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle.

La función F es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ porque es la suma de f y una función lineal, las cuales son continuas. Por tanto, F satisface la condición (i). También F satisface la condición (ii) ya que f es diferenciable en (a, b). De (1), $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$. Por tanto, F satisface la condición (iii) del teorema de Rolle.

La conclusión del teorema de Rolle establece que existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $F'(c) = 0$. Pero

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De modo que

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En consecuencia, existe un número c en (a, b) tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En la mayoría de los casos no se puede determinar el valor exacto del número c garantizado por el teorema del valor medio. Sin embargo, el valor de c no es significativo porque el hecho crucial del teorema es que tal número c existe. Por esta razón, se dice que el teorema del valor medio es un **teorema de existencia**. Muchos conceptos importantes en matemáticas están basados en teoremas de existencia, otros ejemplos de estos teoremas son el teorema del valor intermedio y el teorema del valor extremo. La conclusión de un teorema de existencia usualmente asegura la existencia de uno o más números que tienen una propiedad específica, y el conocimiento de que el número existe es más significativo que determinar tal número.

El ejemplo siguiente, presentado para mostrar que se cumplen las condiciones del teorema del valor medio, implica una función para la cual es posible calcular el valor del número c garantizado por el teorema.

EJEMPLO 2

Sea

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

verifique que se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio para $a = 1$ y $b = 3$. Después determine un número c en el intervalo abierto $(1, 3)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f, la recta tangente en el punto donde $x = c$ y la recta secante que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$.

Solución Como f es una función polinomial, f es una función continua y diferenciable en cualquier número. Por tanto, se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio para cualesquiera a y b.

Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

Como $f(1) = -2$ y $f(3) = 12$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{12 - (-2)}{2}\\ &= 7\end{aligned}$$

Si se considera $f'(c) = 7$ se obtiene

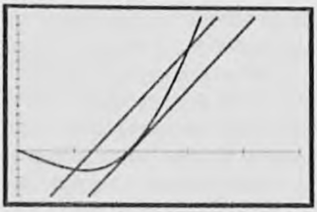
$$\begin{aligned}3c^2 - 2c - 2 &= 7\\ 3c^2 - 2c - 9 &= 0\end{aligned}$$

$$c = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$c = \frac{2 + \sqrt{112}}{6} \qquad c = \frac{2 - \sqrt{112}}{6}$$

$$\approx 2.10 \qquad\qquad \approx -1.43$$

Debido a que -1.43 no está en el intervalo abierto $(1, 3)$, el único valor posible para c es 2.10.



[0, 5] por [-5, 15]

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

FIGURA 7

La figura 7 muestra la gráfica de f, la recta tangente en el punto donde $x = 2.10$ y la recta secante que pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(3, 12)$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[0, 5]$ por $[-5, 15]$. El hecho de que la recta tangente es paralela a la recta secante apoya la elección de c como 2.10.

EJEMPLO 3

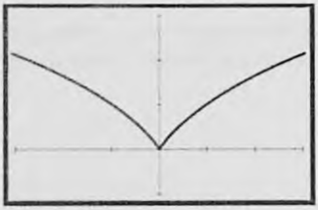
Sea

$$f(x) = x^{2/3}$$

trace la gráfica de f. Muestre analíticamente que no existe ningún número en el intervalo abierto $(-2, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

¿Qué condición de la hipótesis del teorema del valor medio no cumple f cuando $a = -2$ y $b = 2$?



$[-3, 3]$ por $[-1, 3]$

$f(x) = x^{2/3}$

FIGURA 8

Solución La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-1, 3]$ se muestra en la figura 8.

Al diferenciar f se tiene

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

De modo que

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

Además,

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4}$$

$$= 0$$

No existe ningún número c para el cual $\dfrac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

La función f es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$; no obstante, f no es diferenciable en el intervalo abierto $(-2, 2)$ porque $f'(0)$ no existe. Por tanto, la condición (ii) del teorema del valor medio no es satisfecha por f cuando $a = -2$ y $b = 2$.

El ejemplo siguiente muestra el poder del teorema del valor medio.

EJEMPLO 4

Utilice el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces $\operatorname{sen} x < x$.

Solución Si $x > 1$, entonces como $\operatorname{sen} x \leq 1$, $\operatorname{sen} x$ es en verdad menor que x. Considere entonces que $0 < x \leq 1$ y sea

$$f(x) = x - \operatorname{sen} x$$

entonces

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

Como f es continua y diferenciable en cualquier número, se concluye, por el teorema del valor medio con $a = 0$ y $b = x$, que existe algún número c para el cual $0 < c < x \leq 1$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Debido a que $f(0) = 0$ y $f'(c) = 1 - \cos c$, de la ecuación anterior se tiene

$$x(1 - \cos c) = f(x) \qquad 0 < c < 1$$

En el miembro izquierdo de esta ecuación los dos factores son positivos. De modo que

$$\begin{aligned} 0 &< f(x) \\ 0 &< x - \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x &< x \end{aligned}$$

◀

En los ejercicios 28 a 30 se le pedirá que demuestre algunas otras desigualdades mediante un método semejante al del ejemplo anterior.

A fin de seguir mostrando el poder del teorema del valor medio, se mostrará su uso en la demostración del teorema siguiente, el cual se necesitará en el capítulo 4.

3.3.3 Teorema

Si f es una función tal que $f'(x) = 0$ para todos los valores de x en un intervalo I, entonces f es constante en I.

Demostración Suponga que f no es constante en el intervalo I. Entonces existen dos números diferentes x_1 y x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Puesto que, por hipótesis, $f'(x) = 0$ para toda x en I, entonces $f'(x) = 0$ para toda x en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$. En consecuencia, f es diferenciable en toda x del intervalo $[x_1, x_2]$, por lo que f es continua en $[x_1, x_2]$. Por tanto, las hipótesis del teorema del valor medio se satisfacen, de modo que existe un número c, con $x_1 < c < x_2$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Pero como $f'(x) = 0$ para toda x en el intervalo $[x_1, x_2]$, entonces $f'(c) = 0$, y de (2) se deduce que $f(x_1) = f(x_2)$. Recuerde que se supuso que $f(x_1) \neq f(x_2)$. En consecuencia, se tiene una contradicción, y por tanto, f es constante en I. ■

En la próxima sección se verá otra aplicación del teorema del valor medio al demostrar el teorema 3.4.3.

EJERCICIOS 3.3

En los ejercicios 1 a 4, verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle son satisfechas por la función en el intervalo indicado. Después obtenga un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en el punto (c, f(c)).

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3; [1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; [1, 2]$
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x; [0, \frac{1}{2}\pi]$
4. $f(x) = 3\cos^2 x; [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

En los ejercicios 5 a 10, haga lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función en el intervalo indicado; (b) verifique las tres *condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle, y determine qué condiciones son satisfechas y cuáles, si las hay, no se satisfacen, (c) si las tres condiciones del inciso (b) son satisfechas, entonces determine un punto de la gráfica en el que exista una recta tangente horizontal y apoye gráficamente la respuesta.*

5. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[0, 3]$

6. $f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$; $[0, 4]$

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 13}$, $[-3, 4]$

8. $f(x) = 1 - |x|$; $[-1, 1]$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$; $[-2, \frac{8}{5}]$

10. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } x < 1 \\ x - 4 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$; $[-2, 4]$

En los ejercicios 11 a 20, verifique que las hipótesis del teorema del valor medio son satisfechas por la función en el intervalo indicado $[a, b]$. Después obtenga un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. Apoye la elección de c gráficamente trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f en el intervalo cerrado, la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, y la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, observando que la recta tangente y la recta secante son paralelas.

11. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$

13. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$; $[2, 6]$

15. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$; $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

16. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$

17. $f(x) = x^2$; $[3, 5]$

18. $f(x) = x^2$; $[2, 4]$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$

20. $f(x) = 2\cos x$; $[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$

Para cada una de las funciones de los ejercicios 21 a 24, no existe número c en el intervalo (a, b) que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. En cada ejercicio, determine qué parte de la hipótesis del teorema del valor medio no se cumple. Dibuje la gráfica de f y la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

21. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$; $a = 1, b = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 4}$; $a = 1, b = 2$

23. $f(x) = 3(x - 4)^{2/3}$; $a = -4, b = 5$

24. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 15 - 2x & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$; $a = -1, b = 5$

25. Si $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, entonces $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Demuestre mediante el teorema de Rolle que la siguiente ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo abierto $(0, 1)$:

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$$

26. Demuestre mediante el teorema de Rolle que la ecuación $x^3 + 2x + k = 0$, donde k es cualquier constante, no puede tener más de una raíz real.

27. Utilice el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación

$$4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$$

tiene exactamente una raíz en el intervalo abierto $(0, 1)$. *Sugerencia:* primero muestre que el intervalo $(0, 1)$ contiene al menos una raíz de la ecuación. Después muestre que la suposición de que el intervalo contiene más de una raíz conduce a una contradicción.

28. Emplee el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

Sugerencia: sea $f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ y aplique el que el teorema del valor medio a la función f para $a = 0$ y $b = x$ como se hizo en el ejemplo 4.

29. Use el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$, entonces

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$$

Consulte la sugerencia para el ejercicio 28.

30. Utilice el teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ y $r > 1$, donde r es un número racional, entonces

$$(1 + x)^r > 1 + rx$$

Vea la sugerencia para el ejercicio 28.

31. Emplee el teorema del valor medio para demostrar que si $a < b$, entonces la media aritmética de a y b, $\frac{1}{2}(a + b)$ está en el intervalo abierto (a, b). *Sugerencia:* considere $f(x) = x^2$.

32. Use el teorema del valor medio para demostrar que si $0 < a < b$, entonces la media geométrica de los dos números a y b, $\sqrt{ab}$, está en el intervalo abierto (a, b). *Sugerencia:* sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

33. El límite de velocidad en una autopista particular de California es 65 mi/h. Suponga que en un punto A un oficial de caminos midió la velocidad del conductor y 30 minutos después, a 35 millas de A, un segundo oficial también midió la velocidad del conductor. Aunque los dos oficiales determinaron que el conductor se mantuvo bajo el límite de velocidad en los puntos A y B, el segundo oficial detuvo al conductor por conducir a alta velocidad. Utilice el teorema del valor medio para verificar que en realidad el conductor rebasó el límite de velocidad en algún punto. *Sugerencia:* suponga que la ecuación de movimiento del conductor es $f(t)$ y que f es una función diferenciable

34. Si $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, utilice el teorema 3.3.3 para demostrar que $f(x) = 1$ para todo x en el $[-2\pi, 2\pi]$.

35. Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f'(x) = 1$ para todo x del intervalo abierto (a, b), demuestre que

$$f(x) = x - a + f(a)$$

para toda x en la $[a, b]$.

36. El recíproco del teorema de Rolle no es verdadero. Invente un ejemplo de una función para la cual la conclusión del teorema del Rolle es verdadera de modo que **(a)** la condición (i) no se satisfaga pero las condiciones (ii) y (iii) sí; **(b)** la condición (ii) no se cumpla pero las condiciones (i) y (iii) sí; **(c)** la condición (iii) no se satisfaga pero las condiciones (i) y (ii) sí. Dibuje la gráfica mostrando la recta tangente horizontal en cada caso.

37. Utilice el teorema de Rolle para demostrar que si toda función polinomial de segundo grado tienen a lo más dos raíces reales, entonces cada función polinomial de tercer grado tiene a lo más tres raíces reales. *Sugerencia:* muestre que la suposición de que un polinomio de tercer grado tiene cuatro raíces reales conduce a una contradicción.

38. Emplee el método del ejercicio 37 e inducción matemática para demostrar que un polinomio de n-ésimo grado tiene a lo más n raíces reales.

39. Suponga que $s = f(t)$ es una ecuación de movimiento de una partícula que se desplaza sobre una recta, donde f es una función diferenciable. Explique por qué se puede concluir que en algún instante de cualquier intervalo de tiempo, la velocidad instantánea será igual a la velocidad promedio durante ese intervalo de tiempo.

3.4 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES, Y CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

En esta sección y en las siguientes, se aplicará la derivada a fin de obtener propiedades de las gráficas de las funciones. Estas propiedades no sólo se utilizarán para analizar el comportamiento de las funciones sino que también, en la sección 3.9, para determinar extremos absolutos de funciones para las que no se cumple el teorema del valor extremo. Se iniciará esta sección con una discusión sobre funciones *crecientes* y *decrecientes*.

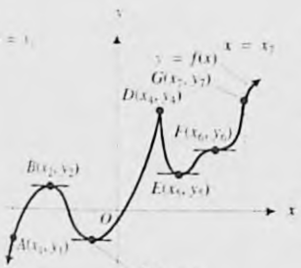


FIGURA 1

Consulte la figura 1, la cual presenta la gráfica de una función f continua para toda x del intervalo cerrado $[x_1, x_7]$. La figura muestra que cuando un punto se mueve a lo largo de la curva de A a B, los valores de función aumentan conforme la abscisa aumenta, y que cuando el punto se desplaza de B a C, los valores de función disminuyen conforme la abscisa aumenta. Entonces, se dice que f es *creciente* en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$ y que f es *decreciente* en el intervalo cerrado $[x_2, x_3]$. A continuación se presentan las definiciones precisas de función creciente y función decreciente en un intervalo.

3.4.1 Definición de función creciente

Una función definida en un intervalo es **creciente** en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

La función de la figura 1 es creciente en los intervalos cerrados siguientes: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$;$[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

3.4.2 Definición de función decreciente

Una función definida en un intervalo es **decreciente** en ese intervalo si y sólo si

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 < x_2$$

donde x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

La función de la figura 1 es decreciente en los intervalos cerrado guientes: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

Si una función es creciente o decreciente en un intervalo, entonces dice que es **monótona** en ese intervalo.

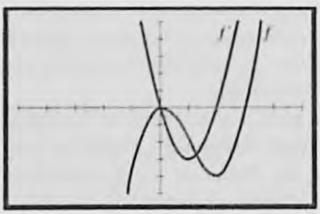
Antes de establecer un teorema que proporciona un criterio para de minar si una función es monótona en un intervalo, se verá lo que oc geométricamente. Refiérase a la figura 1, y observe que cuando la pend te de la recta tangente es positiva, la función es creciente, y que cuando pendiente es negativa, la función es decreciente. Puesto que $f'(x)$ es la p diente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, f es creciente cua $f'(x) > 0$, y es decreciente cuando $f'(x) < 0$. También, como $f'(x)$ es la t de variación (o razón de cambio) de los valores de función $f(x)$ con resp a x, cuando $f'(x) > 0$, los valores de función aumentan conforme x aum ta, y cuando $f'(x) < 0$, los valores de función disminuyen cuando x aume

3.4.3 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b):

(i) si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$;
(ii) si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Antes de demostrar este teorema se presentará un ejemplo ilustra que mostrará su significado.



$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x^3 - 3x^2$ y $f'(x) = 3x^2 - 6x$

FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 2 muestra las g ficas de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

trazadas en el rectángulo de inspección de $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$. Observe q cuando $x < 0$, $f'(x) > 0$ y f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$; cua $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$ y f es decreciente en el intervalo $[0, 2]$; y cu do $x > 2$, $f'(x) > 0$ y f es creciente en el intervalo $[2, +\infty)$.

Demostración del teorema 3.4.3 (i) Sean x_1 y x_2 dos núme cualesquiera del intervalo $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces f es continua $[x_1, x_2]$ y diferenciable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio, existe número c en (x_1, x_2) tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $x_1 < x_2$ entonces $x_2 - x_1 > 0$. También, $f'(c) > 0$ por hipótesis. P tanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de modo que $f(x_2) > f(x_1)$. Así, se ha mostra que $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, cuando x_1 y x_2 son dos núme cualesquiera del intervalo $[a, b]$. Por tanto, por la definición 4.3.1, f es cr ciente en $[a, b]$.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se de como ejercicio (consulte el ejercicio 51).

Se aplicará el teorema 3.4.3 en la demostración del *criterio de la pr mera derivada para extremos relativos* de una función.

3.4.4 Teorema Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c, y suponga que f' existe en todos los puntos de (a, b) excepto posiblemente en c:

(i) si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c;

(ii) si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

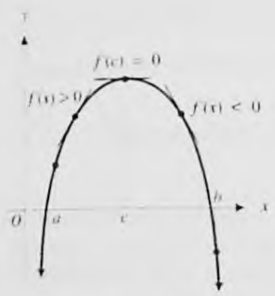


FIGURA 3

Como se hizo con el teorema 3.4.3, se presentará un ejemplo ilustrativo para mostrar el contenido del teorema 3.4.4 antes de su demostración.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Consulte otra vez la figura 2. Observe que $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que tiene a 0 como su extremo derecho, y que $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contiene a 0 como su extremo izquierdo. Además, f tiene un valor máximo relativo en 0. Esto ilustra el inciso (i) del teorema 3.4.4.

También en la figura 2, observe que $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que tiene a 2 como su extremo derecho, y que $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contiene a 2 como su extremo izquierdo; además, f tiene un valor mínimo relativo en 2. Esto ilustra el inciso (ii) del teorema 3.4.4. ◀

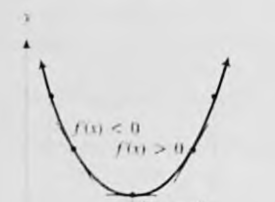


FIGURA 4

Demostración del teorema 3.4.4 (i) Sea (d, c) (donde $d > a$) el intervalo abierto que contiene a c como su extremo derecho para el cual $f'(x) > 0$ para toda x del intervalo. Del teorema 3.4.3 (i), f es creciente en $[d, c]$. Sea (c, e) (donde $e < b$) el intervalo abierto que contiene a c como su extremo izquierdo para el cual $f'(x) < 0$ para toda x del intervalo. Por el teorema 3.4.3 (ii), f es decreciente en $[c, e]$. Puesto que f es creciente en $[d, c]$, se sabe de la definición 3.4.1 que si x_1 está en $[d, c]$ y $x_1 \neq c$, entonces $f(x_1) < f(c)$. También, como f es decreciente en $[c, e]$, se sabe de la definición 3.4.2 que si x_2 está en $[c, e]$ y $x_2 \neq c$, entonces $f(c) > f(x_2)$. Por tanto, de la definición 3.1.1, f tiene un valor máximo relativo en c.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (consulte el ejercicio 52). ■

FIGURA 5

El criterio de la primera derivada para extremos relativos establece que si f es continua en c y $f'(x)$ cambia de signo algebraico de positivo a negativo al pasar por c conforme x crece, entonces f tiene un valor máximo relativo en c; y si $f'(x)$ cambia de signo algebraico de negativo a positivo al pasar por c conforme x crece, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Las figuras 3 y 4 ilustran los incisos (i) y (ii), respectivamente, del criterio de la primera derivada cuando $f'(c)$ existe. La figura 5 muestra la gráfica

FIGURA 6

de una función f que tiene un valor máximo relativo en un número c, pe $f'(c)$ no existe; Sin embargo, $f'(x) > 0$ cuando $x < c$ y $f'(x) < 0$ cua $x > c$. En la figura 6, se tiene la gráfica de una función f para la que c es número crítico, y $f'(x) < 0$ cuando $x < c$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > c$, f n tiene un extremo relativo en c.

Otras ilustraciones del criterio de la primera derivada se tienen en figura 1. En x_2 y x_4 la función tiene un valor máximo relativo, y en x_3 y la función tiene un valor mínimo relativo; aunque x_6 es un número crítico, se tiene un extremo relativo en x_6.

A continuación se resume el procedimiento para obtener los extre relativos de una función.

Para determinar analíticamente los extremos relativos de f:

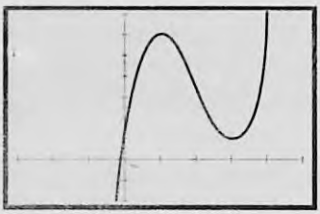
1. Calcule $f'(x)$.
2. Determine los números críticos de f, es decir, los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe.
3. Aplique el criterio de la primera derivada (teorema 3.4.4).

Los ejemplos siguientes muestran cómo se aplica este procedimiento.

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Determine a partir de la gráfica los extremos relativos de f, los valores de x e los que ocurren los extremos relativos, los intervalos en los que f es crecien y en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información o tenida gráficamente.



$[-3, 5]$ por $[-2, 6]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 7

Solución La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectáng de inspección de $[-3, 5]$ por $[-2, 6]$. A partir de la gráfica, se determina que tiene un valor máximo relativo de 5 en $x = 1$, y un valor mínimo relativo 1 en $x = 3$. También, a partir de la gráfica se determina que f es creciente en los intervalos $(-\infty, 1]$ y $[3, +\infty)$, y es decreciente en el intervalo $[1, 3]$.

Ahora se confirmará esta información mediante el criterio de la prime ra derivada calculando primero la derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Los únicos números críticos son aquellos para los que $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$x = 3 \qquad x = 1$$

Por tanto, los números críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo relativo en estos números, se aplica el criterio de la primera deriva y los resultados se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 1$		+	f es creciente
$x = 1$	5	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 3$		−	f es decreciente
$x = 3$	1	0	f tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		+	f es creciente

Las conclusiones de la tabla confirman la información determinada gráficamente. ◀

▶ EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Determine los extremos relativos de f y los valores de x en donde ellos ocurren. También determine los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

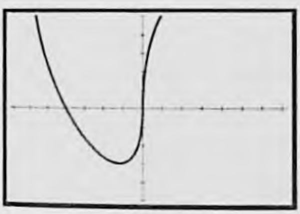
Solución Al diferenciar f se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$, y $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$, entonces los números críticos de f son -1 y 0. Se aplica el criterio de la primera derivada y se resumen los resultados en la tabla 2. En la tabla, la abreviación n.e. significa *no existe*.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		$-$	f es decreciente
$x = -1$	-3	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f es creciente
$x = 0$	0	n.e.	f no tiene un extremo relativo en $x = 0$
$0 < x$		$+$	f es creciente



$[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$

$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

FIGURA 8

La información de la tabla se apoya al trazar la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-7.5, 7.5]$ por $[-5, 5]$, como se muestra en la figura 8. ◀

▶ EJEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

determine los extremos relativos de f y los valores de x en los que ellos ocurren. También determine analíticamente los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente. Dibuje la gráfica.

Solución Al calcular $f'(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Observe que f es continua en 3. Como $f'_-(3) = 6$ y $f'_+(3) = -1$, $f'(3)$ no existe. Por tanto, 3 es un número crítico de f. Otro número crítico de f es 0 porque $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En la tabla 3 se resumen los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la primera derivada. La gráfica de f se muestra en la figura 9.

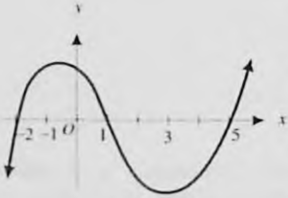
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$

FIGURA 9

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	f es decreciente
$x = 0$	-4	0	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f es creciente
$x = 3$	5	n.e.	f tiene un valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f es decreciente

Como se hizo en los ejemplos ilustrativos 1 y 2, ahora se mostrará en l[...] dos ejemplos siguientes cómo puede obtenerse el comportamiento de u[...] función a partir de la gráfica de su derivada.



Gráfica de f'

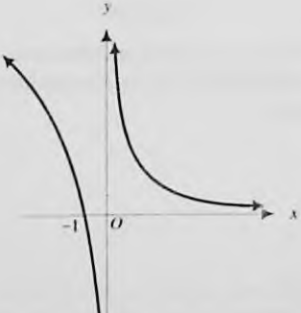
FIGURA 10

EJEMPLO 4 La figura 10 muestra la gráfica de la derivada [...] una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales. A partir d[...] gráfica determine los números críticos de f, los intervalos en los que f es cr[...]ciente y en los que f es decreciente, y los extremos relativos de f.

Solución De la gráfica, se observa que $f'(x)$ existe en cualquier núm[...] real y que $f'(-2)$, $f'(1)$ y $f'(5)$ son iguales a cero. Por tanto, -2, 1 y 5 son n[...]meros críticos de f. Como $f'(x) < 0$ cuando $x < -2$ o $1 < x < 5$, f es dec[...]ciente en los intervalos $(-\infty, -2]$ y $[1, 5]$. Debido a que $f'(x) > 0$ cuand[...] $-2 < x < 1$ o $x > 5$, f es creciente en los intervalos $[-2, 1]$ y $[5, +\infty)$. L[...] tabla 4 resume estos hechos, además de que f tiene valores mínimos rel[...]vos en $x = -2$ y $x = 5$, y f tiene un valor máximo relativo en $x = 1$, ob[...]nidos al aplicar el criterio de la primera derivada.

Tabla 4

	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	$-$	f es decreciente
$x = -2$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-2 < x < 1$	$+$	f es creciente
$x = 1$	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 5$	$-$	f es decreciente
$x = 5$	0	f tiene un valor mínimo relativo
$5 < x$	$+$	f es creciente



Gráfica de g'

FIGURA 11

EJEMPLO 5 Siga las instrucciones del ejemplo 4 para la fu[...]ción g, continua en su dominio el cual es el conjunto de los números rea[...] para la cual la figura 11 muestra la gráfica de su derivada.

Solución De la gráfica, como $g'(-1) = 0$, -1 es un número crítico de [...] Debido a que el eje y es una asíntota vertical de gráfica de g', $g'(0)$ no exis[...] aunque 0 esté en el dominio de g. En consecuencia, también 0 es núme[...] crítico de g. Como $g'(x) > 0$ cuando $x < -1$ o $x > 0$, g es creciente en l[...] intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, +\infty)$. Ya que $g'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$, g [...] decreciente en el intervalo $[-1, 0]$. Estos hechos se resumen en la tabla 5, [...]niendo en cuenta que se aplicó el criterio de la primera derivada para de[...]minar los extremos relativos.

Tabla 5

	$g'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	g es creciente
$x = -1$	0	g tiene un valor máximo relativo
$-1 < x < 0$	−	g es decreciente
$x = 0$	n.e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	g es creciente

◀

En la sección 3.6, se obtendrán algunas propiedades adicionales de la función f del ejemplo 4 y de la función g del ejemplo 5 a partir de las gráficas de sus derivadas; después, a partir de estas propiedades, así como de las obtenidas en esta sección, se dibujarán posibles gráficas de f y g.

EJERCICIOS 3.4

En los ejercicios 1 a 18, (a) trace la gráfica, y determine a partir de ella: (b) los extremos relativos de f, (c) los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, (d) los intervalos en los que f es creciente, (e) los intervalos en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$

4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15 - 5$

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ **6.** $f(x) = x^4 - 4x$

7. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x; x \in [-2\pi, 2\pi]$

8. $f(x) = 2 \cos 3x, x \in [-\pi, \pi]$

9. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

11. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$

12. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$

13. $f(x) = x - 3x^{1/3}$ **14.** $f(x) = 4x - 6x^{2/3}$

15. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3}$ **16.** $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

17. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$ **18.** $f(x) = x^{5/3} - 10x^{2/3}$

En los ejercicios 19 a 32, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de f; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que f es creciente; (d) determine los intervalos en los que f es decreciente. Apoye las respuestas gráficamente.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

20. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

21. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$

22. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$

23. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ **24.** $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$

25. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$ **26.** $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

27. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$

28. $f(x) = 2 - (x - 1)^{1/3}$

29. $f(x) = \frac{1}{2}\sec 4x; x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

30. $f(x) = 3 \csc 2x; x \in [-\pi, \pi]$

31. $f(x) = x^{1/3}(x + 4)^{-2/3}$

32. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 2)^{1/3}$

En los ejercicios 33 a 38, haga lo siguiente analíticamente: (a) determine los extremos relativos de la función; (b) determine los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) determine los intervalos en los que la función es creciente; (d) determine los intervalos en los que la función es decreciente. (e) Dibuje la gráfica de la función a partir de las respuestas de los incisos (a)–(d).

33. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{si } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 7 - x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

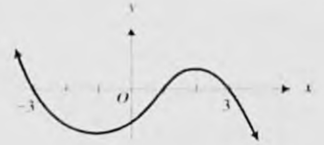
36. $f(x) = \begin{cases} 12 - (x + 5)^2 & \text{si } x \leq -3 \\ 5 - x & \text{si } -3 < x \leq -1 \\ \sqrt{100 - (x - 7)^2} & \text{si } -1 < x \leq 17 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} (x + 9)^2 - 8 & \text{si } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x + 4)^2} & \text{si } -7 \leq x \leq 0 \\ (x - 2)^2 - 7 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

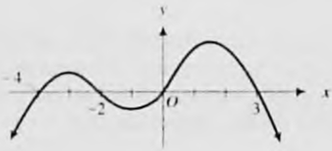
38. $f(x) = \begin{cases} 4 - (x + 5)^2 & \text{si } x < -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{si } -4 \leq x \end{cases}$

En los ejercicios 39 a 44, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f continua en su dominio, el cual es el conjunto de los números reales. A partir de la gráfica, determine (a) los números críticos de f, (b) los intervalos en los que f es creciente, (c) los intervalos en los que f es decreciente, y (d) los números donde ocurren los extremos relativos de f.

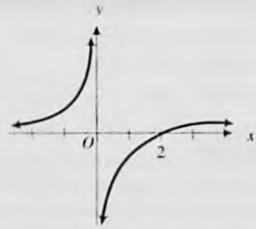
39.



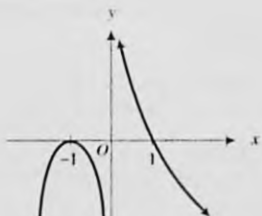
40.



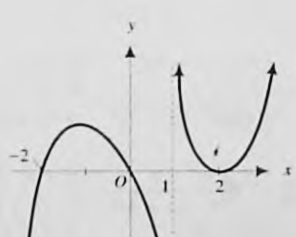
41.



42.



43.



44.

45. Dado que la función f es continua para todos los valores de x, $f(0) = 0$, $f(4) = 2$, $f(8) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x < 4$, $f'(x) < 0$ si $x > 4$, dibuje una gráfica posible de f en cada uno de los siguientes casos donde la condición adicional se satisface: **(a)** f' es continua en 4; **(b)** $f'(x) = 1$ si $x < 4$ y $f'(x) = -\frac{1}{2}$ si $x > 4$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f'(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f'(x) = -\infty$, y $f'(a) \neq f'(b)$ si $a \neq b$.

46. Dado que la función f es continua para todos los valores de x, $f(3) = 2$, $f'(x) < 0$ si $x < 3$, y $f'(x) > 0$ si $x > 3$, dibuje una gráfica posible de f en cada uno de los siguientes casos donde la condición adicional se satisface: **(a)** f' es continua en 3; **(b)** $f'(x) = -1$ si $x < 3$ y $f'(x) = 1$ si $x > 3$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = 1$, y $f'(a) \neq f'(b)$ si $a \neq b$.

47. Encuentre a y b tales que la función definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

tenga un extremo relativo en el punto $(2, 3)$.

48. Encuentre a, b y c tales que la función definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tenga un valor máximo relativo de 7 en $x = 1$ y la gráfica de $y = f(x)$ pase por el punto $(2, -2)$.

49. Encuentre a, b, c y d tales que la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un extremo relativo en los puntos $(1, 2)$ y $(2, 3)$.

50. Sea $f(x) = x^p(1 - x)^q$, donde p y q son números enteros positivos mayores que 1, demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si p es par, f tiene un valor mínimo relativo en 0;

(b) Si q es par, f tiene un valor mínimo relativo en 1;

(c) f tiene un valor máximo relativo en $p/(p + q)$ independientemente de que p y q sean impares o pares.

51. Demuestre el teorema 3.4.3(ii).

52. Demuestre el teorema 3.4.4(ii).

53. Si $f(x) = x^k$, donde k es un número entero positivo impar, demuestre que f no tiene extremos relativos.

54. Demuestre que si f es creciente en $[a, b]$ y si g es creciente en $[f(a), f(b)]$, entonces si $g \circ f$ existe en $[a, b]$, $g \circ f$ es creciente en $[a, b]$.

55. La función f es creciente en el intervalo I. Demuestre que: **(a)** si $g(x) = -f(x)$, entonces g es decreciente en I; **(b)** si $h(x) = 1/f(x)$ y $f(x) > 0$ en I, entonces h es decreciente en I.

56. La función f es diferenciable en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que si $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

57. Si $f'(x)$ existe en cada número del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c y $f'(c) = 0$, ¿puede concluirse que f tiene un extremo relativo en c? Explique su respuesta.

58. Describa cómo se aplica el criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos de una función.

3.5 CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

La segunda derivada, igual que la primera derivada, proporciona información acerca del comportamiento de una función y su gráfica, como se verá en esta sección.

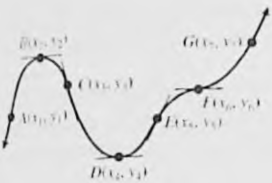


FIGURA 1

Consulte la figura 1, la cual muestra la gráfica de una función f cuyas derivadas primera y segunda existen en el intervalo cerrado $[x_1, x_7]$. Debido a que f y f' son diferenciables en dicho intervalo, entonces f y f' son continuas en $[x_1, x_7]$.

Si se considera que el punto P se mueve a lo largo de la gráfica de la figura 1 desde A hasta G, entonces la posición de P varía cuando x crece de x_1 a x_7. Conforme P se mueve a lo largo de A a B, la pendiente de la recta tangente a la gráfica es positiva y decreciente; esto es, la recta tangente a la gráfica gira en el sentido de las manecillas del reloj, y la gráfica se encuentra debajo de su recta tangente. Cuando el punto P está en B, la pendiente de la recta tangente es cero y sigue decreciendo. Conforme P se desplaza de B a C, la pendiente de la recta tangente es negativa y sigue decreciendo; la recta tangente continúa girando en el sentido de las manecillas del reloj, y la gráfica está debajo de su recta tangente. Se dice que la gráfica es *cóncava hacia abajo* de A a C. A medida que P se mueve a lo largo de la gráfica de C a D, la pendiente de la recta tangente es negativa y creciente; esto es, la recta tangente gira en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, y la gráfica está por arriba de su recta tangente. En el punto D, la pendiente de la recta tangente es positiva y creciente; la recta tangente sigue girando en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, y la gráfica está por arriba de su recta tangente. Se dice que la gráfica es *cóncava hacia arriba* de C a E. En el punto C la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. El punto C se denomina *punto de inflexión*. Enseguida se presentan estas definiciones formalmente.

FIGURA 2

3.5.1 Definición de concavidad hacia arriba

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia arriba** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

3.5.2 Definición de concavidad hacia abajo

Se dice que la gráfica de una función es **cóncava hacia abajo** en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todos los valores de $x \neq c$ en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

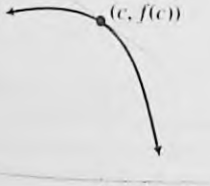


FIGURA 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 2 presenta una porción de la gráfica de una función f cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$, y la figura 3 muestra una porción de la gráfica de una función que es cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$. ◀

La gráfica de la figura 1 es cóncava hacia abajo en todos los puntos $(x, f(x))$ para los cuales x está en alguno de los dos intervalos abiertos siguientes: (x_1, x_3) o (x_5, x_6). De manera semejante, la gráfica de la figura 1 es cóncava hacia arriba en todos los puntos $(x, f(x))$ para los cuales x está en (x_3, x_5) o en (x_6, x_7).

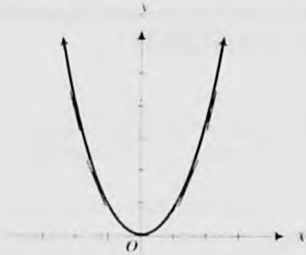


FIGURA 4

FIGURA 5

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si f es la función definida por $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$. Por lo que $f''(x) > 0$ para toda x. Además, como la gráfica de f, mostrada en la figura 4, está arriba de todas sus rectas tangentes, la gráfica es cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

Si g es la función definida por $g(x) = -x^2$, entonces $g'(x) = -2x$ y $g''(x) = -2$. En consecuencia, $g''(x) < 0$ para toda x. También, debido a que la gráfica de g, presentada en la figura 5, está debajo de sus rectas tangentes, g es cóncava hacia abajo en todos sus puntos.

La función f del ejemplo ilustrativo 2 es tal que $f''(x) > 0$ para toda x y la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todo número. Para la función g del ejemplo ilustrativo 2, $g''(x) < 0$ para toda x, y la gráfica de g es cóncava hacia abajo en todo número. Estas dos situaciones son casos especiales del teorema siguiente.

3.5.3 Teorema

Sea f una función que es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c. Entonces

(i) si $f''(c) > 0$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$.
(ii) si $f''(c) < 0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$.

Demostración de (i)

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

Como $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Entonces, por el teorema 3.1.8(i) existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \tag{1}$$

para cada $x \neq c$ en I.

Ahora considere la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$. Una ecuación de esta recta tangente es

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \tag{2}$$

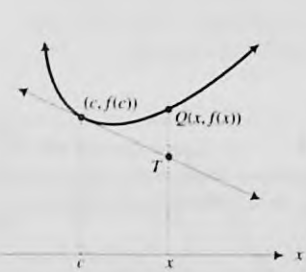


FIGURA 6

Sea x un número del intervalo I tal que $x \neq c$ y sea Q el punto de la gráfica de f cuya abscisa es x. A través de Q dibuje una recta paralela al eje y, y sea T el punto de intersección de esta recta con la recta tangente (vea la figura 6).

Para demostrar que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$ se debe mostrar que el punto Q está arriba del punto T o, equivalentemente, que la distancia dirigida $\overline{TQ} > 0$ para todos los valores $x \neq c$ en I. $\overline{TQ}$ es igual

$f(x) = x^4$

FIGURA 7

la ordenada de Q menos la ordenada de T. La ordenada de Q es $f(x)$ y la ordenada de T se obtiene de (2); así

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$
$$\overline{TQ} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \qquad \textbf{(3)}$$

Por el teorema del valor medio, existe algún número d entre x y c tal que

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Esto es

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \qquad \text{para alguna } d \text{ entre } x \text{ y } c$$

Al sustituir de esta ecuación en (3) se tiene

$$\overline{TQ} = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)$$
$$\overline{TQ} = (x - c)[f'(d) - f'(c)] \qquad \textbf{(4)}$$

Puesto que d está entre x y c, d está en el intervalo I, de modo que considerando $x = d$ en la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \qquad \textbf{(5)}$$

c

FIGURA 8

Para demostrar que $\overline{TQ} > 0$, se probará que los dos factores del miembro derecho de (4) tienen el mismo signo. Si $x - c > 0$, entonces $x > c$. Además, como d está entre x y c, entonces $d > c$; por tanto, de la desigualdad (5), $f'(d) - f'(c) > 0$. Si $x - c < 0$, entonces $x < c$, por lo que $d < c$; por tanto, de (5), $f'(d) - f'(c) < 0$. En consecuencia, $x - c$ y $f'(d) - f'(c)$ tienen el mismo signo, por tanto, $\overline{TQ}$ es un número positivo. Así, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) por lo que se omite. ∎

c

FIGURA 9

El recíproco del teorema 3.5.3 no es válido. Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = x^4$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el punto (0, 0) pero como $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$ (vea la figura 7). En efecto, una condición suficiente para la que la gráfica de una función f sea cóncava hacia arriba en el punto $(c, f(c))$ es que $f''(c) > 0$, pero ésta no es una condición necesaria. De la misma forma, una condición suficiente –pero no necesaria– para que la gráfica de una función f sea cóncava hacia abajo en el punto $(c, f(c))$ es que $f''(c) < 0$.

Si existe un punto en la gráfica de una función en que el sentido de la concavidad cambia, y la gráfica tiene una recta tangente en este punto, entonces la gráfica cruza su recta tangente en ese punto, como se muestra en las figuras 8, 9 y 10. A dicho punto se le llama *punto de inflexión*.

c

FIGURA 10

3.5.4 Definición de punto de inflexión

El punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de la función f si la gráfica tiene una recta tangente en ese punto, y si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que si x está en I, entonces

(i) $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$; o
(ii) $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

La figura 8 muestra un punto de inflexión en el que la condición (i) de la definición 3.5.4 se cumple; en este caso la gráfica es cóncava hacia abajo en los puntos inmediatos ubicados a la izquierda del punto de inflexión, y es cóncava hacia arriba en los puntos localizados inmediatamente a la derecha del punto de inflexión. La condición (ii) se presenta en la figura 9, en donde el sentido de la concavidad cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en el punto de inflexión. La figura 10 proporciona otro ejemplo de la condición (i), donde el sentido de la concavidad cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto de inflexión. Observe que en la figura 10 la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión. ◀

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

FIGURA 11

La gráfica de la figura 1 tiene puntos de inflexión en C, E y F.

Una parte crucial de la definición de punto de inflexión es que la gráfica debe tener una recta tangente en ese punto. Considere, por ejemplo, la función del ejemplo 2 de la sección 1.6 definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

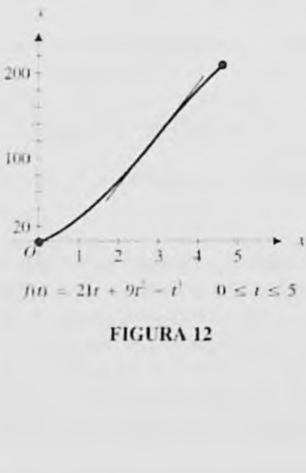
La gráfica de h se muestra en la figura 11. Observe que $h''(x) = -2$ si $x < 1$ y $h''(x) = 2$ si $x > 1$. De este modo, en el punto $(1, 3)$ de la gráfica el sentido de concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba. Sin embargo, $(1, 3)$ no es un punto de inflexión porque la gráfica no tiene una recta tangente en ese punto.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

Suponga que t horas después de iniciar un trabajo a las 7 a.m. un obrero, en una línea de ensamble, ha realizado una tarea particular de $f(t)$ unidades donde

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \leq t \leq 5$$

La tabla 1 presenta los valores de función para valores enteros de t, de 1 a 5, y la figura 12 muestra la gráfica de f en $[0, 5]$.



$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \leq t \leq 5$$

FIGURA 12

Tabla 1

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	29	70	117	164	205

Al diferenciar dos veces f se tiene

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2 \qquad f''(t) = 18 - 6t$$
$$= 6(3 - t)$$

Observe que $f''(t) > 0$ si $0 < t < 3$ y $f''(t) < 0$ si $3 < t < 5$. De la definición 3.5.4(ii), la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $t = 3$. Del teorema 3.4.3, como $f''(t) > 0$ cuando $0 < t < 3$, $f'(t)$ es creciente en $[0, 3]$, y debido a que $f''(t) < 0$ cuando $3 < t < 5$, $f'(t)$ es decreciente en $[3, 5]$. Por tanto, ya que $f'(t)$ es la tasa de variación de $f(t)$ con respecto a t, se concluye que en las tres primeras horas (de 7 a.m. a 10 a.m.) el trabajador realiza la tarea a una tasa creciente, y durante las siguientes dos horas (de las 10 a.m. al medio día) el trabajador efectúa la tarea a una tasa decreciente. En $t = 3$ (10 a.m.) el trabajador es más eficiente, y cuando $3 < t < 5$ (después de las 10 a.m.) hay una reducción en la tasa de producción del trabajador. El punto en el que el trabajador produce con mayor eficiencia se denomina *punto de rendimiento decreciente*; este punto es un punto de inflexión de la gráfica de f. ◀

La definición 3.5.4 expresa que la segunda derivada cambia de signo en un punto de inflexión, pero no indica nada acerca del valor de la segunda derivada en ese punto. Sin embargo, el teorema siguiente establece que si la segunda derivada existe en un punto de inflexión, debe ser cero.

3.5.5 Teorema

Suponga que la función f es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c, y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. Entonces, si $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Demostración Sea g la función tal que $g(x) = f'(x)$; entonces $g'(x) = f''(x)$. Como $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(x)$ cambia de signo en c, por lo que $g'(x)$ cambia de signo en c. Por tanto, por el criterio de la primera derivada, g tiene un extremo relativo en c, y c es un número crítico de g. Puesto que $g'(c) = f''(c)$, y como por hipótesis $f''(c)$ existe, se deduce que $g'(c)$ existe. Por tanto, por el teorema 3.1.3, $g'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, que es lo que se deseaba demostrar. ■

El recíproco del teorema 3.5.5 no es válido. Esto es, si la segunda derivada de una función es cero en un número c, la gráfica de la función no necesariamente tiene un punto de inflexión donde $x = c$. Este hecho se demuestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Considere la función f cuya gráfica se muestra en la figura 7, para la cual

$$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Observe que $f''(0) = 0$, pero como $f''(x) > 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, el origen no es un punto de inflexión. Además, la gráfica es cóncava hacia arriba en cualquier número. ◀

▶ ***EJEMPLO 1*** La función del ejemplo 1 de la sección 3.4 está definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye la respuesta trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f y la tangente de inflexión (la recta tangente en el punto de inflexión).

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

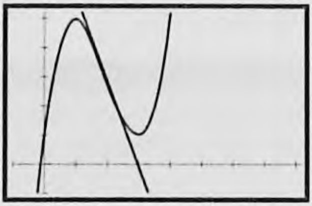
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 12$$

Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible de f ocurre donde $f''(x) = 0$, el cual ocurre en $x = 2$. Para determinar si se tiene un punto de inflexión en $x = 2$, debe verificarse si $f''(x)$ cambia de

signo, al mismo tiempo se determina la concavidad de la gráfica para l
intervalos respectivos. Los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$			$-$	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	3	-3	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x$			$+$	La gráfica de f es cóncava hacia arriba



$[-1, 8.4]$ por $[-1, 5.2]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

FIGURA 13

En el ejemplo 1 de la sección 3.4, se mostró que f tiene un valor má
mo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. La figura 13 muestra la gr
fica de f y la tangente de inflexión en el rectángulo de inspección de $[-1, 8$
por $[-1, 5.2]$, lo cual apoya la información de la tabla 2.

La gráfica de una función puede tener un punto de inflexión en el p
donde la segunda derivada no existe, esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

▶ *EJEMPLO 2* Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráf
es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respue
gráficamente.

Solución Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{y} \quad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

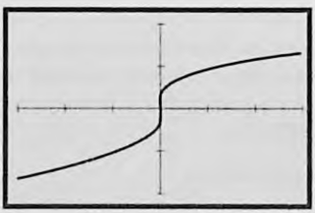
De las ecuaciones anteriores se observa que $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen. En
ejemplo ilustrativo 3 de la sección 2.2, se mostró que el eje y es la recta ta
gente de la gráfica de esta función en el origen. Además,

$$f''(x) > 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) < 0 \quad \text{si } x > 0$$

Por tanto, de la definición 3.5.4 (ii), f tiene un punto de inflexión en el orig
La concavidad de la gráfica se determina a partir del signo de $f''(x)$, los res
tados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$+$	$+$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0 < x$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = x^{1/3}$

FIGURA 14

La figura 14, que muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo
inspección de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$, apoya la información de la tabla 3.

▶ *EJEMPLO 3* Sea

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = (1 - 2x)^3$

FIGURA 15

Trace la gráfica, y a partir de ésta, estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

Solución La figura 15 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. De la gráfica se estima que el punto de inflexión está en $(0.5, 0)$, la gráfica es cóncava hacia arriba para $x < 0.5$, y la gráfica es cóncava hacia abajo para $x > 0.5$. Ahora se confirmarán estas estimaciones analíticamente. Las derivadas primera y segunda de f son

$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 24(1 - 2x)$$

Como $f''(x)$ existe para todos los valores de x, el único punto de inflexión posible es donde $f''(x) = 0$, esto es, en $x = 0.5$. De los resultados resumidos en la tabla 4, $f''(x)$ cambia de signo, de + a −, en $x = 0.5$; de modo que la gráfica tiene un punto de inflexión ahí. Observe también que debido a que $f'(0.5) = 0$, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión.

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0.5$			+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 0.5$	0	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0.5 < x$			−	La gráfica de f es cóncava hacia abajo

◄

FIGURA 16

En la sección 3.4 se indicó cómo determinar si una función tiene un extremo relativo en un número crítico c al verificar el cambio de signo algebraico de la primera derivada en números de algún intervalo adecuado que tenga a c como extremo derecho y números de algún intervalo conveniente que tenga a c como extremo izquierdo, al pasar por c conforme x crece. Otro criterio para extremos relativos, denominado *criterio de la segunda derivada*, involucra sólo al número crítico c y a la segunda derivada. Antes de establecer el criterio, se presentará una discusión geométrica informal la cual recurrirá a su intuición.

Suponga que f es una función que tal que f'' existe en algún intervalo abierto (a, b) que contiene a c, y que $f'(c) = 0$. Suponga también que $f''(x) < 0$ si x está en (a, b). Entonces, del teorema 3.5.3(ii) la gráfica de f es cóncava hacia abajo en todos los punto de (a, b), y del teorema 3.4.3(ii) f' es decreciente en $[a, b]$. La figura 16 muestra la gráfica de una función que tiene estas propiedades, y también se muestra en algunos puntos un segmento de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es decreciente en $[a, b]$, lo cual es consistente con el hecho de que f' es decreciente en $[a, b]$. Observe que f tiene un valor máximo relativo en c.

FIGURA 17

Ahora suponga que f es una función que tiene las propiedades de la función del párrafo anterior excepto que $f''(x) > 0$ si x está en (a, b). Entonces, por el teorema 3.5.3(i), la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos los puntos de (a, b), y del teorema 3.4.3(i), f' es creciente en $[a, b]$. La gráfica de una función que tiene estas propiedades se tiene en la figura 17. Las pendientes de la rectas tangentes, que se muestran en algunos puntos en la figura, son crecientes en $[a, b]$, y f tiene un valor mínimo relativo en c.

Ahora se establecerá y demostrará el *criterio de la segunda derivada para extremos relativos*, el cual confirma las observaciones geométricas de los dos párrafos precedentes.

3.5.6 Teorema Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Sea c un número crítico de una función f en el que $f'(c) = 0$, y suponga que f'' existe para todos los valores de x en un intervalo abierto que contiene a c.

(i) Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en c.
(ii) Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.

Demostración del inciso (i) Por hipótesis, $f''(c)$ existe y es negativa de modo que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Por tanto, por el teorema 3.1.8(ii), existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \tag{6}$$

para toda $x \neq c$ en el intervalo.

Sea I_1 el intervalo abierto que contiene todos los valores de x en I para los que $x < c$; por tanto, c es el extremo derecho del intervalo abierto I_1. Sea I_2 el intervalo abierto que contiene todos los valores de x en I para los que $x > c$; de modo que c es el extremo izquierdo del intervalo abierto I_2.

Entonces, si x está en I_1, $x - c < 0$, y de la desigualdad (6) $f'(x) - f'(c) > 0$ o, equivalentemente, $f'(x) > f'(c)$. Si x está en I_2, $x - c > 0$, y de (6), $f'(x) - f'(c) < 0$ o, equivalentemente, $f'(x) < f'(c)$.

Pero como $f'(c) = 0$, se concluye que si x está en I_1, $f'(x) > 0$, y si x está en I_2, $f'(x) < 0$. Por tanto, $f'(x)$ cambia de signo algebraico de positivo a negativo al pasar por c, conforme x crece; de modo que, por el criterio de primera derivada, f tiene un valor máximo relativo en c.

La demostración del inciso (ii) es semejante a la del inciso (i) y se deja como ejercicio (refiérase el ejercicio 56). ∎

▶ *EJEMPLO 4* Sea

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

determine los extremos relativos de f aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de f. Apoye los resultados en una graficadora.

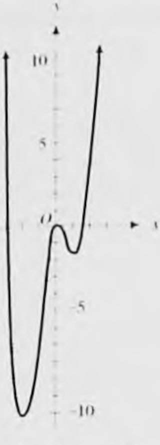
Solución Se calculan las derivadas primera y segunda de f:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene

$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

Por tanto, los números críticos de f son -2, 0 y 1. Para determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos números críticos, se considera



$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 18

el signo de la segunda derivada en ellos. Los resultados se resumen en la tabla 5.

Tabla 5

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

A partir de la información de esta tabla y localizando algunos puntos más, se dibuja la gráfica de f, mostrada en la figura 18. La figura 19, que presenta la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-15, 15]$ por $[-11, 9]$, apoya los resultados. ◀

$[-15, 15]$ por $[-11, 9]$

$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

FIGURA 19

Si $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 0$, nada puede concluirse acerca de un extremo relativo de f en c. Los tres ejemplos ilustrativos siguientes justifican esta afirmación.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Si $f(x) = x^4$, entonces $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. De modo que, $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a cero. Al aplicar el criterio de la primera derivada se aprecia que f tiene un valor mínimo relativo en 0. La gráfica de f se muestra en la figura 20. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Si $g(x) = -x^4$, entonces $g'(x) = -4x^3$ y $g''(x) = -12x^2$. Por tanto, $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$ son iguales a cero. En este caso g tiene un valor máximo relativo en 0, como puede verse al aplicar el criterio de la primera derivada. La figura 21 muestra la gráfica de g. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 Si $h(x) = x^3$, entonces $h'(x) = 3x^2$ y $h''(x) = 6x$, por lo que $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$ son iguales a cero. La función h no tiene extremo relativo en 0 porque si $x < 0$, $h(x) < h(0)$; y si $x > 0$, $h(x) > h(0)$. La gráfica de h se presenta en la figura 22. ◀

Los ejemplos ilustrativos 6-8 proporcionan ejemplos de tres funciones para las cuales su segunda derivada tiene un valor de cero en un punto cuya primera derivada es cero; en ese número, una función tiene un valor mínimo relativo, otra función tiene un valor máximo relativo, y la tercera función no tiene valor extremo relativo.

$f(x) = x^4$

FIGURA 20

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la función seno, determine los extremos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada, y encuentre los puntos de inflexión de su gráfica. También determine las pendientes de las tangentes de inflexión. Trace la gráfica de la función seno en un intervalo de longitud 2π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

Solución Sean

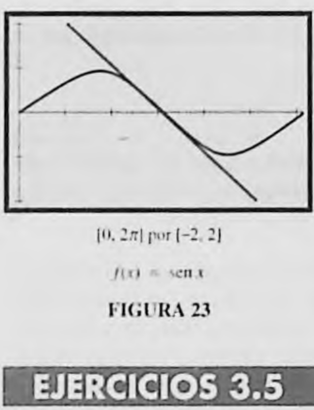
$$f(x) = \text{sen } x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen } x$$

$g(x) = -x^4$

FIGURA 21

$h(x) = x^3$

FIGURA 22



$[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

FIGURA 23

Las funciones f, f' y f'' están definidas para toda x. Los números críticos se obtiene al considerar $f'(x) = 0$:

$$\cos x = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \text{ es cualquier número entero}$$

A fin de determinar si existe o no un extremo relativo en alguno de estos nú-meros críticos se obtiene el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) &= -\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi \\ &= \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ 1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos al aplicar el criterio de la segunda derivada se re-sumen en la tabla 6.

Tabla 6

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero par)	1	0	−	f tiene un valor máximo rela-
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k es un entero impar)	−1	0	+	f tiene un valor mínimo rela-

Para determinar los puntos de inflexión se considera $f''(x) = 0$:

$$-\operatorname{sen} x = 0$$
$$x = k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

Como $f''(x)$ cambia de signo en cada uno de estos valores de x, la gráfica tie-ne un punto de inflexión en cada punto que tiene alguna de estas abscisas. En cada punto de inflexión,

$$\begin{aligned} f'(k\pi) &= \cos k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es un entero par} \\ -1 & \text{si } k \text{ es un entero impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, las pendientes de las tangentes de inflexión son +1 o −1.

La figura 23 muestra la gráfica de la función seno y la tangente de in-flexión en el punto $(\pi, 0)$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[0, 2\pi]$ por $[-2, 2]$.

EJERCICIOS 3.5

En los ejercicios 1 a 8, encuentre los puntos de inflexión de la función y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de la función y las tangentes de inflexión.

1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

3. $g(x) = x^4 - 8x^3$ **4.** $f(x) = x^4 - 2x^3$

5. $F(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$ **6.** $G(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4}$

7. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x;\ x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

8. $f(x) = 3 \cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$

En los ejercicios 9 a 16, trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica estime el punto de inflexión y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

9. $f(x) = x^3 + 9x$ **10.** $g(x) = 2x^3 - 1$

11. $G(x) = (x - 1)^3$ **12.** $F(x) = (x + 2)^3$

13. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$ **14.** $g(x) = (x - 1)^{1/3}$

15. $g(x) = \tan \frac{1}{2}x; x \in (-\pi, \pi)$

16. $f(x) = \cot 2x; x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

En los ejercicios 17 a 22, encuentre el punto de inflexión de la gráfica de la función, si existe alguno, y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje la gráfica.

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 7 - x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

21. $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

22. $G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^4 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

En los ejercicios 23 a 30, dibuje una porción de la gráfica de alguna función f que pase por el punto donde $x = c$ si se satisfacen las condiciones dadas. Suponga que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c.

23. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

24. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

25. **(a)** $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f''(x) > 0$; si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$

26. **(a)** $f(c) = 0$; $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$
(b) $f(c) = 0$; $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

27. **(a)** $f''(c) = 0$; $f'(c) = -1$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$
(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

28. **(a)** $f''(c) = 0$; $f'(c) = \frac{1}{2}$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$
(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

29. $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

30. $\lim\limits_{x \to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = -\infty$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

En los ejercicios 31 a 38, encuentre los extremos relativos de la función aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de la función. Apoye los resultados en la graficadora.

31. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

32. $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

33. $g(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ **34.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3$

35. $f(x) = \cos 3x; x \in [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

36. $g(x) = 2 \operatorname{sen} 4x; x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$

37. $h(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$ **38.** $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

39. Dibuje la gráfica de alguna función f para la cual $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ existan y sean **(a)** positivos para toda x; **(b)** negativos para toda x.

40. Para la función coseno, encuentre **(a)** los extremos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada; **(b)** los puntos de inflexión de su gráfica; **(c)** las pendientes de las tangentes de inflexión. **(d)** Trace la gráfica de la función coseno en un intervalo de longitud 2π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

En los ejercicios 41 y 42, encuentre (a) los puntos de inflexión de la gráfica de la función, y (b) las pendientes de las tangentes de inflexión. (c) Trace la gráfica de la función en un intervalo de longitud π que contenga el punto de inflexión que posea la menor abscisa positiva. En el mismo rectángulo de inspección, trace la tangente de inflexión.

41. La función tangente. **42.** La función cotangente.

En los ejercicios 43 y 44, (a) encuentre los extremos relativos de la función aplicando el criterio de la segunda derivada. (b) Trace la gráfica de la función en un intervalo de longitud 2π.

43. La función cosecante. **44.** La función secante.

En los ejercicios 45 a 50, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por los puntos $(c, f(c))$, $(d, f(d))$ y $(e, f(e))$ si se satisfacen las condiciones dadas. También dibuje un segmento de la recta tangente en cada uno de estos puntos, si existe la recta tangente. Suponga que $c < d < e$ y que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c, d y e.

45. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $d < x < e$; $f''(x) < 0$ si $x > e$

46. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $d < x < e$; $f''(x) > 0$ si $x > e$

47. **(a)** $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = +\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$

48. **(a)** $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$;
$f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$
si $c < x < d$; $f''(x) < 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $\lim_{x \to d^-} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \to d^+} f'(x) = -\infty$;
$f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

49. **(a)** $f'(c)$ no existe; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$;
$f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$
si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$
(b) $f'(c) = 0$; $f'(d)$ no existe; $f'(e) = 0$
$f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) < 0$
si $d < x < e$; $f''(x) > 0$ si $x > e$

50. **(a)** $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e)$ no existe;
$f''(x) < 0$ si $x < d$; $f''(x) > 0$
si $d < x < e$; $f''(x) < 0$ si $x > e$
(b) $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d)$ no existe;
$f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$
si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

51. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a, y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$. Apoye la respuesta gráficamente.

52. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b, y c de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ y de modo que la pendiente de la tangente de inflexión sea igual a -2. Apoye la respuesta gráficamente.

53. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c y d de modo que f tenga un extremo relativo en el punto $(0, 3)$ y que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, -1)$. Apoye la respuesta gráficamente.

54. Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, determine a, b, c, d y e de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto $(1, -1)$, que contenga al origen y sea simétrica con respecto al eje y. Apoye la respuesta gráficamente.

55. Suponga que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ son números críticos de una función f y que $f''(x) = x\,[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!]$. En cada uno de estos números, determine si f tiene un extremo relativo y, en caso de ser así, si es un máximo relativo o un mínimo relativo.

56. Demuestre el inciso (ii) del criterio de la segunda derivada para extremos relativos.

57. Suponga que la gráfica de una función tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$. ¿Qué puede concluirse acerca de **(a)** la continuidad de f en c; **(b)** la continuidad de f' en c; **(c)** la continuidad de f'' en c?

58. Suponga que f es una función para la cual $f''(x)$ existe para toda x de algún intervalo abierto I y que en un número c de I, $f''(c) = 0$ y $f'''(c)$ existe y es diferente de cero. Demuestre que el punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. *Sugerencia:* la demostración es semejante a la del criterio de la segunda derivada.

59. **(a)** Explique por qué un punto de inflexión de la gráfica de una función que representa la productividad de un trabajador puede interpretarse como un punto de rendimiento decreciente. **(b)** Suponga que un trabajador de una fábrica que elabora marcos para pinturas puede hacer y marcos en x horas después de haber iniciado a las 8 a.m., y

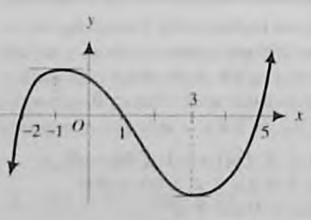
$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \le x \le 4$$

Determine en qué tiempo el trabajador se desempeña con mayor eficiencia; esto es, ¿cuándo el trabajador alcanza el punto de rendimiento decreciente?

60. Explique cuándo se utilizaría el criterio de la segunda derivada para determinar extremos relativos y cuándo emplearía el criterio de la primera derivada. En su explicación, indique las ventajas y desventajas de cada criterio.

3.6 TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES Y DE SUS DERIVADAS

En las secciones 3.4 y 3.5 se indicó cómo pueden determinarse propiedades de las gráficas de funciones a partir de sus derivadas. Ahora se mostrará cómo estas propiedades pueden determinarse a partir de la gráfica de la derivada y después emplearse para dibujar una posible gráfica de la función original.



Gráfica de f'

FIGURA 1

EJEMPLO 1 La gráfica de la derivada de la función del ejemplo 4 de la sección 3.4 se muestra en la figura 1. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de f que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 4 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de f son 3.5 y 6.

Solución La segunda derivada f'' evaluada en el número c es la pendiente de la recta tangente en el punto donde $x = c$ de la gráfica de f'. En consecuencia, como la gráfica de f' tiene rectas tangentes horizontales en $x = -1$ y en $x = 3$, $f''(-1) = 0$ y $f''(3) = 0$. En la figura 1 se observa que f' es creciente, es decir, $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(i), la gráfica de f es cóncava hacia arriba para estos valores de x. Además, f' es decreciente, esto es, $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$; por tanto, por el teorema 3.5.3(ii), la gráfica de f es cóncava hacia abajo para estos valores de x. Más aún, de la definición 3.5.4, se puede concluir que la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$ y $x = 3$. Estos hechos se resumen en la tabla 1.

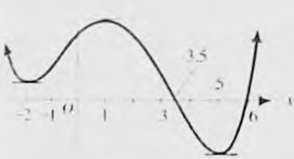
Tabla 1

	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 3$	−	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x$	+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba

Ahora refiérase a la tabla 2, la cual contiene los hechos de la tabla 1 anterior y de la tabla 4 de la sección 3.4.

Tabla 2

	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -2$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$-2 < x < -1$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 1$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$1 < x < 3$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$3 < x < 5$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 5$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$5 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba

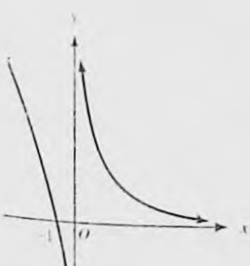


Gráfica de f

FIGURA 2

Puesto que los únicos ceros de f son 3.5 y 6, estos números son las únicas intercepciones x de la gráfica. Con esta información y las propiedades de la tabla 2, se dibuja una posible gráfica de f, la cual se muestra en la figura 2. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** La figura 3 muestra la gráfica de la derivada de la función g del ejemplo 5 de la sección 3.4. A partir de esta gráfica determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de g y dónde la gráfica de g es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Dibuje una posible gráfica de g que tenga estas propiedades así como las propiedades obtenidas en el ejemplo 5 de la sección 3.4. Suponga que los únicos ceros de g son −2 y 0.



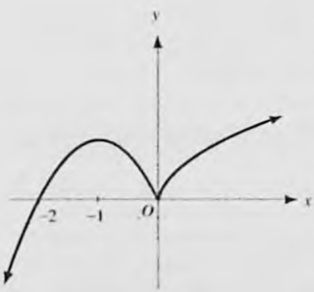
Gráfica de g'

FIGURA 3

Solución De la gráfica de g', g' es decreciente, es decir, $g''(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 0$. Por tanto, la gráfica de g es cóncava hacia abajo para estos valores de x. La gráfica de g nunca es cóncava hacia arriba. Como $g'(0)$ no existe, tampoco existe $g''(0)$. Puesto que $g''(x)$ no cambia de signo, la gráfica de g no tiene puntos de inflexión. Esta información se incorpora a la de la tabla 5 de la sección 3.4 para obtener la tabla 3.

Tabla 3

	$g'(x)$	$g''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$	+	–	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = -1$	0	–	g tiene un valor máximo relativo; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$-1 < x < 0$	–	–	g es decreciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo
$x = 0$	n. e.	n. e.	g tiene un valor mínimo relativo
$0 < x$	+	–	g es creciente; la gráfica de g es cóncava hacia abajo



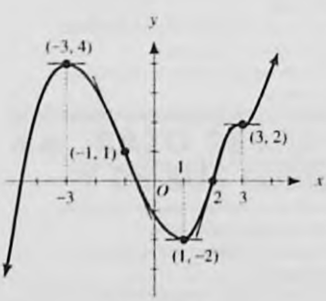
Gráfica de g

FIGURA 4

La figura 4 muestra una posible gráfica de g dibujada a partir de las propiedades de la tabla 3 y del hecho de que los únicos ceros de g son -2 y 0. ◀

En los dos ejemplos anteriores se obtuvo la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada. En el ejemplo siguiente, se dibujarán las derivadas primera y segunda de una función a partir de la gráfica de la función.

▶ ***EJEMPLO 3*** En la figura 5 se muestran la gráfica de una función f y segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla semejante a las tablas 2 y 3: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.



Gráfica de f

FIGURA 5

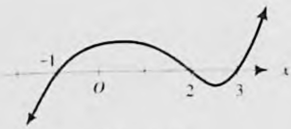
Solución De la figura se obtiene la información siguiente:

(i) f es creciente en $(-\infty, -3]$, $[1, 3]$ y $[3, +\infty)$;
(ii) f es decreciente en $[-3, 1]$;
(iii) f tiene un valor máximo relativo de 4 en $x = -3$, y un valor mínimo relativo de -2 en $x = 1$;
(iv) la gráfica de f es cóncava hacia arriba para x en los intervalos $(-1, 2)$ y $(3, +\infty)$;
(v) la gráfica de f es cóncava hacia abajo para x en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, 3)$;
(vi) la gráfica de f tiene puntos de inflexión donde $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

En la tabla 4, se incorpora esta información junto con los signos de f' y f'' en los intervalos especificados en (i)–(vi).

Gráfica de f'

FIGURA 6



Gráfica de f''

FIGURA 7

Tabla 4

	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -3$	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$-3 < x < -1$	−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -1$	−	0	f es decreciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$-1 < x < 1$	−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 1$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$1 < x < 2$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 2$	+	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x < 3$	+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 3$	0	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión con una recta tangente horizontal
$3 < x$	+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

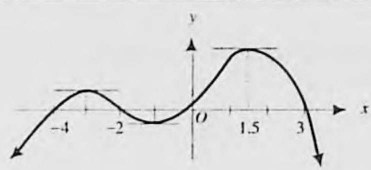
A partir de la tabla se han dibujado en las figuras 6 y 7 posibles gráficas de f' y f'', respectivamente. ◀

EJERCICIOS 3.6

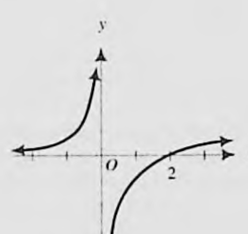
En los ejercicios 1 a 6, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales y la cual es continua en cada número. Estas gráficas son las mismas que las mostradas en el ejercicio indicado de la sección 3.4. A partir de la gráfica, determine las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Incorpore esta información y la información obtenida en el ejercicio correspondiente de la sección 3.4 en una tabla similar a las tablas 2 y 3 de esta sección. Dibuje un posible gráfica de f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados en cada ejercicio.

1. Refiérase al ejercicio 39 de la sección 3.4. Los ceros de f son −4, −1, 2 y 4.

2. Refiérase al ejercicio 40 de la sección 3.4. Los ceros de f son −1, 2 y 4.

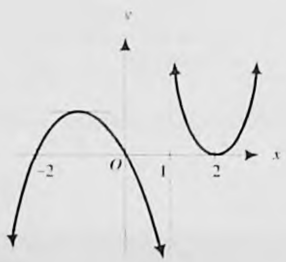


3. Refiérase al ejercicio 41 de la sección 3.4. Los ceros de f son 0 y 4.

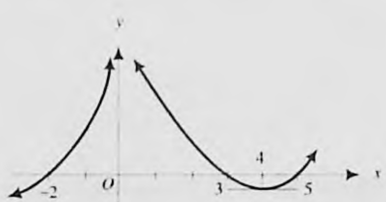


4. Refiérase al ejercicio 42 de la sección 3.4. Los ceros de f son -1 y 1.

5. Refiérase al ejercicio 43 de la sección 3.4. El cero de f es 1.

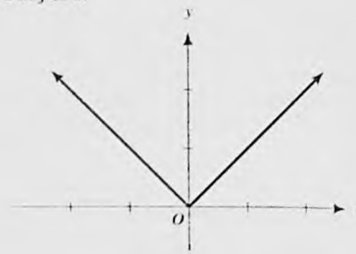


6. Refiérase al ejercicio 44 de la sección 3.4. Los ceros de f son -3 y 0.

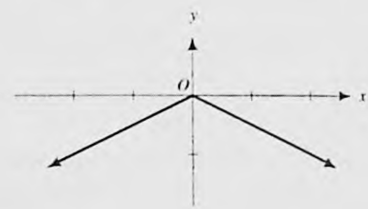


En los ejercicios 7 a 18, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales y la cual es continua en todo número. A partir de la gráfica, determine la información siguiente e incorpórela en una tabla similar a las tablas 2 y 3 de esta sección: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. Dibuje una posible gráfica de f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados en cada ejercicio.

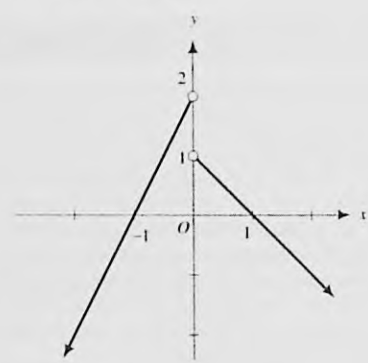
7. El cero de f es 0.



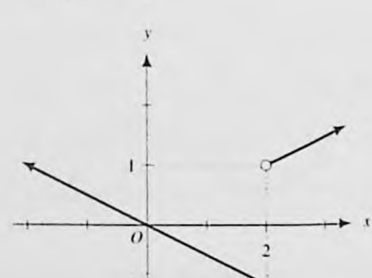
8. El cero de f es 0.



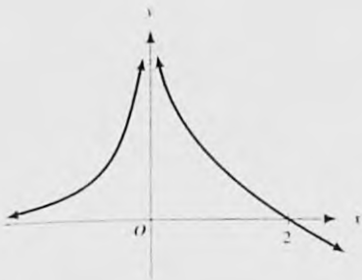
9. Los ceros de f son -2, 0 y 2.



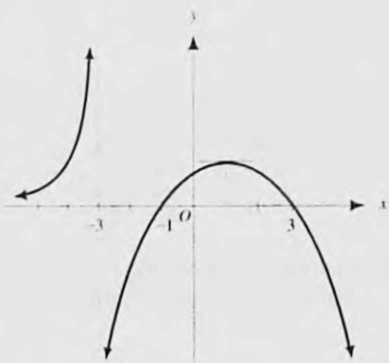
10. Los ceros de f son 0 y 4.



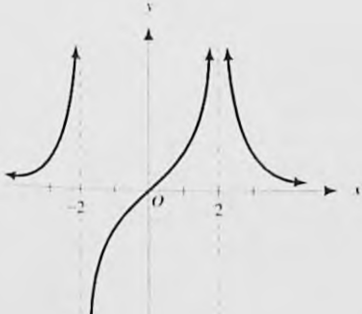
11. Los ceros de f son 0 y 3.



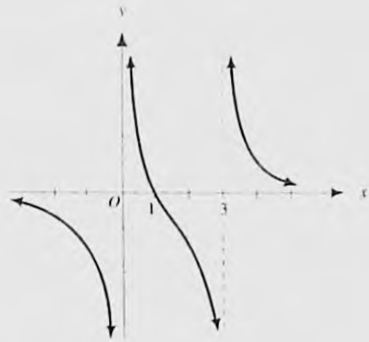
12. Los ceros de f son -4, -2, 1 y 5.



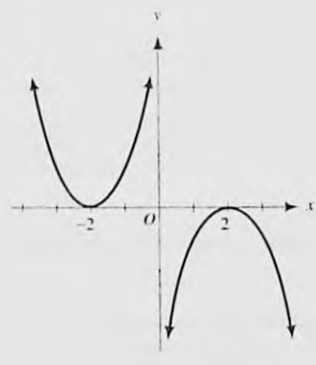
13. Los ceros de f son -3, -1 y 1.



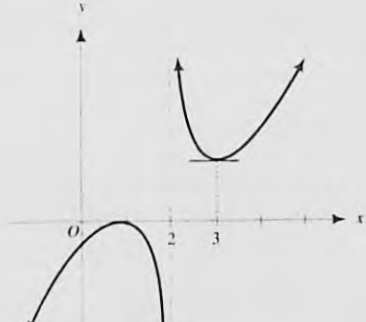
14. Los ceros de f son 0 y 3.



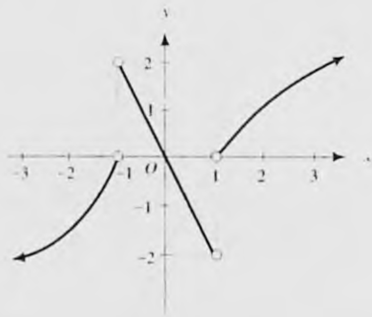
15. Los ceros de f son -2, y 2.



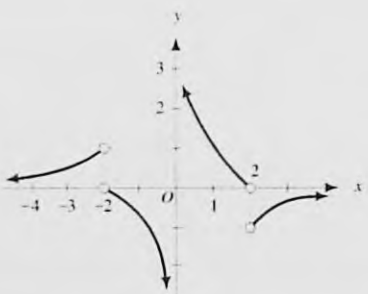
16. Los ceros de f son 1 y 3.



17. Los ceros de f son -2, 0 y 2.

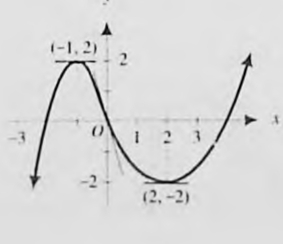


18. Los ceros de f son -3, 0 y 3.

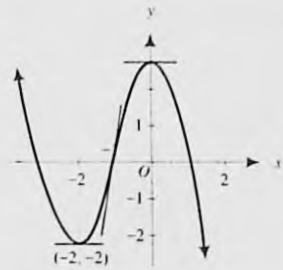


En los ejercicios 19 a 26, se muestran en la figura adjunta la gráfica de una función f y algunos segmentos de las tangentes de inflexión. A partir de la figura determine la siguiente información e incorpórela en una tabla semejante a la tabla 4: (i) los intervalos en los que f es creciente; (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la información de la tabla, dibuje posibles gráficas de f' y f''.

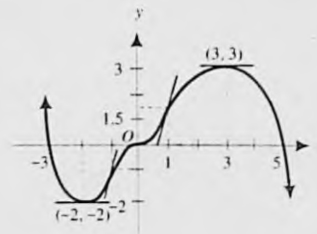
19.



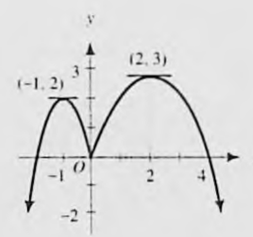
20.



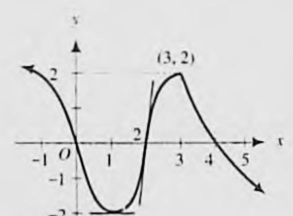
21.



22.

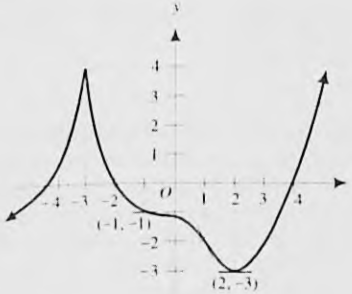


23.

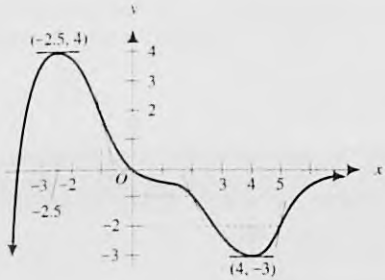


24.

25.



26.



27. Si $f(x) = 3x^2 + x|x|$ demuestre que $f''(0)$ no existe, sin embargo, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todo número. Apoye este resultado gráficamente trazando la gráfica de f y la gráfica de NDER2 ($f(x)$, x) en rectángulos de inspección separados.

28. Dada $f(x) = x^r - rx + k$, donde $r > 0$ y $r \neq 1$, demuestre que: **(a)** si $0 < r < 1$, entonces f tiene un valor máximo relativo en 1; **(b)** si $r > 1$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en 1.

29. Dada $f(x) = x^3 + 3rx + 5$, demuestre que: **(a)** si $r > 0$ entonces f no tiene extremos relativos; **(b)** si $r < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo y un valor mínimo relativo.

30. Dada $f(x) = x^2 + rx^{-1}$, demuestre que, independientemente del valor de r, f tiene un valor mínimo relativo y no tiene ningún valor máximo relativo.

31. Dibuje la gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. La gráfica no es la de una función. Sin embargo, la porción de la gráfica del primer cuadrante es la gráfica de una función. Obtenga esta porción por medio de las propiedades de las gráficas que se han estudiado en este capítulo, y después complete la gráfica mediante las propiedades de simetría. Recuerde, la concavidad juega un papel importante. Apoye los resultados trazando las gráficas de las dos funciones

$$f_1(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -(1 - x^{2/3})^{3/2}$$

en el mismo rectángulo de inspección.

32. Explique cómo pueden determinarse las propiedades de la gráfica de una función a partir de las gráficas de las derivadas primera y segunda de la función.

33. Explique cómo puede emplearse la gráfica de una función para dibujar posibles gráficas de las derivadas primera y segunda de la función.

3.7 LÍMITES AL INFINITO

En la sección 1.7 se estudiaron límites infinitos donde los valores de función crecían o decrecían sin límite conforme la variable independiente se aproximaba a un número real. Ahora se considerarán límites de funciones cuando la variable independiente crece o decrece sin límite. Se inicia con la función definida por

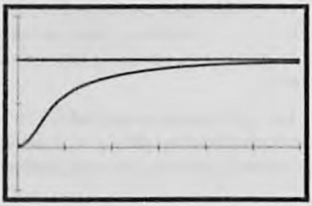
$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
0	0
1	1
2	1.6
3	1.8
4	1.882353
5	1.923077
10	1.980198
100	1.999800
1 000	1.999998

Considere que x toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1 000, y así sucesivamente, permitiendo que x crezca sin límite. Los valores de función correspondientes, exactos o aproximados mediante calculadora a seis cifras decimales, se muestran en la tabla 1. Observe en la tabla que conforme x crece, a través de valores positivos, los valores de función cada vez se acercan más a 2. Este hecho está apoyado por la figura 1, la cual muestra la recta $y = 2$ y la gráfica de f trazadas en el rectángulo de inspección de $[0, 6]$ por $[-1, 3]$. Ahora se examinará cómo se aproxima $f(x)$ a 2 para valores específicos de x. En particular,

$$\begin{aligned} 2 - f(4) &= 2 - 1.882353 \\ &= 0.117647 \end{aligned}$$



[0, 6] por [-1, 3]

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

$y = 2$

FIGURA 1

Por tanto, la diferencia entre 2 y $f(x)$ es 0.117647 cuando $x = 4$. Además,

$$\begin{aligned} 2 - f(100) &= 2 - 1.999800 \\ &= 0.000200 \end{aligned}$$

En consecuencia, la diferencia entre 2 y $f(x)$ es 0.000200 cuando $x = 100$.

Al continuar así, intuitivamente se aprecia que los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan cercanos a 2 como se desee tomando x suficientemente grande. En otras palabras, la diferencia entre 2 y $f(x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando cualquier número x mayor que algún número positivo suficientemente grande. O, avanzando un paso más, para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, se puede determinar un número $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$.

Cuando la variable independiente x crece sin límite a través de valores positivos, se escribe "$x \to +\infty$". Del ejemplo anterior se puede decir que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

3.7.1 Definición del límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(a, +\infty)$. El **límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite, es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

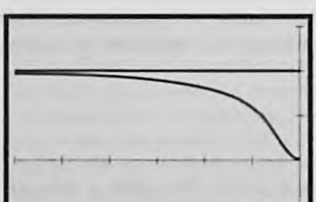
Tabla 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
-1	1
-2	1.6
-3	1.8
-4	1.882353
-5	1.923077
-10	1.980198
-100	1.999800
$-1\,000$	1.999998

Nota: Cuando se escribe $x \to +\infty$, no tiene un significado similar al que se tiene cuando se escribe, por ejemplo, $x \to 1000$. El símbolo $x \to +\infty$ indica sólo el comportamiento de la variable x.

Ahora considere la misma función de modo que x tome los valores -1, -2, -3, -4, -5, -10, -100, -1000, y así sucesivamente, permitiendo que x decrezca sin límite a través de valores negativos. La tabla 2 proporciona los valores de función de $f(x)$ correspondientes.

Observe que los valores de función son los mismos para los números negativos que para los números positivos. Vea la figura 2, la cual muestra la recta $y = 2$ y la gráfica de f trazadas en el rectángulo de inspección de $[-6, 0]$ por $[-1, 3]$.



$[-6, 0]$ por $[-1, 3]$

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

$y = 2$

FIGURA 2

Intuitivamente se observa que conforme x decrece sin límite, $f(x)$ se aproxima a 2; esto es, $|f(x) - 2|$ puede hacerse tan pequeña como se desee tomando cualquier número x menor que algún número negativo que tenga valor absoluto suficientemente grande. Formalmente se dice que para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, se puede determinar un número $N < 0$ tal que si $x < N$, entonces $|f(x) - 2| < \epsilon$. Utilizando el símbolo $x \to -\infty$ para denotar que la variable x decrece sin límite esto se expresa como

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

3.7.2 Definición del límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite

Sea f una función que está definida en todo número de algún intervalo abierto $(-\infty, a)$. El **límite de $f(x)$ cuando x decrece sin límite,** es L, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe un número $N < 0$ tal que

$$\text{si } x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Nota: Como en la nota posterior a la definición 3.7.1, el símbolo $x \to -\infty$ indica sólo el comportamiento de la variable x.

Los teoremas de límites 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 de la sección 1.5 y el teorema 12 de límites de la sección 1.7 son válidos cuando "$x \to a$" se sustituye por "$x \to +\infty$" o "$x \to -\infty$". Además, se tienen los teoremas de límites siguientes.

3.7.3 Teorema 13 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Demostración de (i) Para demostrar el inciso (i) se debe probar que se cumple la definición 3.7.1 para $f(x) = 1/x^r$ y $L = 0$; esto es, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |x|^r > \frac{1}{\epsilon}$$

o equivalentemente, puesto que $r > 0$,

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad |x| > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r}$$

Para que lo anterior se cumpla, se toma $N = (1/\epsilon)^{1/r}$. Así,

$$\text{si } N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r} \quad \text{y} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \epsilon$$

Esto demuestra el inciso (i). ■

La demostración del inciso (ii) es análoga a la demostración del inciso (i) y se deja como ejercicio (véase el ejercicio 62).

EJEMPLO 1 Sea

$$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 5}$$

Determine $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución A fin de aplicar el teorema 13 de límites, se divide el numerador y el denominador entre x, obteniéndose

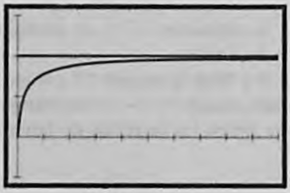
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0}$$

$$= 2$$

Se apoya la respuesta al trazar la gráfica de f y la recta $y = 2$ en el rectángulo de inspección de $[0, 100]$ por $[-1, 3]$, como se muestra en la figura 3.



$[0, 100]$ por $[-1, 3]$

$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 5}$

$y = 2$

FIGURA 3

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$$

Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Con el fin de aplicar el teorema 13 de límites, se divide el numerador y el denominador entre la potencia más grande de x que ocurra en el numerador o denominador, la cual es x^3.

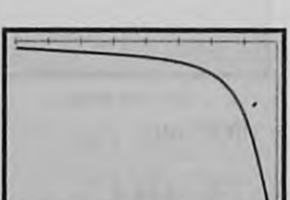
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0}$$

$$= 0$$

La figura 4, que muestra la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[-80, 0]$ por $[-0.25, 0]$, apoya la respuesta.



$[-80, 0]$ por $[-0.25, 0]$

$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$

FIGURA 4

EJEMPLO 3 Sea

$$g(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

Determine $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo radical, se divide el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Al efectuar la división se tiene,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}}$$

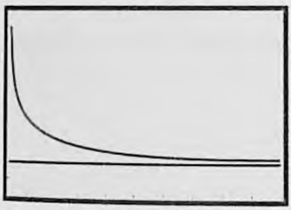
Debido a que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$. Así se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \lim\limits_{x\to+\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{3+4\cdot 0}{\sqrt{2-5\cdot 0}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$



[2, 100] por [2, 3]

$f(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$

$y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

FIGURA 5

A fin de apoyar gráficamente la respuesta, se trazan las gráficas de g y de la recta $y = 3/\sqrt{2}$ en el rectángulo de inspección de [2, 100] por [2, 3], como se muestra en la figura 5. ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Para la función del ejemplo 3, determine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ y apoye la respuesta gráficamente.

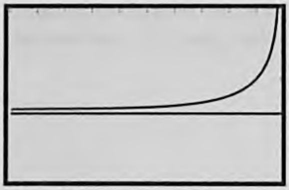
Solución De nuevo se inicia dividiendo el numerador y el denominador entre $|x|$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}}$$

Puesto que $x \to -\infty$, $x < 0$; por tanto, $|x| = -x$. Se tiene, entonces,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{4}{-x}}{\sqrt{2-\dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} (-3) - \lim\limits_{x\to-\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$



$[-100, -2]$ por $[-2.5, -1.5]$

$g(x) = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

$y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

FIGURA 6

$$= \frac{-3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

La figura 6 muestra la gráfica de g y la recta $y = -3/\sqrt{2}$ en el rectángulo de inspección de $[-100, -2]$ por $[-2.5, -1.5]$, la cual apoya la respuesta. ◀

A continuación se considerarán límites "infinitos" al infinito mediante definiciones formales para cada uno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si la función f está definida en algún intervalo abierto $(a, +\infty)$ y si para cualquier número $N > 0$ existe un número $M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $f(x) > N$. Las otras definiciones se dejan como ejercicio (consulte el ejercicio 61).

▶ *EJEMPLO 5* Determine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1}$$

Solución Si se divide el numerador y el denominador entre x^2, se obtiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Al evaluar el límite del denominador se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Por tanto, el límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 a través de valores positivos.

El límite del numerador es 1, y así, por el teorema 12(i) de límites (1.7.4), se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x + 1} = +\infty$$ ◀

▶ *EJEMPLO 6* Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}$$

Solución

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Los límites del numerador y del denominador se consideran por separado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to+\infty}1 \\ &= 0-1 \\ &= -1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2} \\ &= 0+0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

FIGURA 7

Por tanto, se tiene el límite de un cociente en el que el límite del numerador es -1 y el límite del denominador es 0, cuando el denominador se aproxima a 0 a través de valores positivos. Por el teorema 12 (iii) de límites,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5} = -\infty$$

◀

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

FIGURA 8

En la sección 1.7 se estudiaron las asíntotas verticales de una gráfica como una aplicación de los límites infinitos. Las *asíntotas horizontales* proporcionan una aplicación de los límites al infinito.

3.7.4 Definición de asíntota horizontal

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de la función f si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, y para algún número N, si $x > N$, entonces $f(x) \neq b$;

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, y para algún numero N, si $x < N$, entonces $f(x) \neq b$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

FIGURA 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Cada una de las figuras 7 a 10 muestra la gráfica de una función para la cual la recta $y = b$ es una asíntota horizontal. En las figuras 7 y 8, se aplica el inciso (i) de la definición 3.7.4, y para las figuras 9 y 10, el inciso (ii) es verdadero. Los dos incisos (i) y (ii) se cumplen para la función de la figura 11.

La figura 12 muestra la gráfica de una función f para la cual $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, pero no existe ningún número N tal que si $x > N$, entonces $f(x) \neq b$. En consecuencia, la recta $y = b$ no es una asíntota horizontal de la gráfica de f. Un ejemplo de este tipo de funciones se presenta en el ejercicio 63 de la sección 5.4. ◀

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

FIGURA 10

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Al principio de esta sección se motivó la definición de límites al infinito con la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

y se mostró que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ son igual a 2. Por tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. La gráfica trazada junto con la recta $y = 2$ en las figuras 1 y 2 apoyan este hecho. ◀

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

FIGURA 11

EJEMPLO 7 Obtenga las asíntotas horizontales de la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

FIGURA 12

y utilícelas para dibujar la gráfica de f. Apoye los resultados trazando la gráfica de f y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Primero se considerará el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$ se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

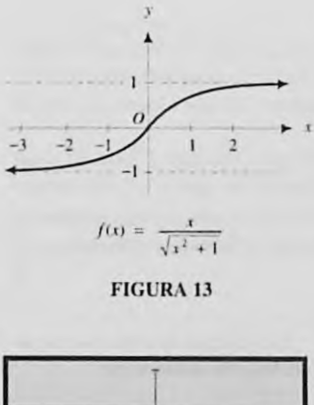
Puesto que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$. Así,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}}$$

$$= 1$$



$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

FIGURA 13

En consecuencia, por la definición 3.7.4(i), la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

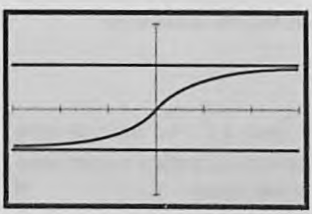
Ahora se considerará el límite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, de nuevo se dividirá el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$, que equivale a $|x|$. Como $x \to -\infty$ $x < 0$; por lo que $|x| = -x$. Entonces se tiene

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} (-1)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 + 0}}$$

$$= -1$$



[-3, 3] por [-2, 2]

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$y = 1$ y $y = -1$

FIGURA 14

De acuerdo con la definición 3.7.4(ii), la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Con las dos asíntotas horizontales como guías, de dibuja la gráfica de f obteniéndose la figura 13. Con el fin apoyar los resultados obtenidos, se traza la gráfica de f y las rectas $y = 1$ y $y = -1$ en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2], como se muestra en la figura 14.

A continuación se definirá el término *asíntota oblicua*, aquella que no es vertical ni horizontal. Observe que la definición de asíntota horizontal es un caso especial.

3.7.5 Definición de asíntota oblicua

La gráfica de la función f tiene la recta $y = mx + b$ como una **asíntota oblicua** si alguna de las proposiciones siguientes es verdadera:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, y para algún número $M > 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x > M$;

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, y para algún número $M < 0$, $f(x) \neq mx + b$ siempre que $x < M$.

El inciso (i) de la definición indica que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $N > 0$ tal que

$$\text{si } x > N \quad \text{entonces} \quad 0 < |f(x) - (mx + b)| < \epsilon$$

esto es, se puede hacer que el valor de función $f(x)$ esté tan cerca del valor de $mx + b$ como se quiera tomando x suficientemente grande. Este enunciado es consistente con la noción intuitiva de asíntota de una gráfica. Se tiene un enunciado similar al anterior para el inciso (ii) de la definición.

La gráfica de una función racional de la forma $P(x)/Q(x)$, donde el grado del polinomio $P(x)$ es mayor en 1 que el grado de $Q(x)$ y $Q(x)$ no es factor de $P(x)$, tiene una asíntota oblicua. Para demostrar esto, se considera $f(x) = P(x)/Q(x)$ y se divide $P(x)$ entre $Q(x)$ a fin de expresar $f(x)$ como la suma de una función lineal y una función racional; esto es,

$$f(x) = mx + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado del polinomio $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Entonces

$$f(x) - (mx + b) = \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{1}$$

Cuando el numerador y el denominador de $R(x)/Q(x)$ se dividen entre la potencia más grande de x que aparece en $Q(x)$, se tendrá un término constante en el denominador y todos los demás términos del denominador, y cada término del numerador, será de la forma k/x^r donde k es una constante y r es un número entero positivo. Por tanto, conforme $x \to +\infty$, el límite del numerador será cero y el límite del denominador será una constante. De este modo, $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x)/Q(x) = 0$. En consecuencia, de (1) se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

de donde se concluye que, por la definición 3.7.5, la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f.

▶ *EJEMPLO 8* Sea

$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Determine las asíntotas de la gráfica de h. Apoye los resultados trazando la gráfica de h y sus asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Como

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$$

la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. No existen asíntotas horizontales porque si el numerador y el denominador de $h(x)$ se dividen entre x^2, se obtiene

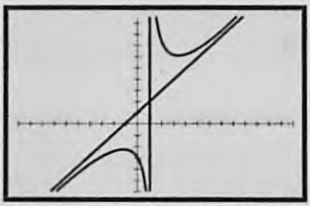
$$\frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

y conforme $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, el límite del numerador es 1 y el límite del denominador es 0. Sin embargo, el grado del numerador de $h(x)$ es mayor en 1 que el grado del denominador, y cuando se divide el numerador entre el denominador se obtiene

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$$

Por tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

La figura 15, que muestra la gráfica de h y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$, apoya los resultados obtenidos.



$[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$

$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

$x = 1$ y $y = x + 1$

FIGURA 15

EJERCICIOS 3.7

En los ejercicios 1 a 10, haga lo siguiente: Con la ayuda de la calculadora, tabule los valores de $f(x)$ para los valores indicados de x. (a) ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x crece sin límite? (b) ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x decrece sin límite? (c) Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de f. (d) Confirme la respuesta del inciso (a) determinando el $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (e) Confirme la respuesta del inciso (b) determinando el $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

1. $f(x) = \frac{4}{x^2}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

2. $f(x) = \frac{3}{x^4}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

4. $f(x) = -\frac{2}{x^3}$; x es igual a 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

5. $f(x) = -\frac{3x^2}{x^2 + 1}$; x es igual a 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −1, −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

6. $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 2}$; x es igual a 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1 000 y x es igual a −2, −4, −6, −8, −10, −100, −1 000.

7. $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

8. $f(x) = \frac{5x - 3}{10x + 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

9. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

10. $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$; x es igual a 2, 6, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y x es igual a −2, −6, −10, −100, −1 000, −10 000, −100 000.

En los ejercicios 11 a 30 determine el límite y apoye la respuesta gráficamente.

11. $\lim_{t \to +\infty} \frac{2t + 1}{5t - 2}$

12. $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x - 4}{3x + 1}$

13. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 7}{4 - 5x}$

14. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 5x}{2 - 3x}$

15. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 8x + 5}$

16. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 3}{2x^2 - 1}$

17. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 4}{3x^2 - 5}$

18. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{x^3}$

19. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^2 - 3y}{y + 1}$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{7x^3 + x + 1}$

21. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 5}{8x^3 + x + 2}$

22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 7x^2 + 2}{2x^4 + 1}$

23. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^3 - 4}{5y + 3}$

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 12x + 7}{4x^2 - 1}$

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

26. $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{2}{t^2} - 4t\right)$

27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

28. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$

29. $\lim\limits_{w \to -\infty} \dfrac{\sqrt{w^2 - 2w + 3}}{w + 5}$

30. $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{\sqrt{y^4 + 1}}{2y^2 - 3}$

En los ejercicios 31 a 34, realice lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función f y haga una proposición acerca del comportamiento aparente de f(x) conforme x crece sin límite. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

31. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

32. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

33. $f(x) = \sqrt{3x^2 + x} - 2x$

34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$

En los ejercicios 35 a 46, determine las asíntotas de la gráfica de la función y utilícelas para dibujar la gráfica. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

35. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

36. $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

37. $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

38. $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{x + 1}$

39. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

40. $g(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

41. $G(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$

42. $F(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

43. $h(x) = \dfrac{2x}{6x^2 + 11x - 10}$

44. $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

45. $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

46. $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$

En los ejercicios 47 a 54, determine las asíntotas de la gráfica de la función. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$

49. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

50. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

51. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 2}$

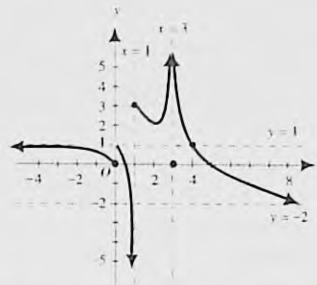
52. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

53. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$

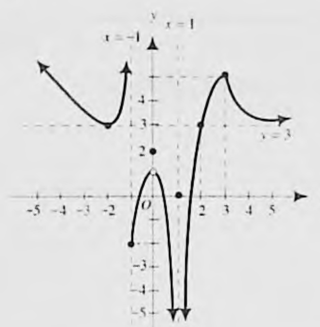
54. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

En los ejercicios 55 y 56, evalúe los límites de los incisos (a)-(h) a partir de la gráfica de la función f, mostrada en la figura adjunta y cuyo dominio es $(-\infty, +\infty)$.

55. **(a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **(f)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **(h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



56. **(a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **(f)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
(g) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **(h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



En los ejercicios 57 y 58, dibuje la gráfica de una función f que tenga las propiedades dadas y cuyo dominio es $(-\infty, +\infty)$.

57. $f(-4) = 0$; $f(-2) = 0$; $f(0) = 3$; $f(2) = -3$; $f(4) = 0$; $f(5) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

58. $f(-5) = 0$; $f(-3) = 0$; $f(-2) = 0$; $f(0) = 0$; $f(2) = 3$; $f(3) = 0$; $f(4) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

59. Demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

aplicando la definición 3.7.1; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces

$$\left| \frac{x}{x-1} - 1 \right| < \epsilon$$

60. Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{8x+3}{2x-1} = 4$$

aplicando la definición 3.7.2; esto es, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N < 0$ tal que si $x < N$, entonces

$$\left| \frac{8x+3}{2x-1} - 4 \right| < \epsilon$$

61. Escriba una definición formal para cada uno de los, siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; **(b)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
(c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

62. Demuestre el inciso (ii) del teorema 13 de límites (3.7.3).

63. Demuestre que $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ probando que para cualquier $N > 0$ existe una $M > 0$ tal que si $x > M$, entonces $x^2 - 4 > N$.

64. Demuestre que $\lim_{x \to +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty$ aplicando la definición del ejercicio 61(a).

En los ejercicios 65 a 68, establezca en palabras lo que significa el simbolismo indicado sin emplear las palabras límite, se aproxima, infinito, crece sin límite o decrece sin límite y sin emplear símbolos tales como ϵ, *N* y *M*.

65. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ **66.** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

67. **(a)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; **(b)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

68. **(a)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; **(b)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

69. Si W es la medida del peso de un objeto a una distancia de x unidades de la superficie de la Tierra, entonces

$$W = \left(\frac{R}{R+x} \right)^2 W_0$$

donde R unidades es la longitud del radio de la Tierra y W_0 es la medida del peso del objeto a nivel del mar. Determine $\lim_{x \to +\infty} W$ e indique el significado de este resultado en un viaje espacial.

3.8 RESUMEN PARA EL TRAZO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Ahora se resumirán los pasos que deben seguirse cuando se dibuje la gráfica de una función f. En este resumen también se han incorporado las propiedades estudiadas en este capítulo.

1. Determine el dominio de f.
2. Determine las intercepciones x y y. Cuando determine las intercepciones x, tal vez necesite aproximar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en la graficadora.
3. Pruebe la simetría con respecto al eje y y al origen.
4. Verifique si la gráfica tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.
5. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
6. Determine los números críticos de f. Estos son los valores de x del dominio de f para los que $f'(x)$ no existe o $f'(x) = 0$.
7. Aplique el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada para determinar si en un número crítico existe un valor máximo relativo, un valor mínimo relativo o no se tiene ningún extremo relativo.
8. Determine los intervalos en los que f es creciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es positiva; determine los intervalos en los que f es decreciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es negativa. Al localizar los intervalos donde f es monótona, también verifique los números críticos en los que f no tiene un extremo relativo.

9. Determine los números críticos de f', esto es, los valores de x para los que $f''(x)$ no existe o $f''(x) = 0$, para obtener los puntos de inflexión posibles. En cada uno de estos valores de x verifique si $f''(x)$ cambia de signo y si la gráfica tiene una recta tangente ahí a fin de determinar si en realidad se tiene un punto de inflexión.
10. Verifique la concavidad de la gráfica. Obtenga los valores de x para los que $f''(x)$ es positiva a fin de obtener puntos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba; para determinar los puntos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo obtenga los valores de x en los que $f''(x)$ es negativa.
11. Calcule la pendiente de cada una de las tangentes de inflexión, esto le será de gran ayuda.

Se sugiere que incorpore toda la información obtenida en los pasos anteriores en una tabla como se mostró en las secciones 3.4-3.6 y en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 La función del ejemplo 8 de la sección 3.7 está definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Dibuje la gráfica de f siguiendo el procedimiento sugerido anteriormente. Apoye los resultados en la graficadora.

Solución El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 1. La intercepción y es -3 y no se tienen intercepciones x. No hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

En el ejemplo 8 de la sección 3.7, se determinó que las rectas $x = 1$ y $y = x + 1$ son asíntotas de la gráfica.

Ahora se calcularán $f'(x)$ y $f''(x)$.

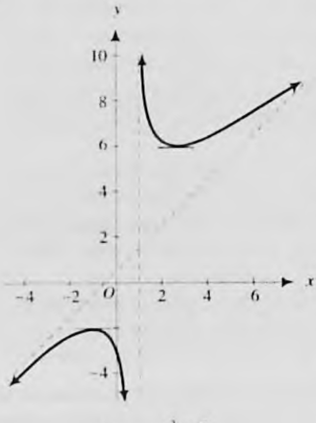
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{8}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Al considerar $f'(x) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x+1)(x-3) &= 0 \\ x = -1 \qquad x &= 3 \end{aligned}$$

$f''(x)$ nunca es cero. Ahora se construye la tabla 1 considerando los puntos en los que $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$, y los intervalos que excluyen estos valores de x:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 1 \qquad 1 < x < 3 \qquad 3 < x$$



$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

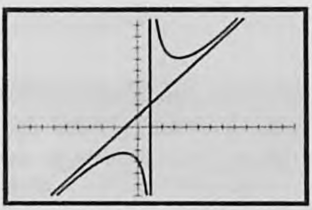
FIGURA 1

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = -1$	−2	0	−	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$-1 < x < 1$		−	−	f es decreciente, la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 1$	n.e.	n.e.	n.e.	
$1 < x < 3$		−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 3$	6	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$3 < x$		+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba

Si se indican las asíntotas, las rectas tangentes horizontales, se localizan algunos puntos, y considerando la información de la tabla 1, se dibuja la gráfica de f mostrada en la figura 1.

La figura 2 (la misma que la figura 15 de la sección 3.7) muestra la gráfica de f y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$, la cual apoya los resultados.



$[-10, 13.5]$ por $[-6, 9.7]$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 3}$

$x = 1$ y $y = x + 1$

FIGURA 2

▶ *EJEMPLO 2* Sea

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

(a) Determine las asíntotas de la gráfica de f. **(b)** Trace la gráfica de f y sus asíntotas en el mismo rectángulo de inspección. Estime a partir de la gráfica lo siguiente: los extremos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos en los que la gráfica es creciente y en los que es decreciente; los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y los intervalos donde es cóncava hacia abajo. **(c)** Confirme las estimaciones del inciso (b) analíticamente.

Solución

(a) El dominio de f es el conjunto de los números reales excepto ± 2. Como -2 y 2 se excluyeron del dominio, se calculan los límites siguientes:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

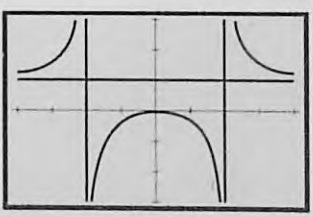
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Por tanto, las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas de la gráfica. Como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas oblicuas.

(b) La figura 3 muestra la gráfica de f y las asíntotas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$. A partir de la gráfica se pueden hacer las estimaciones siguientes: f tiene un valor máximo relativo en el origen; la gráfica no tiene puntos de inflexión; f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0]$, y f es decreciente en $[0, 2)$ y $(2, +\infty)$; la gráfica es cóncava hacia arriba cuando x esta en $(-\infty, -2)$ o en $(2, +\infty)$ y la gráfica es cóncava hacia abajo cuando x está en $(-2, 2)$.



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

$y = 1$

$x = -2$ y $x = 2$

FIGURA 3

(c) Para confirmar analíticamente las estimaciones del inciso (b), primero se calcula $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} \qquad f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x[2(x^2 - 4)(2x)]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \qquad = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene $x = 0$; $f''(x)$ nunca es cero. La tabla 2 se construye teniendo en cuenta los puntos en los que $x = 0$ y $x = \pm 2$, y los intervalos que excluyen estos puntos:

$$x < -2 \qquad -2 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

La información de la tabla 2 confirma las estimaciones.

Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$		+	+	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -2$	n.e.	n.e.	n.e.	
$-2 < x < 0$		+	−	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	n.e.	n.e.	n.e.	
$2 < x$		−	+	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba

◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Dibuje la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

e indique los puntos de inflexión. Dibuje un segmento de cada tangente de inflexión.

Solución Al calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ se obtiene

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-4/3} + \tfrac{4}{9}x^{-5/3}$$

Como $f'(0)$ no existe, 0 es un número crítico de f. Los otros números críticos de f se determinan al considerar $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$
$$2x^{1/3} - 2 = 0$$
$$x^{1/3} = 1$$
$$x = 1$$

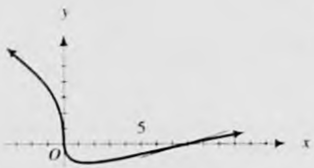
De este modo, 1 también es un número crítico. Se puede determinar si existe un extremo relativo en 1 aplicando el criterio de la segunda derivada. No se puede utilizar este criterio en el número crítico 0 porque $f'(0)$ no existe. Sin embargo, se aplica el criterio de la primera derivada en $x = 0$. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos al emplear estos criterios.

Debido a que $f''(0)$ no existe, entonces $(0, 0)$ puede ser un punto de inflexión. Para obtener otros puntos de inflexión posibles se considera $f''(x) = 0$.

$$-\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} = 0$$
$$-2x^{1/3} + 4 = 0$$
$$x^{1/3} = 2$$
$$x = 8$$

Para determinar si existen puntos de inflexión donde $x = 0$ y $x = 8$ se verifica si $f''(x)$ cambia de signo; y al mismo tiempo se revisa la concavidad de la gráfica en los intervalos respectivos. La gráfica debe tener una recta tangente en cada punto de inflexión. En el origen existe una recta tangente vertical porque

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}}$$
$$= -\infty$$



$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

FIGURA 4

La tabla 3 resume los resultados y a partir de ellos se obtiene la gráfica de f dibujada en la figura 4, la cual muestra también un segmento de la tangente de inflexión en el punto $(8, 0)$. La recta tangente en el otro punto de inflexión, el origen, es el eje y.

Tabla 3

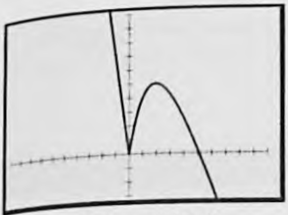
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f no tiene extremo relativo; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$0 < x < 1$		$-$	$+$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 1$	-1	0	$+$	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$1 < x < 8$		$+$	$+$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = 8$	0	$\frac{1}{6}$	0	f es creciente; la gráfica de f tiene un punto de inflexión
$8 < x$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

Cuando trace la gráfica del ejemplo 3 en la graficadora, observe que no revela el punto de inflexión en $(8, 0)$ o el cambio de concavidad en ese punto. Esta situación prevalece para las gráficas de la mayoría de las funciones trazadas en la graficadora. Sin embargo, frecuentemente, al trazar la gráfica de NDER2, se puede estimar un punto de inflexión, y en consecuencia, donde la concavidad cambia. Esta información se puede confirmar analíticamente. El ejemplo siguiente muestra este procedimiento.

▶ EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

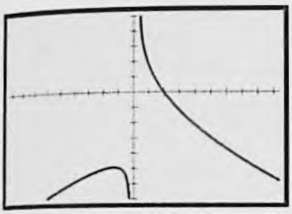
(a) Trace las gráficas de f, NDER($f(x)$, x) y NDER2($f(x)$, x) en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los extremos relativos de f; (ii) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; (iii) los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. **(b)** Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente.



$[-8, 10.8]$ por $[-3, 9.4]$

$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

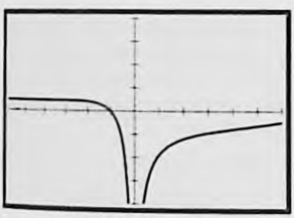
FIGURA 5



$[-9.4, 9.4]$ por $[-7.2, 5.2]$

NDER $(5x^{2/3} - x^{5/3}, x)$

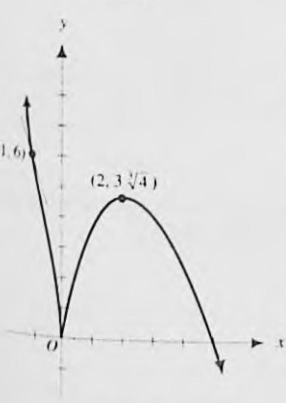
FIGURA 6



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

NDER2 $(5x^{2/3} - x^{5/3}, x)$

FIGURA 7



$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

FIGURA 8

Solución

(a) La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de $[-8, 10.8]$ por $[-3, 9.4]$ y la gráfica de NDER$(f(x), x)$ trazada en el rectángulo de inspección de $[-9.4, 9.4]$ por $[-7.2, 5.2]$, se muestran en las figuras 5 y 6, respectivamente.

(i) De la figura 5 se estima que f tiene un valor mínimo relativo en $x = 0$ y de las figuras 5 y 6, f tiene un valor máximo en $x = 2$.

(ii) De la figura 6, como $f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 2$, se estima que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[2, +\infty)$. También de la figura 6, como $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < 2$, se estima que f es creciente en el intervalo $[0, 2]$. Estas estimaciones son consistentes con lo que se observa en la gráfica de f de la figura 5.

(iii) De la figura 5, la gráfica de f parece ser cóncava hacia abajo cuando $x > 0$. No se tiene seguridad acerca de la concavidad o de los puntos de inflexión cuando $x < 0$. Por tanto, se necesita investigar la gráfica de NDER2$(f(x), x)$, la cual está trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ en la figura 7. A partir de esta gráfica, $f''(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f''(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$. De este modo se estima que la gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x < -1$ y cóncava hacia abajo cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$.

(iv) Como $f''(-1) = 0$ y la gráfica de f cambia de concavidad en $x = -1$, se estima que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

(b) Ahora se confimarán las estimaciones analíticamente. Considerando $f(x) = 0$, se obtienen los ceros de f los cuales son 0 y 5, es decir, las intercepciones x de la gráfica. A continuación se calculan $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{10}{3}x^{-1/3} - \tfrac{5}{3}x^{2/3} & \qquad f''(x) &= -\tfrac{10}{9}x^{-4/3} - \tfrac{10}{9}x^{-1/3} \\
&= \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) & &= -\tfrac{10}{9}x^{-4/3}(1 + x)
\end{aligned}
$$

Cuando $x = 0$, $f'(x)$ y $f''(x)$ no existen. Al considerar $f'(x) = 0$ se obtiene $x = 2$. Por tanto, los números críticos de f son 0 y 2. A partir de $f''(x) = 0$ se obtiene $x = -1$. Al construir la tabla 4 se consideraron los puntos en los que x es igual a -1, 0 y 2, y los intervalos siguientes:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		$-$	$+$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	6	-5	0	f es decreciente; la gráfica de f tienen un punto de inflexión
$-1 < x < 0$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4.8$	0	$-$	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$2 < x$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

A partir de la información de la tabla 4 y localizando algunos puntos, se dibuja la gráfica de f mostrada en la figura 8. La tabla y la gráfica confirman las estimaciones del inciso (a).

EJERCICIOS 3.8

En los ejercicios 1 a 24, dibuje la gráfica de f determinando primero lo siguiente: los extremos relativos de f; los puntos de inflexión de la gráfica de f; los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; la pendiente de las tangentes de inflexión; y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, en caso de que tenga. Incorpore esta información en una tabla similar a las de esta sección. Apoye los resultados en la graficadora.

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$

5. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$

6. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^4 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & \text{si } x \le 2 \\ (2-x)^3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

12. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

13. $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

14. $f(x) = x^2(x+4)^3$

15. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}\pi \\ \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{si } \frac{1}{2}\pi \le x \le \pi \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ \cos(\pi - x) & \text{si } 0 < x \le \pi \end{cases}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

21. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

23. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

En los ejercicios 25 a 32, (a) trace las gráficas de NDER($f(x)$, x) y NDER2($f(x)$, x) en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los extremos relativos de f; (ii) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente, (iii) los intervalos donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. (b) Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente e incorpore la información en una tabla semejante a la tabla 4 de esta sección. A partir de la información de la tabla dibuje la gráfica de f y compárela con la gráfica de f trazada en el inciso (a).

25. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

26. $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 32x^2 - 12x - 16$

27. $f(x) = |25 - x^2|$

28. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$

29. $f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$

30. $f(x) = x^2\sqrt{4-x}$

31. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, x \in [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x - 5 \cos 2x, x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

33. Antes de dibujar la gráfica de una función aplicando los pasos listados al principio de esta sección, ¿por qué es conveniente incorporar esta información en una tabla?

3.9 APLICACIONES ADICIONALES SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS

A fin de aplicar el teorema del valor extremo para determinar los extremos absolutos de una función, la función debe ser continua en un intervalo cerrado. En la sección 3.2 las aplicaciones trataron sobre tales funciones. Ahora se considerarán aplicaciones que involucran extremos absolutos para las cuales no puede emplearse el teorema del valor extremo. Sin embargo, primero se presentará un teorema, el cual en ocasiones es útil para determinar si un extremo relativo es un extremo absoluto.

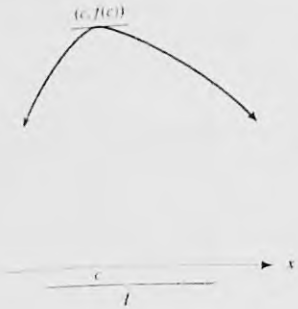


FIGURA 1

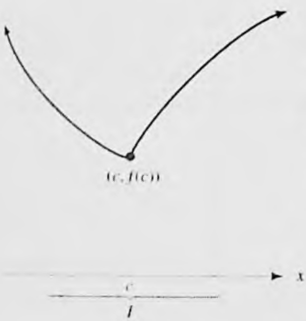


FIGURA 2

FIGURA 3

Para ilustrar el teorema, refiérase a las funciones cuyas gráficas se presentan en las figuras 1 y 2. Cada una de estas funciones es continua en el intervalo I y tiene sólo un extremo relativo, $f(c)$, en I. En los dos casos el teorema siguiente garantiza que el extremo relativo es un extremo absoluto.

3.9.1 Teorema

Suponga que la función f es continua en el intervalo I que contiene al número c. Si $f(c)$ es un extremo relativo de f en I y c es el único número en I para el cual f tiene un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto de f en I.

La demostración de este teorema se presentará al final de la sección.

El teorema 3.9.1 se emplea en los ejemplos siguientes, los cuales tratan con aplicaciones en las que se requiere un extremo absoluto pero no puede aplicárseles el teorema del valor extremo. En el primer ejemplo se trata de la situación del ejemplo 5 de la sección 1.3. Refiérase a este ejemplo en este momento.

EJEMPLO 1 Si un envase de hojalata cerrado de 60 pulg^3 de volumen tiene forma de cilindro circular recto, determine analíticamente el radio de la base del envase si se emplea la mínima cantidad de hojalata en su elaboración.

Solución La figura 3 muestra el envase cilíndrico donde el radio de la base mide r pulgadas. Se determinará el radio de la base para el cual el área de la superficie total del envase es un mínimo absoluto. En el ejemplo 5 de la sección 1.3, se mostró que si $S(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

El dominio de S es $(0, +\infty)$ y S es continua en su dominio.

Para terminar cualquier extremo relativo de S se calculan las derivadas primera y segunda de S:

$$S'(r) = -\frac{120}{r^2} + 4\pi r \qquad S''(r) = \frac{240}{r^3} + 4\pi$$

Observe que $S'(r)$ no existe cuando $r = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de S. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $S'(r) = 0$, de donde se tiene

$$4\pi r^3 = 120$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$$

En consecuencia, $\sqrt[3]{30/\pi}$ es un número crítico de S. Se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 1.

Tabla 1

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusión*
$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

Debido a que S es continua en su dominio y el único extremo relativo de S en su dominio se tiene en $r = \sqrt[3]{30/\pi}$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que este valor mínimo relativo de S es su valor mínimo absoluto.

Al aproximar a centésimos se tiene $\sqrt[3]{30/\pi} \approx 2.12$, lo cual es acorde con la respuesta del ejemplo 5 de la sección 1.3.

<u>**Conclusión:**</u> La mínima cantidad de hojalata se empleará en la elaboración del envase cuando el radio de la base sea $\sqrt[3]{30/\pi}$ pulg ≈ 2.12 pulg. ◀

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 2*** Una caja cerrada con base cuadrada tiene un volumen de 2 000 pulg^3. El material de la tapa y de la base cuesta 3 centavos la pulgada cuadrada mientras que el material para los lados cuesta 1.5 centavos la pulgada cuadrada. Estime en la graficadora las dimensiones de la caja de modo que el costo total del material sea mínimo. Confirme la estimación analíticamente.

Solución Sean x pulgadas la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ dólares el costo total del material. El área de la base es x^2 pulgadas cuadradas. Sea y pulgadas la profundidad de la caja. Vea la figura 4. Puesto que el volumen de la caja es el producto del área de la base y la profundidad se tiene

$$x^2 y = 2\,000$$

$$y = \frac{2\,000}{x^2} \qquad (1)$$

El número total de pulgadas cuadradas de las áreas de la tapa y de la base es $2x^2$, y el de los lados es $4xy$. Por tanto, el número de centavos del costo total del material es

$$3(2x^2) + \tfrac{3}{2}(4xy)$$

Al sustituir y de (1), se tiene

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2\,000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12\,000}{x}$$

$[0, 20]$ por $[1\,000, 5\,000]$

$C(x) = 6x^2 + \dfrac{12\,000}{x}$

FIGURA 5

El dominio de C es $(0, +\infty)$. La figura 5 muestra la gráfica de C trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 20]$ por $[1\,000, 5\,000]$. Se estima que el punto más bajo de la gráfica se obtiene cuando $x = 10$. De (1), si $x = 10$, $y = 20$. Por tanto, se estima que el lado de la base del cuadrado debe medir 10 pulg y la profundidad debe ser de 20 pulg para que el costo del material se mínimo.

Para confirmar la estimación analíticamente, se calcula $C'(x)$ y $C''(x)$:

$$C'(x) = 12x - \frac{12\,000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24\,000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ no existe cuando $x = 0$ y que 0 no pertenece al dominio de C. Por tanto, los únicos números críticos son aquellos que se obtienen al considerar $C'(x) = 0$, de donde se tiene

$$12x - \frac{12\,000}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 1000$$

La única solución real de esta ecuación es 10. De este modo, el único número crítico es 10. Para determinar si $C(10)$ es un valor mínimo relativo para C, se aplica el criterio de la segunda derivada, y los resultados se resumen en la tabla 2.

Tabla 2

	$C'(x)$	$C''(x)$	*Conclusión*
$x = 10$	0	+	C tiene un valor mínimo relativo

Como C es continua en su dominio y el único extremo relativo de C se tiene en $x = 10$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que el valor mínimo relativo de C es su valor mínimo absoluto. Por tanto, se ha confirmado la estimación.

Conclusión: El costo del material será mínimo cuando el lado de la base cuadrada mida 10 pulg y la profundidad mida 20 pulg. ◀

En los ejemplos anteriores y en los ejercicios de la sección 3.2, la variable para la que se desea determinar un extremo relativo se expresó como una función de sólo una variable. En ocasiones este procedimiento es demasiado difícil o bastante laborioso, o en ocasiones es imposible. Con frecuencia, la información dada permite obtener dos ecuaciones que involucran tres variables. En lugar de eliminar una de las variables, puede ser más ventajoso diferenciar implícitamente. El ejemplo siguiente ilustra este método. El problema es similar al del ejemplo 1, pero en este caso el volumen del envase no se especifica.

▶ ***EJEMPLO 3*** Si un envase de volumen fijo tiene la forma de un cilindro circular recto, determine la razón de la altura al radio de la base si se emplea la cantidad mínima de material en su elaboración.

FIGURA 6

Solución Se desea determinar una relación entre la altura y el radio de la base de un cilindro circular recto, de modo que el área de la superficie sea un mínimo absoluto para un volumen fijo. Por tanto, se considerará el volumen del cilindro como una constante.

Sean V unidades cúbicas el volumen del cilindro (una constante).

A continuación se definen las variables.

Sean r unidades la longitud del radio del cilindro; $r > 0$. Sean h unidades la altura del cilindro; $h > 0$. Sean S unidades cuadradas el área de la superficie total del cilindro (refiérase a la figura 6).

Así, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{2}$$
$$V = \pi r^2 h \tag{3}$$

Puesto que V es una constante, se puede resolver (3) para r o para h en términos de la otra y sustituirla en (2), lo que hace de S una función de una variable. El método alternativo consiste en considerar a S como una función de las dos variables r y h; sin embargo, no son independientes una de la otra. Esto es, si se elige r como variable independiente, entonces S depende de r; también, h depende de r.

Al diferenciar S y V con respecto a r, teniendo en mente que h es una función de r, se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r\frac{dh}{dr} \qquad (4)$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr}$$

Como V es un constante, entonces $\frac{dV}{dr} = 0$; por tanto, de la ecuación anterior,

$$2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr} = 0$$

con $r \neq 0$. Si se divide entre r y se despeja $\frac{dh}{dr}$, se obtiene

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \qquad (5)$$

Al sustituir de (5) en (4) se tiene

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left[2r + h + r\left(-\frac{2h}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h) \qquad (6)$$

Con objeto de determinar cuándo S tiene un valor mínimo relativo se considera $\frac{dS}{dr} = 0$, obteniéndose $2r - h = 0$, de donde,

$$r = \tfrac{1}{2}h$$

A fin de determinar si esta relación entre r y h hace de S un mínimo relativo se aplica el criterio de la segunda derivada. De (6) se obtiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right)$$

Al sustituir de (5) en esta ecuación se tiene

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left[2 - \left(\frac{-2h}{r}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left(2 + \frac{2h}{r}\right)$$

Los resultados del criterio de la segunda derivada se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$\frac{dS}{dr}$	$\frac{d^2s}{dr^2}$	*Conclusión*
$r = \frac{1}{2}h$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo

De (2) y (3), S es una función continua de r en $(0, +\infty)$. Como el único extremo relativo de S en $(0, +\infty)$ se tiene en $r = \frac{1}{2}h$, se concluye, por el teorema 3.9.1, que S tiene un valor mínimo absoluto cuando $h/r = 2$.

<u>Conclusión:</u> El área de la superficie total del envase será mínimo, para un volumen específico, cuando la razón de la altura al radio de la base sea 2. ◀

En ocasiones, los problemas geométricos que implican extremos absolutos son más fáciles de resolver utilizando funciones trigonométricas como se muestra en el ejemplo siguiente.

FIGURA 7

▶ **EJEMPLO 4** Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio dado. Determine la razón de la altura al radio de la base del cilindro de mayor superficie lateral.

Solución Refiérase a la figura 7, donde la medida del radio de la esfera es constante e igual a a.

Sean θ radianes la medida del ángulo central subtendido por el radio del cilindro, r unidades la longitud del radio del cilindro, h unidades la altura del cilindro y S unidades cuadradas el área de la superficie lateral del cilindro. De la figura 7,

$$r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad h = 2a \cos \theta$$

Como $S = 2\pi r h$,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(a \operatorname{sen} \theta)(2a \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\ &= 2\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta \end{aligned}$$

Así, S es una función de θ y su dominio es $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Al obtener las derivadas primera y segunda de S, se tiene

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{y} \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Considere $\dfrac{dS}{d\theta} = 0$, entonces

$$\cos 2\theta = 0$$

Como $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, entonces

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi$$

Se aplica el criterio de la segunda derivada y los resultados se resumen en la tabla 4.

Tabla 4

	$\frac{dS}{d\theta}$	$\frac{d^2S}{d\theta^2}$	*Conclusión*
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	0	−	S tiene un valor máximo relativo

Como S es continua y tiene un único extremo relativo en su dominio, se concluye que el valor máximo relativo es un valor máximo absoluto.

Cuando $\theta = \frac{1}{4}\pi$,

$$\begin{aligned} r &= a \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi & \qquad h &= 2a \cos \tfrac{1}{4}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, a & &= \sqrt{2}\, a \end{aligned}$$

Por tanto, $h/r = 2$.

<u>Conclusión:</u> Para el cilindro que tiene la superficie lateral de mayor área, la razón de la altura al radio es 2.

Se concluye esta sección con la demostración del teorema 3.9.1.

Demostración del teorema 3.9.1 Se demuestra el teorema en el caso en que $f(c)$ es un valor máximo relativo en el intervalo I. Una demostración semejante puede darse cuando $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

Como $f(c)$ es un un valor máximo relativo de f en I, entonces, por la definición 3.1.1, existe un intervalo abierto J, donde $J \subset I$, y donde J contiene a c, tal que

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{para toda } x \in J$$

Puesto que c es el único número en I para el que f tiene un valor máximo relativo, se deduce que

$$f(c) > f(k) \quad \text{si } k \in J \quad \text{y} \quad k \neq c \tag{7}$$

A fin de probar que $f(c)$ es un valor máximo relativo de f en I, se demostrará que si d es cualquier número diferente de c en I, entonces $f(c) > f(d)$. Suponga que

$$f(c) \leq f(d) \tag{8}$$

Se probará que esta suposición conduce a una contradicción. Puesto que $d \neq c$, entonces $c < d$ o $d < c$. Considere el caso en el que $c < d$ (la demostracion es similar si $d < c$).

Como f es continua en I, entonces f es continua en el intervalo cerrado $[c, d]$. Por tanto, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo absoluto en $[c, d]$. Suponga que este valor mínimo absoluto ocurre en e, donde $c \leq e \leq d$. De la desigualdad (7) $e \neq c$, y de las desigualdades (7) y (8) $e \neq d$. Por tanto $c < e < d$, y en consecuencia, f tiene un valor mínimo relativo en e. Pero esta última proposición contradice la hipótesis de que c es el único número en I para el cual f tiene un extremo relativo. Así, la suposición de que $f(c) \leq f(d)$ es falsa. Por tanto, $f(c) > f(d)$ si $d \in I$ y $d \neq c$; en consecuencia, $f(c)$ es un valor máximo absoluto de f en I.

EJERCICIOS 3.9

En cada ejercicio defina todas las variables precisamente como números y no olvide escribir una conclusión.

1. Para el envase del ejemplo 1, suponga que el costo del material para la tapa y la base es dos veces el de los lados. **(a)** Determine analíticamente la altura y el radio de la base de modo que el costo del material sea mínimo. **(b)** Compare la respuesta del inciso (a) con la solución gráfica de esta situación obtenida en el inciso (c) del ejercicio 21 de la sección 1.3. ¿La solución gráfica apoya la respuesta del inciso (a)?

2. **(a)** Haga el ejemplo 1 si el envase es abierto en lugar de cerrado. **(b)** Compare la respuesta del inciso (a) con la solución gráfica de esta situación en el inciso (c) del ejercicio 22 de la sección 1.3. ¿La solución gráfica apoya la respuesta del inciso (a)?

En los ejercicios 3 y 4, confirme analíticamente la estimación obtenida con la graficadora en el inciso (c) del ejercicio indicado de la sección 1.3.

3. Ejercicio 23

4. Ejercicio 24

5. Se va a cercar un terreno rectangular de 2 700 m² de área y se utilizará una valla adicional para dividir el terreno a la mitad. El costo de la cerca empleado para dividir el terreno a la mitad es de $24 por metro colocado, y el costo de la cerca para los lados es de $36 por metro colocado. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del terreno de modo que el costo total del material para la cerca sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

6. Un tanque rectangular abierto, cuyo volumen es de 125 m³, tiene base cuadrada. El costo del material para

base es de $24 por metro cuadrado y el del material para los lados es de $12. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones del tanque de modo que el costo del material sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

7. Un fabricante de cajas desea construir una caja cerrada que tenga un volumen de 288 pulg^3, y cuya base de forma rectangular tiene el largo igual al triple de su ancho. **(a)** Utilice la graficadora para estimar las dimensiones de la caja construida con la mínima cantidad de material. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

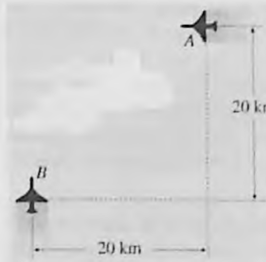
8. Haga el ejercicio 7 considerando ahora que la caja se fabricará sin tapa.

9. Si se excluyen los salarios, el número de dólares del costo por kilómetro de la operación de un camión es $8 + \frac{1}{300}x$, donde x kilómetros por hora es la velocidad promedio del camión. **(a)** Si los salarios combinados del conductor y del ayudante son $27 por hora, estime en la calculadora, con aproximación de kilómetros por hora, cuál debe ser la velocidad promedio del camión para que el costo por kilómetro sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

10. El número de dólares del costo de combustible por hora para un barco carguero es de $0.02v^3$, donde v nudos (millas náuticas por hora) es la velocidad promedio del barco. **(a)** Si hay costos adicionales de $400 por hora, estime en la graficadora, con aproximación de nudos, a qué velocidad promedio debe navegar el barco para que el costo por milla náutica sea mínimo. **(b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

11. Un automóvil viaja a una tasa de 30 pie/s y se aproxima a un crucero. Cuando el automóvil está a 120 pie del crucero, un camión, que viaja a una tasa de 40 pie/s en una carretera perpendicular a la carretera del automóvil, pasa por el crucero. **(a)** Determine analíticamente en qué tiempo, después de que el camión deja el crucero, los vehículos están más cercanos. Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente.

12. Dos aviones A y B vuelan horizontalmente a la misma altura de modo que la posición de B está al suroeste de A, 20 km al oeste y 20 km al sur de A. Suponga que el avión A vuela hacia el oeste a 16 km/min y que el avión B vuela hacia el norte a 21.3 km/min. **(a)** Determine en cuántos segundos los aviones estarán lo más cerca posible y cuál será la distancia más corta. **(b)** Apoye las respuestas del inciso (a) gráficamente.



13. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ que tenga la pendiente mínima.

14. Un generador de corriente directa tiene una fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohms, donde E y r son constantes. Si R ohms es la resistencia externa, entonces la resistencia total es $(r + R)$ ohms, y si P watts es la potencia, entonces

$$P = \frac{E^2R}{(r + R)^2}$$

Demuestre que el consumo máximo de potencia ocurre cuando la resistencia externa es igual a la resistencia interna.

15. En una comunidad particular, cierta epidemia se propaga de modo que x meses después del inicio de la epidemia, P porcentaje de la población está infectada, donde

$$P = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$

¿En cuántos meses se infectará el número máximo de personas de la comunidad y qué porcentaje de la población será éste?

16. Un cartel que contiene 32 pulg^2 de región impresa tiene un margen de 2 pulg en sus partes superior e inferior, mientras que en los lados los márgenes son de $\frac{4}{3}$ pulg. Determine las dimensiones del menor trozo de cartón que pueda emplearse para realizar el cartel.

En los ejercicios 17 y 18, se utiliza el término económico competencia perfecta. Cuando una compañía opera bajo competencia perfecta, existen muchas compañías pequeñas; por lo que ninguna de ellas puede afectar el precio aumentando la producción. Por tanto, bajo el régimen de competencia perfecta el precio de un artículo es constante, y la compañía puede vender lo que desee a ese precio constante.

17. En condiciones de competencia perfecta, una compañía puede vender los artículos que produce a $200 por unidad. Si $C(x)$ dólares es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos y $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$, determine el número de unidades que deben producirce diariamente a fin de que la compañía obtenga la máxima ganancia total diaria. *Sugerencia:* la ganancia total es igual al ingreso total menos el costo total.

18. Una compañía, que construye y vende escritorios, opera en condiciones de competencia perfecta y puede vender todos los escritorios que produce a un precio de $400 por

escritorio. Si se producen x escritorios y se venden cada semana, y $C(x)$ dólares es el costo total de la producción semanal, entonces $C(x) = 2x^2 + 80x + 6\,000$. Determine cuántos escritorios deben producirse semanalmente para que el fabricante obtenga la máxima ganancia total semanal. ¿Cuál es la máxima ganancia total semanal? Considere la sugerencia del ejercicio 17.

19. El término *en condiciones de monopolio*, significa que existe un único productor de cierto artículo, para el cual el precio y, en consecuencia, la demanda pueden ser controlados regulando la cantidad de artículos producidos. Suponga que en condiciones de monopolio, x unidades de un artículo son demandadas diariamente cuando el precio por unidad es de p dólares y $x = 140 - p$. Si el número de dólares del costo total por producir x unidades está dado por $C(x) = x^2 + 20x + 300$, determine la máxima ganancia total diaria.

20. Determine la distancia mínima desde el punto $P(2, 0)$ a un punto de la curva $y^2 - x^2 = 1$, y encuentre el punto de la curva más cercano a P.

21. Obtenga la distancia mínima desde el origen a la recta $3x + y = 6$, y encuentre el punto P de la recta más cercano al origen. Después demuestre que el origen está en la recta perpendicular a la recta dada que pasa por P.

22. Determine la distancia mínima desde el punto $A(2, \frac{1}{2})$ a un punto de la parábola $y = x^2$ y encuentre el punto B de la parábola más cercano a A. Después demuestre que A está en la recta normal de la parábola en B.

23. Una ventana tipo *Norman* consiste de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de una ventana Norman es de 32 pie, determine cuánto debe medir el radio del semicírculo y la altura del rectángulo de modo que la ventana admita la mayor cantidad de luz.

24. Resuelva el ejercicio 23 considerando ahora que en la ventana el semicírculo transmite sólo la mitad de luz que el rectángulo por pie cuadrado de área.

25. Una viga de acero de 27 pie de longitud se transporta por un pasillo de 8 pie de ancho hasta un corredor perpendicular al pasillo. ¿Cuál debe ser el ancho del corredor para que la viga pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.

26. Si dos pasillos perpendiculares entre sí miden 10 pie y 15 pie, respectivamente, ¿cuál es la longitud de la viga de acero más larga que pueda transportarse horizontalmente de modo que pueda doblar la esquina? No considere la anchura horizontal de la viga.

27. Un embudo de volumen específico tiene la forma de un cono circular recto. Determine la razón de la altura al radio de la base de modo que se emplee la mínima cantidad de material en su construcción.

28. Un cono circular recto se inscribe en una esfera de radio dado. Calcule la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen máximo que pueda inscribirse en la esfera.

29. Un cono circular recto se circunscribe a una esfera de radio dado. Obtenga la razón de la altura al radio de la base del cono de volumen mínimo que pueda circunscribirse a la esfera.

30. Demuestre por el método de esta sección que la distancia mínima desde el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta l que tiene la ecuación $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sugerencia: si s es el número de unidades desde P_1 a un punto $P(x, y)$ de l, entonces s será un mínimo absoluto cuando s^2 sea un mínimo absoluto.

31. La sección transversal de un bebedero tiene la forma de un triángulo isósceles invertido. Si las longitudes de los lados iguales son 15 pulg, determine el tamaño del ángulo formado por estos lados que proporcione al bebedero su máxima capacidad.

3.10 APROXIMACIONES MEDIANTE EL MÉTODO DE NEWTON, DE LA RECTA TANGENTE Y DE DIFERENCIALES

Antes del advenimiento de las calculadoras y de las computadoras, las raíces de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ o, equivalentemente, los ceros de la función f, fueron aproximados por medio de técnicas numéricas que implican la derivada. Aunque tales aproximaciones son ahora fácilmente realizadas por la graficadora mediante los procedimientos *solve* o *zoom-in*, se dedicará esta sección a la discusión de tres técnicas numéricas. La primera de estas técnicas, conocida como el *método de Newton* e ideada por Sir Isaac Newton en el siglo XVII, es característico en los procesos numéricos empleados por las calculadoras.

Se inicia el estudio del método de Newton considerando una interpretación geométrica de los conceptos involucrados. Refiérase a la figura 1, la cual muestra la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. El número r es una intercepción x de la gráfica. Para obtener una aproximación de r, primero se elige un número x_1, elección que debe ser razonablemente cercana a r. Después se considera la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_1, f(x_1))$. La recta tangente, denotada por T_1, se presenta en la figura 1, y la intercepción x de T_1 es x_2. El número x_2 sirve ahora como una segunda aproximación de r. Luego, se repite el proceso con la recta tangente T_2 en el punto $(x_2, f(x_2))$. La intercepción x de T_2 es x_3. Este proceso se continúa hasta obtener el grado de aproximación requerido. En esta gráfica, parece que los números x_1, x_2, x_3, etcétera, están cada vez más cercanos al número r. Esta situación ocurre para muchas funciones.

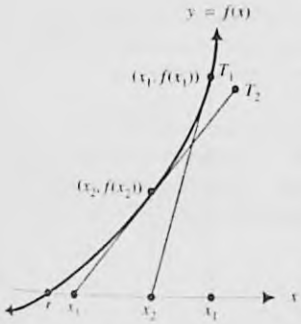


FIGURA 1

A fin de obtener las aproximaciones sucesivas x_2, x_3, ... de la primera aproximación x_1 se utilizan las ecuaciones de las rectas tangentes. La recta tangente T_1 en el punto $(x_1, f(x_1))$ tiene una pendiente de $f'(x_1)$. Por lo que una ecuación de T_1 es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

La intercepción x de T_1 es x_2, y se determina x_2 considerando $x = x_2$ y $y = 0$ en la ecuación anterior. Así,

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{si } f'(x_1) \neq 0$$

Con este valor de x_2, una ecuación de T_2 es

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Después se considera en esta ecuación $x = x_3$ y $y = 0$, de donde se obtiene

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \text{si } f'(x_2) \neq 0$$

Si se continúa de esta manera se obtiene la fórmula general para la aproximación x_{n+1} en términos de la aproximación anterior x_n:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0 \tag{1}$$

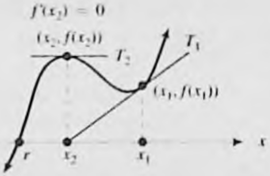


FIGURA 2

FIGURA 3

Por supuesto, la fórmula (1) se puede adaptar fácilmente para utilizarse en una computadora o en una calculadora programable.

A partir de la fórmula (1) se puede obtener la $(n + 1)$-ésima aproximación a partir de la n-ésima aproximación, considerando $f'(x_n) \neq 0$. Cuando $f'(x_n) = 0$, la recta tangente es horizontal, y en tal caso, a menos que la recta tangente sea el eje x mismo, no se tendrá intercepción x. La figura 2 muestra este hecho cuando $f'(x_2) = 0$. De modo que el método de Newton no es aplicable si $f'(x_n) = 0$ para alguna x_n. También debe tener en mente que el valor de x_{n+1} obtenido a partir de (1) no necesariamente es una mejor aproximación de r que x_n. Si, por ejemplo, x_1 no está razonablemente cerca de r, entonces $|f'(x_1)|$ puede ser pequeño de modo que la recta tangente T_1 es aproximadamente horizontal. Entonces x_2, la intercepción x de T_1, puede estar más alejada de r que x_1. Vea la figura 3 en la que esta situación ocurre.

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra cómo el método de Newton se aplica a una ecuación para la cual se conoce la respuesta.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Utilice el método de Newton para obtener la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 9$ comenzando con una primera aproximación de 4. Se escribe la ecuación como $x^2 - 9 = 0$ y se consideran

$$f(x) = x^2 - 9 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 2x$$

De (1) se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n} \tag{2}$$

Ahora se aplica (2) con valores de n y valores correspondientes de x_n para obtener x_{n+1} en una calculadora. Se inicia con $x_1 = 4$.

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \qquad\qquad x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2}$$

$$= 4 - \frac{16 - 9}{8} \qquad\qquad = 3.125 - \frac{(3.125)^2 - 9}{2(3.125)}$$

$$= 3.125 \qquad\qquad\qquad\qquad = 3.0025$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \qquad\qquad x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4}$$

$$= 3.0025 - \frac{(3.0025)^2 - 9}{2(3.0025)} \qquad\qquad = 3.0000 - \frac{(3.0000)^2 - 9}{2(3.0000)}$$

$$= 3.0000 \qquad\qquad\qquad\qquad = 3.0000$$

Ciertamente, todas las aproximaciones sucesivas serán 3.0000. De modo que la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ es 3.0000 con cuatro cifras decimales. ◀

Observe que cuando x_n es una solución de $f(x) = 0$, $f(x_n) = 0$. Así, de (1),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - 0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

En consecuencia, todas las aproximaciones sucesivas serán iguales a x_n. Note que esta situación se presenta en el ejemplo ilustrativo 1, donde todas las aproximaciones despues de x_4, incluyéndola, tienen el mismo valor considerando cuatro cifras decimales.

También observe en (1) que $x_{n+1} = x_n$ implica que $f(x_n) = 0$. Por tanto, se puede concluir que cuando dos aproximaciones sucesivas son iguales, se tiene una aproximación para un cero de f.

FIGURA 4

Sin embargo, es posible que para ciertas funciones, si la elección inicial de x_1 no está cerca del cero deseado, se pueden obtener aproximaciones para un cero diferente. Vea la figura 4, que muestra la gráfica de una función para la cual esta situación puede ocurrir. Observe que la elección de x_1 indicada próxima al cero deseado r proporciona aproximaciones sucesivas x_2, x_3, x_4, . . . próximas a otro cero s. De este modo, cuando se aplica el método de Newton debe hacer un bosquejo de la gráfica de la función a fin de obtener la aproximación inicial. Consulte la gráfica conforme proceda para asegurarse de que se está aproximando al cero deseado.

En resumen, cuando utilice el método de Newton para resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, efectúe lo siguiente:

1. Haga una *buena suposición* para la primera aproximación x_1. Una gráfica de f le ayudará a obtener una elección razonable.
2. Obtenga una segunda aproximación x_2 con el valor de x_1 en la fórmula (1). Después utilice x_2 en (1) para conseguir una tercera aproximación x_3, y así sucesivamente, hasta que $x_{n+1} = x_n$ para el grado requerido de aproximación.

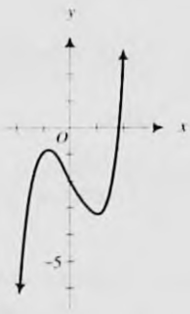
▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice el método de Newton para determinar la raíz real de la ecuación

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

con cuatro cifras decimales.

Solución Sea $f(x) = x^3 - 2x - 2$; de modo que $f'(x) = 3x^2 - 2$. Entonces de (1) se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2} \tag{3}$$



$f(x) = x^3 - 2x - 2$

FIGURA 5

La gráfica de f se muestra en la figura 5. Como la gráfica de f interseca al eje x en un único punto, existe una raíz real de la ecuación dada. Debido a que $f(1) = -3$ y $f(2) = 2$, esta raíz se encuentra entre 1 y 2. Una elección adecuada para la primera aproximación es $x_1 = 1.5$. La tabla 1 presenta los resultados obtenidos en una calculadora para las aproximaciones sucesivas calculadas a partir de (3) con esta x_1. Se desea la raíz con una aproximación de cuatro cifras decimales; por lo que se emplean cinco cifras decimales en los cálculos. Como x_5 y x_6 son iguales (con cinco cifras decimales), se redondea el número a cuatro cifras decimales para obtener 1.7693 como la raíz requerida.

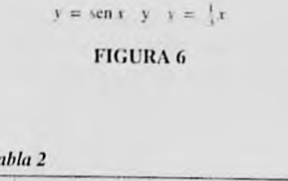
Tabla 1

n	x_n	$\dfrac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$	x_{n+1}
1	1.50000	−0.34211	1.84211
2	1.84211	0.06928	1.77283
3	1.77283	0.00353	1.76930
4	1.76930	0.00001	1.76929
5	1.76929	0.00000	1.76929

▶ *EJEMPLO 2* Utilice el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la coordenada x del punto de intersección en el primer cuadrante de la recta $y = \frac{1}{3}x$ y la curva $y = \operatorname{sen} x$.

Solución La figura 6 muestra la recta y la curva se desea determinar el valor positivo de x para el cual

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{3}x$$
$$3 \operatorname{sen} x - x = 0$$



$y = \operatorname{sen} x$ y $y = \frac{1}{3}x$

FIGURA 6

Sean

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x - x \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3 \cos x - 1$$

De la fórmula (1),

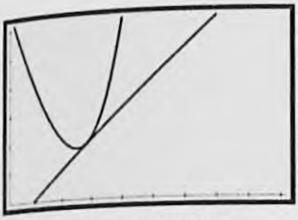
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3 \operatorname{sen} x_n - x_n}{3 \cos x_n - 1} \tag{4}$$

Tabla 2

n	x_n	$\dfrac{3 \operatorname{sen} x_n - x_n}{3 \cos x_n - 1}$	x_{n+1}
1	2.0000	−0.3237	2.3237
2	2.3237	0.0441	2.2796
3	2.2796	0.0007	2.2789
4	2.2789	0.0000	2.2789

De la figura 6, parece que una elección razonable de x_1 es 2. Se utiliza una calculadora para obtener las aproximaciones sucesivas a partir de la fórmula (4); estas se muestran en la tabla 2. Los resultados se expresan con cuatro cifras decimales. Observe que, con cuatro cifras decimales, x_4 y x_5 son iguales a 2.2789. Por lo que para tres cifras decimales el valor positivo de x, para el cual $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}x$, es 2.279.



[0, 9.4] por [0, 6.2]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 7

Los teoremas que establecen las condiciones para las cuales es aplicable el método de Newton, así como los teoremas relacionados a su aproximación, pueden encontrarse en textos de análisis numérico.

Una de las maneras simples en que los valores de función pueden aproximarse se denomina *aproximación lineal*, la cual utiliza la recta tangente a la gráfica de una función diferenciable. Se inicia la discusión sobre aproximación lineal con un ejemplo ilustrativo que muestra la idea básica.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La figura 7 muestra la gráfica de

$$f(x) = x^2 - 5x + 8$$

y la recta tangente en el punto (3, 2) trazadas en el rectángulo de inspección de [0, 9.4] por [0, 6.2]. Si se aplica el procedimiento *zoom in* de la graficadora en el punto (3, 2) y se traza la recta tangente, se obtiene la figura 8 la cual presenta el rectángulo de inspección de [1.825, 4.175] por [1.225, 2.775]. Si se aplica otra vez *zoom in* y se traza la recta tangente, se obtiene la figura 9 la cual muestra el rectángulo de inspección de [2.706, 3.294] por [1.806, 2.194]. Observe cómo la recta tangente se aproxima a la gráfica de la función cerca del punto de tangencia. De este modo, si x está en un pequeño intervalo abierto que contenga a 3, la coordenada y correspondiente de la gráfica de la función puede ser aproximada por la coordenada y de la recta tangente. ◀

[1.825, 4.175] por [1.225, 2.775]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 8

Se utiliza el concepto del ejemplo ilustrativo anterior para una función general f diferenciable en un número x_0. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

[2.706, 3.294] por [1.806, 2.194]

$f(x) = x^2 - 5x + 8$

FIGURA 9

Refiérase a la figura 10 donde P es el punto $(x_0, f(x_0))$, Q es el punto $(x, f(x))$ y R es el punto $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Observe que para un número x suficientemente cercano a x_0, el punto Q de la gráfica de f está cerca del punto R de la recta tangente. En consecuencia, si x está cerca de x_0, $f(x)$ puede ser aproximado por $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; esto es,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Esta aproximación se denomina **aproximación mediante la recta tangente**, o concisamente **aproximación lineal**, de $f(x)$ en x_0.

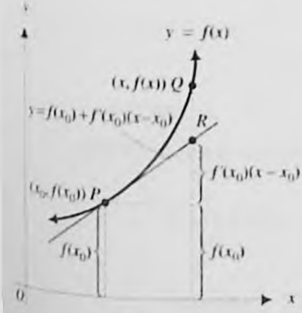
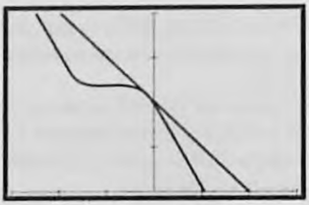


FIGURA 10

EJEMPLO 3 Sea

$$f(x) = \cos^2 x - x + 1 \tag{5}$$

(a) Obtenga la aproximación lineal de $f(x)$ en 0. **(b)** Apoye la res-puesta del inciso (a) gráficamente. **(c)** Compare el valor de $f(x)$ calculado mediante la aproximación lineal del inciso (a) con el valor de la función obtenido a partir de (5) cuando x es igual a −0.2, −0.1, −0.01, 0, 0.01, 0.1 y 0.2.



$[-3, 3]$ por $[0, 4]$

$f(x) = \cos^2 x - x + 1$

FIGURA 11

Solución

(a) Se calcula $f'(x)$:

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x - 1$$

La aproximación lineal de $f(x)$ en 0 es

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0)$$

Como $f(0) = 2$ y $f'(0) = -1$, se tiene

$$f(x) \approx 2 - x \qquad (6)$$

(b) La figura 11 muestra la gráfica de f y la recta tangente en $(0, 2)$ trazada en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[0, 4]$, la cual apoya la respuesta del inciso (a).

(c) La tabla 3 compara los valores de $f(x)$ calculados con (6) y aquellos calculados con (5). Observe que cuanto más cerca se encuentra x de cero, la aproximación resulta más exacta.

Tabla 3

x	-0.2	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.2
$f(x) \approx 2 - x$	2.2	2.1	2.01	2	1.99	1.9	[illegible]
$f(x) = \cos^2 x - x + 1$	2.16	2.09	2.0099	2	1.9899	1.89	[illegible]

Ahora se tratará el concepto de *diferencial*, el cual también permite aproximar cambios en valores de función de puntos cercanos a puntos donde la función es diferenciable. Verá que una aproximación mediante diferenciales está relacionada a una aproximación lineal. Aunque la aplicación de diferenciales a la aproximación de valores de función no es muy importante en está época de adelantos tecnologicos, éstas son importantes como un artificio notacional conveniente para el cálculo de *antiderivadas*, como verá en el capítulo siguiente.

Suponga que la función f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

En puntos donde f es diferenciable

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (7)$$

donde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

De (7) se deduce que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |\Delta x| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |\Delta x| < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{|\Delta y - f'(x)\, \Delta x|}{|\Delta x|} < \epsilon$$

Esto significa que $|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|$ es pequeño comparado con $|\Delta x|$. Es decir, para $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, $f'(x)\,\Delta x$ es una buena aproximación del valor de Δy, y se escribe

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \tag{8}$$

si $|\Delta x|$ es suficientemente pequeño.

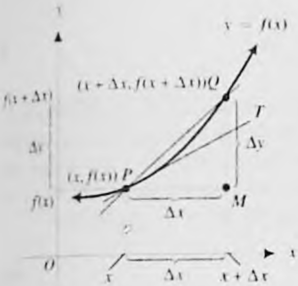


FIGURA 12

Para una interpretación gráfica del enunciado (8), refiérase a la figura 12. En esta figura, una ecuación de la curva es $y = f(x)$. La recta PT es tangente a la curva en $P(x, f(x))$. Q es el punto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y la distancia dirigida $\overline{MQ}$ es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. En la figura, Δx y Δy son positivos; sin embargo, ellos pueden ser negativos. Para un valor pequeño de Δx, la pendiente de la recta secante PQ y la pendiente de la recta tangente en P son aproximadamente iguales; esto es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

lo cual es el enunciado (8).

El miembro derecho del enunciado (8) se define como la *diferencial de y*.

3.10.1 Definición de diferencial de la variable dependiente

Si la función f está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la **diferencial de y**, denotada por dy, está dada por

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{9}$$

donde x está en el dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de x.

FIGURA 13

Ahora consulte la figura 13, la cual es la misma que la figura 12 excepto que se muestra el segmento de recta vertical $\overline{MR}$, donde la distancia dirigida MR es igual a dy. Observe que dy representa la variación de y a lo largo de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$, cuando x varía en Δx.

Este concepto de diferencial incluye un tipo especial de funciones de dos variables y en el capítulo 12 se presenta un estudio detallado de tales funciones. El símbolo df puede emplearse para representar esta función. La variable x puede ser cualquier número del dominio de f', y Δx puede ser cualquier número. Afirmar que df es una función de las dos variables independientes x y Δx, significa que a cada par ordenado $(x, \Delta x)$ del dominio de df le corresponde uno y sólo un número del contradominio de df, y este número puede representarse por $df(x, \Delta x)$ de modo que

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\,\Delta x$$

Al comparar esta ecuación con (9) se aprecia que cuando $y = f(x)$, dy y $df(x, \Delta x)$ son dos notaciones diferentes para $f'(x)\,\Delta x$. El símbolo dy se utilizará en las discusiones posteriores.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Si $y = 3x^2 - x$, entonces $f(x) = 3x^2 - x$, de modo que $f'(x) = 6x - 1$. De la definición 3.10.1, se tiene

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x$$

En particular, si $x = 2$, entonces $dy = 11\,\Delta x$.

Cuando $y = f(x)$, la definición 3.10.1 proporciona dy, la diferencial de la variable dependiente. Ahora se desea definir la *diferencial de la variable independiente*, o dx. Para llegar a una definición adecuada y consistente con la definición de dy, se considera la función identidad definida por $f(x) = x$. Para esta función, $f'(x) = 1$ y $y = x$; así, de (9), $dy = 1 \cdot \Delta x$; es decir,

$$\text{si} \quad y = x \quad \text{entonces} \quad dy = \Delta x \tag{10}$$

Para la función identidad se desea que dx sea igual a dy; es decir, debido al enunciado (10) se quiere que dx sea igual a Δx. Este razonamiento conduce a la siguiente definición.

3.10.2 Definición de diferencial de la variable independiente

Si la función f está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la **diferencial de** x, denotada por dx, está dada por

$$dx = \Delta x$$

donde x es un número del dominio de f' y Δx es un incremento arbitrario de x.

De las definiciones 3.10.1 y 3.10.2,

$$dy = f'(x)\,dx \tag{11}$$

Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre dx, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{si } dx \neq 0$$

Esta ecuación expresa la derivada como un cociente de dos diferenciales. Recuerde que cuando se introdujo la notación $\dfrac{dy}{dx}$ en la sección 2.1, se remarcó que dy y dx no se les había dado un significado independiente en ese momento.

EJEMPLO 4 Dada $y = 4x^2 - 3x + 1$, encuentre Δy, dy y $\Delta y - dy$ para **(a)** cualesquiera x y Δx; **(b)** $x = 2$, $\Delta x = 0.1$; **(c)** $x = 2$, $\Delta x = 0.01$; **(d)** $x = 2$, $\Delta x = 0.001$.

Solución

(a) Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, sea
$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (4x^2 - 3x + 1)\\ &= 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1\\ &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2\end{aligned}$$

De (11),

$$\begin{aligned}dy &= f'(x)\,dx\\ &= (8x - 3)\,dx\\ &= (8x - 3)\,\Delta x\end{aligned}$$

Así,

$$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$$

Los resultados para los incisos (b), (c) y (d) se dan en la tabla 4.

Tabla 4

	x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
(b)	2	0.1	1.34	1.3	0.04
(c)	2	0.01	0.1304	0.13	0.0004
(d)	2	0.001	0.013004	0.013	0.000004

◀

Observe de la tabla 4 que cuanto más cerca se encuentre Δx de cero, la diferencia entre Δy y dy será menor. Además, note que para cada valor de Δx, el valor correspondiente de $\Delta y - dy$ es menor que el de Δx. De modo más general, dy es una aproximación de Δy cuando Δx es pequeño, y la aproximación es más exacta que el valor de Δx.

Para un valor fijo de x, por decir x_0,

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

esto es, dy es una función lineal de dx; en consecuencia, dy es usualmente más fácil de calcular que Δy, como se vio en el ejemplo 4. Puesto que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

entonces

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Así

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$$

En la figura 14 se ilustra este resultado, donde la ecuación de la curva es $y = f(x)$. La recta PT es tangente a la curva en el punto $P(x_0, f(x_0))$; Δx y dx son iguales y están representados por la distancia dirigida $\overline{PM}$, donde M es

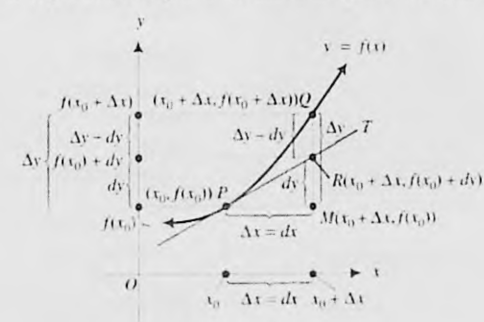


FIGURA 14

el punto $(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Sean Q el punto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ y Δy la distancia dirigida $\overline{MQ}$. La pendiente de PT es $f'(x) = dy/dx$. También, la pendiente de PT es $\overline{MR}/\overline{PM}$, y como $\overline{PM} = dx$, se tiene que $dy = \overline{MR}$ y $\overline{RQ} = \Delta y - dy$. Observe que cuanto más pequeño es el valor de dx (es decir, cuanto más cerca esté el punto Q del punto P), menor será el valor de $y - dy$ (es decir, menor será la longitud del segmento de recta RQ).

Una ecuación de la recta PT es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

y la ordenada de R es $f(x_0) + dy$. Observe que cuando $f(x_0 + \Delta x)$ se aproxima mediante $f(x_0) + dy$, se está aproximando la ordenada del punto Q de la curva mediante la ordenada del punto R de la recta tangente. De modo que, utlizar diferenciales para estimar valores de función es esencialmente el mismo proceso que la aproximación lineal; sólo la notación es diferente.

FIGURA 15

EJEMPLO 5 Utilice diferenciales para aproximar el volumen de un cascarón esférico cuyo radio interno mide 4 pulg y cuyo espesor es de $\frac{1}{16}$ pulg.

Solución Se considera el volumen de un cascarón esférico como un incremento del volumen de una esfera. Consulte la figura 15. Sean r pulgadas el radio de la esfera, V pulgadas cúbicas el volumen de la esfera y ΔV pulgadas cúbicas el volumen del cascarón esférico. Entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad dV = 4\pi r^2\, dr$$

Si se sustituye r por 4 y dr por $\frac{1}{16}$ en la última ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi(4)^2 \tfrac{1}{16} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Por tanto, $\Delta V \approx 4\pi$.

<u>Conclusión:</u> El volumen aproximado del cascarón esférico es de 4π pulg^3

EJEMPLO 6 Un contenedor cerrado de forma cúbica y cuyo volumen es de 1000 pulg^3, se construye utilizando seis cuadrados iguales de material que cuesta 20 centavos por pulgada cuadrada. Aproximadamente, ¿cuánto debe medir el lado de cada cuadrado de modo que el costo total del material tenga una variación dentro de un margen de \$3.00?

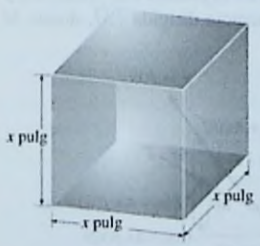


FIGURA 16

Solución La figura 16 muestra el cubo donde x pulgadas es la longitud de los lados de los cuadrados y, en consecuencia, la longitud de las aristas del cubo. Sean C dólares el costo total del material. Como el área total de los seis cuadrados es $6x^2$ pulgadas cuadradas, y el costo del material es de \$0.20 por pulgada cuadrada, entonces

$$\begin{aligned} C &= 0.20(6x^2) \\ C &= 1.2x^2 \end{aligned} \qquad (12)$$

Para que el volumen de un cubo sea de 1000 pulg^3, $x^3 = 1000$, debe tenerse que $x = 10$. Cuando $x = 10$, se obtiene de (12), $C = 120$. Así, el costo del material será exactamente \$120 si las longitudes de los lados de los cuadrados miden 10 pulg. Como el costo del material es correcto cuando esté dentro de un margen de \$3.00, se desea determinar $|\Delta x|$ tal que $|\Delta C| \leq 3$. Se utilizará la diferencial dC para aproximar ΔC. De (12), se tiene

$$\begin{aligned} dC &= 2.4x\,dx \\ \Delta C &\approx 2.4x\,\Delta x \end{aligned}$$

Con $x = 10$,

$$|\Delta C| \approx 24\,|\Delta x|$$

Como se desea que $|\Delta C| \leq 3$, se determinará cuándo $24\,|\Delta x| \leq 3$:

$$\begin{aligned} 24\,|\Delta x| &\leq 3 \\ |\Delta x| &\leq \tfrac{3}{24} \\ |\Delta x| &\leq 0.125 \end{aligned}$$

Conclusión: Las medidas de los lados de los cuadrados deben estar dentro de un margen de 0.125 pulg a fin de que el costo total del material esté dentro de un margen de \$3.00. ◀

En la sección 2.4 se demostraron los teoremas para calcular derivadas de funciones algebraicas. Ahora se enunciarán estos teoremas con la notación de Liebniz, y junto con la derivada se presentará la fórmula para la diferencial. En estas fórmulas, u y v son funciones de x, y se sobreentiende que las fórmulas se cumplen considerando que $\dfrac{du}{dx}$ y $\dfrac{dv}{dx}$ existen. Cuando aparezca c, considérela como constante.

I $\quad \dfrac{d(c)}{dx} = 0$	I′ $\quad d(c) = 0$
II $\quad \dfrac{d(x^n)}{dx} = xn^{n-1}$	II′ $\quad d(x^n) = xn^{n-1}\,dx$
III $\quad \dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$	III′ $\quad d(cu) = c\,du$
IV $\quad \dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	IV′ $\quad d(u+v) = du + dv$
V $\quad \dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	V′ $\quad d(uv) = u\,dv + v\,du$
VI $\quad \dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$	VI′ $\quad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
VII $\quad \dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	VII′ $\quad d(u^n) = nu^{n-1}\,du$

La operación de diferenciación se extiende de modo que incluya los procesos para calcular la diferencial así como la derivada. Si $y = f(x)$, dy puede obtenerse al aplicar las fórmulas I′-VII′ o calculando $f'(x)$ y multiplicándola por dx.

EJERCICIOS 3.10

En los ejercicios 1 a 4, utilice el método de Newton para determinar la raíz real de la ecuación con cuatro cifras decimales.

1. $x^3 - 4x^2 - 2 = 0$ **2.** $6x^3 + 9x + 1 = 0$

3. $x^5 - x + 1 = 0$ **4.** $x^5 + x - 1 = 0$

En los ejercicios 5 a 10, emplee el método de Newton para calcular, con aproximación de milésimos, el valor aproximado de la raíz indicada.

5. $x^3 - 4x - 8 = 0$; la raíz positiva

6. $x^3 - 2x + 7 = 0$; la raíz negativa

7. $x^4 - 10x + 5 = 0$; la menor raíz positiva

8. $x^4 - 10x + 5 = 0$; la mayor raíz positiva

9. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$; la raíz negativa

10. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$; la raíz positiva

En los ejercicios 11 a 14, use el método de Newton para obtener el valor del radical con cinco cifras decimales.

11. $\sqrt{3}$ resolviendo la ecuación $x^2 - 3 = 0$

12. $\sqrt{10}$ resolviendo la ecuación $x^2 - 10 = 0$

13. $\sqrt[3]{6}$ resolviendo la ecuación $x^3 - 6 = 0$

14. $\sqrt[3]{7}$ resolviendo la ecuación $x^3 - 7 = 0$

En los ejercicios 15 a 18, aplique el método de Newton para determinar con cuatro cifras decimales la coordenada x del punto de intersección del primer cuadrante de las gráficas de las dos ecuaciones.

15. $y = x$; $y = \cos x$ **16.** $y = \frac{1}{2}x$; $y = \operatorname{sen} x$

17. $y = x^2$; $y = \operatorname{sen} x$ **18.** $y = x^2$; $y = \cos x$

En los ejercicios 19 a 24, haga lo siguiente para la función f: (a) obtenga la aproximación lineal de f(x) en x = 1; (b) apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente; (c) compare los valores de f(x) calculados a partir de la aproximación lineal en el inciso (a) con los valores de función obtenidos a partir de las ecuaciones dadas cuando x es igual a 0.9, 0.99, 1, 1.01 y 1.1.

19. $f(x) = x^2$ **20.** $f(x) = x^3$

21. $f(x) = 2\sqrt{x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

23. $f(x) = \cos x$ **24.** $f(x) = \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 25 a 28, (a) determine dy y Δy para los valores de x y Δx. (b) Dibuje la gráfica y los segmentos de recta indicados cuyas longitudes son dy y Δy.

25. $y = x^2$; $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$

26. $y = x^3$; $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$

27. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$ y $\Delta x = 1$

28. $y = \sqrt{x}$; $x = 4$ y $\Delta x = 1$

En los ejercicios 29 a 34, calcule (a) Δy; (b) dy; (c) Δy − dy.

29. $y = x^2 - 3x$; $x = 2$; $\Delta x = 0.03$

30. $y = x^2 - 3x$; $x = -1$; $\Delta x = 0.02$

31. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = -2$; $\Delta x = -0.1$

32. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 3$; $\Delta x = -0.2$

33. $y = x^3 + 1$; $x = 1$; $\Delta x = -0.5$

34. $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $\Delta x = 0.1$

En los ejercicios 35 a 42, calcule dy.

35. $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$ **36.** $y = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$

37. $y = x^2\sqrt{2x + 3}$ **38.** $y = \sqrt{4 - x^2}$

39. $y = \dfrac{2 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$

40. $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}$

41. $y = \tan^2 x \sec^2 x$ **42.** $y = \cot 2x \csc 2x$

43. La medida de la arista de un cubo mide 15 cm con un error posible de 0.01 cm. Emplee diferenciales para determinar el error aproximado al calcular a partir de esta medida: **(a)** el volumen; **(b)** el área de una de las caras.

44. Una caja metálica en forma de cubo tiene un volumen interior de 1000 cm^3. Las seis caras serán de metal de $\frac{1}{2}$ cm de espesor. Si el costo del metal que se empleará es de \$0.20 por centímetro cúbico, utilice diferenciales para determinar el costo aproximado del metal utilizado en la construcción de la caja.

45. Un tanque cilíndrico abierto tendrá un revestimiento de 2 cm de espesor. Si el radio interior es de 6 m y la altura es de 10 m, obtenga mediante diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se empleará.

46. El tallo de un hongo es de forma cilíndrica, y un tallo de 2 cm de altura y r centímetros de radio tiene un volumen de V centímetros cúbicos, donde $V = 2\pi r^2$. Use diferenciales para calcular el incremento aproximado del volumen del tallo cuando el radio aumenta de 0.4 cm a 0.5 cm.

47. Una quemadura de forma circular en la piel de una persona es tal que si r centímetros es la longitud del radio y A centímetros cuadrados es el área de la quemadura, entonces $A = \pi r^2$. Utilice diferenciales para determinar la disminución aproximada del área de la quemadura cuando el radio disminuye de 1 cm a 0.8 cm.

48. Cierta bacteria de forma esférica es tal que si r micras es la longitud del radio y V micras cúbicas es su volumen, entonces $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Emplee diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen de la bacteria cuando el radio aumenta de 2.2 μm a 2.3 μm.

49. Un tumor en el cuerpo de una persona tiene forma esférica de modo que si r centímetros es la medida del radio y V centímetros cúbicos es el volumen del tumor, entonces $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Utilice diferenciales para determinar el incremento aproximado del volumen del tumor cuando el radio aumenta de 1.5 cm a 1.6 cm.

50. Si t segundos es el tiempo para una oscilación completa de un péndulo simple de l pies de longitud, entonces $4\pi^2 l = gt^2$, donde $g = 32.2$. Un reloj que tiene péndulo de 1 pie se adelanta 5 minutos cada día. Determine la cantidad aproximada que debe alargarse el péndulo para corregir la inexactitud.

51. La medida de la resistencia eléctrica de un alambre es proporcional a la medida de su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de la medida de su diámetro. Suponga que la resistencia de un alambre de longitud dada se calcula a partir de la medición del diámetro con un error posible del 2%. Determine el error porcentual posible del valor calculado de la resistencia.

52. Un contratista acuerda pintar los dos lados de 1000 señales circulares, cada una de 3 m de radio. Al recibir las señales, se descubrió que éstas son 1 cm más grandes. Use diferenciales para determinar el incremento porcentual aproximado de pintura que se necesitará.

53. Si el error posible en la medición del volumen de un gas es de 0.1 pie^3 y el error permitido en la presión es de $0.001C$ lb/pie^2, determine el tamaño del recipiente más pequeño para el cual se cumple la ley de Boyle (ejercicio 23 de la sección 2.10).

54. Para la ley adiabática de la expansión del aire (ejercicio 24 de la sección 2.10), demuestre que

$$\frac{dP}{P} = -1.4\frac{dV}{V}$$

55. Demuestre que si la ley de Boyle se cumple, entonces

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dV}{V}$$

56. Un rollo de cinta flexible de L pies de longitud, fijada en la parte superior de una tabla inclinada que forma un ángulo θ con la horizontal, se deja rodar por la tabla. Vea la figura adjunta. Si T segundos es el tiempo para que la cinta se desenrolle completamente, entonces

$$T = \sqrt{\frac{3L}{32}\csc\theta}$$

Demuestre que

$$\frac{dT}{T} = -\frac{d\theta}{2\tan\theta}$$

57. Las ecuaciones de la forma $\tan x + ax = 0$ surgen en problemas de conducción de calor. Las raíces positivas de la ecuación en orden creciente son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Si $a = 1$, determine α_1 y α_2 con cuatro cifras decimales.

58. Siga las instrucciones del ejercicio 57 considerando $a = -2$.

En los ejercicios 59 y 60, obtenga una aproximación para π con cinco cifras decimales utilizando el método de Newton para resolver la ecuación.

59. $\tan x = 0$

60. $\cos x + 1 = 0$

61. Explique cómo se utiliza el concepto de diferencial para aproximar valores de función.

REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3

SUGERENCIAS PARA LA REVISIÓN DEL CAPÍTULO 3

1. Explique la diferencia entre *extremo relativo* y *extremo absoluto* de una función.

2. Invente un ejemplo de una función f que tenga un extremo relativo en el punto $P(c, f(c))$ y para la cual se cumplen las condiciones siguientes:
   (a) La recta tangente a la gráfica de f en P es horizontal;
   (b) La recta tangente a la gráfica de f en P es vertical;
   (c) La gráfica de f no tiene recta tangente en P.

3. Enuncie el *teorema del valor extremo.*

4. Describa cómo determinaría los extremos absolutos de una función que satisface las condiciones del teorema del valor extremo.

5. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las condiciones del teorema del valor extremo y que tenga la propiedad indicada:
   (a) la función no tiene números críticos;
   (b) sólo un extremo absoluto ocurre en un número crítico;
   (c) los dos extremos absolutos ocurren en números críticos;
   (d) la función tiene exactamente dos números críticos pero ningún extremo absoluto ocurre en los números críticos.

6. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las condiciones del teorema del valor extremo y para la cual el valor mínimo absoluto ocurra en un número crítico c donde $f'(c)$ no exista y
   (a) la gráfica de f no tenga recta tangente en el punto $(c, f(c))$;
   (b) la gráfica de f tenga una recta tangente vertical en el punto $(c, f(c))$.

7. ¿Qué directrices deben seguirse cuando se definen las variables empleadas para obtener una función como *modelo matemático* de un problema verbal?

8. ¿Por qué debe establecerse el dominio de la función que utiliza como modelo matemático para resolver un problema verbal?

9. A fin de aplicar el teorema del valor extremo para resolver un problema verbal que implica un extremo absoluto, ¿qué condiciones debe satisfacer la función que se utiliza como modelo matemático?

10. Bosqueje el procedimiento que utilizaría para resolver un problema verbal que implica un extremo absoluto en un intervalo cerrado.

11. Enuncie y proporcione la interpretación geométrica del *teorema de Rolle*.

12. Enuncie y proporcione la interpretación geométrica del *teorema del valor medio*.

13. Explique por qué el teorema de Rolle es un caso especial del teorema del valor medio.

14. Tanto en el teorema de Rolle como en el teorema del valor medio se requiere que la función f sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, pero diferenciable sólo en el intervalo abierto (a, b). Explique por qué los teoremas son válidos cuando $f'(a)$, $f'(b)$ o ambos no existen.

15. ¿Por qué es más importante la existencia del número c, garantizado por la conclusión del teorema del valor medio, que el valor real del número c? En su respuesta enuncie situaciones en las que sólo la existencia de c importa y no su valor.

16. Invente un ejemplo de una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio pero para la cual no se pueda determinar el valor exacto del número c garantizado por la conclusión.

17. Defina: la función f es *creciente* en un intervalo. ¿Cómo se determinaría analíticamente que f es creciente en el intervalo cerrado $[a, b]$?

18. Defina: la función f es *decreciente* en un intervalo. ¿Cómo se determinaría analíticamente que f es decreciente en el intervalo cerrado $[a, b]$?

19. Enuncie el *criterio de la primera derivada* para extremos relativos.

20. ¿Cómo determinaría analíticamente los extremos relativos de una función?

21. Invente un ejemplo de una función diferenciable que tenga exactamente dos extremos relativos. Dibuje la gráfica de la función.

22. Invente un ejemplo de una función diferenciable y no lineal que no tenga extremos relativos. Dibuje la gráfica de la función.

23. Invente un ejemplo de una función continua que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, que tenga un valor mínimo relativo en el origen, y cuya gráfica no tenga recta tangente en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

24. Invente un ejemplo de una función continua que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, que tenga un valor mínimo relativo en el origen, y cuya gráfica tenga una recta tangente en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

25. Invente un ejemplo de una función continua f que sea diferenciable en todo punto excepto en el origen, y tal que f no tenga un extremo relativo en el origen. Dibuje la gráfica de la función.

26. Defina: la gráfica de la función f es *cóncava hacia arriba* en el punto $(c, f(c))$. ¿Cómo determinaría analíticamente que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un punto particular?

27. Defina: la gráfica de la función f es *cóncava hacia abajo* en el punto $(c, f(c))$. ¿Cómo determinaría analíticamente que la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un punto particular?

28. Defina: el punto $(c, f(c))$ es un *punto de inflexión* de la gráfica de la función f. ¿Cómo determinaría analíticamente los puntos de inflexión de la gráfica de una función?

29. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde f [illegible] $f'(c) = 1$, $f''(x) > 0$ si $x < c$, y $f''(x) < 0$ si $x >$ [illegible]

30. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde $f'(c) =$ [illegible] $f'(c) = 0$, $f''(x) < 0$ si $x < c$, y $f''(x) > 0$ si $x > c$.

31. Dibuje la gráfica de una función f para la cual la gráfica tenga un punto de inflexión en $(c, f(c))$ donde $f'(c)$ [illegible] exista, $f''(x) > 0$ si $x < c$, y $f''(x) < 0$ si $x > c$.

32. Enuncie el *criterio de la segunda derivada* para extremos relativos.

33. ¿Cuándo es más fácil aplicar el criterio de la segunda derivada? ¿Cuándo es más fácil aplicar el criterio de la primera derivada? ¿Pueden aplicarse siempre estos criterios? Explique su respuesta.

34. Invente un ejemplo y dibuje la gráfica de una función para la cual $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a 0, donde
(a) f tiene un valor mínimo relativo en 0;
(b) f tiene un valor máximo relativo en 0;
(c) f no tiene extremo relativo en 0.

35. Defina precisamente, utilizando la notación ϵ-N, cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ **(b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$. Enuncie en palabras lo que cada una de estas definiciones significa sin emplear la notación ϵ-N ni las palabras *límite, se aproxima a, infinito, crece sin límite* o *decrece sin límite*.

36. ¿Cómo se evalúa el límite de una función racional cuando x crece o decrece sin límite?

37. Invente un ejemplo de una función f que ilustre cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;
(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$; **(c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$;
(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; **(e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;
(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

38. Defina: *asíntota horizontal* de la gráfica de una función.

39. ¿Cómo pueden determinarse las asíntotas horizontales de la gráfica de una función?

40. Invente un ejemplo de una función cuya gráfica tenga la recta $x = 5$ como una asíntota vertical y la recta $y = -4$ como una asíntota horizontal.

41. Si la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de la derivada de la función f, ¿cuáles son las posibilidades del comportamiento de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$? ¿Qué información adicional, obtenida a partir de la gráfica de la derivada de f, garantizará un comportamiento específico de la gráfica de f en $(c, f(c))$?

42. Si la gráfica de la derivada de una función f revela que f tiene un extremo relativo en c, ¿cuáles son las posibilidades del comportamiento de la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$? ¿Qué información adicional, obtenida a partir de la gráfica de la derivada de f, garantizará un comportamiento específico de la gráfica de f en $(c, f(c))$?

43. ¿Qué es una *asíntota oblicua* de la gráfica de una función?

44. ¿Cuándo la gráfica de una función racional tiene una asíntota oblicua y cómo se determina la ecuación de la asíntota?

45. Elabore un resumen de los pasos que deben seguirse para dibujar la gráfica de la función f definida por la ecuación $y = f(x)$.

46. Enuncie un teorema diferente del teorema del extremo absoluto que garantice que un extremo relativo de una función en un intervalo es un extremo absoluto de la función en el intervalo. Cuando resuelve un problema que involucra extremos absolutos, ¿en qué condiciones emplearía el teorema enunciado en lugar del teorema del extremo absoluto?

47. **(a)** Invente un ejemplo de una función para la cual pueda aplicarse el teorema enunciado en el ejercicio anterior para determinar un extremo absoluto, de modo que no pueda aplicársele el teorema del valor extremo. **(b)** Invente un ejemplo de una función para la cual se puede aplicar el teorema del ejercicio anterior o el teorema del valor extremo para determinar un extremo absoluto en un intervalo.

48. ¿Cómo se aplicaría el *método de Newton* para determinar los ceros de una función? En su respuesta enuncie la fórmula para determinar x_{n+1} a partir de x_n.

49. ¿Cómo se estiman los valores de función mediante la aproximación lineal? ¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer la función f en el número x_0 para estimar $f(x_0)$ mediante aproximación lineal?

50. Si $y = f(x)$, defina las diferenciales dy y dx.

51. ¿Cómo están relacionados la diferencial dx y el incremento Δx? ¿Cómo están relacionados la diferencial dy y el incremento Δy?

52. ¿Por qué la derivada de una función puede expresarse como el cociente de dos diferenciales?

53. ¿Para qué función son iguales las diferenciales de las variables independiente y dependiente? Muestre esta igualdad geométricamente en una figura que contenga la gráfica de la función.

▶ EJERCICIOS DE REPASO PARA EL CAPÍTULO 3

En los ejercicios 1 a 10, (a) dibuje la gráfica de la función en el intervalo indicado. (b) Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo, si existe alguno, y determine los valores de x para los cuales ocurren los extremos absolutos.

1. $f(x) = \sqrt{5 + x}\,; [-5, +\infty)$
2. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}\,; (-2, 2)$
3. $f(x) = |9 - x^2|; [-2, 4]$
4. $f(x) = |9 - x^2|; [-1, 5]$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}; [0, 4]$
6. $f(x) = \dfrac{8}{3 - x}; [1, 3]$
7. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x; [-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$
8. $f(x) = 4 \cos^2 2x; [0, \frac{3}{4}\pi]$
9. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2 + 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}; [-2, 2]$
10. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 5x - 15 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}; [-3, 5]$

En los ejercicios 11 a 14, (i) estime en la graficadora los extremos absolutos de la función en el intervalo indicado. (ii) Confirme las respuestas analíticamente.

11. **(a)** $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [-2, 3]$
 (b) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [-4, 2]$
12. **(a)** $f(x) = x^5 - 9x^2 + 5; [-1, 2]$
 (b) $f(x) = x^5 - 9x^2 + 5; [-2, 1]$
13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x; [-1, 1]$
14. $f(x) = 2 \cos x + x; [-1, 3]$

En los ejercicios 15 y 16, verifique que las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle son satisfechas por la función en el intervalo indicado. Después encuentre un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle. Apoye gráficamente la elección de c trazando en el mismo rectángulo de inspección las gráficas de f y de la recta tangente horizontal en (c, f(c)).

15. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4; [-2, 1]$
16. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x; [0, \frac{1}{3}\pi]$

En los ejercicios 17 a 20, verifique que la hipótesis del teorema del valor medio es satisfecha por la función en el intervalo indicado [a, b]. Después encuentre un valor adecuado para c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. Apoye la elección de c trazando en el mismo rectángulo de inspección la gráfica de f en el intervalo cerrado [a, b], la recta tangente en (c, f(c)), y la recta secante que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) y mostrando que las rectas tangente y secante son paralelas.

17. $f(x) = \sqrt{3 - x}\,; [-6, -1]$
18. $f(x) = x^3; [-2, 2]$
19. $f(x) = 4 \cos x; [\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$
20. $f(x) = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x; [0, \pi]$

21. **(a)** Si f es una función polinomial y $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ y $f'(b)$ son cero, utilice el teorema de Rolle para demostrar que existen al menos dos números en el intervalo abierto (a, b) que son raíces de la ecuación $f''(x) = 0$.

(b) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

satisface el inciso (a) si el intervalo (a, b) es $(-2, 2)$.

22. Si f es la función definida por $f(x) = |2x - 4| - 6$, entonces $f(-1) = 0$ y $f(5) = 0$. Sin embargo, $f'(x)$ nunca es cero. Muestre por qué el teorema de Rolle no se aplica.

Para las funciones de los ejercicios 23 y 24, no existe ningún número c en el intervalo abierto (a, b) que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio. En cada ejercicio, determine qué condición de la hipótesis del teorema del valor medio no se cumple. Dibuje la gráfica de f y la recta que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)).

23. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 6 - 3x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$; $a = 0, b = 3$

24. $f(x) = 2(x - 2)^{2/3}$; $a = -6, b = 3$

En los ejercicios 25 a 32, (a) trace la gráfica; determine a partir de la gráfica (b) los extremos relativos de f, (c) los valores de x en los que ocurren los extremos relativos, (d) los intervalos en los que f es creciente, y (e) los intervalos en los que f es decreciente. Confirme analíticamente la información obtenida gráficamente.

25. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

26. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$

27. $f(x) = (x - 3)^{5/3} + 1$

28. $f(x) = (x + 2)^{4/3} - 3$

29. $f(x) = x - \tan x$; $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

30. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$; $x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$

31. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 3)^2$

32. $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$

En los ejercicios 33 a 36, haga lo siguiente: (a) determine los extremos relativos de f; (b) obtenga los valores de x en los que ocurren los extremos relativos; (c) los intervalos en los que f es creciente, (d) los intervalos en los que f es decreciente; (e) halle los puntos de inflexión de la gráfica de f; (f) determine en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (g) determine en dónde la gráfica de f es cóncava hacia abajo. Dibuje la gráfica de la función a partir de las respuestas de los incisos (a)–(g).

33. $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)^3$

34. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)$

35. $f(x) = \begin{cases} (1 - x)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{si } x < 2 \\ 6 - x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 37 a 44, estime en la graficadora los puntos de inflexión de la gráfica de la función dada y en dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y en dónde lo es hacia abajo. Confirme las estimaciones analíticamente.

37. La función del ejercicio 25

38. La función del ejercicio 26

39. La función del ejercicio 27

40. La función del ejercicio 28

41. La función del ejercicio 29

42. La función del ejercicio 30

43. La función del ejercicio 31

44. La función del ejercicio 32

En los ejercicios 45 y 46, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por el punto donde x = c y que satisfaga las condiciones dadas. Suponga que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a c.

45. **(a)** $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(b) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(c) $f'(x) > 0$ si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$;

(d) $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$; $f'(x) < 0$; si $x < c$; $f'(x) < 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

46. **(a)** $f'(c) = -2$; $f''(c) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$

(b) $f'(c)$ no existe; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) > 0$ si $x > c$;

(c) $f'(x) < 0$ si $x < c$; $f'(x) > 0$ si $x > c$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$;

(d) $\lim_{x \to c^-} f'(x) = 1$; $\lim_{x \to c^+} f'(x) = +\infty$; $f''(x) > 0$ si $x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

En los ejercicios 47 y 48, dibuje una porción de la gráfica de una función f que pase por los puntos (a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c)) y (d, f(d)) y que satisfaga las condiciones dadas. También dibuje un segmento de la recta tangente en cada uno de estos puntos, en caso de que exista la recta tangente. Suponga que a < b < c < d y que f es continua en algún intervalo abierto que contiene a a y d.

47. **(a)** $f'(a) = 0$; $f'(b) = -1$; $f'(c)$ no existe; $f'(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < b$; $f''(x) > 0$ si $b < x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

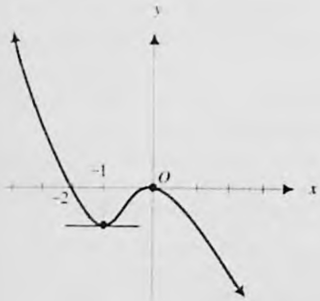
(b) $f'(a) > 0$; $f''(a) = 0$; $f'(b) = 1$; $f''(b) = 0$; $f'(c) = 0$; $f'(d)$ no existe; $f''(x) < 0$ si $x < a$; $f''(x) > 0$ si $a < x < b$; $f''(x) < 0$ si $b < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

48. **(a)** $f'(a) = 0$; $f'(b) = -1$; $f''(b) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < b$; $f''(x) > 0$ si $b < x < c$; $f''(x) < 0$ si $c < x < d$; $f''(x) > 0$ si $x > d$

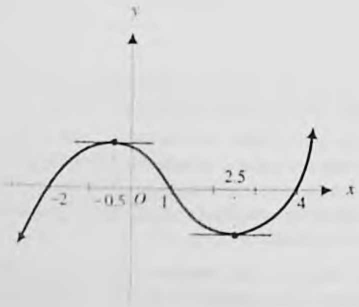
(b) $f'(a)$ no existe; $f'(b) = 0$; $f'(c) = 2$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 0$; $f''(x) < 0$ si $x < a$; $f''(x) > 0$ si $a < x < c$; $f''(x) < 0$ si $x > c$

En los ejercicios 49 a 52, la figura adjunta muestra la gráfica de la derivada de una función f cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y la cual es continua en todo número. A partir de la gráfica determine la siguiente información e incorpórela en una tabla semejante a las tablas de la sección 3.6: (i) los intervalos en los que f es creciente, (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo; (vi) los puntos de inflexión de la gráfica de f. Dibuje la gráfica de una función f que tenga las propiedades de la tabla si los únicos ceros de f son los indicados.

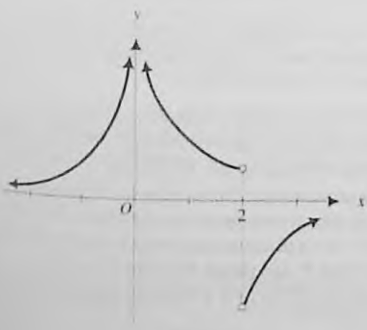
49. Los ceros de f son -4 y 0.



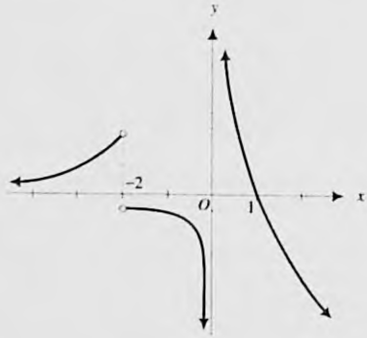
50. Los ceros de f son 3 y 5.



51. Los ceros de f son 0 y 3.

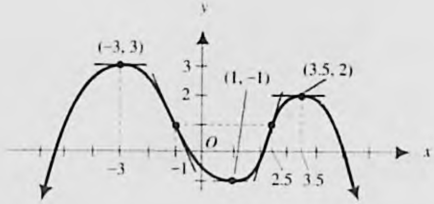


52. El cero de f es -1.

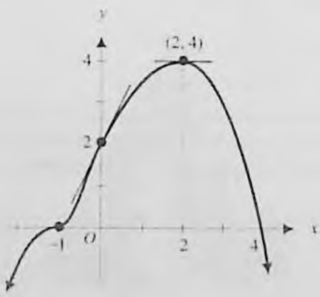


En los ejercicios 53 a 56, en la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f y segmentos de tangentes horizontales y de inflexión. Determine la siguiente información a partir de la figura e incorpórela en una tabla similar a las tablas de la sección 3.6: (i) los intervalos en los que f es creciente, (ii) los intervalos en los que f es decreciente; (iii) los extremos relativos de f; (iv) donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba; (v) donde la gráfica de f es cóncava hacia abajo, (vi) los puntos de inflexión de la gráfica de f. A partir de la tabla, dibuje gráficas posibles de f' y f''.

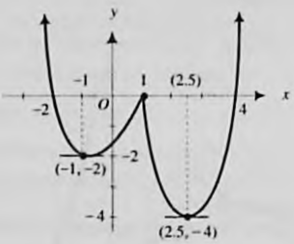
53.



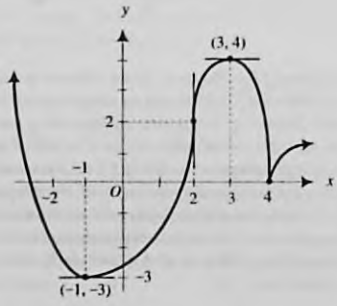
54.



55.



56.



En los ejercicios 57 a 60, determine el límite y apoye la respuesta gráficamente.

57. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4}$

58. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{5x^2 - x + 1}$

59. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5}{2x - 4}$

60. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{8x^3 + 7x - 2}{7x^3 + 3x^2 + 5x} \right)^2$

En los ejercicios 61 y 62, realice lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función f y haga un proposición acerca del comportamiento aparente de f(x) conforme x crece sin límite. (b) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

61. $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

62. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 4}$

En los ejercicios 63 a 66, determine las asíntotas de la gráfica de la función. Apoye los resultados trazando la gráfica y las asíntotas en el mismo rectángulo de inspección.

63. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 4}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

65. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

En los ejercicios 67 a 70, (a) trace la gráfica de f, NDER(f(x), x) y NDER2(f(x), x) en rectángulos de inspección separados y estime lo siguiente: (i) los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente; (ii) los extremos relativos de f; (iii) donde la gráfica es cóncava hacia arriba y donde lo es hacia abajo; (iv) los puntos de inflexión de la gráfica de f. (b) Confirme las estimaciones del inciso (a) analíticamente e incorpore la información en una tabla semejante a la tabla 4 de la sección 3.8. A partir de la información de esta tabla dibuje la gráfica de f y compárela con la gráfica de f trazada en el inciso (a).

67. $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 21x^2 - 45x + 27$

68. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x$

69. $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - x$

70. $f(x) = 2x^{1/3} + x^{4/3}$

71. Determine el valor máximo absoluto alcanzado por la función f si $f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$, donde A, B y k son constantes positivas.

72. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a y b de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto (2, 16). Apoye la respuesta gráficamente.

73. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b y c de modo que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en el punto (1, −1) y que la pendiente de la tangente de inflexión en ese punto sea −3. Apoye la respuesta gráficamente.

74. Si $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, demuestre que la gráfica de f tiene puntos de inflexión que son colineales. Apoye las respuestas trazando la gráfica de f y la recta que contiene a los puntos de inflexión.

75. Si $f(x) = x|x|$, trace la gráfica de f y demuestre analíticamente que el origen es un punto de inflexión.

76. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un número entero positivo.
   (a) Demuestre que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en el origen si y sólo si n es impar y $n > 1$.
   (b) Demuestre que si n es par, f tiene un valor mínimo relativo en 0.

En los ejercicios 77 y 78, confirme analíticamente la estimación obtenida en la graficadora en el inciso (d) del ejercicio indicado de los ejercicios de repaso del capítulo 1.

77. **(a)** Ejercicio 103; **(b)** Ejercicio 105

78. **(a)** Ejercicio 104; **(b)** Ejercicio 106

79. ¿Cuántos artículos debe producir cada semana el fabricante del ejercicio 57 de los ejercicios de repaso del capítulo 2, para maximizar las utilidades?

80. Determine las dimensiones de una caja abierta, que tenga base cuadrada y un volumen de k pulgadas cúbicas, que pueda construirse con la mínima cantidad de material.

81. Dos ciudades A y B obtendrán su abastecimiento de agua de la misma estación de bombeo, la cual se ubicará en la orilla de un río recto a 15 km de la ciudad A y a 10 km de la ciudad B. Los puntos del río más cercanos a A y B están separados 20 km, y A y B se encuentran en el mismo lado del río.

(a) Utilice la graficadora para estimar dónde debe ubicarse la estación de bombeo de modo que se emplee la menor cantidad de tubería.

(b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente.

82. Un fabricante ofrece entregar a un comerciante 300 sillas a \$360 cada una, y reducir el precio por silla en \$1 del pedido total por cada silla adicional que exceda a 300. Determine la cantidad total de dólares implicados en la transacción más grande posible entre el fabricante y el comercianrte. Apoye la respuesta gráficamente.

83. En condiciones de monopolio (vea el ejercicio 19 de la sección 3.9) la demanda diaria de cierto artículo es de x unidades cuando el precio por unidad es p dólares y $x^2 + p = 320$. Si $20x$ dólares es el costo total por producir x unidades, determine la máxima utilidad total diaria. Apoye la respuesta gráficamente.

84. Para construir un envase cerrado en forma de cilindro circular recto que tenga un volumen de 27 pulg^3, la tapa y la base se cortarán de trozos cuadrados de hojalata.

(a) Utilice la graficadora para estimar el radio del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su construcción. Incluya la hojalata que se desecha al obtener la tapa y la base.

(b) Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente y después determine la altura que debe tener el envase.

85. Si la demanda de un artículo particular es de $100x$ unidades cuando el precio por unidad es de p dólares, entonces $x^2 + p^2 = 36$. Determine la utilidad total máxima.

86. En un pueblo, cuya población es de 11 000 habitantes, la tasa de crecimiento de una epidemia es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de persona no infectadas. Determine el número de personas infectadas cuando la epidemia está creciendo a una tasa máxima.

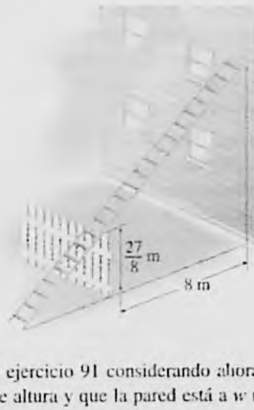
87. Debido a varias restricciones, el tamaño de una comunidad particular está limitado a 3 000 habitantes, y la tasa de crecimiento de la población es conjuntamente proporcional a su tamaño y a la diferencia entre 3 000 y su tamaño. Determine la cantidad de personas para la cual la tasa de crecimiento de la población es un máximo.

88. Determine la distancia más corta desde el punto $P(0, 4)$ a un punto de la curva $x^2 - y^2 = 16$, y encuentre el punto de la curva que está más cerca a P.

89. Una compañía que opera en condiciones de competencia perfecta (vea las instrucciones de los ejercicios 17 y 18 de la sección 3.9) construye y vende radios portátiles. La compañía puede vender todos los radios que produce a un precio de \$75 cada uno. Si se construyen x radios cada día y $C(x)$ dólares es el costo diario de producción, entonces $C(x) = x^2 + 25x + 100$. ¿Cuántos radios deben producirse cada día para que la compañía obtenga la máxima ganancia diaria total?

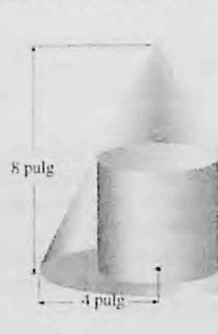
90. Dos partículas inician su movimiento al mismo tiempo. Una de ellas se desplaza a lo largo de una recta horizontal y su ecuación de movimiento es $x = t^2 - 2t$, donde x centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. La otra se mueve a lo largo de una recta vertical que intersecta a la recta horizontal en el origen, y su ecuación de movimiento es $y = t^2 - 2$, donde y centímetros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los t segundos. Determine cuándo la distancia dirigida entre las dos partículas es mínima, y sus velocidades en ese instante.

91. Una escalera descansa sobre una cerca de $\frac{27}{8}$ m de altura y se apoya contra una pared a 8 m detrás de la cerca. Determine la longitud de la escalera más corta que pueda emplearse y que cumpla estas condiciones.



92. Resuelva el ejercicio 91 considerando ahora que la cerca mide h m de altura y que la pared está a w m detrás de la cerca.

93. Determine el volumen del cilindro circular recto más grande que pueda inscribirse en un cono circular recto que tiene un radio de 4 pulg y una altura de 8 pulg.



94. Una tienda de campaña tiene la forma de un cono. Determine la razón del radio a la altura de una tienda de campaña de volumen dado que requiera el mínimo de material para su construcción.

95. Determine las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que pueda circunscribirse a un cilindro de r centímetros de radio y h centímetros de altura.

96. Uno de los ángulos agudos de un triángulo mide $\frac{1}{6}\pi$ rad, y el lado opuesto a este ángulo tiene una longitud de 10 pulg. Demuestre que de todos los triángulos que satisfacen estas condiciones, aquel que tiene el área máxima es isósceles. *Sugerencia:* exprese la medida del área del triángulo en términos de funciones trigonométricas de uno de los otros ángulos agudos.

97. En un almacén, los artículos que pesan 1000 lb se transportan al nivel del piso asegurando una cuerda gruesa bajo una plataforma móvil baja y jalándola con un vehículo motorizado. Si la cuerda se dirige en un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso, entonces la intensidad de la fuerza de F lb a lo largo de la cuerda está dada por

$$F = \frac{1000k}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde k es el coeficiente constante de fricción y $0 < k < 1$. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, demuestre que F es mínima cuando $\tan \theta = k$.

98. **(a)** Demuestre que de todos los rectángulos que tienen un área de 81 pulg², el cuadrado cuyo lado mide 9 pulg tiene el perímetro mínimo. Apoye la respuesta gráficamente.

(b) Demuestre que de todos los rectángulos que tienen un perímetro de 36 pulg, el cuadrado cuyo lado mide 9 pulg tiene el área máxima. Apoye la respuesta gráficamente.

99. Un trozo de alambre de 20 cm de longitud se corta en dos partes, y cada parte se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total de los dos cuadrados sea la mínima posible?

100. Un trozo de alambre de 80 cm de longitud se dobla en forma de rectángulo. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área posible.

101. Para cierto artículo, donde x unidades se demandan semanalmente cuando el precio de cada unidad es p dólares,

$$10^6 px = 10^9 - 2 \cdot 10^6 x + 18 \cdot 10^3 x^2 - 6x^3$$

El número de dólares del costo promedio por producir cada unidad está dado por

$$Q(x) = \frac{1}{50}x - 24 + 11 \cdot 10^3 x^{-1}$$

y $x \geq 100$. Determine el número de unidades que deben producirse cada semana y el precio de cada unidad para que la utilidad semanal sea maximizada.

102. Utilice el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la raíz positiva de la ecuación

$$4x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = 0$$

103. Emplee el método de Newton para determinar con tres cifras decimales la raíz negativa de la ecuación

$$3x^4 - 4x^3 + 36x^2 + 2x - 8 = 0$$

104. Calcule con cuatro cifras decimales, mediante el método de Newton, la coordenada x del punto de intersección de la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $y = 2x - 3$.

105. Obtenga con cuatro cifras decimales, aplicando el método de Newton, el valor de x en el intervalo $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ para el cual $\tan x = x$.

En los ejercicios 106 y 107, para la función f dada, haga lo siguiente: (a) determine la aproximación lineal de f(x) en x = 8; (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente; (c) compare los valores de f(x) calculados a partir de la aproximación lineal con los valores de función obtenidos a partir de la ecuación dada cuando x es igual a 7.9, 7.99, 8, 8.01 y 8.1.

106. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

107. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{16}\pi x$

108. Si $y = 2x^2 - 3$, **(a)** calcule dy y Δy para $x = 2$ y $\Delta x = 0.5$. **(b)** Dibuje la gráfica e indique los segmentos de recta cuyas longitudes son dy y Δy.

109. Si $y = 80x - 16x^2$, determine la diferencia $\Delta y - dy$ si **(a)** $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$; **(b)** $x = 4$ y $\Delta x = -0.2$.

110. Si $x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 = 0$, determine dy en el punto $(1, 1)$ si $dx = 0.1$.

111. Utilice diferenciales para aproximar el volumen del material necesario para elaborar una pelota de caucho si el radio del núcleo hueco debe ser de 2 pulg y el espesor del caucho es de $\frac{1}{8}$ pulg.

112. Si t segundos es el tiempo para una oscilación completa de un péndulo de x pies de longitud, entonces $4\pi^2 x = gt^2$, donde $g = 32.2$. Utilice diferenciales para estimar el efecto sobre el tiempo si se comete un error de 0.01 al medir la longitud del péndulo.

113. La medida del radio de un cono circular recto es $\frac{1}{3}$ de su altura. Utilice diferenciales para estimar aproximadamente cuánto debe medir la altura si el error del volumen calculado no debe exceder el 3%.

114. Suponga que f y g son dos funciones que satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en $[a, b]$. Además, suponga que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo abierto (a, b). Demuestre que

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$$

para toda x de $[a, b]$. *Sugerencia:* sea $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplique el teorema 3.3.3 a la función h.

115. Sean f y g dos funciones diferenciables en cada número del intervalo cerrado $[a, b]$. Suponga además que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = g'(c)$. *Sugerencia:* sea $h(x) = f(x) - g(x)$ y aplique el teorema de Rolle a la función h.

116. Si f es una función polinomial, utilice el teorema de Rolle para demostrar que entre cualesquiera dos raíces consecutivas de la ecuación $f'(x) = 0$, existe, a lo sumo, una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

117. Dibuje la gráfica de una función en el intervalo I en cada uno de los casos siguientes: **(a)** I es el intervalo abierto $(0, 2)$ y f es continua en I. En 1, f tiene un valor máximo relativo pero $f'(1)$ no existe. **(b)** I es el intervalo cerrado $[0, 2]$. La función f tiene un valor mínimo relativo en 1, pero el valor mínimo absoluto de f ocurre en 0. **(c)** I es el intervalo abierto $(0, 2)$, y f' tiene un valor mínimo relativo en 1.

118. Si $f(x) = (x^2 + a^2)^p$, donde p es un número racional y $p \neq 0$, demuestre que la gráfica de f tiene dos puntos de inflexión si $p < \frac{1}{2}$, y no tiene puntos de inflexión si $p \geq \frac{1}{2}$.

119. **(a)** Si $f(x) = 3|x| + 4|x - 1|$, demuestre que f tiene un valor mínimo absoluto de 3.
(b) Si $g(x) = 4|x| + 3|x - 1|$, demuestre que g tiene un valor mínimo absoluto de 3.
(c) Si $a > 0$, $b > 0$ y $h(x) = a|x| + b|x - 1|$, demuestre que h tiene un valor mínimo absoluto que es el menor de los números a y b.

120. Si $f(x) = |x|^a \cdot |x - 1|^b$, donde a y b son números racionales positivos, demuestre que f tiene un valor máximo relativo de $a^a b^b/(a + b)^{a+b}$.

121. Si p y q son números racionales tales que $p + q = 1$, demuestre que la recta $y = x + (ap + bq)$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $f(x) = (x + a)^p(x + b)^q$.

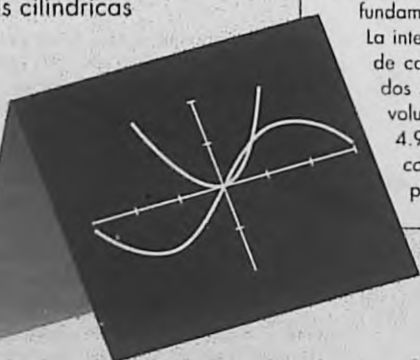
Capítulo

4

Integral definida e integración

VISIÓN PRELIMINAR

4.1 Antiderivación
4.2 Algunas técnicas de antiderivación
4.3 Ecuaciones diferenciales y movimiento rectilíneo
4.4 Área
4.5 Integral definida
4.6 Teorema del valor medio para integrales
4.7 Teoremas fundamentales del Cálculo
4.8 Área de una región plana
4.9 Volúmenes de sólidos mediante los métodos de rebanado, de discos y de arandelas
4.10 Volúmenes de sólidos mediante el método de capas cilíndricas



Hasta este momento se ha estudiado la rama del Cálculo llamada *Cálculo Diferencial*, en la que se estudia la *derivada*. En este capítulo se iniciará el estudio de la otra rama del Cálculo denominada *Cálculo Integral* la cual trata acerca de la *integral definida*. En la sección 4.7 aprenderá que estas dos ramas del Cálculo están relacionadas mediante los *teoremas fundamentales del Cálculo*, descubrimiento culminante en el siglo XVII realizado por Newton y Leibniz, quienes trabajaron en forma independiente.

Un procedimiento de cálculo necesario para aplicar los teoremas fundamentales es la *antiderivación* o *antidiferenciación* la cual se estudia en las secciones 4.1 y 4.2, y posteriormente se utiliza en la sección 4.3 para resolver *ecuaciones diferenciales separables*, aplicadas al movimiento rectilíneo.

De igual forma en que la derivada está relacionada geométricamente a la recta tangente de una gráfica, la *integral definida* tiene una interpretación geométrica como el *área de una región plana*, misma que se define en la sección 4.4 como un nuevo tipo de límite. Más adelante, en la sección 4.5 se presenta la integral definida en términos de este límite. Las propiedades de la integral definida se presentan en las secciones 4.5 y 4.6, las cuales se utilizan en la sección 4.7 para demostrar los teoremas fundamentales del Cálculo.

La integral definida se aplica en la sección 4.8 a fin de calcular el área de una región plana, y en las dos secciones finales se aplica para determinar el volumen de varios tipos de sólidos. En la sección 4.9 se utilizan los métodos de *rebanado*, de *discos* y de *arandelas*, y en la sección 4.10 se emplea el método de *capas cilíndricas*.

4.1 ANTIDERIVACIÓN

En cierta forma ya se ha familiarizado con las *operaciones inversas*. La adición y la sustracción son operaciones inversas, así como la multiplicación y la división, además de la potenciación y la extracción de raíces. En esta sección se estudiará la operación inversa de la diferenciación denominada *antiderivación* o *antidiferenciación*, la cual implica el cálculo de una *antiderivada*.

4.1.1 Definición de antiderivada

Una función F se denomina **antiderivada** de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en I.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Si F es la función definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

entonces $F'(x) = 12x^2 + 2x$. De modo que si f es la función definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

entonces f es la derivada de F, y F es la antiderivada de f. Si G es la función definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

entonces G también es una antiderivada de f porque $G'(x) = 12x^2 + 2x$. En realidad, cualquier función determinada por

$$4x^3 + x^2 + C$$

donde C es una constante, es una antiderivada de f. ◀

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si C es una constante arbitraria, entonces cualquier función definida por

$$\operatorname{sen} x + C$$

tiene la función $\cos x$ como derivada. Por tanto, cualquier función de este tipo es una antiderivada de $\cos x$. ◀

Para generalizar la discusión de los ejemplos ilustrativos anteriores, considere la función F como una antiderivada de la función f en un intervalo I, de modo que

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces si G es una función definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria,

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

y G es también una antiderivada de f en el intervalo I.

Ahora se procederá a demostrar que si F es cualquier antiderivada particular de f en el intervalo I, entonces cada antiderivada de f en I está dada por $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Primero, se necesita un teorema preliminar cuya demostración se basa en el teorema 3.3.3, el cual afirma que si la derivada de una función en un intervalo es 0, entonces la función es constante en el intervalo. Recuerde, en la sección 3.3 se demostró este teorema para ilustrar el poder del teorema del valor medio.

4.1.2 Teorema

Si f y g son dos funciones definidas en el intervalo I, tales que

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

entonces existe una constante K tal que

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Demostración Sea h la función definida en I mediante

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

de modo que para toda x en I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Pero, por hipótesis, $f'(x) = g'(x)$ para toda x en I. Por tanto,

$$h'(x) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Al aplicar el teorema 3.3.3 a la función h, se infiere que existe una constante K tal que

$$h(x) = K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Si se sustituye $h(x)$ por $f(x) - g(x)$ se obtiene

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

lo que demuestra el teorema. ∎

El teorema siguiente se deduce inmediatamente del teorema anterior.

4.1.3 Teorema

Si F es una antiderivada particular de f en un intervalo I, entonces cada antiderivada de f en I está dada por

$$F(x) + C \tag{1}$$

donde C es una constante arbitraria, y todas las antiderivadas de f en I pueden obtenerse a partir de (1) asignando valores particulares a C.

Demostración Sea G cualquier antiderivada de f en I. Entonces

$$G'(x) = f(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } I \tag{2}$$

Como F es una antiderivada particular de f en I,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } I \tag{3}$$

De (2) y (3)

$$G'(x) = F'(x) \qquad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Por tanto, por el teorema 4.1.2, existe una constante K tal que

$$G(x) = F(x) + K \qquad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Como G representa cualquier antiderivada de f en I, toda antiderivada de f puede obtenerse a partir de $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Por tanto, se ha demostrado el teorema. ∎

La **antiderivación** o **antidiferenciación** es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada. El símbolo $\int$ denota la operación de antiderivación, y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4}$$

donde

$$F'(x) = f(x)$$

y

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{5}$$

La expresión $F(x) + C$ en (4) recibe el nombre de **antiderivada general** de f.

Leibniz introdujo la convención de escribir la diferencial de una función antes del símbolo de antiderivación. La ventaja de utilizar la diferencial en esta forma será evidente en la sección 4.2 cuando se calculen antiderivadas mediante un *cambio de variable*. De (4) y (5), se puede escribir

$$\int d\,(F(x)) = F(x) + C$$

Esta ecuación establece que cuando se antideriva la diferencial de una función, se obtiene esa función más una constante arbitraria. De este modo, puede considerarse que el símbolo para antiderivación representa la operación inversa a la operación denotada por d para calcular una diferencial.

Si $\{F(x) + C\}$ es el conjunto de todas las funciones cuyas diferenciales son $f(x)\,dx$, también es el conjunto de todas las funciones cuya derivada es $f(x)$. Por tanto, la antiderivación se considera como la *operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada.*

Como la antiderivación es la operación inversa de la derivación, los teoremas de antiderivación se obtienen de los teoremas de diferenciación. Así, los teoremas siguientes pueden demostrarse a partir de los teoremas correspondientes de diferenciación.

4.1.4 Teorema

$$\int dx = x + C$$

4.1.5 Teorema

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

donde a es una constante.

El teorema 4.1.5 establece que la antiderivada general del producto de una constante por una función es la constante por la antiderivada general de la función.

4.1.6 Teorema

Si f y g están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

El teorema 4.1.6 afirma que la antiderivada general de la suma de dos funciones es igual a la suma de las antiderivadas generales de las funciones, considerando que ambas funciones están definidas en el mismo intervalo. Al extender el teorema 4.1.6 para un número finito de funciones y combinándolo con el teorema 4.1.5, se obtiene el teorema siguiente.

4.1.7 Teorema

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ están definidas en el mismo intervalo, entonces

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)]\,dx$$
$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\,dx$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

4.1.8 Teorema

Si n es un número racional, entonces

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Demostración

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$
$$= x^n$$

∎

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Del teorema 4.1.8 para valores particulares de n se tiene:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx \qquad \int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C && = \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C \\
&= \frac{x^{-1}}{-1} + C && = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C \\
&= -\frac{1}{x} + C && = \tfrac{3}{4}x^{4/3} + C \qquad ◀
\end{aligned}
$$

El ejemplo ilustrativo siguiente muestra cómo se utilizan los teoremas 4.1.4 a 4.1.8 para obtener la antiderivada de una función.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4

$$
\begin{aligned}
\int (3x + 5)\,dx &= \int 3x\,dx + \int 5\,dx && \text{(por el teorema 4.1.6)} \\
&= 3\int x\,dx + 5\int dx && \text{(por el teorema 4.1.5)} \\
&= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2) && \text{(por los teoremas 4.1.8 y 4.1.4)} \\
&= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)
\end{aligned}
$$

Como $3C_1 + 5C_2$ es una constante arbitraria, puede denotarse por C; de modo que el resultado puede escribirse como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

La respuesta puede verificarse al calcular la derivada:

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x\ C) = 3x + 5$$ ◀

▶ *EJEMPLO 1* Evalúe

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

Solución

$$
\begin{aligned}
&\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx \\
&\quad = 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx \\
&\quad = 5\cdot\frac{x^5}{2} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C \\
&\quad = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C
\end{aligned}
$$ ◀

▶ *EJEMPLO 2* Calcule

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

Solución

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{1/2}(x + x^{-1})\, dx$$
$$= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\, dx$$
$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$$
◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Determine

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\, dt$$

Solución

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\, dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\, dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\, dt$$
$$= 5\int t^{2/3}\, dt + 7\int t^{-4/3}\, dt$$
$$= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C$$
$$= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C$$
$$= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$$
◀

Como se hizo en el ejemplo ilustrativo 4, la antiderivación puede verificarse al calcular la derivada de la respuesta. Para apoyar gráficamente una antiderivada se asigna un valor específico a la constante arbitraria C y después se traza la derivada numérica de la antiderivada. Posteriormente, en el mismo rectángulo de inspección, se traza la gráfica de la función original. La respuesta es apoyada si las dos gráficas resultan idénticas.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 5** En el ejemplo 3, sean

$$f(t) = \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}} \quad \text{y} \quad F(t) = 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}}$$

Observe que F es la antiderivada de f para $C = 0$. Las gráficas de f y NDER($F(t)$, t) están trazadas en el rectángulo de inspección de $[-10, 10]$ por $[0, 15]$ en la figura 1. El hecho de que las gráficas sean idénticas apoya la respuesta del ejemplo 3. ◀

$[-10, 10]$ por $[0, 15]$

$f(t) = \dfrac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}$

$\text{NDER}\left(3t^{5/3} - \dfrac{21}{t^{1/3}}, t\right)$

FIGURA 1

Los teoremas para la antiderivada general de las funciones seno y coseno se deducen inmediatamente de los teoremas correspondientes de diferenciación.

4.1.9 Teorema

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

Demostración

$$\begin{aligned} D_x(-\cos x) &= -(-\operatorname{sen} x) \\ &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

■

4.1.10 Teorema

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

Demostración

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

■

Los teoremas siguientes son consecuencias de los teoremas de diferenciación para las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Otra vez, las demostraciones son inmediatas al calcular la derivada del miembro derecho de cada ecuación.

4.1.11 Teorema

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

4.1.12 Teorema

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

4.1.13 Teorema

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

4.1.14 Teorema

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

▶ ***EJEMPLO 4*** Evalúe

$$\int (3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x)\, dx$$

Solución Al aplicar los teoremas 4.1.13 y 4.1.12, se obtiene

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x)\, dx &= 3 \int \sec x \tan x\, dx - 5 \int \csc^2 x\, dx \\ &= 3 \sec x - 5(-\cot x) + C \\ &= 3 \sec x + 5 \cot x + C\end{aligned}$$

◀

Las funciones trigonométricas se emplean con frecuencia cuando se calculan antiderivadas que involucran funciones trigonométricas. Las ocho identidades fundamentales siguientes son de crucial importancia:

$\operatorname{sen} x \csc x = 1$	$\cos x \sec x = 1$	$\tan x \cot x = 1$
$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

▶ **EJEMPLO 5** Calcule

$$\int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

Solución

$$\begin{aligned}&\int \frac{2 \cot x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx \\ &= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cot x\, dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx \\ &= 2 \int \csc x \cot x\, dx - 3 \int \operatorname{sen} x\, dx \\ &= 2(-\csc x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(de los teoremas 4.1.14 y 4.1.19)} \\ &= -2 \csc x + 3 \cos x + C\end{aligned}$$

◀

▶ **EJEMPLO 6** Determine

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 4)\, dx$$

Solución

$$\begin{aligned}&\int (\tan^2 x + \cot^2 x + 4)\, dx \\ &= \int [(\sec^2 x - 1) + (\csc^2 x - 1) + 4]\, dx \\ &= \int \sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx + 2 \int dx \\ &= \tan x - \cot x + 2x + C \qquad \text{(de los teoremas 4.1.11 y 4.1.12)}\end{aligned}$$

◀

En el capítulo 3 se indicó cómo obtener propiedades de la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada. De manera semejante, a partir de la gráfica de una función f, se pueden obtener propiedades de la gráfica de una antiderivada de f como se muestra en el ejemplo siguiente.

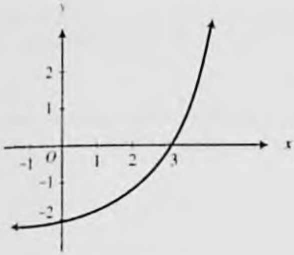


FIGURA 2

EJEMPLO 7

A partir de la gráfica de la función f mostrada en la figura 2, dibuje una gráfica posible de F, una antiderivada de f, si F es continua en cualquier número, $F(0) = 4$ y $F(3) = 1$.

Solución Puesto que F es una antiderivada de f, f es la derivada de F. De la figura 2 se observa que $f(3) = 0$, de modo que $F'(3) = 0$. Como $f(x) < 0$ cuando $x < 3$, entonces $F'(x) < 0$ cuando $x < 3$. De forma semejante, $F'(x) > 0$ cuando $x > 3$. Otro hecho que se observa en la figura 2 es que $f(0) = -2$, esto es, $F'(0) = -2$. Esta información se incorpora en la tabla 1 y a partir de las conclusiones de la tabla se dibuja una gráfica posible de F, la cual se muestra en la figura 3.

Tabla 1

	$F(x)$	$F'(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		$-$	F es decreciente
$x = 0$	4	-2	La pendiente de la recta tangente es -2
$0 < x < 3$		$-$	F es decreciente
$x = 3$	1	0	F tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	F es creciente

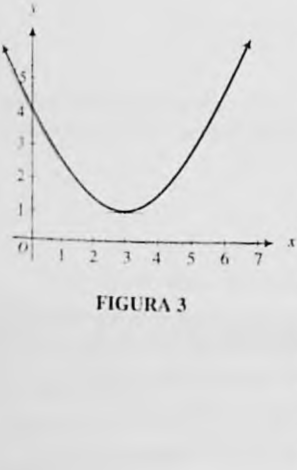


FIGURA 3

En aplicaciones de antiderivación, frecuentemente se necesita determinar una antiderivada particular que satisfaga ciertas condiciones denominadas **condiciones iniciales** o **de frontera,** dependiendo de si ocurren en uno o en más de un punto. Por ejemplo, si una ecuación que contiene dy/dx está dada, así como la condición de que $y = y_1$ cuando $x = x_1$, entonces, después de que se determina el conjunto de todas las antiderivadas, si se sustituyen x y y por x_1 y y_1, respectivamente, se determina un valor particular de la constante arbitraria C. Con este valor de C, se obtiene una antiderivada particular.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

Suponga que se desea obtener una antiderivada particular que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

y la condición inicial de que $y = 6$ cuando $x = 2$. A partir de la ecuación dada, se tiene

$$dy = 2x\,dx$$

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + C \tag{6}$$

En (6) se sustituye 2 por x y 6 por y y se obtiene

$$6 = 4 + C$$
$$C = 2$$

Cuando este valor de C se sustituye en (6), se obtiene

$$y = x^2 + 2$$

lo cual proporciona la antiderivada particular deseada. ◀

▶ EJEMPLO 8 En cualquier punto (x, y) de una curva particular la recta tangente tiene una pendiente igual a $4x - 5$. Si la curva contiene al punto (3, 7), obtenga su ecuación.

Solución Como la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto (x, y) es el valor de la derivada en ese punto, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4x - 5 \\ dy &= (4x - 5)\,dx \\ \int dy &= \int (4x - 5)\,dx \\ y &= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C \\ y &= 2x^2 - 5x + C \end{aligned} \tag{7}$$

La ecuación (7) representa una *familia* de curvas. Como se desea determinar la curva particular de esta familia que contiene el punto (3, 7), se sustituye 3 por x y 7 por y en (7) y se obtiene

$$\begin{aligned} 7 &= 2(9) - 5(3) + C \\ C &= 4 \end{aligned}$$

Al reemplazar C por 4 en (7) se obtiene la ecuación requerida, la cual es

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$ ◀

En la sección 2.6 se introdujeron las funciones costo marginal e ingreso marginal, empleadas en economía. Ellas son las primeras derivadas C' y R' de la función de costo total C y de la función de ingreso total R, respectivamente. Por lo que C y R pueden obtenerse de C' y R' mediante antiderivación. Cuando se determina la función C a partir de C', la constante arbitraria puede determinarse si se conocen el *costo general* (es decir, el costo cuando no se produce ninguna unidad) o el costo de producción de un número específico de unidades de la mercancía. Como por lo general la función de ingreso total es cero cuando el número de unidades producidas es cero, puede utilizarse este hecho para determinar la constante arbitraria cuando se obtiene la función R a partir de R'.

▶ EJEMPLO 9 La función de costo marginal C' está determinada por una compañía como

$$C'(x) = 4x^{-1/2} + 1$$

donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades cuando se producen no más de 25 unidades. Si el costo de producción de 4 unidades es de \$50, determine **(a)** la función de costo total y **(b)** el costo de producción de 10 unidades.

Solución

(a) Como $C'(x) = 4x^{-1/2} + 1$, entonces

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (4x^{-1/2} + 1)\, dx \\ &= 4 \cdot \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + x + k \\ &= 8x^{1/2} + x + k \end{aligned}$$

Debido a que el costo de producción de 4 unidades es \$50, entonces $C(4) = 50$. Así,

$$\begin{aligned} 50 &= 8(4)^{1/2} + 4 + k \\ k &= 30 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$C(x) = 8x^{1/2} + x + 30 \tag{8}$$

El dominio de C es $[0, 25]$; recuerde que aunque x representa el número de unidades de cierta mercancía, se supone que x es un número real para tener los requerimientos de continuidad para las funciones C y C'.

(b) El costo de producción de 10 unidades es $C(10)$ dólares, y de (8) se tiene

$$\begin{aligned} C(10) &= 8(10)^{1/2} + 10 + 30 \\ &= 65.30 \end{aligned}$$

__Conclusión:__ El costo de producción de 10 unidades es de \$65.30. ◀

EJERCICIOS 4.1

En los ejercicios 1 a 30, realice la antiderivación. En los ejercicios 1 a 8 y 25 a 28, verifique el resultado calculando la derivada de la respuesta. En los ejercicios 9 a 12 y 29 y 30 apoye la respuesta gráficamente. En los demás ejercicios, verifique o justifique su respuesta.

1. $\int 3x^4\, dx$ **2.** $\int 2x^7\, dx$ **3.** $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

4. $\int \frac{3}{t^5}\, dt$ **5.** $\int 5u^{3/2}\, du$ **6.** $\int 10\sqrt[3]{x^2}\, dx$

7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ **8.** $\int \frac{3}{\sqrt{y}}\, dy$ **9.** $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\, dt$

10. $\int (3u^5 - 2u^3)\, du$ **11.** $\int y^3(2y^2 - 3)\, dy$

12. $\int x^4(5 - x^2)\, dx$

13. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\, dx$

14. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\, dx$ **15.** $\int \sqrt{x}\,(x + 1)\, dx$

16. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ **17.** $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$

18. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **19.** $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\, dx$

20. $\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\, dy$ **21.** $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

22. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\, dt$ **23.** $\int (3\,\mathrm{sen}\, t - 2\cos t)\, dt$

24. $\int (5\cos x - 4\,\mathrm{sen}\, x)\, dx$

25. $\int \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos^2 x}\, dx$ **26.** $\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2\, x}\, dx$

27. $\int (4\csc x \cot x + 2\sec^2 x)\, dx$

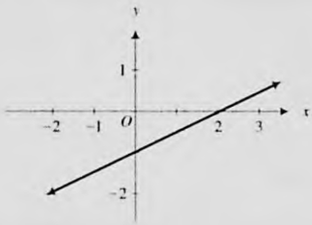
28. $\int (3\csc^2 t - 5\sec t \tan t)\, dt$

29. $\int (2\cot^2\theta - 3\tan^2\theta)\,d\theta$

30. $\int \dfrac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

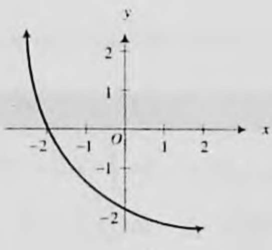
En los ejercicios 31 a 36, la gráfica de una función f se muestra en la figura adjunta. Una antiderivada de f es F, la cual es continua en todo número y tiene los valores dados. Dibuje una gráfica posible de F.

31. **(a)** $F(0) = 3$;



(a)

(b) $F(-2) = 0$ y $F(0) = -1$

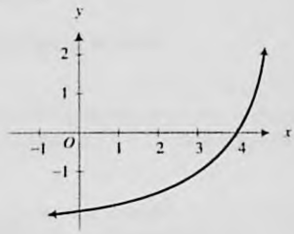


(b)

32. **(a)** $F(0) = 1$;

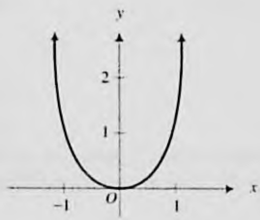
(a)

(b) $F(0) = 2$ y $F(4) = 0$



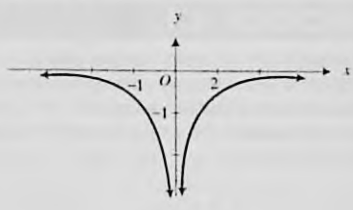
(b)

33. **(a)** $F(0) = 0$;



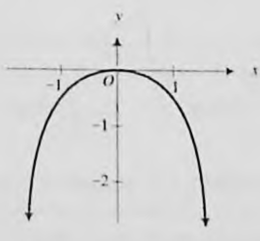
(a)

(b) $F(0) = 0$



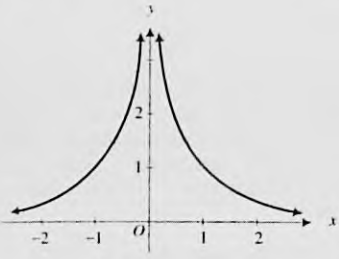
(b)

34. **(a)** $F(0) = 0$;



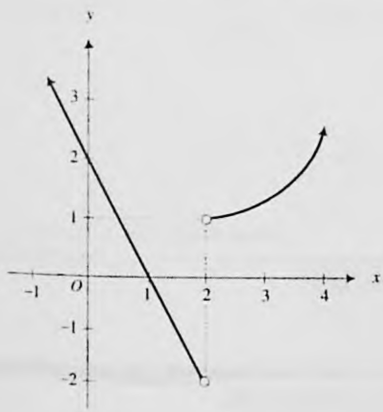
(a)

(b) $F(0) = 0$

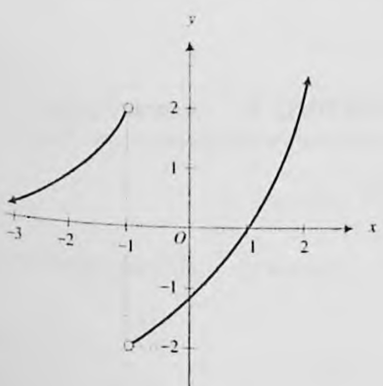


(b)

35. $F(-1) = 0$, $F(0) = 2$, $F(1) = 3$ y $F(2) = 0$



36. $F(-4) = 0$, $F(-1) = 4$, $F(0) = 2$ y $F(1) = 1$



37. El punto (3, 2) está en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva la recta tangente tiene una pendiente igual a $2x - 3$. Determine una ecuación de la curva.

38. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una curva es $3\sqrt{x}$. Si el punto (9, 4) está en la curva, obtenga una ecuación de la misma.

39. Los puntos $(-1, 3)$ y $(0, 2)$ están en una curva, y en cualquier punto (x, y) de la curva $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Determine una ecuación de la curva. *Sugerencia:* considere $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy'}{dx}$, y obtenga una ecuación que contenga a y', x y una constante arbitraria C_1. A partir de esta ecuación determine otra ecuación que involucre a y, x, C_1 y C_2. Calcule C_1 y C_2 a partir de las condiciones.

40. Una ecuación de la recta tangente a una curva en el punto (1, 3) es $y = x + 2$. Si en cualquier punto (x, y) de la curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, obtenga una ecuación de la curva. Considere la sugerencia para el ejercicio 39.

41. En cualquier punto (x, y) de una curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$, y una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1, 1) es $y = 2 - x$. Determine una ecuación de la curva. Considere la sugerencia para el ejercicio 39.

42. En cualquier punto (x, y) de una curva $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$, y (1, 3) es un punto de inflexión en el que la pendiente de la recta de inflexión es -2. Obtenga una ecuación de la curva.

43. Una función de costo marginal está definida por

$$C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$$

y el costo general es de \$6. Determine la función de costo total correspondiente.

44. Una compañía ha determinado que la función de costo marginal para la producción de cierta mercancía está dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, donde $C(x)$ dólares es el costo total de producción de x unidades de mercancía. Si los gastos generales son de \$250, ¿cuál es el costo de producción de 15 unidades?

45. La función de costo marginal está definida por $C'(x) = 6x$, donde $C(x)$ es el número de cientos de dólares del costo total de producción de x unidades de cierta mercancía. Si el costo de 200 unidades es de \$2 000, determine **(a)** la función de costo total y **(b)** el costo general.

46. La función de ingreso marginal para cierta mercancía es $R'(x) = 12 - 3x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga **(a)** la función de ingreso total y **(b)** una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

47. Para un artículo particular, la función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, determine **(a)** la función de ingreso total y **(b)** una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda).

48. La eficiencia de un trabajador está expresada como un porcentaje. Por ejemplo, si la eficiencia de un obrero en un momento particular está dada como 70%, entonces el trabajador se desempeña a un 70% de su potencial máximo. Suponga que E% es la eficiencia de un trabajador a las t horas después de iniciar su trabajo, y que la tasa a la que E cambia es $(35 - 8t)$% por hora. Si la eficiencia del trabajador es de 81% después de trabajar 3 horas, determine su eficiencia después de haber trabajado **(a)** 4 h y **(b)** 8 h.

49. El volumen de agua de un tanque es V centímetros cúbicos cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa de variación de V con respecto a h es $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, determine el volumen de agua en el tanque cuando la profundidad es de 3 m.

50. Un coleccionista de arte compró por $1 000 un cuadro de un artista cuya obra aumenta de valor con frecuencia respecto al tiempo y de acuerdo a la fórmula $\dfrac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, donde V dólares es el valor previsto de un cuadro t años después de su compra. Si esta fórmula fuese válida para los siguientes 6 años, ¿cuál sería el valor previsto del cuadro 4 años después?

51. Sea $f(x) = |x|$ y F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Demuestre que f es una antiderivada de f en $(-\infty, +\infty)$.

52. Sea

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Demuestre que U no tiene antiderivadas en $(-\infty, +\infty)$. *Sugerencia:* suponga que U tiene una antiderivada F en $(-\infty, +\infty)$, y obtenga una contradicción al demostrar que del teorema del valor medio se deduce que existe un número k tal que $F(x) = x + k$ si $x > 0$, y $F(x) = k$ si $x < 0$.

53. Sea $f(x) = 1$ para toda x en $(-1, 1)$, y sea

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en $(-1, 1)$ y $g'(x) = 0$ siempre que g' exista en $(-1, 1)$. Sin embargo, $f(x) \neq g(x) + K$ para x en $(-1, 1)$. Explique por qué el teorema 4.1.2 no se aplica.

54. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

y $F(x) = |x|$. Demuestre que $F'(x) = f(x)$ si $x \neq 0$. ¿Es F una antiderivada de f en $(-\infty, +\infty)$? Explique su respuesta.

4.2 ALGUNAS TÉCNICAS DE ANTIDERIVACIÓN

Muchas antiderivadas no pueden determinarse aplicando únicamente los teoremas de la sección 4.1. Por tanto, se deben aprender otras técnicas de antiderivación. En esta sección, se estudiarán técnicas que requieren la *regla de la cadena para antiderivación* y aquellas que implican un *cambio de variable*.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 A fin de diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ se aplica la regla de la cadena para la diferenciación y se obtiene

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$

Ahora suponga que se quiere antiderivar $(1 + x^2)^9(2x)$; esto es, se desea calcular

$$\int (1 + x^2)^9(2x\, dx) \tag{1}$$

Con objeto de tener un procedimiento que pueda emplearse en tal situación, considere

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad \text{y} \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{2}$$

Entonces (1) puede escribirse como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] \tag{3}$$

Del teorema 4.1.8, se tiene

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C \tag{4}$$

Observe que (3) es de la misma forma que el miembro izquierdo de (4). De modo que

$$\int [g(x)^9[g'(x)\;dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)]^{10} + C$$

y con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dados en (2) se tiene

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10} + C$$ ◀

La justificación del procedimiento utilizado para obtener el resultado del ejemplo ilustrativo 1 es proporcionada por el teorema siguiente, el cual es análogo a la regla de la cadena para diferenciación y se denomina *regla de la cadena para antiderivación*.

4.2.1 Teorema Regla de la cadena para antiderivación

Sea g una función diferenciable y sea el contradominio de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una antiderivada de f en I. Entonces

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Demostración Por hipótesis,

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \tag{5}$$

Por la regla de la cadena para diferenciación,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Si se sustituye de (5) en esta ecuación se obtiene

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

de la cual se deduce que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

Como un caso particular del teorema 4.2.1, del teorema 4.1.8 se tiene la generalización de la fórmula de la potencia para antiderivadas, la cual se establece a continuación.

4.2.2 Teorema

Si g es una función diferenciable y n es un número racional, entonces

$$\int [g(x)]^n[g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx$$

Solución A fin de aplicar el teorema 4.2.2, primero se escribe

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\,dx$$

y observe que si

$$g(x) = 3x + 4 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 3\,dx \tag{6}$$

Por tanto, se necesita un factor 3 junto a dx para obtener $g'(x)\,dx$. En consecuencia, se escribe

$$\begin{aligned}\int (3x+4)^{1/2}\,dx &= \int (3x+4)^{1/2}\tfrac{1}{3}(3\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)\end{aligned}$$

Así, por el teorema 4.2.2 con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (6), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

◄

EJEMPLO 2 Calcule

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx$$

y verifique la respuesta mediante diferenciación.

Solución Observe que si

$$g(x) = 5 + 2x^3 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 6x^2\,dx \tag{7}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\,dx)$$

se necesita un factor 6 junto a x^2dx para obtener $g'(x)\,dx$. Por tanto, se escribe

$$\int x^2(5 + 2x^3)^8\,dx = \frac{1}{6}\int (5 + 2x^3)^8(6x^2\,dx)$$

Si se aplica el teorema 4.2.2 con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (7), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int (5 + 2x^3)^8(6x^2\,dx) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5 + 2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5 + 2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

Al verificar mediante diferenciación se obtiene

$$\begin{aligned}D_x[\tfrac{1}{54}(5 + 2x^3)^9] &= \tfrac{1}{54}\cdot 9(5 + 2x^3)^8(6x^2)\\ &= x^2(5 + 2x^3)^8\end{aligned}$$ ◀

Si en la fórmula del teorema 4.2.1, f es la función coseno, entonces F es la función seno y se tiene

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\,dx] = \operatorname{sen}(g(x)) + C \tag{8}$$

Esta fórmula se aplica en el ejemplo siguiente.

▶ ***EJEMPLO 3*** Obtenga

$$\int x\cos x^2\,dx$$

y apoye la respuesta gráficamente.

Solución Si

$$g(x) = x^2 \qquad \text{entonces} \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{9}$$

Como

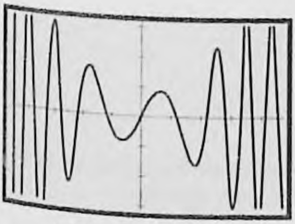
$$\int x\cos x^2\,dx = \int (\cos x^2)(x\,dx)$$

se necesita un factor 2 junto a $x\,dx$ para obtener $g'(x)\,dx$. De modo que se escribe

$$\int x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos x^2)\,(2x\,dx)$$

Al aplicar (8) con $g(x)$ y $g'(x)\,dx$ dadas en (9), se obtiene

$$\frac{1}{2}\int (\cos x^2)\,(2x\,dx) = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C$$



$[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$

$f(x) = x\cos x^2$

NDER($\frac{1}{2}$ sen x^2, x)

FIGURA 1

Para apoyar la respuesta se traza la gráfica de la función definida por $x\cos x^2$ y la gráfica de NDER($\frac{1}{2}$ sen x^2, x) en el mismo rectángulo de inspección de $[-4.7, 4.7]$ por $[-3.1, 3.1]$, como se muestra en la figura 1, la cual indica que las dos gráficas son idénticas. ◀

Los detalles de las soluciones de los ejemplos anteriores pueden acortarse si no se establecen específicamente $g(x)$ y $g'(x)\,dx$. De esta manera, la solución del ejemplo 1 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+4}\,dx &= \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

La solución del ejemplo 2 puede escribirse como

$$\begin{aligned}\int x^2(5+2x^3)^8\,dx &= \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

y la solución del ejemplo 3 puede acortarse como sigue:

$$\begin{aligned}\int x\cos x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x\,dx)\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\,dx$$

Solución Como $d(1-8x^3) = -24x^2\,dx$, se escribe

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\,dx &= 4\int (1-8x^3)^{-4}(x^2\,dx)\\ &= 4\left(-\frac{1}{24}\right)\int (1-8x^3)^{-4}(-24x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3} + C\\ &= \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C\end{aligned}$$

En ocasiones es posible calcular una antiderivada después de un cambio de variable adecuado, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solución Sean

$$u = 1 + x \qquad du = dx \qquad x = u - 1$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx &= \int (u - 1)^2 u^{1/2}\, du \\
&= \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2}\, du \\
&= \int u^{5/2}\, du - 2 \int u^{3/2}\, du + \int u^{1/2}\, du \\
&= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2 \cdot \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\
&= \tfrac{2}{7}(1 + x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1 + x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1 + x)^{3/2} + C
\end{aligned}$$ ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Un método alternativo para la solución del ejemplo 5 consiste en considerar

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{1 + x} \qquad & v^2 &= 1 + x \\
x &= v^2 - 1 \qquad & dx &= 2v\, dv
\end{aligned}$$

Entonces el cálculo toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx &= \int (v^2 - 1)^2 \cdot v \cdot (2v\, dv) \\
&= 2 \int v^6\, dv - 4 \int v^4\, dv + 2 \int v^2\, dv \\
&= \tfrac{2}{7} v^7 - \tfrac{4}{5} v^5 + \tfrac{2}{3} v^3 + C \\
&= \tfrac{2}{7}(1 + x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1 + x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1 + x)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Al verificar mediante diferenciación se tiene

$$\begin{aligned}
&D_x[\tfrac{2}{7}(1 + x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1 + x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1 + x)^{3/2}] \\
&\quad = (1 + x)^{5/2} - 2(1 + x)^{3/2} + (1 + x)^{1/2} \\
&\quad = (1 + x)^{1/2}[(1 + x)^2 - 2(1 + x) + 1] \\
&\quad = (1 + x)^{1/2}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1] \\
&\quad = x^2 \sqrt{1 + x}
\end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Evalúe

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Solución Sean

$$u = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\\ &= 2\int \operatorname{sen} u\,du\\ &= -2\cos u + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

◀

▶ **EJEMPLO 7** Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\,\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

Solución Sean

$$u = 1 - \cos x \qquad du = \operatorname{sen} x\,dx$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\,\sqrt{1-\cos x}\,dx &= \int u^{1/2}\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

◀

▶ **EJEMPLO 8** Evalúe $\int \tan x \sec^2 x\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** sea $u = \tan x$; **(b)** sea $v = \sec x$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas de los incisos (a) y (b).

Solución

(a) Si $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x\,dx$. De modo que

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x\,dx &= \int u\,du\\ &= \frac{u^2}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + C\end{aligned}$$

(b) Si $v = \sec x$, entonces $dv = \sec x \tan x\,dx$. Por lo que

$$\begin{aligned}\int \tan x \sec^2 x\,dx &= \int \sec x(\sec x \tan x\,dx)\\ &= \int v\,dv\\ &= \frac{v^2}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x + C\end{aligned}$$

(c) Como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, las funciones definidas por $\frac{1}{2}\tan^2 x$ y $\frac{1}{2}\sec^2 x$ difieren por una constante; de modo que cada una es una antiderivada de $\tan x \sec^2 x$. Además se puede escribir

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sec^2 x + C &= \tfrac{1}{2}(\tan^2 x + 1) + C\\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \tfrac{1}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + K \qquad \text{donde } K = \tfrac{1}{2} + C\end{aligned}$$

◀

▶ ***EJEMPLO 9*** Una herida está sanando de manera que t días a partir del lunes el área de la herida ha disminuido a una tasa de $-3(t + 2)^{-2}$ centímetros cuadrados por día. Si el martes el área de la herida fue de 2 cm^2, **(a)** ¿cuál era el área de la herida el lunes? y **(b)** ¿cuál será el área prevista de la herida el viernes si continúa sanando a esa misma tasa?

Solución Sea A centímetros cuadrados el área de la herida t días a partir del lunes. Entonces

$$\frac{dA}{dt} = -3(t + 2)^{-2}$$
$$A = -3\int (t + 2)^{-2}\,dt$$

Debido a que $d(t + 2) = dt$, se obtiene

$$A = -3 \cdot \frac{(t + 2)^{-1}}{-1} + C$$
$$A = \frac{3}{t + 2} + C \tag{10}$$

Como el martes el área de la herida fue de 2 cm^2, se tiene que $A = 2$ cuando $t = 1$. Al sustituir estos valores en (10) se obtiene

$$2 = 1 + C$$
$$C = 1$$

Por tanto, de (10) se tiene

$$A = \frac{3}{t + 2} + 1 \tag{11}$$

(a) Para el lunes, $t = 0$. Sea A_0 el valor de A cuando $t = 0$. De (11),

$$\begin{aligned}A_0 &= \tfrac{3}{2} + 1\\ &= \tfrac{5}{2}\end{aligned}$$

__Conclusión:__ El lunes, el área de la herida es de 2.5 cm^2.

(b) Para el viernes, $t = 4$. Sea A_4 el valor de A cuando $t = 4$. De (11),

$$\begin{aligned}A_4 &= \tfrac{3}{6} + 1\\ &= \tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

__Conclusión:__ Para el viernes, el área prevista de la herida será de 1.5 cm^2. ◀

EJERCICIOS 4.2

En los ejercicios 1 a 44, efectúe la antiderivación. Verifique el resultado, mediante diferenciación o apoye gráficamente la respuesta.

1. $\int \sqrt{1-4y}\,dy$

2. $\int \sqrt[3]{3x-4}\,dx$

3. $\int x\sqrt[3]{x^2-9}\,dx$

4. $\int x(2x^2+1)^6\,dx$

5. $\int x^2(x^3-1)^{10}\,dx$

6. $\int 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$

7. $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}\,dy$

8. $\int \frac{s}{\sqrt{3s^2+1}}\,ds$

9. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}\,dx$

10. $\int x^4\sqrt{3x^5-5}\,dx$

11. $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

12. $\int \frac{t}{\sqrt{t+3}}\,dt$

13. $\int \frac{2r}{(1-r)^7}\,dr$

14. $\int x^3(2-x^2)^{12}\,dx$

15. $\int \sqrt{3-2x}\,x^2\,dx$

16. $\int (x^3+3)^{1/4}x^5\,dx$

17. $\int \cos 4\theta\,d\theta$

18. $\int \operatorname{sen}\frac{1}{3}x\,dx$

19. $\int 6x^2\operatorname{sen} x^3\,dx$

20. $\int \frac{1}{2}t\cos 4t^2\,dt$

21. $\int \sec^2 5x\,dx$

22. $\int \csc^2 2\theta\,d\theta$

23. $\int y\csc 3y^2\cot 3y^2\,dy$

24. $\int r^2\sec^2 r^3\,dr$

25. $\int \cos x(2+\operatorname{sen} x)^5\,dx$

26. $\int \frac{4\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}\,dx$

27. $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\,\frac{dx}{x^2}$

28. $\int \sqrt{\frac{1}{t}-1}\,\frac{dt}{t^2}$

29. $\int 2\operatorname{sen} x\sqrt[3]{1+\cos x}\,dx$

30. $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{2-\cos 2x}\,dx$

31. $\int \cos^2 t\operatorname{sen} t\,dt$

32. $\int \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\,d\theta$

33. $\int (\tan 2x+\cot 2x)^2\,dx$

34. $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

35. $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\,dx$

36. $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\,dx$

37. $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}\,dy$

38. $\int \sqrt{3+s}\,(s+1)^2\,ds$

39. $\int \frac{(r^{1/3}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr$

40. $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$

41. $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$

42. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$

43. $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$

44. $\int \sec x\tan x\cos(\sec x)\,dx$

45. La función de costo marginal para un artículo particular está dada por $C'(x) = 3(5x+4)^{-1/2}$. Si el costo general es de \$10, determine la función de costo total.

46. Para cierta mercancía la función de costo marginal está dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x+4}$. Si el costo general es de cero, determine la función de cosoto total.

47. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda) de una mercancía para la cual la función de ingreso marginal está dada por

$$R'(x) = 4 + 10(x+5)^{-2}$$

48. La función de ingreso marginal para un artículo particular está definida por $R'(x) = ab(x+b)^{-2} - c$. Determine **(a)** la función de ingreso total; y **(b)** una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda) donde x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es p dólares.

49. Si q coulombs es la carga eléctrica recibida por un condensador de corriente eléctrica de i amperes a los t segundos, entonces $i = \frac{dq}{dt}$. Si $i = 5\operatorname{sen} 60t$ y $q = 0$ cuando $t = \frac{1}{2}\pi$, determine la mayor carga positiva del condensador.

50. Realice el ejercicio 49 considerando ahora que $i = 4\cos 120t$ y $q = 0$ cuando $t = 0$.

51. El costo de cierta pieza de maquinaria es de \$700, y su valor disminuye con el tiempo de acuerdo con la fórmula $\frac{dV}{dt} = -500(t+1)^{-2}$, donde V dólares es su valor t años después de su compra. ¿Cuál será su valor 3 años después de su compra?

52. El volumen de agua de un tanque es V metros cúbicos cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa

de variación de V con respecto a h está dada por $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$, calcule el volumen del agua del tanque cuando su profundidad es de 3 m.

53. Para los primeros 10 días de diciembre una célula vegetal creció de forma que t días después del 1 de diciembre el volumen de la célula estuvo creciendo a una tasa de $(12 - t)^{-2}$ micras cúbicas por día. Si el 3 de diciembre el volumen de la célula fue de $3\,\mu m^3$, ¿cuál fue el volumen el 8 de diciembre?

54. El volumen de un globo crece de acuerdo a la fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t + 1} + \frac{2}{3}t$, donde V centímetros cúbicos es el volumen del globo a los t segundos. Si $V = 33$ cuando $t = 3$, determine **(a)** una fórmula de V en términos de t; **(b)** el volumen del globo a los 8 s.

55. Evalúe $\int (2x + 1)^3\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(2x + 1)^3$ utilizando el teorema del binomio; **(b)** considere $u = 2x + 1$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

56. Calcule $\int x(x^2 + 2)^2\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(x^2 + 2)^2$ y multiplique el resultado por x; **(b)** considere $u = x^2 + 2$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

57. Evalúe $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** desarrolle $(\sqrt{x} - 1)^2$ y multiplique el resultado por $x^{-1/2}$; **(b)** considere $u = \sqrt{x} - 1$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

58. Calcule $\int \sqrt{x - 1}\,x^2\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** considere $u = x - 1$; **(b)** considere $v = \sqrt{x - 1}$.

59. Evalúe $\int 2\operatorname{sen} x \cos x\,dx$ mediante tres métodos: **(a)** considere $u = \operatorname{sen} x$; **(b)** considere $v = \cos x$; **(c)** utilice la identidad $2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. **(d)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a), (b) y (c).

60. Calcule $\int \csc^2 x \cot x\,dx$ mediante dos métodos: **(a)** considere $u = \cot x$; **(b)** considere $v = \csc x$. **(c)** Explique la diferencia aparente de las respuestas obtenidas en los incisos (a) y (b).

4.3 ECUACIONES DIFERENCIALES Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Una ecuación que contiene una función y sus derivadas, o sólo sus derivadas, se denomina **ecuación diferencial**. Las ecuaciones diferenciales se aplican en muchos campos diversos. En esta sección se aplicarán dichas ecuaciones al movimiento rectilíneo en física. Posteriormente se aplicarán al crecimiento y decrecimiento, (o decaimiento) exponencial y al crecimiento logístico en química, biología, psicología, sociología, administración y economía.

En la sección 4.1 se presentaron ecuaciones diferenciales simples; por ejemplo, en el ejemplo ilustrativo 6 de esa sección se tuvo la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

Algunas otras ecuaciones diferenciales simples son

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \tag{3}$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Las ecuaciones (1) y (2) son de primer orden y (3) es de segundo orden.

Una función f definida por $y = f(x)$ es una **solución** de una ecuación diferencial si y y sus derivadas satisfacen la ecuación. Una de las ecuaciones diferenciales más fáciles de resolver es la ecuación de primer grado de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

para la cual (1) es un ejemplo particular. Al escribir esta ecuación con diferenciales se tiene

$$dy = f(x)\,dx \tag{4}$$

Otro tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden es aquél de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

La ecuación (2) es un ejemplo particular de una ecuación de este tipo. Si esta ecuación se escribe con diferenciales, se obtiene

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{5}$$

Tanto en (4) como en (5), el miembro izquierdo contiene únicamente a la variable y, mientras que en el derecho tiene sólo a la variable x. Así, las variables están separadas, por lo que se dice que estas ecuaciones son **ecuaciones diferenciales separables.**

Considere la ecuación (4), la cual es

$$dy = f(x)\,dx$$

Para resolver esta ecuación se deben encontrar todas las funciones G para las cuales $y = G(x)$ tales que satisfacen la ecuación. De este modo, si F es una antiderivada de f, todas las funciones G están definidas por $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Esto es, si

$$\begin{aligned} d(G(x)) &= d(F(x) + C) \\ &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

entonces la **solución completa (o solución general)** de (4) está dada por

$$y = F(x) + C$$

Esta última ecuación representa una familia de funciones que dependen de una constante arbitraria C, por lo que se denomina **familia de funciones de un parámetro.** Las gráficas de estas funciones forman una familia de curvas de un parámetro en un plano, y sólo una curva de esta familia pasa por cualquier punto particular (x_1, y_1).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 Suponga que se desea encontrar la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{6}$$

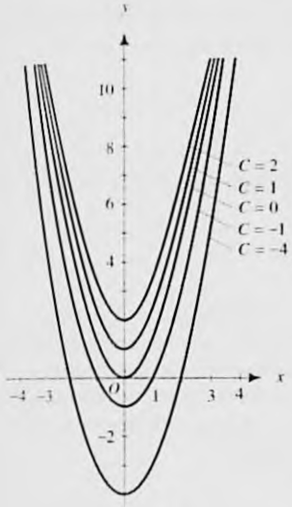
Al separar las variables y escribir la ecuación con diferenciales se obtiene

$$dy = 2x\,dx$$

Si se antiderivan los dos miembros de la ecuación se tiene

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$



$y = x^2 + C$

FIGURA 1

Como $C_2 - C_1$ es una constante arbitraria si C_2 y C_1 son arbitrarias, entonces se puede reemplazar $C_2 - C_1$ por C, obteniéndose

$$y = x^2 + C \tag{7}$$

la cual es la solución completa de la ecuación diferencial (6).

La ecuación (7) representa una familia de funciones de un parámetro. La figura 1 muestra las gráficas de las funciones que corresponden a $C = -4$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$ y $C = 2$. ◀

Ahora considere la ecuación (5), la cual es

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Si se antiderivan los dos miembros de esta ecuación, se tiene

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Si H es una antiderivada de h, y G es una antiderivada de g, la solución completa de (5) está dada por

$$H(y) = G(x) + C$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Obtenga la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

Solución Si la ecuación dada se escribe con diferenciales, se tiene

$$3y^3 dy = 2x^2\,dx$$

quedando las variables separadas. Al antiderivar los dos miembros de la ecuación se obtiene

$$\int 3y^3\,dy = \int 2x^2\,dx$$

$$\frac{3y^4}{4} = \frac{2x^3}{3} + \frac{C}{12}$$

$$9y^4 = 8x^3 + C$$

la cual es la solución completa.

Para obtener este resultado, primero se escribió la constante arbitraria como $C/12$, de modo que al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 12 la constante arbitraria quede como C. ◀

En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra cómo obtener una solución particular de una ecuación diferencial de primer orden cuando se da una condición inicial.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** A fin de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial (6) para la cual $y = 6$ cuando

$x = 2$, se sustituyen estos valores en (7) y se resuelve para C, obteniéndose $6 = 4 + C$, o $C = 2$. Al sustituir este valor de C en (7) se tiene

$$y = x^2 + 2$$

la cual es la solución particular deseada. ◀

La ecuación (3) es un ejemplo de un tipo de ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Para resolver esta ecuación se necesitan dos antiderivaciones sucesivas, y la solución completa tendrá dos constantes arbitrarias. Por tanto, la solución completa representa una **familia de funciones de dos parámetros,** y las gráficas de estas funciones forman una familia de curvas de dos parámetros en un plano. El ejemplo siguiente muestra el método para obtener la solución completa de una ecuación diferencial de este tipo.

▶ ***EJEMPLO 2*** Determine la solución completa de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$$

Solución Como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

y considerando $y' = \dfrac{dy}{dx}$, se puede expresar la ecuación dada como

$$\frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

De este modo se tiene, con diferenciales,

$$dy' = (4x + 3)\,dx$$

Al antiderivar, se obtiene

$$\int dy' = \int (4x + 3)\,dx$$

$$y' = 2x^2 + 3x + C_1$$

Debido a que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, y al sustituir en la ecuación anterior se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$

$$dy = (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

la cual es la solución completa. ◀

EJEMPLO 3 Obtenga la solución particular de la ecuación diferencial del ejemplo 2 para la cual $y = 2$ y $y' = -3$ cuando $x = 1$.

Solución Como $y' = 2x^2 + 3x + C_1$, se sustituye -3 por y' y 1 por x, obteniéndose $-3 = 2 + 3 + C_1$, o $C_1 = -8$. Al sustituir este valor de C_1 en la solución completa se tiene

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + C_2$$

Puesto que $y = 2$ cuando $x = 1$, y al sustituir estos valores en la ecuación anterior se tiene $2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 8 + C_2$, de donde se obtiene $C_2 = \frac{47}{6}$. Entonces la solución particular deseada es

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + \tfrac{47}{6}$$

En la sección 2.5 se dijo que cuando una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a una ecuación de movimiento, $s = f(t)$, la velocidad instantánea y la aceleración pueden determinarse de las ecuaciones

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Por tanto, si se tiene v o a como función de t, así como algunas condiciones de frontera, se puede determinar la ecuación de movimiento resolviendo la ecuación diferencial. El procedimiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación

$$v = 10 \cos 2\pi t$$

donde v centímetros por segundo es la velocidad a los t segundos. Si el sentido positivo es hacia la derecha del origen y la partícula está a 5 cm a la derecha del origen al inicio del movimiento, determine su posición cuando t es igual a **(a)** 0.3, **(b)** 1.4, **(c)** 2.9 y **(d)** 3.6. Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas.

Solución Sea s centímetros la distancia dirigida de la partícula a partir del origen a los t segundos. Como $v = ds/dt$,

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= 10 \cos 2\pi t \\
ds &= 10 \cos 2\pi t\, dt \\
\int ds &= 10 \int \cos 2\pi t\, dt \\
s &= \frac{10}{2\pi} \int \cos 2\pi t(2\pi\, dt) \\
s &= \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + C
\end{aligned}$$

Puesto que $s = 5$ cuando $t = 0$,

$$\begin{aligned}
5 &= \frac{5}{\pi} \operatorname{sen} 0 + C \\
C &= 5
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento es

$$s = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 2\pi t + 5$$

(a) Cuando $t = 0.3$,

$$s = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 0.6\pi + 5$$
$$\approx 6.51$$

(b) Cuando $t = 1.4$,

$$s = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 2.8\pi + 5$$
$$\approx 5.94$$

(c) Cuando $t = 2.9$,

$$s = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 5.8\pi + 5$$
$$\approx 4.06$$

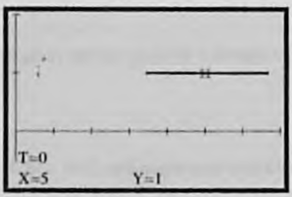
(d) Cuando $t = 3.6$,

$$s = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 7.2\pi + 5$$
$$\approx 4.06$$

Ahora se simulará el movimiento en la graficadora sobre la recta $y = 1$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$(x)t = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 2\pi t + 5 \quad \text{y} \quad y(t) = 1$$

Considere los siguientes parámetros para el rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 4$, $t_{\text{step}} = 0.01$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 7$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = -1$, $y_{\text{máx}} = 2$, y $y_{\text{scl}} = 1$. Se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda*, manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 2 muestra la pantalla de la graficadora con la información siguiente: $t = 0$, $x = 5$, y $y = 1$. Presione la tecla *flecha a la derecha* y manténgala oprimida. Observe el cursor, el cual representa la partícula que se mueve a lo largo de la recta $y = 1$. En la parte inferior de la pantalla de la graficadora se observa lo siguiente: cuando $t = 0.3$, $x = 6.51$; cuando $t = 1.4$, $x = 5.94$; cuando $t = 2.9$, $x = 4.06$; cuando $t = 3.6$, $x = 4.06$. Estos valores apoyan las respuestas.



[0, 7] por [−1, 2]

$x(t) = \frac{5}{\pi}\operatorname{sen} 2\pi t + 5 \quad \text{y} \quad y(t) = 1$

FIGURA 2

__Conclusión:__ A los 0.3 s la partícula está a 6.51 cm del origen; a los 1.4 s la partícula está a 5.94 cm del origen; a los 2.9 s la partícula está a 4.06 cm del origen; y a los 3.6 s la partícula está otra vez a 4.06 cm del origen. ◀

Si un objeto se mueve libremente sobre una recta vertical y es atraído hacia la Tierra por la fuerza de gravedad, la *aceleración debida a la gravedad* varía con la distancia del objeto desde el centro de la Tierra. Sin embargo, para pequeñas variaciones de distancia la aceleración debida a la gravedad es casi constante. Si el objeto está cerca del nivel del mar, un valor aproximado de la aceleración debida a la gravedad es 32 pie/s^2 o 9.8 m/s^2.

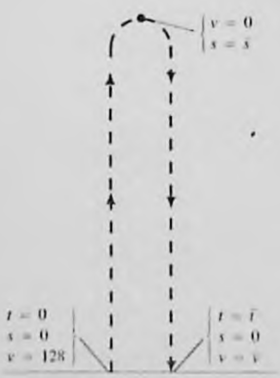


FIGURA 3

▶ ***EJEMPLO 5*** Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pie/s. Considere que la única fuerza que actúa sobre la piedra es la aceleración debida a la gravedad. Determine **(a)** qué tan alto llegará la piedra, y **(b)** qué tiempo le tomará a la piedra llegar hasta el suelo. **(c)** Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas de los incisos (a) y (b). **(d)** Detemine la rapidez de la piedra al llegar al suelo.

Solución El movimiento de la piedra se efectúa sobre una recta vertical. La figura 3 muestra el comportamiento del movimiento, donde las flechas indican la dirección del movimiento de la piedra sobre una recta vertical y el sentido positivo se considera hacia arriba.

Sean t segundos el tiempo que transcurre desde que la piedra fue lanzada, s pies la distancia de la piedra desde el suelo a los t segundos, v pies por segundo la velocidad de la piedra a los t segundos y $|v|$ la rapidez de la piedra a los t segundos.

Tabla 1

t	s	v
0	0	128
	$\bar{s}$	0
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$

Cuando la piedra llega al suelo, $s = 0$. Sean $\bar{t}$ y $\bar{v}$ los valores particulares de t y v cuando $s = 0$ y $t \neq 0$. La piedra estará en su punto más alto cuando la velocidad sea cero. Sea $\bar{s}$ el valor particular de s cuando $v = 0$. La tabla 1 presenta las condiciones de frontera.

La aceleración debida a la gravedad es en el sentido hacia abajo y tiene un valor constante aproximado de -32 pie/s^2. Como la aceleración está dada por $\dfrac{dv}{dt}$, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = -32$$
$$dv = -32\, dt$$
$$\int dv = -32 \int dt$$
$$v = -32t + C_1$$

Como $v = 128$ cuanto $t = 0$, se sustituyen estos valores en la ecuación anterior y se obtiene $C_1 = 128$. Por tanto,

$$v = -32t + 128 \tag{8}$$

Debido a que $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = -32t + 128$$
$$ds = (-32t + 128)\, dt$$
$$\int ds = \int (-32t + 128)\, dt$$
$$s = -16t^2 + 128t + C_2$$

Como $s = 0$ cuando $t = 0$, entonces $C_2 = 0$, y al sustituir 0 por C_2 en la ecuación anterior se obtiene

$$s = -16t^2 + 128t \tag{9}$$

(a) Para averiguar qué tan alto llegará la piedra, se necesita determinar $\bar{s}$. Primero se determina el valor de t para el cual $v = 0$. De (8), $t = 4$ cuando $v = 0$. En (9) se sustituye 4 por t y $\bar{s}$ por s, obteniéndose

$$\begin{aligned} \bar{s} &= -16(16) + 128(4) \\ &= 256 \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> La piedra llegará a 256 pie.

(b) Para saber qué tiempo le tomará a la piedra llegar al suelo se necesita determinar $\bar{t}$. Si se sustituye $\bar{t}$ por t y 0 por s en (9), se obtiene

$$0 = -16\bar{t}(\bar{t} - 8)$$

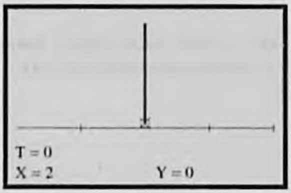
de donde $\bar{t} = 0$ y $\bar{t} = 8$. Sin embargo, el valor 0 ocurre cuando la piedra es lanzada.

Conclusión: Le tomará 8 s a la piedra llegar al suelo.

(c) Con objeto de simular el movimiento de la piedra en la graficadora se considera que la piedra se mueve a lo largo de la recta vertical $x = 2$. Con la graficadora en modo paramétrico, sean

$$x(t) = 2 \quad \text{y} \quad y(t) = -16t^2 + 128t$$

Considere los siguientes parámetros para el rectángulo de inspección: $t_{\text{mín}} = 0$, $t_{\text{máx}} = 8$, $t_{\text{step}} = 0.1$, $x_{\text{mín}} = 0$, $x_{\text{máx}} = 4$, $x_{\text{scl}} = 1$, $y_{\text{mín}} = -100$, $y_{\text{máx}} = 300$, y $y_{\text{scl}} = 0$. Se presiona la tecla TRACE y después la tecla *flecha a la izquierda*, manteniéndose oprimida hasta que el cursor esté en $t = 0$. La figura 4 muestra la pantalla de la graficadora como debe aparecer hasta este momento. Presione la tecla *flecha a la derecha* y observe que la piedra, representada por el cursor, se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la recta $x = 2$. Note que el máximo valor que alcanza y es 256, el cual ocurre cuando $t = 4$, lo que apoya la respuesta del inciso (a). También observe que la piedra regresa al suelo (cuando $y = 0$) a los 8 s, lo que apoya la respuesta del inciso (b).



$[0, 4]$ por $[-100, 300]$

$x(t) = 2$ y $y(t) = -16t^2 + 128t$

FIGURA 4

(d) Para obtener $\bar{v}$ se utiliza (8) y se sustituye 8 por t y $\bar{v}$ por v, obteniéndose

$$\begin{aligned}\bar{v} &= -32(8) + 128\\ &= -128\end{aligned}$$

Por tanto, $|\bar{v}| = 128$

Conclusión: La piedra llega al suelo con una rapidez de 128 pie/s. ◀

EJERCICIOS 4.3

En los ejercicios 1 a 14, determine la solución completa de la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$
4. $\dfrac{ds}{dt} = 5\sqrt{s}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$
7. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{3v\sqrt{1 + u^2}}{u}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2\sqrt{x^3 - 3}}{y^2}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 x}{\tan^2 y}$
10. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{\cos 2v}{\operatorname{sen} 3u}$
11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 5x^2 + 1$
12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x - 3}$
13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$
14. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = \tan v \sec^2 v$

En los ejercicios 15 a 20, obtenga la solución particular de la ecuación diferencial determinada por las condiciones iniciales.

15. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $y = -6$ cuando $x = 3$
16. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)(x + 2)$; $y = -\frac{3}{2}$ cuando $x = -3$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 2y}$; $y = \frac{1}{3}\pi$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi$
18. $\dfrac{ds}{dt} = \cos \frac{1}{2}t$; $s = 3$ cuando $t = \frac{1}{3}\pi$
19. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = 4(1 + 3v)^2$; $u = -1$ y $\dfrac{du}{dv} = -2$ cuando $v = -1$
20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{x^4}$; $y = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{dy}{dx} = -1$ cuando $x = 1$

En los ejercicios 21 a 32, una partícula se mueve a lo largo de una recta; a los t segundos, s pies es la distancia dirigida de la partícula desde el origen, v pies por segundo es la velocidad de la partícula y a pies por segundo por segundo es la aceleración de la partícula. Sugerencia para los ejercicios 29 a 32:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

21. $v = \sqrt{2t + 4}$; $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese s en términos de t.

22. $v = 4 - t$, $s = 0$ cuando $t = 2$. Exprese s en términos de t.

23. $a = 5 - 2t$; $v = 2$ y $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

24. $a = 17$; $v = 0$ y $s = 0$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

25. $a = t^2 + 2t$; $s = 1$ cuando $t = 0$ y $s = -3$ cuando $t = 2$. Exprese v y s en términos de t.

26. $a = 3t - t^2$; $v = \frac{7}{6}$ y $s = 1$ cuando $t = 1$. Exprese v y s en términos de t.

27. $a = -4\sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$; $v = 2$ y $s = 1$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

28. $a = 18 \operatorname{sen} 3t$; $v = -6$ y $s = 4$ cuando $t = 0$. Exprese v y s en términos de t.

29. $a = 800$; $v = 20$ cuando $s = 1$. Obtenga una ecuación que contenga a v y s.

30. $a = 500$; $v = 10$ cuando $s = 5$. Determine una ecuación que contenga a v y s.

31. $a = 5s + 2$; $v = 4$ cuando $s = 2$. Obtenga una ecuación que contenga a v y s.

32. $a = 2s + 1$; $v = 2$ cuando $s = 1$. Determine una ecuación que contenga a v y s.

En los ejercicios 33 a 52, no olvide definir las variables como números y asegúrese de escribir una conclusión. En los ejercicios 35 a 43, tenga en cuenta que la única fuerza que actúa es atribuida a la aceleración debida a la gravedad, considerada como 32 pie/s² o 9.8 m/s² hacia abajo.

33. Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que si v centímetros por segundo es la velocidad de la partícula a los t segundos, entonces $v = 9 \operatorname{sen} 3\pi t$, donde el sentido positivo es hacia la derecha del origen. Si la partícula se encuentra en el origen al iniciar el movimiento, determine su posición cuando t es igual a **(a)** 0.6, **(b)** 2.5, **(c)** 4.8, y **(d)** 7.2. Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas.

34. Realice el ejercicio 33 considerando ahora que $v = 2\cos \frac{1}{2}\pi t$.

35. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo ascenderá la pelota? **(b)** ¿Qué tan alto llegará la pelota? y **(c)** ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo? **(d)** Simule el movimiento en la graficadora y apoye las respuestas de los incisos (a)-(c). **(e)** ¿Con qué rapidez golpeará la pelota el suelo?

36. Realice el ejercicio 35 considerando ahora que la velocidad inicial es de 5 m/s.

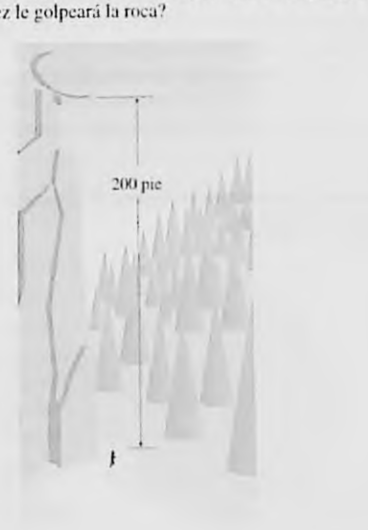
37. Se deja caer una piedra desde lo alto del monumento a Washington, de 555 pie de altura. **(a)** ¿Cuánto tiempo le tomará a la piedra alcanzar el suelo? **(b)** ¿Con qué rapidez golpeará la piedra el suelo?

38. Se lanza una pelota hacia abajo desde una ventana situada a 80 pie sobre el suelo con una velocidad inicial de −64 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tardará la pelota en llegar al suelo? y **(b)** ¿Con qué rapidez golpeará la pelota el suelo?

39. Una mujer que se encuentra en un globo dejó caer sus binoculares cuando el globo se encontraba a 150 pie sobre el suelo y se elevaba a una tasa de 10 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar al suelo? y **(b)** ¿con qué rapidez se impactarán los binoculares el suelo?

40. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 60 pie de altura con una velocidad inicial de 40 pie/s. **(a)** ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en alcanzar su máxima altura? **(b)** ¿Cuál es su máxima altura? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará la piedra en pasar por la azotea del edificio en su regreso? **(d)** ¿Cuál es la velocidad en ese instante? **(e)** ¿Cuánto tardará la piedra en llegar al suelo? **(f)** ¿Con qué rapidez golpeará la piedra el suelo?

41. Suponga que camina en el bosque y ve hacia arriba cómo una roca se desprende de un lado de un risco. Si su cabeza está a 200 pie debajo de la base de la roca en ese instante, **(a)** ¿cuánto tiempo tiene para alejarse de la trayectoria de la roca? **(b)** Si no se aleja de la trayectoria a tiempo, ¿con qué rapidez le golpeará la roca?



42. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pie/s desde un punto a 20 pie del suelo. **(a)** Si v pies por segundo es la velocidad de la pelota cuando está a s pies desde su punto de lanzamiento, exprese v en términos de s. **(b)** ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 36 pie del suelo y se eleva?

43. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 150 m/s desde un punto 2 m arriba del suelo. **(a)** Si s metros es la altura del proyectil desde el suelo a los t segundos, después de ser disparado, exprese s en términos de t, bajo la suposición de que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la atribuida a la aceleración debida a la gravedad. **(b)** ¿Qué tan alto, desde el suelo, estará el proyectil 4 s después de ser disparado? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará el proyectil en alcanzar una altura de 500 m desde el suelo?

44. Si un cohete se eleva desde el suelo con una aceleración constante de 22 m/s^2, determine **(a)** la velocidad del cohete 30 s después de que se lanzó y **(b)** ¿qué altura, desde el suelo, alcanzará el cohete en ese tiempo?

45. Un transbordador espacial se eleva verticalmente con una aceleración constante de 10 yd/s^2. Si un radar a 1 200 yd de la plataforma de lanzamiento lo sigue, ¿qué tan rápido gira el radar 8 s después del lanzamiento?

46. Si una pelota se rueda a nivel del suelo con una velocidad inicial de 20 pie/s, y si la rapidez de la pelota disminuye a la tasa de 6 pie/s^2 debido a la fricción, ¿qué distancia recorrerá la pelota?

47. Si el conductor de un automóvil desea aumentar la rapidez de 40 a 100 km/h mientras recorre una distancia de 200 m, ¿qué aceleración constante debe mantener?

48. ¿Qué aceleración negativa y constante debe aplicar un conductor para disminuir la rapidez de 120 a 60 km/h cuando se recorre una distancia de 100 m?

49. Si se aplican los frenos de un automóvil que viaja a 100 km/h y los frenos pueden darle al automóvil una aceleración negativa y constante de 8 m/s^2, **(a)** ¿cuánto tardará el automóvil en detenerse y **(b)** ¿qué distancia recorrerá el automóvil antes de detenerse?

50. Una pelota empezó a subir desde la base de un plano inclinado con una velocidad inicial de 6 pie/s. Si hubo una aceleración contraria al ascenso de 4 pie/s^2, ¿qué distancia recorrió la pelota en el plano antes de comenzar a rodar hacia abajo?

51. Si los frenos de un automóvil pueden darle una aceleración negativa y constante de 8 m/s^2, ¿cuál es la máxima rapidez a la que puede viajar si es necesario detener el automóvil en un intervalo de 25 m después de que se apliquen los frenos?

52. Un bloque de hielo se desliza por un conducto con una aceleración constante de 3 m/s^2. El conducto mide 36 m de longitud y se requieren 4 s para que el bloque llegue hasta la parte más baja. **(a)** ¿Cuál es la velocidad inicial del bloque de hielo? **(b)** ¿Cuál es la rapidez del bloque de hielo cuando ha recorrido 12 m? **(c)** ¿Cuánto tiempo tardará el bloque de hielo en recorrer 12 m?

53. La ecuación $x^2 = 4ay$ representa una familia de parábolas de un parámetro. Determine otra familia de curvas de un parámetro tal que en cualquier punto (x, y) exista una curva de cada familia que pase por él y las rectas tangentes a las dos curvas en ese punto sean perpendiculares. *Sugerencia:* primero muestre que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y), que no esté en el eje y, de la parábola de la familia dada que pasa por ese punto es $2y/x$.

54. Resuelva el ejercicio 53 si la familia de curvas de un parámetro tiene la ecuación $x^3 + y^3 = a^3$.

55. Si una partícula se mueve sobre una recta y se sabe que la aceleración es una función del tiempo, ¿qué condiciones iniciales deben conocerse también para obtener una ecuación que exprese la distancia de la partícula desde el origen como una función del tiempo? Explique cómo determinaría esta ecuación.

4.4 ÁREA

FIGURA 1

Probablemente tiene una idea intuitiva de que el *área* de una figura geométrica es la medida que, en alguna forma, proporciona el tamaño de la región encerrada por la figura. Por ejemplo, se sabe que el área de un rectángulo es el producto de su largo y su ancho, y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de su base y de su altura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto, y puede demostrarse que el área así obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos. Observe la figura 1.

En esta sección, se define el área de una región en un plano si la región está limitada por una curva. Si desea saber por qué se tratarán tales áreas, la respuesta es que se establecerán los fundamentos necesarios para motivar geométricamente la definición de *integral definida* en la sección siguiente. Recuerde, se motivó geométricamente la definición de la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Justo como con la derivada, después de haber establecido la integral definida verá que puede aplicarse la definición en una gran variedad de campos

En el estudio del área se tratarán sumas de muchos términos,* de modo que se introduce una notación, llamada *notación sigma*, para facilitar la escritura de estas sumas. Esta notación requiere el uso del símbolo Σ, la letra sigma mayúscula del alfabeto griego. En el ejemplo ilustrativo siguiente se dan algunos ejemplos de la notación sigma.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=-2}^{2} (3i + 2) &= [3(-2) + 2] + [3(-1) + 2] + [3 \cdot 0 + 2] + [3 \cdot 1 + 2] + [3 \cdot 2 + 2] \\ &= (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$ ◀

4.4.1 Definición de la notación sigma

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \ldots + F(n-1) + F(n)$$

donde m y n son números enteros, y $m \leq n$.

El miembro derecho de la ecuación de la definición consiste de la suma de $(n - m + 1)$ términos, el primero de los cuales se obtiene al sustituir i por m en $F(i)$, el segundo se obtiene al reemplazar i por $m + 1$ en $F(i)$, y así sucesivamente, hasta que el último término se obtiene sustituyendo i por n en $F(i)$.

El número m se denomina **límite inferior** de la suma, y n se denomina **límite superior** de la suma. El símbolo i recibe el nombre de **índice de la suma.** Éste es un símbolo "ficticio" porque cualquier otra letra puede emplearse para este propósito. Por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

es equivalente a

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

* N. del T. En estadística y otras disciplinas a estas sumas suele llamárseles *sumatorias*.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2

De la definición 4.4.1,

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}$$ ◀

En ocasiones los términos de una suma contienen subíndices, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\sum_{k=4}^{9} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x$$ ◀

Los teoremas siguientes tratan sobre el uso de la notación sigma, son útiles para ciertos cálculos y se demuestran fácilmente.

4.4.2 Teorema

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, donde c es cualquier constante.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \ldots + c \qquad (n \text{ términos})$$
$$= cn$$ ■

4.4.3 Teorema

$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \sum_{i=1}^{n} F(i)$, donde c es una constante.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \cdot F(1) + c \cdot F(2) + c \cdot F(3) + \ldots + c \cdot F(n)$$
$$= c[F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n)]$$
$$= c \sum_{i=1}^{n} F(i)$$ ■

4.4.4 Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

La demostración del teorema 4.4.4 se deja como ejercicio (refiérase al ejercicio 43). El teorema 4.4.4 puede extenderse a la suma de cualquier número de funciones.

4.4.5 Teorema

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} F(i-c) \tag{1}$$

y

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} F(i+c) \tag{2}$$

La demostración del teorema 4.4.5 se deja como ejercicio (vea el ejercicio 44). El ejemplo ilustrativo siguiente muestra la aplicación de este teorema.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 De la ecuación (1) del teorema 4.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=5}^{12} F(i-2) \quad \text{y} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=7}^{12} (i-1)^2$$

De la ecuación (2) del teorema 4.4.5

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=1}^{8} F(i+2) \quad \text{y} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=1}^{6} (i+5)^2$$

◀

4.4.6 Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) - \sum_{i=1}^{n} F(i-1)$$

En el miembro derecho de esta ecuación se escribe la primera suma en otra forma, y se aplica la ecuación (2) del teorema 4.4.5, con $c = 1$, a la segunda suma. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n)\right) - \sum_{i=1-1}^{n-1} F[(i+1)-1] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \sum_{i=0}^{n-1} F(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \left(F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i)\right) \\
&= F(n) - F(0)
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1})$$

Solución Del teorema 4.4.6, donde $F(i) = 4^i$, se deduce que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1}) &= 4^n - 4^0 \\ &= 4^n - 1\end{aligned}$$

El teorema siguiente proporciona cuatro fórmulas para el cálculo con la notación sigma. Estas fórmulas pueden demostrarse mediante inducción matemática. También pueden demostrarse sin inducción matemática; vea los ejercicios 45–48.

4.4.7 Teorema

Si n es un número entero positivo, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Fórmula 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(Fórmula 2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{(Fórmula 3)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

EJEMPLO 2 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i - 2)$$

Solución

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 2i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2) + \sum_{i=1}^{n} (-2i) && \text{(por el teorema 4.4.4)} \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i && \text{(por el teorema 4.4.3)} \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} && \text{(por las fórmulas 1 y 2)} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n}{2} \\ &= \frac{2n^3 + n^2 - n}{2}\end{aligned}$$

Antes de estudiar el área de una región plana, se indicará por qué se utiliza la terminología "*medida* del área". La palabra *medida* se refiere a un número (no se incluyen las unidades). Por ejemplo, si el área de un triángulo es 20 cm^2, se dice que la medida del área del triángulo, en centímetros cuadrados, es 20. Cuando la palabra *medición* se aplica, se incluyen las unidades. De este modo, la medición del área del triángulo es 20 cm^2.

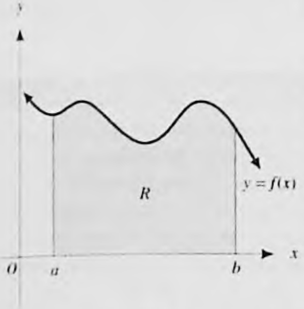


FIGURA 2

Ahora considere una región R del plano como muestra la figura 2. La región R está limitada por el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Por simplicidad, se toma $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Se desea asignar un número A a la medida del área de R, y utilizar un proceso de límite semejante al empleado en la definición del área de un círculo: El área de un círculo está definida como el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos cuando el número de lados aumenta sin límite. Intuitivamente, se ve que cualquiera que haya sido el número elegido para representar A, ese número debe ser por lo menos tan grande como el área de cualquier región poligonal contenida en R, y no debe ser mayor que la medida del área de cualquier región poligonal que contenga a R.

Primero se define una región poligonal contenida en R. Se divide el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos. Para simplificar se consideran estos subintervalos de igual longitud, por ejemplo, Δx. Por tanto, $\Delta x = (b - a)/n$. Los extremos de estos subintervalos se denotan por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, donde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $\ldots$, $x_i = a + i\Delta x$, $\ldots$, $x_{n-1} = a + (n - 1)\,\Delta x$, $x_n = b$. El i-ésimo subintervalo se denotará por $[x_{i-1}, x_i]$. Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, es continua en cada subintervalo. Por el teorema del valor extremo, existe un número en cada subintervalo para el cual f tiene un valor mínimo absoluto. En el i-ésimo subintervalo sea c_i este número, de modo que $f(c_i)$ es el valor mínimo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Considere los n rectángulos (o elementos de área), cada uno de ancho Δx unidades y altura de $f(c_i)$ unidades (refiérase a la figura 3). Sea S_n unidades cuadradas la suma de las áreas de estos n rectángulos; entonces

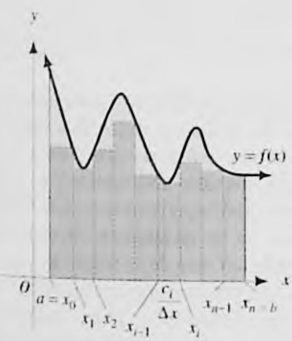


FIGURA 3

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

o, con la notación sigma,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{3}$$

El miembro derecho de (3) proporciona la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos inscritos. De este modo, independientemente de cómo se defina A, debe ser tal que

$$A \geq S_n$$

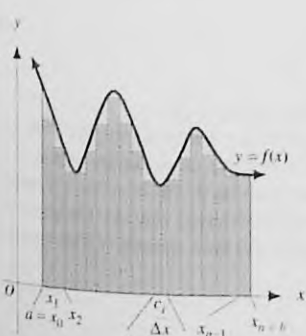


FIGURA 4

En la figura 3 la región sombreada tiene un área de S_n unidades cuadradas. A continuación se incrementará n. Específicamente, multiplique n por 2, entonces el número de rectángulos es el doble, y el ancho de cada rectángulo se redujo a la mitad. Esto se ilustra en la figura 4, la cual muestra el doble de los rectángulos de la figura 3. Al comparar las dos figuras, se observa que la región sombreada de la figura 4 parece que se aproxima más a la región R que la región de la figura 3. Así, la suma de las áreas de los rectángulos de la figura 4 está más próxima al número que se desea para representar la medida del área de la región R.

Conforme n se incrementa, los valores de S_n determinados a partir de la ecuación (3) aumentan, y los valores sucesivos de S_n difieren uno del otro en cantidades arbitrariamente pequeñas. Esto se demuestra en Cálculo avanzado mediante un teorema que establece que si f es continua en $[a, b]$, entonces conforme n crece sin límite, el valor de S_n dado por (3) se aproxima al límite. Este límite es el que se toma como definición de la medida del área de la región R.

4.4.8 Definición del área de una región plana

Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, y que R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$, y denote el i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces si $f(c_i)$ es el valor de función mínimo absoluto en el i-ésimo subintervalo, la medida del **área de la región** R está dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{4}$$

Esta ecuación significa que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero positivo y

$$\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x - A \right| < \epsilon$$

En la discusión anterior pudieron haberse considerado rectángulos circunscritos en lugar de rectángulos inscritos. En este caso, se toman como medidas de las alturas de los rectángulos los valores máximos absolutos de f en cada subintervalo. La existencia de un valor máximo absoluto de f en cada subintervalo está garantizada por el teorema del valor extremo. Las sumas correspondientes de las medidas de las áreas de los rectángulos circunscritos son por lo menos tan grandes como la medida del área de la región R, y puede demostrarse que el límite de estas sumas conforme n crece sin límite es exactamente el mismo que el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos. Esto también se demuestra en Cálculo avanzado. De esta manera, se puede definir la medida del área de la región R por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\,\Delta x \tag{5}$$

donde $f(d_i)$ es el valor máximo absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

La medida de la altura del rectángulo del i-esimo subintervalo en realidad puede tomarse como el valor de la función de cualquier número del subintervalo, y el límite de la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos será el mismo sin importar que números se hayan elegido. En la sección 4.5 se extenderá la definición de la medida del área de una región como el límite de dicha suma.

EJEMPLO 3 Determine el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$ considerando rectángulos inscritos.

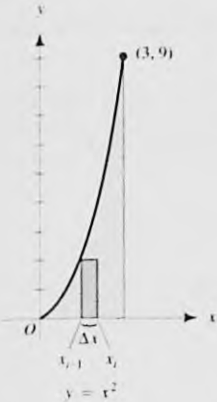


FIGURA 5

Solución La figura 5 muestra la región y el i-ésimo rectángulo inscrito. Aplique la definición 4.4.8 y divida el intervalo cerrado $[0, 3]$ en n subintervalos cada uno de longitud Δx: $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, $\ldots$, $x_i = i\Delta x$, $\ldots$, $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 3$. Así,

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^2$$
$$= \frac{3}{n}$$

Como f es creciente en $[0, 3]$, el valor mínimo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_{i-1})$. Por tanto, de (4)

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \tag{6}$$

Debido a que $x_{i-1} = (i-1)\,\Delta x$ y $f(x) = x^2$, entonces

$$f(x_{i-1}) = [(i-1)\,\Delta x]^2$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2(\Delta x)^3$$

Pero $\Delta x = 3/n$; de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2\,\frac{27}{n^3}$$
$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$
$$= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

y al aplicar las fórmulas 2 y 1 y el teorema 4.4.2 se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$
$$= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6}$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}$$

Entonces, de (6),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}\right]$$
$$= \frac{9}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \tfrac{9}{2}(2 - 0 + 0)$$
$$= 9$$

Conclusión: El área de la región es 9 unidades cuadradas. ◀

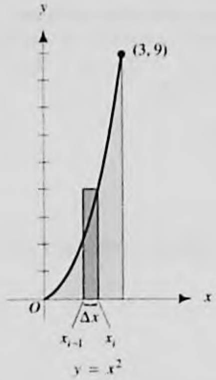


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Calcule el área de la región del ejemplo 3 considerando rectángulos circunscritos.

Solución La figura 6 muestra la región y el i-ésimo rectángulo circunscrito. Con rectángulos circunscritos, la medida de la altura del i-ésimo rectángulo es el valor máximo absoluto de f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el cual es $f(x_i)$. De (5) se tiene

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \tag{7}$$

Como $x_i = i\,\Delta x$, entonces $f(x_i) = (i\,\Delta x)^2$, y así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} i^2\,(\Delta x)^3\\ &= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Por tanto, de (7),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 9 \text{ (como en el ejemplo 3)}\end{aligned}$$

◀

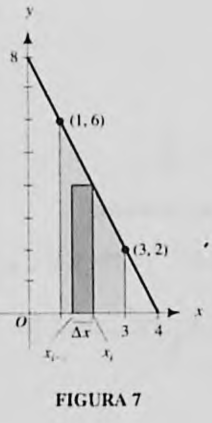


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Aplique la definición 4.4.8 para calcular el área de la región trapezoidal limitada por las rectas $x = 1$ y $x = 3$, el eje x y la recta $2x + y = 8$. Verifique la respuesta mediante la fórmula de geometría plana para el área de un trapecio.

Solución En la figura 7 se presentan la región y el i-ésimo rectángulo inscrito. Se divide el intervalo cerrado $[1, 3]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x$, . . . , $x_i = 1 + i\Delta x$, . . . , $x_{n-1} = 1 + (n-1)\,\Delta x$, $x_n = 3$.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{3-1}{n}\\ &= \frac{2}{n}\end{aligned}$$

Al resolver la ecuación de la recta para y se obtiene $y = -2x + 8$. Por tanto, $f(x) = -2x + 8$, y como f es decreciente en $[1, 3]$, el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_i)$. Debido a que $x_i = 1 + i\Delta x$ y $f(x) = -2x + 8$, entonces $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8$, es decir, $f(x_i) = 6 - 2i\,\Delta x$. De (4),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (6 - 2i\,\Delta x)\,\Delta x\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [6\,\Delta x - 2i(\Delta x)^2]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\left(\frac{2}{n}\right) - 2i\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

Del teorema 4.4.2 y de la fórmula 1 se tiene

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$

$$= 8$$

Conclusión: El área de la región es 8 unidades cuadradas.

La fórmula de geometría plana para determinar el área de un trapecio es

$$A = \tfrac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

donde h, b_1 y b_2 son, respectivamente, el número de unidades de la longitud de la altura y de las dos bases, las cuales, para el trapecio de la figura 7 son paralelas al eje y. De esta fórmula se tiene que $A = \frac{1}{2}(2)(6 + 2)$; esto es, $A = 8$, lo cual es acorde con el resultado obtenido anteriormente. ◀

EJERCICIOS 4.4

En los ejercicios 1 a 12, calcule la suma.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i - 2)$
2. $\sum_{i=1}^{20} (5i + 4)$
3. $\sum_{i=1}^{7} (i^2 + 1)$
4. $\sum_{i=1}^{7} (i + 1)^2$
5. $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)^3$
6. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 1)$
7. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$
8. $\sum_{j=3}^{6} \frac{2}{j(j-2)}$
9. $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$
10. $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1+i^2}$
11. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
12. $\sum_{k=-2}^{3} \frac{k}{k+3}$

En los ejercicios 13 a 20, evalúe la suma utilizando los teoremas 4.4.2 a 4.4.7.

13. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i - 1)$
14. $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2 + 2)$
15. $\sum_{k=1}^{n} (2^k - 2^{k-1})$
16. $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^i)$
17. $\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$
18. $\sum_{i=1}^{n} 2i(1 + i^2)$
19. $\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i - 2)$
20. $\sum_{k=1}^{n} [(3^{-k} - 3^k)^2 - (3^{k-1} - 3^{-k+1})^2]$

En los ejercicios 21 a 30, emplee el método de esta sección para determinar el área de la región; utilice rectángulos inscritos o circunscritos, según se indique. Para cada ejercicio dibuje una figura que muestre la región y el i-ésimo rectángulo.

21. La región limitada por $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$; rectángulos inscritos.
22. La región del ejercicio 21; rectángulos circunscritos.
23. La región sobre el eje x y a la derecha de la recta $x = 1$ limitada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = 4 - x^2$; rectángulos inscritos.
24. La región del ejercicio 23; rectángulos circunscritos.
25. La región sobre el eje x y a la izquierda de la recta $x = 1$ limitada por la curva y las rectas del ejercicio 23; rectángulos circunscritos.
26. La región del ejercicio 25; rectángulos inscritos.

27. La región limitada por $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$; rectángulos inscritos.

28. La región del ejercicio 27; rectángulos circunscritos.

29. La región limitada por $y = x^3 + x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$; rectángulos circunscritos.

30. La región del ejercicio 29; rectángulos inscritos.

31. Utilice el método de esta sección para calcular el área de un trapecio isósceles cuyas bases tienen medidas b_1 y b_2 y cuya altura tiene medida h.

32. La gráfica de $y = 4 - |x|$ y el eje x desde $x = -4$ a $x = 4$ forman un triángulo. Emplee el método de esta sección para calcular el área de este triángulo.

En los ejercicios 33 a 36, determine el área de la región tomando como medida de la altura del i-ésimo rectángulo $f(m_i)$, donde m_i es el punto medio del i-ésimo subintervalo. Sugerencia: $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.

33. La región del ejemplo 3.

34. La región del ejercicio 22.

35. La región del ejercicio 23.

36. La región del ejercicio 26.

En los ejercicios 37 a 42, se proporcionan una función f y los números n, a y b. Aproxime, con cuatro cifras decimales, el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, realizando lo siguiente: divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx unidades y utilice una calculadora para obtener la suma de las áreas de los rectángulos inscritos o circunscritos (según se indique) que tienen cada uno un ancho de Δx unidades.

37. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, inscritos.

38. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, circunscritos.

39. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, circunscritos.

40. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, inscritos.

41. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, inscritos.

42. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, circunscritos.

43. Demuestre el teorema 4.4.4.

44. Demuestre el teorema 4.4.5.

45. Demuestre la fórmula 1 del teorema 4.4.7 sin utilizar inducción matemática: *Sugerencia:* escriba dos ecuaciones: **(i)** iguale la suma, en notación sigma, a $1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$; **(ii)** iguale la suma, en notación sigma, a la suma de (i) en orden invertido. Después sume las ecuaciones, de (i) y (ii), término a término y divida los dos miembros de la ecuación resultante entre 2.

46. Demuestre la fórmula 2 del teorema 4.4.7 sin utilizar inducción matemática. *Sugerencia:*

$$\sum_{i=1}^{n}[i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 - 3i + 1)$$

Aplique el teorema 4.4.6 en el miembro izquierdo de esta ecuación; y en el miembro derecho aplique los teoremas 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 y la fórmula 1 del teorema 4.4.7.

47. Demuestre la fórmula 3 del teorema 4.4.7. *Sugerencia:* $i^4 - (i-1)^4 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$, y use un método semejante al utilizado en el ejercicio 46.

48. Demuestre la fórmula 4 del teorema 4.4.7. (Considere la sugerencia para los ejercicios 46 y 47).

49. Explique la definición 4.4.8 en palabras sin emplear las palabras *límite* o *se aproxima a* o los símbolos N o ϵ.

4.5 INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 4.4, para llegar a la definición de la medida del área de una región plana como

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \qquad (1)$$

se dividió el intervalo cerrado $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx, y se tomó c_i como el punto del i-ésimo subintervalo para el cual f tiene un valor mínimo absoluto. También se restringieron los valores de función $f(x)$ a valores no negativos en $[a, b]$ y se pidió que f fuese continua en $[a, b]$. El límite en (1) es un caso especial de un "nuevo tipo" de proceso de límite que conduce a la definición de la *integral definida*. Ahora se discutirá este "nuevo tipo" de límite.

Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Divida este intervalo en n subintervalos eligiendo *cualesquiera* $n - 1$ puntos intermedios entre a y b. Sean $x_0 = a$ y $x_n = b$, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ los puntos intermedios de modo que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ no son necesariamente equidistantes. Sea $\Delta_1 x$ la longitud del primer subintervalo de modo que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; sea $\Delta_2 x$ la longitud del segundo subintervalo de modo que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; y así sucesivamente de modo que la longitud del i-ésimo subintervalo es $\Delta_i x$, y

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Al conjunto de estos subintervalos del intervalo $[a, b]$ se le denomina **partición** del intervalo $[a, b]$. Sea Δ dicha partición. La figura 1 ilustra una de estas particiones Δ de $[a, b]$.

FIGURA 1

La partición Δ contiene n subintervalos. Uno de estos subintervalos es el más largo; sin embargo, puede haber más de uno. La longitud del subintervalo más largo de la partición Δ se llama **norma de la partición** y se denota por $\|\Delta\|$.

Elija un punto en cada subintervalo de la partición Δ: sea w_1 el punto elegido en $[x_0, x_1]$ de modo que $x_0 \le w_1 \le x_1$. Sea w_2 el punto elegido en $[x_1, x_2]$ de modo que $x_1 \le w_2 \le x_2$ y así sucesivamente, de modo que w_i es el punto elegido en $[x_{i-1}, x_i]$ y $x_{i-1} \le w_i \le x_i$. Considere

$$f(w_1)\,\Delta_1 x + f(w_2)\,\Delta_2 x + \ldots + f(w_i)\,\Delta_i x + \ldots + f(w_n)\,\Delta_n x$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x \qquad (2)$$

Esta última suma recibe el nombre de **suma de Riemann,** en honor al matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866).

FIGURA 2

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Suponga que $f(x) = 10 - x^2$, con $0.25 \le x \le 3$. Se calculará la suma de Riemann para la función f en $[0.25, 3]$ para la siguiente partición Δ: $x_0 = 0.25$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$, $x_4 = 2.25$, $x_5 = 3$, y $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1.25$, $w_3 = 1.75$, $w_4 = 2$, $w_5 = 2.75$.

La figura 2 muestra la gráfica de f en $[0.25, 3]$ y los cinco rectángulos, cuyas áreas son los términos de la suma de Riemann siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(w_i)\,\Delta_i x &= f(w_1)\,\Delta_1 x + f(w_2)\,\Delta_2 x + f(w_3)\,\Delta_3 x + f(w_4)\,\Delta_4 x + f(w_5)\,\Delta_5 x\\
&= f(0.5)(1 - 0.25) + f(1.25)(1.5 - 1) + f(1.75)(1.75 - 1.5) + f(2)(2.25 - 1.75) + f(2.75)(3 - 2.25)\\
&= (9.75)(0.75) + (8.4375)(0.5) + (6.9375)(0.25) + (6)(0.5) + (2.4375)(0.75)\\
&= 18.09375\end{aligned}$$

La norma de la partición Δ es la longitud del subintervalo más largo; en consecuencia, $\|\Delta\| = 0.75$. ◀

En la definición anterior de (2) como una suma de Riemann, los valores de función no se restringieron a valores no negativos. Por tanto, algunos de los $f(w_i)$ podrían ser negativos. En tal caso la interpretación geométrica de la suma de Riemann sería la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje x y los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que se encuentran debajo del eje x. Esta situación se ilustra en la figura 3. Aquí,

$$\sum_{i=1}^{10} f(w_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

porque $f(w_3), f(w_4), f(w_5), f(w_8), f(w_9)$ y $f(w_{10})$ son números negativos.

Ahora suponga que para la función f en (2) existe un número L tal que

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\ \Delta_i x - L\right|$ puede hacerse tan pequeño como se desee para todas las particiones Δ cuyas normas sean suficientemente pequeñas, y para cualquier w_i en el intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. En tal caso se dice que f es *integrable* en $[a, b]$.

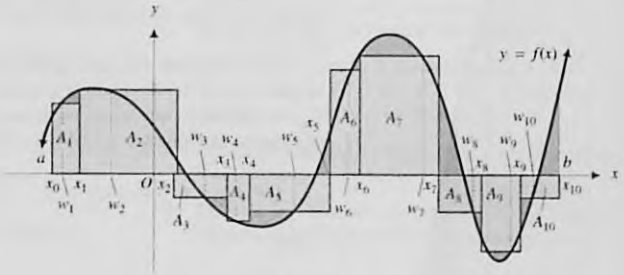


FIGURA 3

4.5.1 Definición de función integrable en un intervalo cerrado

Sea f una función cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$. Se dice que f es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\ \Delta_i x - L\right| < \epsilon \tag{3}$$

Esta situación se representa como

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x = L \tag{4}$$

Esta definición establece que, para una función f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede aproximar los valores de las sumas de Riemann a L tanto como se desee tomando las normas $\|\Delta\|$ de todas las particiones Δ de $[a, b]$ suficientemente pequeñas para todas las posibles elecciones de los números w_i para los cuales $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Observe que el proceso de límite dado por (4) es diferente del que se estudió en el capítulo 1. De la definición 4.5.1, el número L en (4) existe si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición Δ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, y para cualquier w_i del intervalo cerrado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la desigualdad (3) se cumple.

En la definición 1.5.1 se tuvo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{5}$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

En el proceso de límite (4), para una $\delta > 0$ particular existe un número infinito de particiones Δ que tienen norma $\|\Delta\| < \delta$. Esto es análogo al hecho de que en el proceso de límite (5), para una $\delta > 0$ dada existe un número infinito de valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta$. Sin embargo, en el proceso de límite (4) para cada partición Δ existe un número infinito de elecciones de w_i. Es en este aspecto en el que difieren los dos procesos de límite.

El teorema 1.5.16, demostrado en la sección suplementaria 1.5, establece que si el número L en el proceso de límite (5) existe, entonces es único. De manera semejante se puede demostrar que si existe un número L que satisfaga la definición 4.5.1, entonces es único. Ahora puede definirse la *integral definida*.

4.5.2 Definición de integral definida

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la **integral definida** de f de a a b, denotada por $\int_a^b f(x)\, dx$, está dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x \tag{6}$$

si el límite existe.

Observe que la oración "la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$" equivale a la oración "la integral definida de f de a a b existe".

En la notación de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, $f(x)$ es el **integrando,** a es el **límite inferior,** y b es el **límite superior.** El símbolo $\int$ es el **signo de integración.** El signo de integración se parece a la letra mayúscula S, el cual es apropiado porque la integral definida es el límite de una suma. Es el mismo símbolo que se ha utilizado para indicar la operación antiderivación. La razón para emplear el mismo símbolo se debe a que un teorema (4.7.2), llamado *segundo teorema fundamental del Cálculo*, permite evaluar una integral definida mediante una antiderivada (también denominada **integral indefinida**).

El teorema siguiente proporciona condiciones que garantizan el hecho de que una función es integrable en un intervalo cerrado dado.

4.5.3 Teorema

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro y puede encontrarse en textos de Cálculo avanzado. La condición de que f es continua en $[a, b]$, es suficiente para garantizar que f es integrable en $[a, b]$, mas no es una condición necesaria para la existencia de la integral definida. Esto es, una función puede ser integrable en un intervalo cerrado aunque no sea continua en ese intervalo. Cuando estudie *integrales impropias* en el capítulo 7, encontrará algunas funciones de este tipo. En el comienzo de esta sección se dijo que el límite empleado en la definición 4.4.8 para definir la medida del área de una región es un caso especial del límite utilizado en la definición 4.5.2 para definir la integral definida. En el estudio de área, en intervalo $[a, b]$ se dividió en n subintervalos de igual longitud. Tal partición del intervalo $[a, b]$ se llama **partición regular**. Si Δx es la longitud de cada subintervalo de una partición regular, entonces cada $\Delta_i x = \Delta x$, y la norma de la partición es Δx. Al sustituir esto en (6) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{7}$$

Además,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Así,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

La razón de que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ es que $b > a$ y Δx se aproxima a cero a través de valores positivos (porque $\Delta x > 0$). A partir de estos límites se concluye que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{es equivalente a} \quad n \to +\infty$$

De modo que de este enunciado y de (7), se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{8}$$

Si se compara el límite de la definición 4.4.8 con el límite del miembro derecho de (8), se tiene el primer caso

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{9}$$

donde $f(c_i)$ es el valor de función mínimo absoluto en $[x_{i-1}, x_i]$. En el segundo caso se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x \tag{10}$$

donde w_i es cualquier número del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Si la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, es el límite de todas las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ incluyendo las de (9) y (10). Debido a esto, se redefine el área de una región de manera más general.

4.5.4 Definición del área de una región plana

Sea f una función continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces la medida A del **área de la región** $\boldsymbol{R}$ está dada por

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

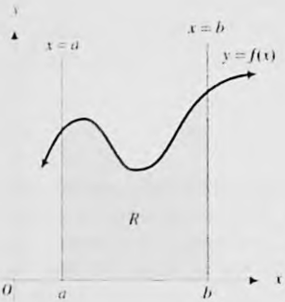


FIGURA 4

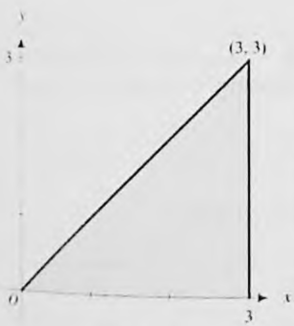
De esta definición, si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de la región R mostrada en la figura 4.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En el ejemplo 3 de la sección 4.4, se mostró que el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$, el eje x y la recta $x = 3$ es 9 unidades cuadradas. Como $f(x) \geq 0$ para toda x en $[0, 3]$, se concluye que

$$\int_0^3 x^2\, dx = 9$$

◀

EJEMPLO 1 Calcule el valor de cada una de las siguientes integrales definidas interpretándolas como la medida del área de una región plana: **(a)** $\int_0^3 x\,dx$; **(b)** $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$; **(c)** $\int_{-2}^2 (2 - |x|)\,dx$



$f(x) = x$

FIGURA 5

Solución

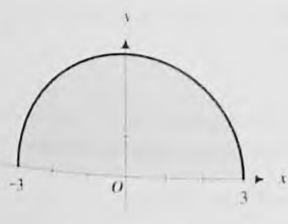
(a) Con $f(x) = x$, la figura 5 muestra la región triangular limitada superiormente por la gráfica de f, inferiormente por el eje x, y por la derecha por la recta $x = 3$. De la fórmula para el área de un triángulo, el número de unidades cuadradas del área es $\frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$. Por tanto,

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$

(b) El integrando de la integral definida dada es $\sqrt{9 - x^2}$, el cual se denota por $g(x)$. La gráfica de g es una semicircunferencia con centro en el origen y radio 3. La figura 6 muestra la región limitada por arriba por esta semicircunferencia y por debajo por el eje x, en el intervalo $[-3, 3]$. El área de esta región es la mitad del área de la región encerrada por la circunferencia completa. Como el área de la región circular está dada por πr^2, se tiene

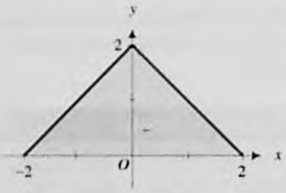
$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{9}{2}\pi$$



$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

FIGURA 6



$h(x) = 2 - |x|$

FIGURA 7

(c) Con $h(x) = 2 - |x|$, se dibuja la gráfica de h en el intervalo $[-2, 2]$ y se obtiene la figura 7. Observe que la región limitada por la gráfica de h y el eje x es un triángulo de base 4 y altura 2. Como el número de unidades cuadradas del área de esta región triangular es $\frac{1}{2}(4)(2) = 4$, se tiene

$$\int_{-2}^{2} (2 - |x|)\, dx = 4$$

◀

De igual forma en que la mayoría de las graficadoras pueden aproximar valores de derivadas numéricas, también pueden aproximar valores de integrales definidas. Para obtener estas aproximaciones se aplican varias técnicas numéricas. Aprenderá algunas de estas técnicas en la sección 7.6. Se representará una aproximación de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, obtenida en la graficadora, mediante la notación

$$\text{NINT}(f(x), a, b)$$

Debido a las diferentes técnicas utilizadas para aproximar integrales definidas, los valores de NINT($f(x)$, a, b) pueden variar dependiendo de la graficadora y de la tolerancia especificada. Pero generalmente, las respuestas dadas por la mayoría de las graficadoras serán acordes al menos con cinco dígitos significativos. Se usará una tolerancia de 10^{-5} y se expresarán las respuestas con seis dígitos significativos a menos que otra cosa se indique. Se empleará el signo igual, "=", en dichos cálculos para expresar *aproximadamente igual con seis dígitos significativos*. Consulte el manual del usuario sobre cómo obtener NINT($f(x)$, a, b) en su graficadora particular.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3** Para obtener una aproximación de la integral definida del ejemplo ilustrativo 2, se calcula en la graficadora

$$\text{NINT}(x^2, 0, 3) = 9.00000$$

lo cual es acorde con la respuesta del ejemplo ilustrativo 2. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** En el ejemplo 1(b) se obtuvo el valor exacto $\frac{9}{2}\pi$ de la integral definida $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$. En la graficadora se obtiene

$$\text{NINT}(\sqrt{9 - x^2}, -3, 3) = 14.1372$$

Debido a que $\frac{9}{2}\pi \approx 14.1372$, esta respuesta es acorde con la respuesta del ejemplo 1(b). ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Obtenga una aproximación de $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ calculando NINT(sen x, 0, 2π). Interprete la respuesta en términos de área.

Solución En la graficadora, NINT(sen x, 0, 2π) = 0. Así

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0$$

La gráfica de la función seno de 0 a 2π se muestra en la figura 8. Sean A_1 unidades cuadradas y A_2 unidades cuadradas las áreas de las regiones limitadas por la curva senoidal y el eje x en los intervalos $[0, \pi]$ y $[\pi, 2\pi]$, respectivamente. Entonces, como A_1 y A_2 son iguales, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx &= A_1 - A_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

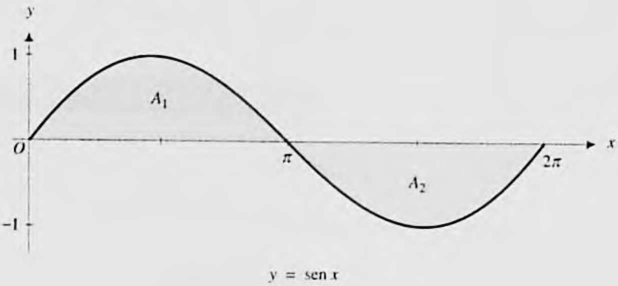


FIGURA 8

En la definición 4.5.2, como se ha dado el intervalo $[a, b]$, se supone que $a < b$. Para determinar la integral definida de una función f de a a b, cuando $a > b$, o cuando $a = b$, se tienen las definiciones siguientes.

4.5.5 Definición de $\int_a^b f(x)\, dx$ si $a > b$

Si $a > b$ y $\int_b^a f(x)\, dx$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Del ejemplo ilustrativo 2, $\int_0^3 x^2\, dx = 9$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_3^0 x^2\, dx &= -\int_0^3 x^2\, dx \\ &= -9\end{aligned}$$

4.5.6 Definición de $\int_a^a f(x)\, dx$

Si $f(a)$ existe, entonces

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6

$$\int_1^1 x^2\, dx = 0$$

El proceso para calcular el valor exacto de una integral definida a partir de la definición determinando el límite de una suma, como se hizo en la sección 4.4 para obtener áreas de regiones planas, es demasiado tedioso y casi imposible. Sin embargo, los dos teoremas fundamentales del Cálculo, presentados en la sección 4.7, proporcionan un método más conveniente para este cálculo. Para demostrar estos dos teoremas importantes se necesitan algunas propiedades de la integral definida, las cuales se estudian en el resto de esta sección y en la sección 4.6.

Primero se presentarán los dos teoremas siguientes acerca de las sumas de Riemann.

4.5.7 Teorema

Si Δ es una partición del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Demostración

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a) &= (b-a) - (b-a)\\ &= 0\end{aligned}$$

En consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$, cualquier elección de $\delta > 0$ garantiza que

$$\text{si} \quad \|\Delta\| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a) \right| < \epsilon$$

Así, por la definición 4.5.1,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$ ■

4.5.8 Teorema

Si f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

existe, donde Δ es cualquier partición de $[a, b]$, entonces si k es cualquier constante,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k f(w_i)\,\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta x$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 54).

FIGURA 9

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7 Refiérase a la figura 9. Si $k > 0$, la integral definida $\int_a^b k\,dx$ proporciona la medida del área del rectángulo cuyas dimensiones son k unidades y $(b - a)$ unidades. Este hecho es una interpretación geométrica del teorema siguiente cuando $k > 0$ y $b > a$. ◀

4.5.9 Teorema

Si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b k\,dx = k(b - a)$$

Demostración De la definición 4.5.2, si $b > a$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

Si $f(x) = k$ para todo x en $[a, b]$, de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^b k\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta_i x \\ &= k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x && \text{(por el teorema 4.5.8)} \\ &= k(b - a) && \text{(por el teorema 4.5.7)}\end{aligned}$$

El teorema también es válido si $a \geq b$. Se le pedirá que demuestre esto en el ejercicio 55. ■

▶ ***EJEMPLO 3*** Evalúe

$$\int_{-3}^{5} 4\,dx$$

Solución Al aplicar el teorema 4.5.9, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{5} 4\,dx &= 4[5 - (-3)] \\ &= 4(8) \\ &= 32\end{aligned}$$

◀

4.5.10 Teorema

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k es cualquier constante, entonces

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración Como f es integrable en $[a, b]$, $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$ existe; de modo que por el teorema 4.5.8,

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(w_i)\,\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta_i x$$

Por tanto,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

4.5.11 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La demostración de este teorema se presenta en el suplemento de esta sección. Observe la semejanza del teorema 4.5.11 y el teorema de límites 4 (1.5.5), el límite de la suma de dos funciones. La demostración de los teoremas son similares.

El signo más en el enunciado del teorema 4.5.11 puede reemplazarse por un signo menos aplicando el teorema 4.5.10 con $k = -1$.

El teorema 4.5.11 puede extenderse a n funciones. Esto es, si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son integrables en $[a, b]$, entonces $(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx$$

EJEMPLO 4 Utilice los resultados del ejemplo ilustrativo 2, ejemplo 1(a), y propiedades de la integral definida para calcular el valor exacto de

$$\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\,dx$$

Solución En el ejemplo ilustrativo 2 y en el ejemplo 1(a) se mostró que

$$\int_0^3 x^2\,dx = 9 \quad \text{y} \quad \int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$$

De las propiedades de la integral definida, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 (4x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int_0^3 4x^2\,dx - \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 5\,dx\\ &= 4\int_0^3 x^2\,dx - 2\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx\\ &= 4(9) - 2(\tfrac{9}{2}) + 5(3 - 0)\\ &= 42\end{aligned}$$

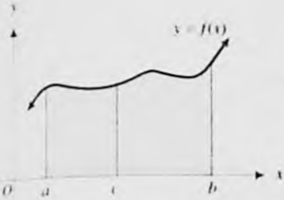


FIGURA 10

EJEMPLO ILUSTRATIVO 8 En la figura 10 se presenta una interpretación geométrica del teorema 4.5.12, el cual se presenta a continuación, donde $f(x) \geq 0$. Para toda x en $[a, b]$, la medida del área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje x de a a b, es igual a la suma de las medidas de las áreas de las regiones de a a c y de c a b. ◀

4.5.12 Teorema

Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde $a < c < b$.

Para la demostración de este teorema, refiérase al suplemento de esta sección. En la hipótesis del teorema $a < c < b$. Sin embargo, la conclusión del teorema es verdadera para cualquier orden de los números a, b y c. Este hecho se establece en el teorema siguiente, en cuya demostración se utiliza el teorema 4.5.12.

4.5.13 Teorema

Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{11}$$

sin importar el orden de a, b y c.

Demostración Si a, b y c son diferentes, entonces existen seis órdenes posibles de estos tres números: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ y $c < b < a$. El segundo orden, $a < c < b$, corresponde al teorema 4.5.12. Se aplica este teorema a fin de demostrar que la ecuación (11) se cumple para los otros órdenes.

Suponga que $a < b < c$; entonces por el teorema 4.5.12

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{12}$$

De la definición 4.5.5,

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Al sustituir de esta ecuación en (12) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

De donde

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

lo cual es el resultado deseado.

Las demostraciones para los otros cuatro casos son semejantes y se dejan como ejercicios. Refiérase a los ejercicios 43 a 46.

Otra posibilidad consiste en que dos números sean iguales; por ejemplo, $a = c < b$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^a f(x)\,dx\\ &= 0 \qquad \text{(por la definición 4.5.6)}\end{aligned}$$

También, como $a = c$,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por tanto,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$$

el cual es el resultado deseado. ∎

EJERCICIOS 4.5

En los ejercicios 1 a 6, calcule la suma de Riemann para la función en el intervalo utilizando la partición Δ y los valores dados de w_i. Dibuje la gráfica de la función en el intervalo dado y muestre los rectángulos cuyas medidas de áreas sean los términos en la suma de Riemann. Consulte el ejemplo ilustrativo 1 y la figura 2.

1. $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.25$, $x_3 = 2.25$, $x_4 = 3$; $w_1 = 0.25$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1.5$, $w_4 = 2.5$

2. $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1.25$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2.75$; $x_5 = 3$, $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1$, $w_3 = 1.75$, $w_4 = 2.25$, $w_5 = 2.75$

3. $f(x) = 1/x$; $1 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1.67$, $x_2 = 2.25$, $x_3 = 2.67$, $x_4 = 3$; $w_1 = 1.25$, $w_2 = 2$, $w_3 = 2.5$, $w_4 = 2.75$

4. $f(x) = 1/(x + 2)$; $-1 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1.25$; $x_5 = 2$, $x_6 = 2.25$, $x_7 = 2.75$, $x_8 = 3$; $w_1 = -0.75$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0.25$, $w_4 = 1$, $w_5 = 1.5$, $w_6 = 2$, $w_7 = 2.5$, $w_8 = 3$

5. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $0 \le x \le \pi$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$; $x_5 = \pi$, $w_1 = \frac{1}{6}\pi$, $w_2 = \frac{1}{3}\pi$, $w_3 = \frac{1}{2}\pi$, $w_4 = \frac{3}{4}\pi$, $w_5 = \frac{5}{6}\pi$

6. $f(x) = 3\cos\frac{1}{2}x$; $-\pi \le x \le \pi$; Δ: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{7}{12}\pi$, $x_5 = \pi$; $w_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $w_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $w_3 = 0$, $w_4 = \frac{1}{2}\pi$, $w_5 = \frac{2}{3}\pi$

En los ejercicios 7 a 10, aproxime el valor de la integral definida en dos formas: (a) utilice una calculadora para obtener con cuatro cifras decimales las sumas de Riemann correspondientes a una partición regular de n subintervalos y w_i como el extremo izquierdo o derecho (según se indique) de cada subintervalo; (b) emplee NINT *en la graficadora. Compare los resultados.*

7. $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{x^2}\,dx$; $n = 9$, w_i es el extremo derecho

8. $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx$; $n = 10$, w_i es el extremo izquierdo

9. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$, $n = 8$, w_i es el extremo izquierdo

10. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc x\,dx$, $n = 6$, w_i es el extremo derecho

En los ejercicios 11 a 28, (a) determine el valor exacto de la integral definida interpretándola como la medida del área de una región plana. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) utilizando NINT *en la graficadora.*

11. $\displaystyle\int_1^3 (x - 1)\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-2}^3 (x + 2)\,dx$

13. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$ 14. $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

15. $\int_{-2}^4 x\, dx$ 16. $\int_0^4 (3 - x)\, dx$

17. $\int_{-1}^2 (5 - 2x)\, dx$ 18. $\int_{-1}^2 (2x + 5)\, dx$

19. $\int_{-2}^4 |x|\, dx$ 20. $\int_{-3}^3 |1 - x|\, dx$

21. $\int_0^5 (|x + 3| - 5)\, dx$ 22. $\int_{-1}^7 (|x - 2| - 3)\, dx$

23. $\int_0^5 (6 - |x - 2|)\, dx$ 24. $\int_{-5}^0 (3 + |x + 4|)\, dx$

25. $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx$ 26. $\int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

27. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ 28. $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

En los ejercicios 29 y 30, aplique el teorema 4.5.9 para determinar el valor exacto de la integral definida.

29. (a) $\int_2^5 4\, dx$ (b) $\int_{-3}^4 7\, dx$ (c) $\int_{-5}^{-10} dx$

30. (a) $\int_5^{-1} 6\, dx$ (b) $\int_{-2}^2 \sqrt{5}\, dx$ (c) $\int_3^3 dx$

En los ejercicios 31 a 42, (a) aproxime el valor de la integral definida mediante NINT *en la graficadora. (b) Confirme la respuesta del inciso (a) calculando el valor exacto de la integral definida. Utilice los siguientes resultados:*

$$\int_{-1}^2 x^2\, dx = 3 \qquad \int_{-1}^2 x\, dx = \tfrac{3}{2} \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0 \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

31. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 5)\, dx$ 32. $\int_{-1}^2 (8 - x^2)\, dx$

33. $\int_{-1}^2 (2 - 5x + \frac{1}{2}x^2)\, dx$ 34. $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x - 1)\, dx$

35. $\int_2^{-1} (2x + 1)^2\, dx$ 36. $\int_{-1}^2 (5x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})\, dx$

37. $\int_{-1}^2 (x - 1)(2x + 3)\, dx$ 38. $\int_2^{-1} 3x(x - 4)\, dx$

39. $\int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + 1)\, dx$

40. $\int_0^{\pi} 3 \cos^2 x\, dx$ 41. $\int_0^{\pi} (\cos x + 4)^2\, dx$

42. $\int_{\pi}^0 (\operatorname{sen} x - 2)^2\, dx$

En los ejercicios 43 a 48, use el teorema 4.5.12 para demostrar que el teorema 4.5.13 es válido para los distintos órdenes de a, b y c.

43. $b < a < c$ 44. $c < a < b$

45. $b < c < a$ 46. $c < b < a$

47. $a = b < c$ 48. $a < c = b$

49. Exprese como una integral definida: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$.

Sugerencia: considere la función f para la cual $f(x) = x^2$.

50. Exprese como una integral definida: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n + i}$

Sugerencia: considere la función f para la cual

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

51. Exprese como una integral definida: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i + n)^2}$

Sugerencia: considere la función f para la cual

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[1, 2]$.

52. Demuestre que si f es continua en $[-1, 2]$, entonces

$$\int_{-1}^2 f(x)\, dx + \int_2^0 f(x)\, dx + \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{-1} f(x)\, dx = 0$$

53. Demuestre que si f es continua en $[-3, 4]$, entonces

$$\int_3^{-1} f(x)\, dx + \int_4^3 f(x)\, dx + \int_{-3}^4 f(x)\, dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\, dx = 0$$

54. Demuestre el teorema 4.5.8.

55. Demuestre el teorema 4.5.9 si $a \geq b$.

56. Suponga que f es integrable en el intervalo cerrado $[-r, r]$, demuestre que:
(a) si f es una función par, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2 \int_0^r f(x)\, dx$;
(b) si f es una función impar, entonces $\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 0$.

57. Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. ¿En qué condiciones el valor de la integral definida de f en $[a, b]$, es igual al área de una región plana que incluya la gráfica de f en $[a, b]$ como un límite? Explique cuándo el valor de la integral definida no es igual a la medida del área de dicha región plana.

4.6 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

En esta sección se continúa el estudio de propiedades de la integral definida. El teorema clave de la sección es el *teorema del valor medio para integrales*, el cual juega un papel importante en la demostración del *primer teorema fundamental del Cálculo* en la siguiente sección.

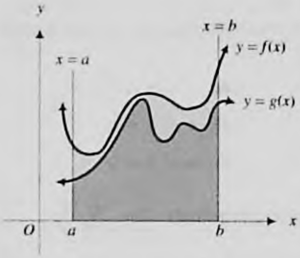


FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 En la figura 1, $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ proporciona la medida del área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, mientras que $\int_a^b g(x)\,dx$ da la medida del área de la región limitada por la gráfica de g y las mismas rectas. En la figura se observa que la primera área es mayor que la segunda. Este hecho ofrece una interpretación geométrica del teorema siguiente cuando $f(x)$ y $g(x)$ son no negativas en $[a, b]$. ◀

4.6.1 Teorema

Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración Como f y g son integrables en $[a, b]$, entonces, por el teorema 4.5.11, con el signo menos en lugar del signo más,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Sea h la función definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Entonces $h(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$ ya que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$.

Se desea demostrar que $\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$. Como

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x$$

suponga que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x = L < 0 \qquad (1)$$

Entonces, por la definición 4.5.1, para $\epsilon = -L$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x - L \right| < -L \qquad (2)$$

Pero como

$$\sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x - L \leq \left| \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x - L \right|$$

de (2) se tiene

$$\text{si } \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x - L < -L$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } \|\Delta\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x < 0$$

Pero este enunciado es imposible, porque cada $h(w_i)$ es no negativo y cada $\Delta_i x > 0$; de modo que se tiene una contradicción a la suposición (1). Por tanto (1) es falsa, y

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} h(w_i)\,\Delta_i x \geq 0$$

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, se tiene

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

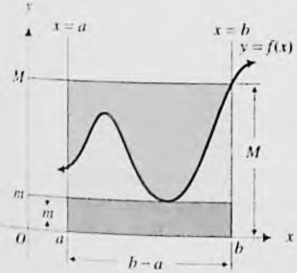


FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En la figura 2, $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, y m y M son, respectivamente, los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de f en $[a, b]$. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ proporciona la medida del área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Esta área es mayor que la del rectángulo cuyas dimensiones son m y $b - a$, y es menor que el área del rectángulo cuyas dimensiones son M y $b - a$. De esta manera, se tiene una interpretación geométrica del siguiente teorema si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. ◀

4.6.2 Teorema

Suponga que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si m y M son, respectivamente, los valores de función mínimo absoluto y máximo absoluto de f en $[a, b]$ de modo que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{para toda } a \leq x \leq b$$

entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Demostración Como f es continua en $[a, b]$, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de m y M.

Por el teorema 4.5.9,

$$\int_a^b m\,dx = m(b - a) \tag{3}$$

y

$$\int_a^b M\,dx = M(b - a) \tag{4}$$

Debido a que f es continua en $[a, b]$, del teorema 4.5.3 se deduce que f es integrable en $[a, b]$. Entonces, como $f(x) \geq m$ para toda x en $[a, b]$, se tiene, por el teorema 4.6.1,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx$$

de donde, al sustituir de (3), se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq m(b - a) \tag{5}$$

De manera semejante, como $M \geq f(x)$ para toda x en $[a, b]$, del teorema 4.6.1 se deduce que

$$\int_a^b M\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

de donde, al sustituir de (4), se tiene

$$M(b - a) \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

Si se combina esta desigualdad con (5) se obtiene

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de $\int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$. Utilice los resultados del ejemplo 1 de la sección 3.4.

Solución Sea

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Entonces del ejemplo 1 de la sección 3.4, f tiene un valor mínimo relativo de 1 en $x = 3$ y un valor máximo relativo de 5 en $x = 1$. Al calcular los valores de la función en los extremos del intervalo $[0.5, 4]$, se obtiene $f(0.5) = 4.125$ y $f(4) = 5$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de f en $[0.5, 4]$ es 1, y el valor máximo absoluto es 5. Con $m = 1$ y $M = 5$ en el teorema 4.6.2, se tiene

$$1(4 - 0.5) \leq \int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leq 5(4 - 0.5)$$

$$3.5 \leq \int_{0.5}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leq 17.5$$

En consecuencia, el intervalo cerrado [3.5, 17.5] contiene el valor de la integral definida. ◀

En el ejemplo ilustrativo 4 de la sección 4.7, se mostró que el valor exacto de la integral definida del ejemplo anterior es $\frac{679}{64} = 10.61$.

▶ **EJEMPLO 2** Aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx$. Apoye la respuesta utilizando NINT en la graficadora.

Solución Si $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Para x en $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, $f'(x) = 0$ cuando $x = \frac{1}{2}\pi$. Como $f'(x) > 0$ cuando $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, y $f'(x) < 0$ cuando $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$, se concluye que f tiene un valor mínimo relativo en $\frac{1}{2}\pi$; y $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Además, $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt[4]{2}/\sqrt{2} \approx 0.841$, y $f(\frac{3}{4}\pi) \approx 0.841$. Así, en $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ el valor mínimo absoluto de f es 0.841 y el valor máximo absoluto es 1. De esta manera, con $m = 0.841$ y $M = 1$ en el teorema 4.6.2

$$0.841\,[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi] \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \le 1[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi]$$

$$0.420\pi \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \le 0.5\pi$$

$$1.32 \le \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \;\; 1.57$$

Por tanto, el valor de la integral definida está en el intervalo cerrado [1.32, 1.57].

En la graficadora se tiene

$$\text{NINT}(\sqrt{\operatorname{sen} x}, \pi/4, 3\pi/4) = 1.48861$$

lo cual apoya la respuesta. ◀

Ahora está preparado para estudiar el teorema del valor medio para integrales. Se inicia con un ejemplo ilustrativo que ofrece una interpretación geométrica del teorema.

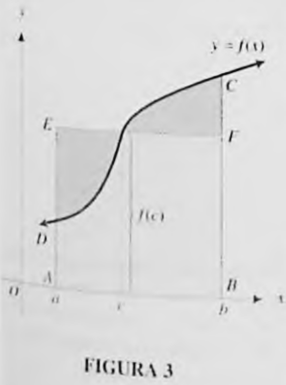


FIGURA 3

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Considere $f(x) \ge 0$ para todos los valores de x en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ proporciona el área de la región limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Consulte la figura 3. El teorema del valor medio para integrales afirma que existe un número c en $[a, b]$ tal que el área del rectángulo $AEFB$ de altura $f(c)$ unidades y ancho $(b - a)$ unidades es igual al área de la región $ADCB$. ◀

4.6.3 Teorema del valor medio para integrales

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Demostración Como f es continua en $[a, b]$, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor máximo relativo y un valor mínimo relativo en $[a, b]$.

Sea m el valor mínimo relativo que ocurre en $x = x_m$. Así,

$$f(x_m) = m \qquad a \le x_m \le b \tag{6}$$

Sea M el valor máximo relativo que ocurre en $x = x_M$. Entonces

$$f(x_M) = M \qquad a \le x_M \le b \tag{7}$$

Por tanto,

$$m \le f(x) \le M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a, b]$$

Por el teorema 4.6.2

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a)$$

Al dividir entre $b - a$ y observando que $b - a$ es positivo, puesto que $b > a$, se obtiene

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \le M$$

Pero de (6) y (7), $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$; por lo que se tiene

$$f(x_m) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \le f(x_M)$$

De esta última desigualdad y del teorema del valor intermedio existe un número c en un intervalo cerrado que contiene a x_m y x_M tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a) \qquad a \le c \le b$$ ■

El valor de c en el teorema del valor medio para integrales no es necesariamente único. El teorema no proporciona un método para obtener c, pero afirma que un valor de c existe, y este hecho se utiliza para demostrar otros teoremas. En algunos casos particulares se puede determinar el valor de c garantizado por el teorema, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = x^2$, determine el valor de c con aproximación de centésimos tal que

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(c)(3 - 1)$$

Aproxime el valor de la integral definida empleando NINT en la graficadora.

Solución Se calcula

$$\text{NINT}(x^2, 1, 3) = 8.667$$

Por tanto, se desea obtener c tal que

$$f(c)(2) = 8.667$$

esto es,

$$\begin{aligned} c^2 &= 4.333 \\ c &= \pm 2.08 \end{aligned}$$

Se rechaza -2.08 porque no está en el intervalo $[1, 3]$, y se tiene

$$\int_1^3 f(x)\,dx = f(2.08)(3 - 1)$$ ◀

El valor $f(c)$ dado por el teorema del valor medio para integrales se denomina **valor promedio (o valor medio)** de f en el intervalo $[a, b]$. Es una generalización de la media aritmética de un conjunto finito de números. Es decir, si $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ es un conjunto de n números, entonces la media aritmética de estos números está dada por

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Para generalizar esta definición, considere una partición regular del intervalo cerrado $[a, b]$, el cual se divide en n subintervalos de longitud igual a $\Delta x = (b - a)/n$. Sea w_i cualquier número del i-ésimo subintervalo. Considere la suma:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{n} \tag{8}$$

Este cociente corresponde a la media aritmética de n números. Como $\Delta x = (b - a)/n$ se tiene

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \tag{9}$$

Si se sustituye de (9) en (8) se obtiene

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b - a}$$

Al tomar el límite cuando $n \to +\infty$ (o $\Delta x \to 0$) se tiene, si el límite existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Este resultado conduce a la siguiente definición.

4.6.4 Definición del valor promedio de una función

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor promedio** de f en $[a, b]$ es

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

EJEMPLO 4 Si $f(x) = x^2$, determine el valor promedio de f en el intervalo $[1, 3]$ e interprete geométricamente el resultado.

Solución En el ejemplo 3, se obtuvo NINT(x^2, 1, 3) = 8.667. Utilizando este número como el valor de la integral definida, se tiene

$$\int_1^3 x^2\,dx = 8.667$$

De modo que si V.P. es el valor promedio de f en $[1, 3]$, entonces

$$\text{V.P.} = \frac{8.667}{3-1}$$
$$= 4.33$$

En el ejemplo 3, se obtuvo para esta función

$$f(2.08) = 4.33$$

Por tanto, el valor promedio de f ocurre en $x = 2.08$. La figura 4 muestra la gráfica de f en $[1, 3]$ y el segmento de recta desde el punto $E(2.08, 0)$ en el eje x, hasta el punto $F(2.08, 4.33)$ de la gráfica de f. El área del rectángulo $AGHB$, que tiene altura 4.33 y ancho 2, es igual al área de la región $ACDB$. En consecuencia, el área de la región sombreada CGF es igual al área de la región sombreada FDH. ◀

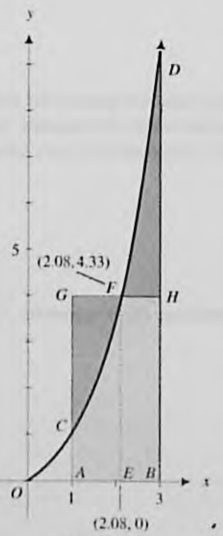


FIGURA 4

Una aplicación del valor promedio de una función se presenta en física e ingeniería en relación al concepto de *centro de masa*, discutido en el capítulo 6.

EJERCICIOS 4.6

En los ejercicios 1 a 4, aplique el teorema 4.6.1 para determinar cuál de los símbolos ≥ o ≤ se debe insertar en el espacio en blanco para tener una desigualdad correcta. Apoye su respuesta utilizando NINT en la graficadora.

1. $\int_{-1}^{3}(2x^2-4)\,dx$ ——— $\int_{-1}^{3}(x^2-6)\,dx$

2. $\int_{4}^{5}\sqrt{6-x}\,dx$ ——— $\int_{4}^{5}\sqrt{x-2}\,dx$

3. $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\operatorname{sen}^2 x\,dx$ ——— $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4}\cos^2 x\,dx$

4. $\int_{0}^{\pi/4}\cos x\,dx$ ——— $\int_{0}^{\pi/4}\operatorname{sen} x\,dx$

En los ejercicios 5 a 20, aplique el teorema 4.6.2 para determinar un intervalo cerrado que contenga el valor de la integral definida. Apoye la respuesta empleando NINT en la graficadora.

5. $\int_{0}^{0.5}x^2\,dx$

6. $\int_{-0.5}^{1}x^3\,dx$

7. $\int_{-1}^{1}\sqrt{2+x}\,dx$

8. $\int_{-2}^{1}(x+1)^{2/3}\,dx$

9. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\operatorname{sen} x\,dx$

10. $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3}\cos x\,dx$

11. $\int_{1.5}^{3}|x-2|\,dx$

12. $\int_{-1}^{2}\sqrt{x^2+5}\,dx$

13. $\int_{-0.5}^{1.5}(\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2)\,dx$

14. $\int_{0}^{1.5}(x-3x^{1/3})\,dx$

15. $\int_{1}^{2}x\sqrt{5-x^2}\,dx$

16. $\int_{1.5}^{2.5}x\sqrt{3-x}\,dx$

17. $\int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\,dx$

18. $\int_{0}^{1}\frac{x+5}{x-3}\,dx$

19. $\int_{\pi/3}^{\pi/2}(4\cos^3 x-9\cos x)\,dx$

20. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\operatorname{sen}^3 x\,dx$

En los ejercicios 21 a 32, calcule con aproximación de centésimos el valor de c que satisfaga el teorema del valor medio para integrales. Para el valor de la integral definida, utilice NINT en la graficadora.

21. $\int_{0}^{2}x^2\,dx$

22. $\int_{2}^{4}x^2\,dx$

23. $\int_{1}^{2}x^3\,dx$

24. $\int_{0}^{5}(x^3-1)\,dx$

25. $\int_{1}^{4}(x^2+4x+5)\,dx$

26. $\int_{0}^{4}(x^2+x-6)\,dx$

27. $\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dx$

28. $\int_{-2}^{1}x^4\,dx$

29. $\int_{2}^{4}\frac{1}{x^2-3}\,dx$

30. $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2+5}\,dx$

31. $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\tan x\,dx$

32. $\int_{2\pi/3}^{5\pi/6}\cot x\,dx$

En los ejercicios 33 a 40, aplique el teorema del valor medio para integrales para probar la desigualdad.

33. $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2+4}\,dx\le\frac{1}{2}$

34. $\int_{-3}^{3}\frac{1}{x^2+6}\,dx\le 1$

35. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos x^2\,dx\le\frac{\pi}{3}$

36. $\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx\le\pi$

37. $0\le\int_{2}^{5}\frac{1}{x^3+1}\,dx\le\frac{1}{3}$

38. $\sqrt{2}\le\int_{5}^{9}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx\le 2$

39. $0\le\int_{0}^{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi x\,dx\le 2$

40. $0\le\int_{-1/2}^{1/2}\cos\pi x\,dx\le 1$

41. Dado que $\int_{-1}^{2}x\,dx=\frac{3}{2}$, calcule el valor promedio de la función identidad en el intervalo $[-1, 2]$. También determine el valor de x en el que se obtiene el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

42. Obtenga el valor promedio de la función f definida por $f(x)=x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ dado que $\int_{-1}^{2}x^2\,dx=3$. También determine el valor de x en el cual ocurre el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

43. Dado que sen $\int_{0}^{\pi}x\,dx=2$, calcule el valor promedio de la función seno en el intervalo $[0, \pi]$. También determine el menor valor de x en el que se obtiene el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

44. Obtenga el valor promedio de la función f definida por $f(x)=\sec^2 x$ en el intervalo $[0, \frac{1}{4}\pi]$ dado que $\int_{0}^{\pi/4}\sec^2 x\,dx=1$. También determine el valor de x en el que ocurre el valor promedio. Describa la interpretación geométrica de los resultados.

45. Suponga que se deja caer una pelota y después de t segundos su velocidad es v pies por segundo. Sin considerar la resistencia del aire, exprese v en términos de t como $v = f(t)$, y calcule el valor promedio de f en $[0, 2]$. *Sugerencia:* calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por un triángulo.

46. Determine el valor promedio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ en el intervalo $[0, 7]$. Dibuje una figura. *Sugerencia:* calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por un cuarto de circunferencia y los ejes coordenados.

47. Determine el valor promedio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[-4, 4]$. Dibuje una figura. *Sugerencia:* calcule el valor de la integral definida interpretándolo como el valor del área de una región limitada por una semicircunferencia.

48. Suponga que f es integrable en $[-4, 7]$. Si el valor promedio de f en el intervalo $[-4, 7]$ es 4.25, calcule $\int_{-4}^{7} f(x)\,dx$.

49. Demuestre que $\int_0^1 x\,dx \geq \int_0^1 x^2\,dx$ y que $\int_1^2 x\,dx \leq \int_1^2 x^2\,dx$. No evalúe las integrales definidas.

50. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

51. Si f es continua en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, demuestre que existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

52. El teorema siguiente es una generalización del teorema del valor medio para integrales: Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $g(x) > 0$ para toda x del intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Demuestre este teorema mediante un método semejante al empleado en la demostración del teorema 4.6.3: obtenga la desigualdad $m \leq f(x) \leq M$ y después concluya que $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$; aplique el teorema 4.6.1 y proceda como en la demostración del teorema 4.6.3.

53. Demuestre que cuando $g(x) = 1$, el teorema del ejercicio 52 se convierte en el teorema del valor medio para integrales.

En los ejercicios 54 a 58, utilice el teorema del ejercicio 52 para comprobar la desigualdad.

54. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\,dx}{x^3 + 2} < \int_0^4 x\,dx$

55. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^1 x^2\,dx$

56. $\displaystyle\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx \leq \int_0^\pi x\,dx$

57. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}^2 \pi x \cos \pi x\,dx \leq \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\,dx$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1}\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$

4.7 TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

Ahora que posee los elementos necesarios, en esta sección se establecerán y demostrarán los dos teoremas fundamentales del Cálculo, los cuales son la conexión entre el *Cálculo Diferencial* y el *Cálculo Integral*.

Históricamente, los conceptos básicos de la integral definida fueron utilizados por los antiguos griegos, principalmente **Arquímedes** (287-212 a.C.), hace más de 2 000 años. Eso ocurrió muchos años antes de que fuese descubierto el Cálculo Diferencial en el siglo XVII cuando Newton y Leibniz, casi al mismo tiempo pero trabajando en forma independiente, mostraron cómo determinar el área de una región limitada por una curva o un conjunto de curvas aplicando la antiderivación para evaluar una integral definida. Este procedimiento condujo a los destacados teoremas fundamentales del Cálculo. Se inicia el estudio de estos teoremas considerando integrales definidas que tienen una variable como límite superior.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ depende sólo de f y de los números a y b, y no del símbolo x, utilizado aquí como la variable independiente. Se pudo haber empleado cualquier otro símbolo en lugar de x; por ejemplo, del resultado del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 4.5

$$\int_0^3 t^2\,dt = 9 \qquad \int_0^3 u^2\,du = 9 \qquad \int_0^3 r^2\,dr = 9$$

Ahora considere que el símbolo x representa un número del intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, como f es continua en $[a, b]$, es continua en $[a, x]$. En consecuencia, por el teorema 4.5.3, $\int_a^x f(t)\,dt$ existe. Además, esta integral definida es un número único cuyo valor depende de x. Por tanto, $\int_a^x f(t)\,dt$ define una función F que tiene como dominio al intervalo $[a, b]$ y cuyo valor de función en cualquier número x de $[a, b]$ está dado por

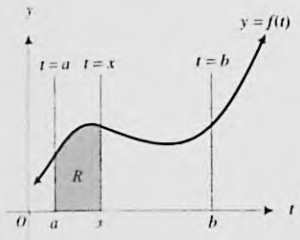
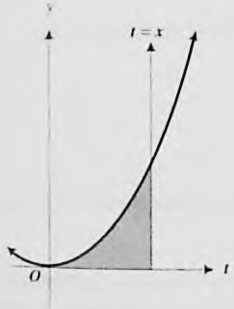


FIGURA 1

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

Como observación acerca de la notación, si los límites de una integral definida son variables, entonces se utilizan símbolos diferentes para dichos límites y la variable independiente del integrando. En consecuencia, en (1), como x es el límite superior, se emplea la letra t como la variable independiente del integrando.

Si, en (1), $f(t) \geq 0$ para todos los valores de t en $[a, b]$, entonces el valor de función $F(x)$ puede interpretarse geométricamente como la medida del área de la región R limitada por la curva cuya ecuación es $y = f(t)$, el eje t y las rectas $t = a$ y $t = x$. Consulte la figura 1. Observe que $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt$, lo cual, por la definición 4.5.6, es igual a 0. En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra como avance la importancia del *primer teorema fundamental del Cálculo* al aplicar esta interpretación geométrica en un caso particular.



$y = t^2$

FIGURA 2

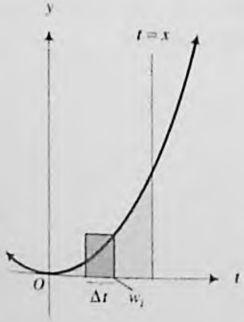
EJEMPLO ILUSTRATIVO 1

Sea

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt$$

La figura 2 muestra la región cuyos límites son: por arriba, la gráfica de $y = t^2$; por abajo, el eje t; y por los lados, el eje y y la recta $t = x$. Como la medida del área de esta región es $F(x)$, puede determinarse $F(x)$ calculando el área como el límite de una suma de Riemann.

Se toma una partición regular del intervalo $[0, x]$ y se elige w_i como el extremo derecho del i-ésimo subintervalo. Por tanto, se están empleando rectángulos circunscritos como se muestra en la figura 3.



w_i

$y = t^2$

FIGURA 3

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\,\Delta t$$

Como $f(t) = t^2$ y $w_i = i\,\Delta t$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [i^2 (\Delta t)^2]\,\Delta t \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2\,(\Delta t)^3 \end{aligned}$$

Ahora se sustituye Δt por x/n:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 \left(\frac{x}{n}\right)^3 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\
&= x^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \\
&= \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $F'(x) = x^2$, esto es,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\,dt = x^2$$

Se ha mostrado entonces que, en este caso particular, cuando $f(t) = t^2$ y $a = 0$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

la cual es la ecuación crucial del enunciado del primer teorema fundamental del Cálculo. ◀

Ahora se establecerá y demostrará el primer teorema fundamental del Cálculo, que proporciona la derivada de una función considerada como una integral definida que tiene un límite superior variable.

4.7.1 Primer teorema fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x cualquier número de $[a, b]$. Si F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

entonces

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \tag{3}$$

(Si $x = a$, la derivada en (2) puede ser una derivada por la derecha, y si $x = b$, puede ser una derivada por la izquierda.)

Demostración Considere dos números x_1 y $x_1 + \Delta x$ en $[a, b]$. Entonces

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt$$

y

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

de modo que

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt \qquad \textbf{(4)}$$

Por el teorema 4.5.13,

$$\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

entonces

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt$$

Al sustituir de esta ecuación en (4) se tiene

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt \qquad \textbf{(5)}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe algún número c en el intervalo cerrado limitado por x_1 y $x_1 + \Delta x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x$$

De esta ecuación y (5) se obtiene

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(c)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(c)$$

Al tomar el límite cuando Δx se aproxima a 0 se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \qquad \textbf{(6)}$$

El miembro izquierdo de (6) es $F'(x_1)$. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$, recuerde que c está en el intervalo cerrado limitado por x_1 y $x_1 + \Delta x$, y como

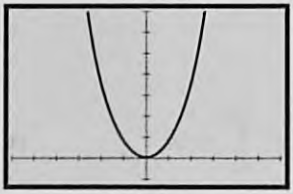
$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

se deduce del teorema de estricción (1.10.1) que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} c = x_1$. Así, se tiene $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x_1} f(c)$. Debido a que f es continua en x_1, $\lim\limits_{c \to x_1} f(c) = f(x_1)$; por lo que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x_1)$, y de (6) se obtiene

$$F'(x_1) = f(x_1) \qquad \textbf{(7)}$$

Si la función f no está definida para valores de x menores que a pero es continua por la derecha en a, entonces en el argumento anterior, si $x_1 = a$ en (6), Δx debe aproximarse a 0 por la derecha. Por tanto, el miembro izquierdo de (7) será $F'_+(x_1)$. De manera semejante, si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua por la izquierda en b, entonces si $x_1 = b$ en (6), Δx debe aproximarse a 0 por la izquierda. En consecuencia, se tiene $F'_-(x_1)$ en el miembro izquierdo de (7).

Como x_1 es cualquier número de $[a, b]$, la ecuación (7) establece lo que se deseaba. ∎



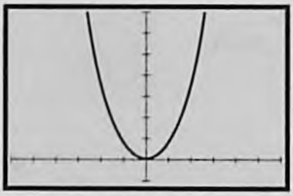
$[-6, 6]$ por $[-1, 7]$

$f(x) = x^2$

FIGURA 4

Recuerde que el primer teorema fundamental del Cálculo afirma que la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$ con límite superior x es una antiderivada de f si f es continua. Este hecho se muestra gráficamente en el ejemplo ilustrativo siguiente para la función del ejemplo ilustrativo 1.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 La figura 4 muestra la gráfica de f del ejemplo ilustrativo 1, definida por $f(x) = x^2$, trazada en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-1, 7]$. La figura 5 presenta la gráfica de NDER(NINT(t^2, 0, x), x) trazada en el mismo rectángulo de inspección. Estas gráficas parecen idénticas, lo cual apoya el hecho de que $\int_0^x t^2\,dt$ es una antiderivada de f. ◀



$[-6, 6]$ por $[-1, 7]$

NDER (NINT(t^2, 0, x), x)

FIGURA 5

EJEMPLO 1 Calcule las derivadas siguientes:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt$

Solución

(a) De (3) con $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{x^3+1}$$

(b) Con $u = x^2$ en la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\,dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (3) con $f(t) = \sqrt{\cos t}$ y como $\dfrac{du}{dx} = 2x$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt &= \sqrt{\cos u}\,(2x)\\ &= 2x\sqrt{\cos x^2}\end{aligned}$$ ◀

Ahora se aplicará el primer teorema fundamental del Cálculo para demostrar el *segundo teorema fundamental del Cálculo*.

4.7.2 Segundo teorema fundamental del Cálculo

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea g una función tal que

$$g'(x) = f(x) \tag{8}$$

para toda x en $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$$

(Si $x = a$, la derivada en (8) puede ser una derivada por la derecha, y si $x = b$, la derivada en (8) puede ser una derivada por la izquierda.)

Demostración Si f es continua en todos los números de $[a, b]$, se sabe, por el primer teorema fundamental del Cálculo, que la integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, con límite superior variable x, define una función F cuya derivada en $[a, b]$ es f. Como por hipótesis $g'(x) = f(x)$, se deduce, por el teorema 4.1.2, que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$$

donde k es alguna constante. Al considerar $x = b$ y $x = a$, sucesivamente, en esta ecuación se obtiene

$$g(b) = \int_a^b f(t)\,dt + k \tag{9}$$

y

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt + k \tag{10}$$

De (9) y (10),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

Pero por la definición 4.5.6, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$; por lo que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

que es lo que se deseaba demostrar.

Si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua por la izquierda en b, entonces la derivada en (8) es una derivada por la izquierda, y se tiene $g'_-(b) = F'_-(b)$, de donde se deduce (9). En forma similar, si f no está definida para valores de x menores que a pero es continua por la derecha en a, entonces la derivada en (8) es una derivada por la derecha, y se tiene $g'_+(a) = F'_+(a)$, de donde se concluye (10). ∎

Ahora se puede obtener el valor exacto de una integral definida aplicando el segundo teorema fundamental del Cálculo. En el cálculo se denota

$$[g(b) - g(a)] \quad \text{por} \quad g(x)\Big]_a^b$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Evalúe

$$\int_1^2 x^4\, dx$$

Como una antiderivada de x^4 es $x^5/5$, por el segundo teorema fundamental del Cálculo se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^4\, dx &= \frac{x^5}{5}\Big]_1^2\\ &= \tfrac{32}{5} - \tfrac{1}{5}\\ &= \tfrac{31}{5}\end{aligned}$$

Debido a la relación entre integrales definidas y derivadas, se utiliza el símbolo integral $\int$ en la notación $\int f(x)\, dx$ para una antiderivada. Haga caso omiso de la terminología de antiderivadas y de antiderivación y comience a llamar a $\int f(x)\, dx$ **integral indefinida.** El proceso de evaluación de una integral indefinida o una integral definida se denomina **integración.**

La diferencia entre una integral indefinida y una integral definida debe enfatizarse. La integral indefinida $\int f(x)\, dx$ representa a todas las funciones cuya derivada es $f(x)$. Sin embargo, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ es un número cuyo valor depende de la función f y de los números a y b, y está definido como el límite de una suma de Riemann. La definición de la integral definida no hace referencia a la diferenciación.

La integral indefinida implica una constante arbitraria; por ejemplo

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta constante arbitraria C recibe el nombre de **constante de integración.** En la aplicación del segundo teorema fundamental para evaluar una integral definida, no fue necesario incluir la constante arbitraria C en la expresión para $g(x)$ porque el teorema permite elegir *cualquier* antiderivada, incluyendo aquella en la que $C = 0$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 De la propiedad aditiva de las integrales definidas, establecida en el teorema 4.5.11 y el segundo teorema fundamental, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx\\ &\quad= \int_{1/2}^4 x^3\, dx - 6\int_{1/2}^4 x^2\, dx + 9\int_{1/2}^4 x\, dx + \int_{1/2}^4 dx\\ &\quad= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\Big]_{1/2}^4\\ &\quad= (64 - 128 + 72 + 4) - \left(\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2}\right)\\ &\quad= \tfrac{679}{64}\end{aligned}$$

En el ejemplo 1 de la sección 4.6, se mostró que el valor de esta integral definida está en el intervalo [3.5, 17.5], lo que está de acuerdo con el resultado obtenido en el ejemplo ya que $\frac{679}{64} = 10.61$. ◀

Los ejemplos siguientes muestran la aplicación del segundo teorema fundamental. Por supuesto, las respuestas pueden apoyarse empleando NINT en la graficadora.

▶ ***EJEMPLO 2*** Evalúe

$$\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\,dx &= \tfrac{3}{7}x^{7/3} + 4\cdot\tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_{-1}^{1}\\ &= \tfrac{3}{7} + 3 - (-\tfrac{3}{7} + 3)\\ &= \tfrac{6}{7}\end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 3*** Evalúe

$$\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Solución

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \frac{2}{3}\int_{0}^{2}\sqrt{x^3+1}\,(3x^2\,dx)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x^3+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{0}^{2}\\ &= \tfrac{4}{9}(8+1)^{3/2} - \tfrac{4}{9}(0+1)^{3/2}\\ &= \tfrac{4}{9}(27-1)\\ &= \tfrac{104}{9}\end{aligned}$$ ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Evalúe

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}\,dx$$

Solución Para evaluar la integral indefinida $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ se considera

$$u = \sqrt{1+x} \qquad u^2 = 1+x \qquad x = u^2-1 \qquad dx = 2u\,du$$

Al sustituir se tiene

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u^2-1)u(2u\,du)\\ &= 2\int (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3 + C\\ &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Por tanto, la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3\\ &= \tfrac{2}{5}(4)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(4)^{3/2} - \tfrac{2}{5}(1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1)^{3/2}\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{5}\end{aligned}$$

◀

Otro método para evaluar la integral definida del ejemplo 4 consiste en considerar la fórmula que se deduce del segundo teorema fundamental y de la regla de la cadena para la antiderivación (4.2.1). De estos teoremas, si F es una antiderivada de f,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Así

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du} \qquad (11)$$

Con el objeto de aplicar (11), cambie las variables de la integral dada considerando $u = g(x)$. Entonces $du = g'(x)\,dx$. Después, cambie los límites a y b, relativos a x, por los límites relativos a u, los cuales son $g(a)$ y $g(b)$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

Para evaluar la integral del ejemplo 4, sea $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2 - 1$ y $dx = 2u\,du$. Además, cuando $x = 0$, $u = 1$, y cuando $x = 3$, $u = 2$. De modo que, de (11) se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= 2\int_1^2 (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\Big]_1^2\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$

◀

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$$

Solución Sean

$$u = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad du = \cos x \, dx$$

Cuando $x = 0, u = 0$; cuando $x = \frac{1}{2}\pi, u = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx &= \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \frac{u^4}{4}\Big]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx$$

Solución

$$|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \le x \end{cases}$$

Del teorema 4.5.13,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx &= \int_{-3}^{-2} (-x - 2)\, dx + \int_{-2}^{4} (x + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{4} \\ &= [(-2 + 4) - (-\tfrac{9}{2} + 6)] + [(8 + 8) - (2 - 4)] \\ &= \tfrac{1}{2} + 18 \\ &= \tfrac{37}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 En un circuito eléctrico, E volts es la fuerza electromotriz a los t segundos y

$$E = 2 \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi t$$

Determine la fuerza electromotriz promedio de 0 s a 4 s.

Solución Se calcula el valor promedio de E en $[0, 4]$. Si V.P. es este valor promedio, de la definición 4.6.4 se tiene

$$\begin{aligned} \text{V.P.} &= \frac{1}{4 - 0} \int_0^4 2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi t \, dt \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2\pi} \int_0^4 2 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi t \left(\frac{2}{3}\pi \, dt\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4\pi}\left[-\cos\frac{2}{3}\pi t\right]_0^4$$
$$= \frac{3}{4\pi}\left(-\cos\frac{8}{3}\pi + \cos 0\right)$$
$$= \frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$$
$$= 0.358$$

Conclusión: La fuerza electromotriz promedio de 0 s a 4 s es 0.358 volts.

EJERCICIOS 4.7

En los ejercicios 1 a 34, evalúe la integral definida. En los ejercicios 1 a 6 y 29 a 34, apoye la respuesta empleando NINT *en la graficadora.*

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$
2. $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1)\,dx$
3. $\int_3^6 (x^2 - 2x)\,dx$
4. $\int_{-1}^3 (3x^2 + 5x - 1)\,dx$
5. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$
6. $\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)\,dy$
7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}\,dz$
8. $\int_1^4 \sqrt{x}(2 + x)\,dx$
9. $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}\,dx$
10. $\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2+1}\,dt$
11. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4-w^2}\,dw$
12. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(y+2)^3}\,dy$
13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$
14. $\int_0^{\pi} \cos\frac{1}{2}x\,dx$
15. $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dt$
16. $\int_1^3 \frac{x}{(3x^2-1)^3}\,dx$
17. $\int_0^1 \frac{y^2+2y}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}\,dy$
18. $\int_2^4 \frac{w^4-w}{w^3}\,dw$
19. $\int_0^{15} \frac{w}{(1+w)^{3/4}}\,dw$
20. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}\,dx$
21. $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$
22. $\int_{-4}^4 |x-2|\,dx$
23. $\int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x}\,dx$
24. $\int_{-3}^3 \sqrt{3+|x|}\,dx$
25. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$
26. $\int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x+3}\,dx$
27. $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$
28. $\int_1^4 \frac{x^5-x}{3x^3}\,dx$

Sugerencia: divida el numerador entre el denominador.

29. $\int_1^{64} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt[3]{t}\right)dt$
30. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}}\,dx$
31. $\int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\cos\pi x\,dx$
32. $\int_0^{\pi/6} (\operatorname{sen} 2x + \cos 3x)\,dx$
33. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} 3\csc^2 2x\,dx$
34. $\int_0^{1/2} \sec^2\frac{1}{2}\pi t\tan\frac{1}{2}\pi t\,dt$

En los ejercicios 35 a 44, obtenga la derivada.

35. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt$
36. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{1+t^4}\,dt$
37. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt$
38. $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4+4}\,dt$
39. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{1}{3+t^2}\,dt$
40. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)\,dt$
41. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$
42. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

43. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{\tan x} \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$ 44. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{\operatorname{sen} x} \dfrac{1}{1-t^2}\,dt$

En los ejercicios 45 a 48, calcule el valor promedio de la función f en el intervalo [a, b]. En los ejercicios 45 y 46, determine el valor de x en el que el valor promedio ocurre y describa la interpretación geométrica de los resultados.

45. $f(x) = 9 - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$

46. $f(x) = 8x - x^2$; $[a, b] = [0, 4]$

47. $f(x) = 3x\sqrt{x^2 - 16}$; $[a, b] = [4, 5]$

48. $f(x) = x^2\sqrt{x - 3}$; $[a, b] = [7, 12]$

49. Para el circuito eléctrico del ejemplo 7, determine la raíz cuadrada del valor promedio de E^2 de $t = 0$ a $t = 4$. *Sugerencia:* utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

50. Si $f(x) = \sec^2 x$, determine el valor promedio de f en el intervalo $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$.

51. Se deja caer una pelota, y después de t segundos su velocidad es v pies por segundo. Sin considerar la resistencia del aire, demuestre que la velocidad promedio durante los primeros $\frac{1}{2}T$ segundos es un tercio de la velocidad promedio durante los siguientes $\frac{1}{2}T$ segundos.

52. Se lanza una piedra hacia abajo con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. No considere la resistencia del aire. **(a)** Demuestre que si v pies por segundo es la velocidad de la piedra después de que cae s pies, entonces $v = \sqrt{v_0^2 + 2gs}$. **(b)** Determine la velocidad promedio durante los primeros 100 pie de caída si la velocidad inicial es de 60 pie/s. (Tome $g = 32$ pie/s^2 y el sentido positivo hacia abajo.)

53. Si una inversión produce interés a una tasa de $100r(t)\%$ *compuesto continuamente* durante un periodo de T años, entonces la tasa de interés promedio $100R(T)\%$ durante T años está definida por

$$R(T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt$$

Demuestre que

$$R'(T) = \frac{r(T) - R(T)}{T}$$

Nota: El interés *compuesto continuamente* será definido precisamente en la sección 5.6.

54. Sea

$$I = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x) + f(k - x)}\,dx \qquad (12)$$

donde f es continua en $[0, k]$ y $f(x) + f(k - x) \neq 0$ si x está en $[0, k]$. **(a)** Demuestre que $I = \frac{1}{2}k$. *Sugerencia:* cambie la variable en (12) considerando $u = k - x$ y muestre que

$$I = \int_0^k \frac{f(k - u)}{f(u) + f(k - u)}\,du \qquad (13)$$

Cambie la variable en (13) a x y muestre qu $2I = k$. **(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = \frac{1}{4}\pi$$

55. Sea

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\,dt$$

donde $x \neq 0$. Demuestre que F es constante en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. *Sugerencia:* muestre que $F'(x) = 0$ para toda $x \neq 0$.

56. Encuentre una función f tal que para cualquier número real x

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{\cos x}{1 + x^2} - 1$$

Sugerencia: tome la derivada en los miembros de la ecuación.

57. Si m y n son números enteros positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^m(1 - x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1 - x)^m\,dx$$

Esta integral surge en aplicaciones de Probabilidad, Análisis combinatorio y Teoría cinética de la materia.

58. Sea f una función cuya derivada f' es continua en $[a, b]$. Calcule el valor promedio de la pendiente de la recta tangente de la gráfica de f en $[a, b]$, y dé una interpretación geométrica del resultado.

59. Determine $\displaystyle\int_4^{10}\left[D_x\int_5^x (2\sqrt{t} - 1)\,dt\right]dx$.

60. **(a)** Sea $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Trace las gráficas de f y NDER(NINT($f(t)$, 0, x), x) en el mismo rectángulo de inspección y muestre que las gráficas son las mismas. **(b)** Repita el inciso (a) considerando ahora $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$. **(c)** ¿Qué teorema o teoremas apoyan los incisos (a) y (b)? Explique su respuesta.

61. Explique por qué cada función continua debe tener una antiderivada. ¿Qué garantiza este hecho?

4.8 ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

En la sección 4.4 se definió el área de una región plana como el límite de una suma de Riemann, y en la sección 4.5 se dijo que dicho límite es una integral. Ahora que ha aprendido algunas técnicas para calcular integrales definidas, se considerarán más problemas que implican áreas de regiones planas.

En los ejemplos que se presentan a continuación, se empieza expresando el área requerida como el límite de una suma de Riemann, a fin de reafirmar el procedimiento utilizado en la expresión de dichas sumas para aplicaciones posteriores en las secciones 4.9 y 4.10 y el capítulo 6.

EJEMPLO 1 Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por la curva

$$y = x\sqrt{x^2 + 5}$$

el eje x y la recta $x = 2$.

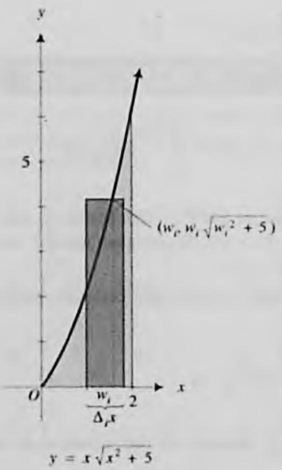


FIGURA 1

Solución La figura 1 muestra la región junto con uno de los elementos rectangulares de área.

Considere una partición del intervalo $[0, 2]$. El ancho del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$ unidades, y la altura es $w_i\sqrt{w_i^2 + 5}$ unidades, donde w_i es cualquier número del i-ésimo subintervalo. Por tanto, el área del elemento rectangular es $w_i\sqrt{w_i^2 + 5}\,\Delta_i x$. La suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos como éste es

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2 + 5}\,\Delta_i x$$

la cual es una suma de Riemann. El límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a 0 proporciona la medida del área deseada. El límite de la suma Riemann es una integral definida que se evalúa mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo. Sean A unidades cuadradas el área de la región, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i\sqrt{w_i^2 + 5}\,\Delta_i x \\
&= \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{x^2 + 5}\,(2x\,dx) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(x^2 + 5)^{3/2}\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{1}{3}[(9)^{3/2} - (5)^{3/2}] \\
&= \tfrac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}) \\
&\approx 5.27
\end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El área de la región es $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$ unidades cuadradas, o aproximadamente 5.27 unidades cuadradas.

Hasta este momento se ha considerado el área de una región para la cual los valores de función en $[a, b]$ son no negativos. Suponga ahora que $f(x) < 0$ para toda x en $[a, b]$. Entonces cada $f(w_i)$ es un número negativo; por lo que se define el número de unidades cuadradas del área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, como

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(w_i)] \Delta_i x$$

lo cual es igual a

$$-\int_a^b f(x)\, dx$$

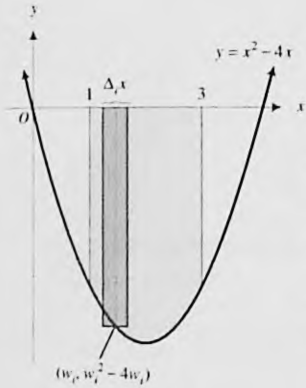


FIGURA 2

EJEMPLO 2

Calcule el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - 4x$$

el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución En la figura 2 se presenta la región y un elemento rectangular de área.

Se toma una partición del intervalo $[1, 3]$; el ancho del i-ésimo rectángulo es $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ en $[1, 3]$, la altura del i-ésimo rectángulo es $-(w_i^2 - 4w_i) = 4w_i - w_i^2$. En consecuencia, la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos está dada por

$$\sum_{i=1}^{n} (4w_i - w_i^2)\, \Delta_i x$$

La medida del área deseada es proporcionada por el límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a 0; de modo que si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (4w_i - w_i^2)\, \Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2)\, dx \\ &= 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_1^3 \\ &= \tfrac{22}{3} \end{aligned}$$

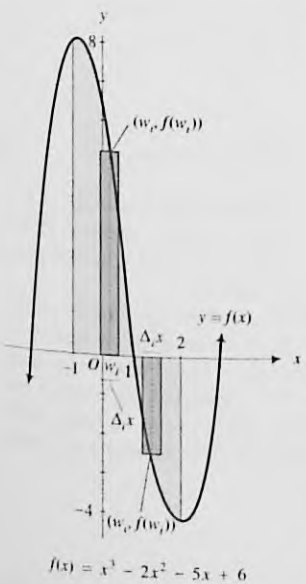


FIGURA 3

__Conclusión:__ El área de la región es $\frac{22}{3}$ unidades cuadradas. ◀

EJEMPLO 3

Determine el área de la región limitada por la curva

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 3. Sea

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Como $f(x) \geq 0$ cuando x está en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y $f(x) \leq 0$ cuando x está en el intervalo cerrado $[1, 2]$, se separa la región en dos partes. Sea A_1 el número de unidades cuadradas del área de la región cuando x está en $[-1, 1]$, y sea A_2 el número de unidades cuadradas del área de la región cuando x está en $[1, 2]$. Entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(w_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_{1}^{2} -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\ dx \end{aligned}$$

Si A unidades cuadradas es el área de la región completa, entonces

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{2} \\ &= \left[\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6\right) - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} - 6\right)\right] \\ &\qquad - \left[\left(4 - \tfrac{16}{3} - 10 + 12\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6\right)\right] \\ &= \tfrac{32}{3} - \left(-\tfrac{29}{12}\right) \\ &= \tfrac{157}{12} \end{aligned}$$

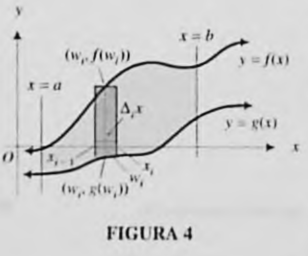


FIGURA 4

<u>**Conclusión:**</u> El área de la región es $\frac{157}{12}$ unidades cuadradas. ◀

Ahora considere dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. Se desea calcular el área de la región limitada por las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las dos rectas $x = a$ y $x = b$. Esta situación se ilustra en la figura 4.

Tome una partición del intervalo $[a, b]$, de modo que el i-ésimo rectángulo tenga un ancho de $\Delta_i x$. En cada subintervalo elija un número w_i. Considere el rectángulo que tiene altura $[f(w_i) - g(w_i)]$ unidades y ancho $\Delta_i x$ unidades. En la figura 4 se muestra este rectángulo. Se tienen n rectángulos como éste, uno asociado con cada subintervalo. La suma de las medidas de las áreas de estos n rectángulos está determinada por la suma de Riemann siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

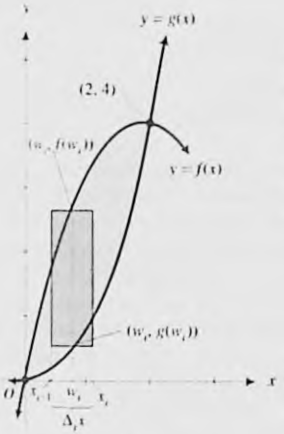
Esta suma de Riemann es una aproximación a lo que intuitivamente se piensa como el número que representa la "medida del área" de la región

Entre más pequeño sea el valor de $\|\Delta\|$, mejor será esta aproximación. Si A unidades cuadradas es el área de la región, se define

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x \qquad \textbf{(1)}$$

Como f y g son continuas en $[a, b]$, también lo es $f - g$; por tanto, el límite en (1) existe y es igual a la integral definida

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



$f(x) = -x^2 + 4x$

$g(x) = x^2$

FIGURA 5

EJEMPLO 4 Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$.

Solución Para determinar los puntos de intersección de las dos curvas se resuelven las ecuaciones simultáneamente y se obtienen los puntos (0, 0) y (2, 4). La figura 5 muestra la región.

Sean

$$f(x) = -x^2 + 4x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Observe que en el intervalo $[0, 2]$ la curva $y = f(x)$ está por arriba de la curva $y = g(x)$. Se dibuja un elemento rectangular vertical de área, cuya altura es de $[f(w_i) - g(w_i)]$ unidades y cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades. La medida del área de este rectángulo está dada por $[f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$. La suma de las medidas de las áreas de n rectángulos como éste está determinada por la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

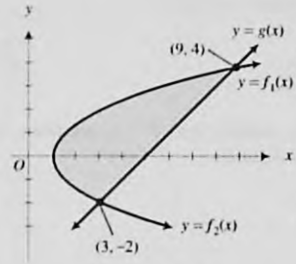
Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

y el límite de la suma de Riemann es una integral definida. En consecuencia

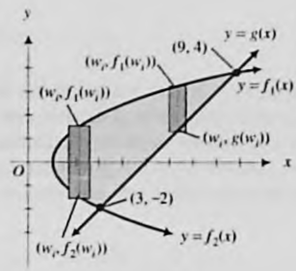
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]\, dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx \\ &= -\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big]_0^2 \\ &= -\tfrac{16}{3} + 8 - 0 \\ &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

<u>**Conclusión:**</u> El área de la región es $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.



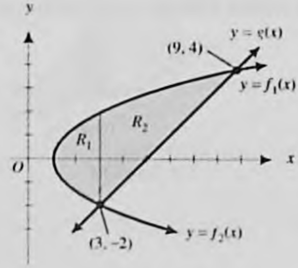
$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$
$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$
$g(x) = x - 5$

FIGURA 6



$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$
$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$
$g(x) = x - 5$

FIGURA 7



$f_1(x) = \sqrt{2x-2}$
$f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$
$g(x) = x - 5$

FIGURA 8

EJEMPLO 5 Calcule el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 2x - 2$ y la recta $y = x - 5$.

Solución Las dos curvas se intersectan en los puntos $(3, -2)$ y $(9, 4)$. La región se muestra en la figura 6.

La ecuación $y^2 = 2x - 2$ es equivalente a las dos ecuaciones

$$y = \sqrt{2x-2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{2x-2}$$

de modo que la primera ecuación proporciona la parte superior de la parábola mientras que la segunda ecuación da la parte inferior. Si

$$f_1(x) = \sqrt{2x-2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{2x-2}$$

la ecuación de la parte superior de la parábola es $y = f_1(x)$, y la ecuación de la parte inferior es $y = f_2(x)$. Si se considera que $g(x) = x - 5$, entonces la ecuación de la recta es $y = g(x)$.

En la figura 7 se aprecian dos elementos rectangulares verticales de área. Cada rectángulo tiene su base superior sobre la curva $y = f_1(x)$. Como la base inferior del primer rectángulo está sobre la curva $y = f_2(x)$, su altura es $[f_1(w_i) - f_2(w_i)]$ unidades. Debido a que la base inferior del segundo rectángulo está sobre la curva $y = g(x)$, su altura es $[f_1(w_i) - g(w_i)]$ unidades. Si se desea resolver este problema utilizando elementos rectangulares verticales de área, se debe dividir la región en dos regiones separadas, por ejemplo, R_1 y R_2, donde R_1 es la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ y la recta $x = 3$, y R_2 es la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$ y $y = g(x)$ y la recta $x = 3$ (consulte la figura 8).

Si A_1 unidades cuadradas es el área de la región R_1, entonces

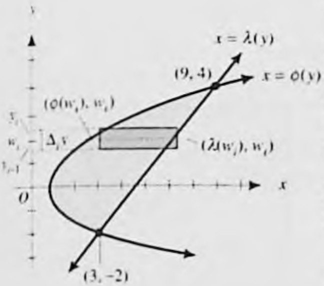
$$\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(w_i) - f_2(w_i)]\, \Delta_i x \\
&= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\, dx \\
&= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]\, dx \\
&= 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}\, dx \\
&= \tfrac{2}{3}(2x-2)^{3/2}\Big]_1^3 \\
&= \tfrac{16}{3}
\end{aligned}$$

Si A_2 unidades cuadradas es el área de la región R_2,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x \\
&= \int_3^9 [f_1(x) - g(x)]\, dx \\
&= \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]\, dx
\end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x - 2)^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + 5x\Big]_3^9$$
$$= [\tfrac{64}{3} - \tfrac{81}{2} + 45] - [\tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + 15]$$
$$= \tfrac{38}{3}$$

Entonces $A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3}$.



$\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$

$\lambda(y) = y + 5$

FIGURA 9

Conclusión: El área de la región completa es de 18 unidades cuadradas. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** Calcule el área de la región del ejemplo 5 considerando elementos rectangulares horizontales de área.

Solución La figura 9 muestra la región con un elemento rectangular horizontal de área.

Si las ecuaciones de la parábola y de la recta se resuelven para x se obtiene

$$x = \tfrac{1}{2}(y^2 + 2) \qquad x = y + 5$$

Si se considera $\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$ y $\lambda(y) = y + 5$, la ecuación de la parábola puede escribirse como $x = \phi(y)$ y la ecuación de la recta como $x = \lambda(y)$. Tenga en cuenta el intervalo cerrado $[-2, 4]$ sobre el eje y, y tome una partición de este intervalo. El i-ésimo subintervalo tendrá una longitud de $\Delta_i y$. En el i-ésimo subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$ se elige un número w_i. Entonces la longitud del i-ésimo elemento rectangular es de $[\lambda(w_i) - \phi(w_i)]$ unidades y su ancho es de $\Delta_i y$ unidades. La medida del área de la región puede aproximarse mediante la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda(w_i) - \phi(w_i)]\, \Delta_i y$$

Si A unidades cuadradas es el área de la región, entonces

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\lambda(w_i) - \phi(w_i)]\, \Delta_i y$$

Como λ y ϕ son continuas en $[-2, 4]$, también lo es $\lambda - \phi$, y el límite de la suma de Riemann es una integral definida:

$$A = \int_{-2}^{4} [\lambda(y) - \phi(y)]\, dy$$
$$= \int_{-2}^{4} [(y + 5) - \tfrac{1}{2}(y^2 + 2)]\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} (-y^2 + 2y + 8)\, dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y\Big]_{-2}^{4}$$
$$= \tfrac{1}{2}[(-\tfrac{64}{3} + 16 + 32) - (\tfrac{8}{3} + 4 - 16)]$$
$$= 18$$

Esta respuesta es acorde con la solución del ejemplo 5. ◀

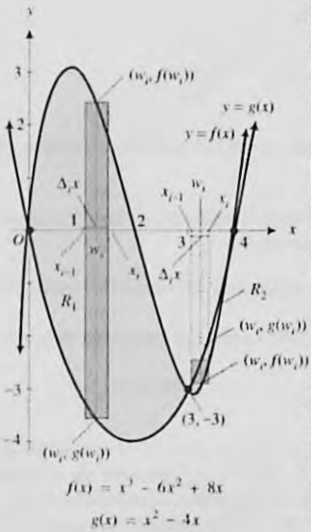


FIGURA 10

Al comparar las soluciones de los ejemplos 5 y 6 se observa que en el primer caso se tienen dos integrales definidas para evaluar, mientras que en el segundo caso se tiene sólo una. En general, si es posible, los elementos de área deben construirse de modo que se obtenga sólo una integral definida. El ejemplo siguiente presenta una situación donde son necesarias dos integrales definidas.

▶ EJEMPLO 7

Calcule el área de la región limitada por las dos curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $y = x^2 - 4x$.

Solución Los puntos de intersección de las dos curvas son $(0, 0)$, $(3, -3)$ y $(4, 0)$. En la figura 10 se muestra la región.

Sean

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 4x$$

En el intervalo $[0, 3]$ la curva $y = f(x)$ está por arriba de la curva $y = g(x)$, y en el intervalo $[3, 4]$ la curva $y = g(x)$ se encuentra por arriba de la curva $y = f(x)$. Así, la región debe dividirse en dos regiones separadas R_1 y R_2, donde R_1 es la región acotada por las dos curvas en el intervalo $[0, 3]$, y R_2 es la región limitada por las dos curvas en el intervalo $[3, 4]$. Si A_1 es el área de R_1 y A_2 es el área de R_2, entonces

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x$$

$$A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(w_i) - f(w_i)]\, \Delta_i x$$

así

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]\, dx \\
&\quad + \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]\, dx \\
&= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\, dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{7}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^3 + \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{7}{3}x^3 - 6x^2\right]_3^4 \\
&= \tfrac{45}{4} + \tfrac{7}{12} \\
&= \tfrac{71}{6}
\end{aligned}$$

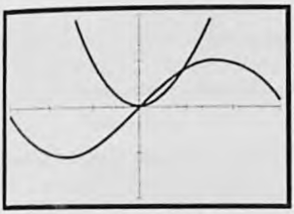
<u>**Conclusión:**</u> El área requerida es $\frac{71}{6}$ unidades cuadradas. ◀

En los ejemplo 4 a 7, se calcularon las coordenadas de los puntos de intersección al resolver simultáneamente las ecuaciones de las curvas. En el ejemplo siguiente no pueden determinarse los puntos de intersección fácilmente.

▶ EJEMPLO 8

Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = \operatorname{sen} x$.

Solución Refiérase a la figura 11, la cual muestra las dos gráficas trazadas en el rectángulo de inspección de $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$ y que se intersectan en el origen y en otro punto del primer cuadrante. Se denota con $[a, b]$ el intervalo en el que se calculará el área, además se sabe que $a = 0$. No se puede determinar b algebraicamente, sin embargo, puede obtenerse un valor aproximado de b empleando los procesos de intersección (*intersect*) o rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora. Con cuatro dígitos significativos se obtiene $b = 0.8767$. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x^2$ y A unidades cuadradas es el área requerida de la región en el intervalo $[0, 0.8767]$, entonces



$[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x^2$

FIGURA 11

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(w_i) - g(w_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_0^{0.8767} (\operatorname{sen} x - x^2)\, dx \end{aligned}$$

Esta integral se calcula mediante NINT en la graficadora obteniéndose con cuatro dígitos significativos

$$A = 0.1357$$

<u>Conclusión:</u> Con cuatro dígitos significativos, el área es 0.1357 unidades cuadradas. ◀

EJERCICIOS 4.8

En los ejercicios 1 a 38, calcule el área de la región acotada por las curvas. En cada ejercicio haga lo siguiente: (a) dibuje una figura que muestre la región y un elemento rectangular de área; (b) exprese el área de la región como una suma de Riemann; (c) calcule el límite del inciso (b) mediante el segundo teorema fundamental del Cálculo.

1. $y = 4 - x^2$; eje x
2. $y = x^2 - 2x + 3$; eje x; $x = -2$; $x = 1$
3. $y = 4x - x^2$; eje x; $x = 1$; $x = 3$
4. $y = 6 - x - x^2$; eje x
5. $y = \sqrt{x + 1}$; eje x; eje y; $x = 8$
6. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$; eje x; $x = 2$; $x = 3$
7. $y = x^2 + x - 12$; eje x
8. $y = x^2 - 6x + 5$; eje x
9. $y = \operatorname{sen} x$; eje x; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$
10. $y = \cos x$; eje x; eje y; $x = \frac{1}{6}\pi$
11. $y = \sec^2 x$; eje x; eje y; $x = \frac{1}{4}\pi$
12. $y = \csc^2 x$; eje x; $x = \frac{1}{4}\pi$; $x = \frac{1}{3}\pi$
13. $x^2 = -y$; $y = -4$
14. $y^2 = -x$; $x = -2$; $x = -4$
15. $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. Considere los elementos de área perpendiculares al eje y.
16. La misma región que en el ejercicio 15. Considere los elementos de área paralelos al eje y.
17. $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. Considere los elementos de área perpendiculares al eje x.
18. La misma región que en el ejercicio 17. Considere los elementos de área paralelos al eje x.
19. $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$
20. $y^3 = 4x$; $x = 0$; $x = -2$
21. $y = 2 - x^2$; $y = -x$
22. $y = x^2$; $y = x^4$
23. $y^2 = x - 1$; $x = 3$
24. $y = x^2$; $x^2 = 18 - y$
25. $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$
26. $x = 4 - y^2$; $x = 4 - 4y$
27. $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$
28. $xy^2 = y^2 - 1$; $x = 1$; $y = 1$; $y = 4$
29. $x = y^2 - 2$; $x = 6 - y^2$
30. $x = y^2 - y$; $x = y - y^2$
31. $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$; $y = x^3 - 2x^2 - 3x$
32. $3y = x^3 - 2x^2 - 15x$; $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
33. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $y = 2x^2 + 4x$
34. $y = \lfloor x - 1 \rfloor + 3$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 4$
35. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$; $x = 0$; $y = 0$
36. $y = \operatorname{sen} x$; $y = -\operatorname{sen} x$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$
37. $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$
38. $y = |x + 1| + |x|$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$

En los ejercicios 39 a 46, aproxime con cuatro dígitos significativos el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas realizando lo siguiente: (a) trace las gráficas en un rectángulo de inspección conveniente y determine los puntos de intersección empleando los procesos de intersección (intersect) o rastreo (trace) y aumento (zoom in) de la graficadora; (b) exprese el área de la región como el límite de una suma de Riemann; (c) aproxime el límite del inciso (b) utilizando NINT *en la graficadora.*

39. $y = x^4 - 2, y = x^2$

40. $y = x^4; y = 4 - x^2$

41. $y = x^2 - 1; y = \operatorname{sen}^2 x$

42. $y = x^2; y = \cos x$

43. $y = x^3; y = 4 - x^2$; el eje y

44. $y = x^3; y = 4 - x^2$; el eje x

45. $y = x^3; y = \tan^2 x - 3; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$

46. $y = 2 - x^4; y = \sec^2 x$

47. Determine mediante integración el área de la región acotada por el triángulo cuyos vértices son (5, 1), (1, 3) y (−1, −2).

48. Determine mediante integración el área de la región limitada por el triángulo cuyos vértices son (3, 4), (2, 0) y (0, 1).

En los ejercicios 49 a 57, determine el área exacta de la región descrita.

49. La región acotada por la recta $x = 4$, y la curva $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$. *Sugerencia:* resuelva la ecuación cuadrática en y para y en términos de x y exprese y como dos funciones de x.

50. La región limitada por las tres curvas $y = x^2$, $x = y^3$ y $x + y = 2$.

51. La región acotada por las tres curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ y $4x - y + 12 = 0$.

52. La región limitada por el trapecio cuyos vértices son (−1, −1), (2, 2), (6, 2) y (7, −1).

53. La región acotada por la curva $y = \operatorname{sen} x$, la recta $y = 1$ y el eje y, ubicada a la derecha del eje y.

54. La región limitada por las dos curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre dos puntos de intersección consecutivos.

55. La región acotada por la curva $y = \tan^2 x$, el eje x y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$.

56. La región limitada por la parábola $x^2 = 4py$ y dentro del triángulo formado por el eje x y las rectas $y = x + 8p$ y $y = -x + 8p$, donde $p > 0$.

57. La región acotada por las dos parábolas $y^2 = 4px$ y $x^2 = 4py$.

58. Determine la tasa de variación de la medida del área del ejercicio 56 con respecto a p cuando $p = \frac{3}{8}$.

59. Calcule la tasa de variación de la medida del área del ejercicio 57 con respecto a p cuando $p = 3$.

60. Determine m de modo que la región por arriba de la recta $y = mx$ y debajo de la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área de 36 unidades cuadradas.

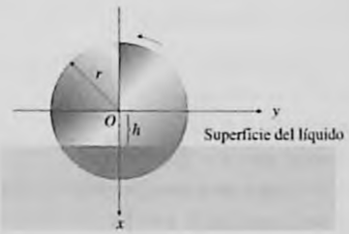
61. Determine m de modo que la región por arriba de la curva $y = mx^2$ $(m > 0)$, a la derecha del eje y, y debajo de la recta $y = m$ tenga un área de K unidades cuadradas, donde $K > 0$.

62. Si A unidades cuadradas es el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = mx$ $(m > 0)$, determine la tasa de variación de A con respecto a m.

63. Para acelerar la evaporación de un líquido, se coloca un disco circular de radio r unidades en el líquido y después se gira lentamente, como se ilustra en la figura adjunta. La distancia del centro del disco a la superficie del líquido es h unidades. Los ejes coordenados se colocan de modo que el origen esté en el centro del disco, el eje y es paralelo a la superficie del líquido y el sentido positivo del eje x está hacia abajo. **(a)** Demuestre que si $A(h)$ unidades cuadradas es el área de la región mojada expuesta, entonces

$$A(h) = \pi r^2 - \pi h^2 - 2\int_h^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

y determine el dominio de A. **(b)** Demuestre que para maximizar el área de la región mojada expuesta, h debe ser igual a $r/\sqrt{1 + \pi^2}$. *Sugerencia:* para calcular $A'(h)$ aplique el primer teorema fundamental del Cálculo.



64. Cuando se calcula el área de una región plana por medio de integración, ¿en qué circunstancias es más conveniente utilizar **(a)** elementos rectangulares verticales de área y **(b)** elementos rectangulares horizontales de área?

4.9 VOLÚMENES DE SÓLIDOS MEDIANTE LOS MÉTODOS DE REBANADO, DE DISCOS Y DE ARANDELAS

FIGURA 1

FIGURA 2

FIGURA 3

FIGURA 4

FIGURA 5

La definición del área de una región plana condujo a la definición de la integral definida. En este proceso se empleó la fórmula de la geometría plana para el área de un rectángulo. Ahora se utilizará un proceso semejante con el propósito de obtener volúmenes de algunos tipos particulares de sólidos. Uno de estos sólidos es el *cilindro recto*.

Se dice que un sólido es un **cilindro recto** si está limitado por dos regiones planas congruentes R_1 y R_2, que pertenecen a dos planos paralelos, y por una superficie lateral generada por un segmento rectilíneo, que tiene sus extremos en las fronteras o límites de R_1 y R_2, el cual se desplaza siempre en forma perpendicular a los planos de R_1 y R_2. La figura 1 muestra un cilindro recto. La **altura** del cilindro es la distancia perpendicular entre los planos de R_1 y R_2, y la **base** del cilindro es R_1 o R_2. Si la base del cilindro recto es una región limitada por un rectángulo, se tiene un **paralelepípedo rectangular**, el cual se muestra en la figura 2, y si la base es una región acotada por una circunferencia, se tiene un **cilindro circular recto,** como se ilustra en la figura 3.

Si el área de la base de un cilindro recto es A unidades cuadradas y su altura es h unidades y si V unidades cúbicas es su volumen, entonces

$$V = Ah$$

Se utilizará esta fórmula a fin de obtener un método que proporcione la medida del volumen de un sólido para el cual el área de cualquier *sección plana* (región plana formada por la intersección de un plano y el sólido) perpendicular a un eje es una función de la distancia perpendicular de la sección plana desde un punto fijo del eje. La figura 4 muestra uno de estos sólidos S que está entre los planos perpendiculares al eje x en a y b. Sea $A(x)$ unidades cuadradas el área de la sección plana de S perpendicular al eje x en x. Se requiere que A sea continua en $[a, b]$.

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Entonces existen n subintervalos de la forma $[x_{i-1}, x_i]$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, donde la longitud del i-ésimo subintervalo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Elija cualquier número w_i, con $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$, en cada subintervalo, y construya los cilindros rectos de alturas $\Delta_i x$ unidades y áreas de secciones planas de $A(w_i)$ unidades cuadradas. La figura 5 muestra el i-ésimo cilindro recto, el cual recibe el nombre de **elemento de volumen.** Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo elemento, entonces

$$\Delta_i V = A(w_i)\,\Delta_i x$$

La suma de las medidas de los n elementos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\,\Delta_i x \tag{1}$$

la cual es una suma de Riemann. Esta suma es una aproximación de lo que intuitivamente pensamos como el número de unidades cúbicas del volumen del sólido. Cuanto más pequeña se tome la norma $\|\Delta\|$ de la partición, tanto más será mayor el valor de n, de modo que dicha aproximación estará más cerca del número V que deseamos asignar a la medida del volumen. Por tanto, se define V como el límite de la suma de Riemann en (1) cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. Este límite existe porque A es continua en $[a, b]$. Entonces se tiene la siguiente definición.

4.9.1 Definición del volumen de un sólido

Sea S un sólido tal que S está entre dos planos perpendiculares al eje x en a y b. Si la medida del área de la sección plana S, perpendicular al eje x en x, está dada por $A(x)$, donde A es continua en $[a, b]$, entonces la medida del volumen de S está dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i x \\
&= \int_a^b A(x)\, dx
\end{aligned}
$$

El término **rebanado** se utiliza cuando se aplica esta definición para calcular el volumen de un sólido. El proceso es semejante al rebanado de una hogaza de pan en muchas porciones muy delgadas de modo que todas las porciones juntas constituye la hogaza completa. En el ejemplo ilustrativo siguiente se muestra que la definición 4.9.1 es consistente con la fórmula de la geometría sólida para el volumen de un cilindro circular recto.

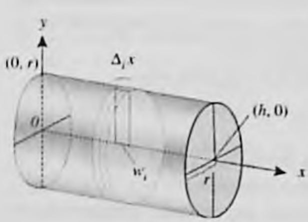


FIGURA 6

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 6 presenta un cilindro circular recto, que tiene una altura de h unidades y un radio de la base de r unidades, con los ejes coordenados dispuestos de modo que el origen está en el centro de una base y su altura se mide a lo largo del lado positivo del eje x. Una sección plana a una distancia de x unidades del origen tiene un área de $A(x)$ unidades cuadradas, donde

$$A(x) = \pi r^2$$

Un elemento de volumen, mostrado en la figura 6, es un cilindro recto con un área de la base de $A(w_i)$ unidades cuadradas y espesor de $\Delta_i x$ unidades. De este modo, si V unidades cúbicas es el volumen del cilindro circular recto, entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i x \\
&= \int_0^h A(x)\, dx \\
&= \int_0^h \pi r^2\, dx \\
&= x r^2 x \Big]_0^h \\
&= \pi r^2 h
\end{aligned}
$$

◀

En la definición 4.9.1 se puede sustituir x por y. En tal caso, S es un sólido que está entre planos perpendiculares al eje y en c y d, y la medida del área de la sección plana de S perpendicular al eje y en y está dada por $A(y)$.

donde A es continua en $[c, d]$. Entonces la medida del volumen de S está dada por

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_c^d A(y)\, dy$$

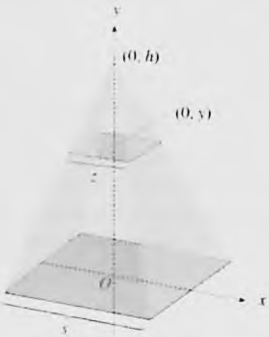


FIGURA 7

EJEMPLO 1 Utilice el método de rebanado para calcular el volumen de una pirámide cuya altura es de h unidades y cuya base es un cuadrado de lado de s unidades.

Solución La figura 7 muestra la pirámide y los ejes coordenados dispuestos de modo que el centro de la base está en el origen y la altura se mide a lo largo del lado positivo del eje y. La sección plana de la pirámide perpendicular al eje y en $(0, y)$ es un cuadrado. Si la longitud del lado de este cuadrado mide z unidades, entonces por triángulos semejantes (consulte la figura 8)

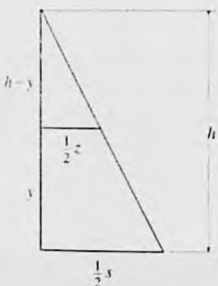


FIGURA 8

$$\frac{\frac{1}{2}z}{h - y} = \frac{\frac{1}{2}s}{h}$$
$$z = \frac{s}{h}(h - y)$$

Por tanto, si $A(y)$ unidades cuadradas es el área de la sección plana, entonces

$$A(y) = \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2$$

La figura 9 muestra un elemento de volumen el cual es un cilindro recto de área $A(w_i)$ unidades cuadradas y de un espesor de $\Delta_i y$ unidades. De manera que si V unidades cúbicas es el volumen de la pirámide, entonces

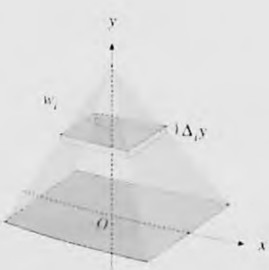


FIGURA 9

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(w_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_0^h A(y)\, dy$$
$$= \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2\, dy$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[0 + \frac{h^3}{3}\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}s^2 h$$

Ahora se mostrará cómo aplicar la definición 4.9.1 a fin de calcular el volumen de un **sólido de revolución**, el cual es un sólido que se obtiene al girar una región de un plano alrededor de una recta del plano, llamada **eje de revolución**, el cual puede intersectar o no la región. Por ejemplo, si la región limitada por una semicircunferencia y su diámetro se gira alrededor

FIGURA 10

FIGURA 11

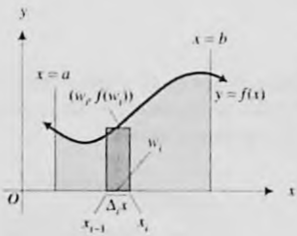


FIGURA 12

FIGURA 13

del diámetro, se genera una esfera (refiérase a la figura 10). Si la región limitada por un triángulo rectángulo se gira alrededor de uno de sus catetos, se obtiene un cono circular recto (consulte la figura 11).

Considere primero el caso en que el eje de revolución es un límite de la región que se girará. Sea f la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. La figura 12 muestra la región R y el i-ésimo rectángulo. Cuando el i-ésimo rectángulo se gira alrededor del eje x se obtiene un elemento de volumen el cual es un disco cuya base es un círculo de radio $f(w_i)$ unidades y cuya altura mide $\Delta_i x$ unidades, como se muestra en la figura 13. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de este disco, entonces

$$\Delta_i V = \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$$

Como existen n rectángulos, se obtienen n discos de esta manera, y la suma de las medidas de los volúmenes de estos n discos es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x$$

Esta es una suma de Riemann de la forma (1) donde $A(w_i) = \pi[f(w_i)]^2$. Por tanto, si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, se deduce de la definición 4.9.1 que V es el límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. Este límite existe porque f^2 es continua en $[a, b]$, ya que se supuso que f es continua en ese intervalo. Entonces se tiene el siguiente teorema.

4.9.2 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si S es el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, y si V unidades cúbicas es el volumen de S, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(w_i)]^2 \Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \end{aligned}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor del eje x. Refiérase a la figura 14, la cual muestra la región y un elemento rectangular de área. La figura 15 presenta el sólido de revolución y un elemento de volumen. La medida del volumen del disco está dado por

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi(w_i^2)^2 \Delta_i x \\ &= \pi w_i^4 \Delta_i x \end{aligned}$$

FIGURA 14

Entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi w_i^{4}\, \Delta_i x \\
&= \pi \int_{1}^{2} x^4\, dx \\
&= \pi \left(\tfrac{1}{5} x^5\right)\Big]_1^2 \\
&= \tfrac{31}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas.

A fin de apoyar la evaluación analítica de la integral definida se calcula en la graficadora

$$\text{NINT}(\pi x^4, 1, 2) = 19.47787445$$

el cual es el mismo valor, con diez dígitos significativos, que el valor exacto de la respuesta anterior. ◀

FIGURA 15

Cuando el eje de revolución y una frontera de la región girada son eje y o cualquier recta paralela al eje x o al eje y, se aplica un teorema semejante al teorema 4.9.2.

▶ ***EJEMPLO 2*** Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por la curva

$$(x - 1)^2 = 20 - 4y$$

y las rectas $x = 1$, $y = 1$, $y = 3$ y a la derecha de $x = 1$.

Solución La figura 16 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 17.

Al resolver la ecuación de la curva para x se obtiene

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Sea $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Se toma una partición del intervalo $[1, 3]$ del eje y. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen del i-ésimo disco, entonces

$$
\begin{aligned}
\Delta_i V &= \pi[g(w_i) - 1]^2\, \Delta_i y \\
&= \pi[(\sqrt{20 - 4w_i} + 1) - 1]^2\, \Delta_i y \\
&= \pi(20 - 4w_i)\, \Delta_i y
\end{aligned}
$$

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4w_i)\, \Delta_i y \\
&= \pi \int_{1}^{3} (20 - 4y)\, dy \\
&= \pi\left[20y - 2y^2\right]_1^3 \\
&= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)] \\
&= 24\pi
\end{aligned}
$$

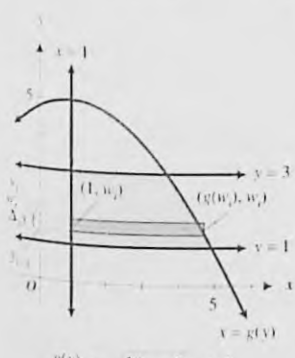


FIGURA 16

FIGURA 17

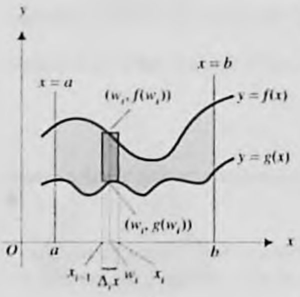
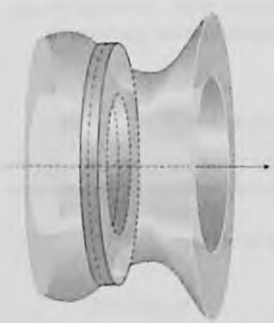


FIGURA 18



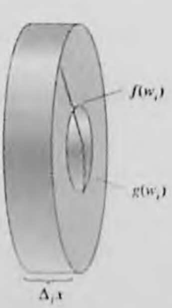


FIGURA 20

<u>Conclusión:</u> El volumen del sólido de revolución es 24π unidades cúbicas. ◀

Ahora suponga que el eje de revolución no es una frontera de la región que se girará. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. La región R y el i-ésimo rectángulo se muestran en la figura 18, y el sólido de revolución se presenta en la figura 19. Cuando el i-ésimo rectángulo se gira alrededor del eje x, se obtiene un anillo circular como el de la figura 20. La diferencia de las áreas de las dos regiones circulares es $(\pi[f(w_i)]^2 - \pi[g(w_i)]^2)$ unidades cuadradas y el espesor es de $\Delta_i x$ unidades. Si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la arandela, entonces

$$\Delta_i V = \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

La suma de las medidas de los volúmenes de las arandelas generadas al girar los elementos rectangulares de área alrededor del eje x es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Ésta es una suma de Riemann de la forma (1), donde $(A w_i) = \pi[f(w_i)]^2 - \pi[g(w_i)]^2$. De la definición 4.9.1, el número de unidades cúbicas del volumen del sólido de revolución es el límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero. El límite existe puesto que $f^2 - g^2$ es continua en $[a, b]$ ya que f y g son continuas en ese intervalo. En consecuencia, se tiene el teorema siguiente.

4.9.3 Teorema

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \end{aligned}$$

Como antes, cuando el eje de revolución es el eje y o cualquier recta paralela al eje x o al eje y, se aplica un teorema semejante al anterior.

▶ ***EJEMPLO 3*** Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$.

Solución Los puntos de intersección de las dos curvas son $(-1, 2)$ y $(2, 5)$. La figura 21 muestra la región y un elemento rectangular de área. El sólido de revolución y un elemento de volumen se presentan en la figura 22.

Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces la medida del volumen de la arandela circular es

$$\Delta_i V = \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\,\Delta_i x$$

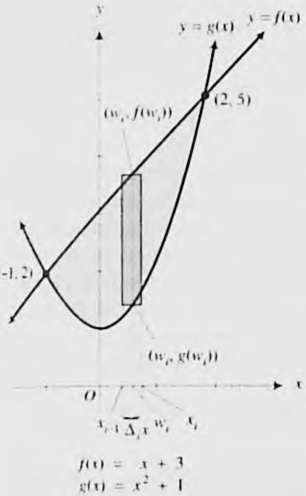


FIGURA 21

Si V unidades cúbicas es el volumen del sólido, entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(w_i)]^2 - [g(w_i)]^2)\, \Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2]\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\, dx \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{3} x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2} \\
&= \pi[(-\tfrac{32}{5} - \tfrac{8}{3} + 12 + 16) - (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \tfrac{117}{5}\pi
\end{aligned}
$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

FIGURA 22

▶ ***EJEMPLO 4*** Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por las dos parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$.

Solución Las curvas se intersectan en los puntos $(-2, -1)$ y $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$. La región y un elemento rectangular de área se muestran en la figura 23. La figura 24 presenta el sólido de revolución así como un elemento de volumen, el cual es una arandela.

Sean $F(y) = y - y^2$ y $G(y) = y^2 - 3$. El número de unidades cúbicas del volumen de la arandela circular es

$$
\Delta_i V = \pi([4 + F(w_i)]^2 - [4 + G(w_i)]^2)\, \Delta_i y
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 + F(w_i)]^2 - [4 + G(w_i)]^2)\, \Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2]\, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\, dy \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{2} y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2} \\
&= \tfrac{875}{32}\pi
\end{aligned}
$$

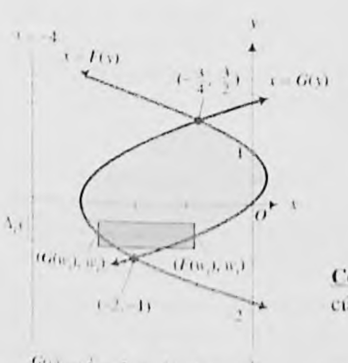
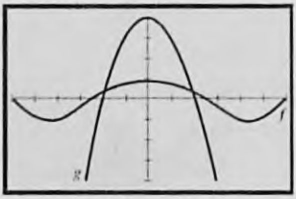


FIGURA 23

Conclusión: El volumen del sólido de revolución es $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas. ◀

Los ejemplos anteriores se han presentado a propósito, de modo que el cálculo pueda efectuarse fácilmente a mano. En el ejemplo siguiente, que no corresponde a este caso, se necesitará la graficadora.

FIGURA 24



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \text{sen}\sqrt{x^2 + 4}$

$g(x) = 4 - x^2$

FIGURA 25

EJEMPLO 5 Calcule con cuatro dígitos significativos el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región acotada por las gráficas de

$$f(x) = \text{sen}\sqrt{x^2 + 4} \quad \text{y} \quad g(x) = 4 - x^2$$

Solución Se trazan las gráficas de las dos ecuaciones en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, como se muestra en la figura 25. Debido a la simetría con respecto al eje y, se obtendrá un medio del volumen requerido al girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas en el primer cuadrante. Se necesita tomar una partición del intervalo $[0, b]$, donde b es la coordenada x del punto de intersección de las dos curvas en el primer cuadrante. Se obtiene b empleando el proceso de intersección (*intersect*) o rastreo (*trace*) y aumento (*zoom in*) de la graficadora, resultando, con cuatro dígitos significativos, $b = 1.905$.

Cada elemento de volumen es una arandela. Si V unidades cúbicas es el volumen requerido, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([g(w_i)]^2 - [f(w_i)]^2)\,\Delta_i x \\
&= \pi\int_0^{1.905} \pi([g(x)]^2 - [f(x)]^2)\,dx \\
&= \pi\int_0^{1.905} [(4 - x^2)^2 - \text{sen}^2\sqrt{x^2 + 4}\,]\,dx
\end{aligned}$$

Al evaluar la integral definida mediante NINT en la graficadora se obtiene

$$\pi\text{NINT}((4 - x^2)^2 - \text{sen}^2\sqrt{x^2 + 4}), 0, 1.905) = 50.129$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{V}{2} &= 50.129 \\
V &= 100.26
\end{aligned}$$

Conclusión: El volumen del sólido de revolución, con cuatro dígitos significativos, es 100.3 unidades cúbicas.

Como se ha visto, la obtención de volúmenes mediante los métodos de discos y de arandelas son casos especiales del cálculo de volúmenes del método de rebanado. A continuación se dará otro ejemplo de determinación de un volumen por medio del método de rebanado.

FIGURA 26

EJEMPLO 6 Se corta una cuña de un cilindro circular recto, cuyo radio es r centímetros, mediante dos planos, uno perpendicular al eje del cilindro y el otro intersecta al primero a lo largo de un diámetro de la sección plana circular formando un ángulo de 60°. Calcule el volumen de la cuña.

Solución La cuña se muestra en la figura 26. El plano xy se considera como el plano perpendicular al eje del cilindro y el origen está en el punto de perpendicularidad. Entonces, una ecuación de la sección plana circular es $x^2 + y^2 = r^2$. Toda sección plana de la cuña, perpendicular al eje x, es un triángulo rectángulo. Un elemento de volumen es un cilindro recto que tiene una altura de $\Delta_i x$ centímetros, y el área de su base está dada por $\frac{1}{2}\sqrt{3}[f(w_i)]^2$ centímetros cuadrados, donde $f(x)$ se obtiene al resolver la ecuación de la circunferencia para y y considerando $y = f(x)$. Por tanto, se tiene $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Así, si V centímetros cúbicos es el volumen de la cuña, entonces

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(r^2 - w_i^2)\,\Delta_i x \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\Big[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r} \\
&= \tfrac{2}{3}\sqrt{3}r^3
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> El volumen de la cuña es $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ cm^3. ◀

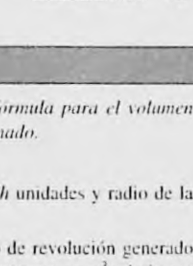
EJERCICIOS 4.9

En los ejercicios 1 y 2, deduzca la fórmula para el volumen del sólido mediante el método de rebanado.

1. Una esfera de radio r unidades.
2. Un cono circular recto de altura h unidades y radio de la base de a unidades.
3. Determine el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = x^3$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$, se gira alrededor del eje x.
4. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$, se gira alrededor del eje x.

En los ejercicios 5 a 12 calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región de la figura se gira alrededor de la recta indicada. Una ecuación de la curva de la figura es $y^2 = x^3$.

5. OAC alrededor del eje x.
6. OAC alrededor de la recta AC.
7. OAC alrededor de la recta BC.
8. OAC alrededor del eje y.
9. OBC alrededor del eje y.
10. OBC alrededor de la recta BC.
11. OBC alrededor de la recta AC.
12. OBC alrededor del eje x.



En los ejercicios 13 a 16, calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta indicada la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$.

13. La recta $x = 4$.
14. El eje x.
15. El eje y.
16. La recta $y = 2$.
17. Obtenga la fórmula del volumen de una esfera al girar alrededor del eje x la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y el eje x.
18. Deduzca la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura de h unidades y cuyo radio de la base mide a unidades al girar la región limitada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
19. Obtenga la fórmula para el volumen de un cono circular recto truncado que se obtiene al girar el segmento rectilíneo que va de $(0, b)$ a (h, a) alrededor del eje x.
20. Calcule mediante el método de rebanado el volumen de un tetraedro que tiene tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas mutuamente perpendiculares cuyas longitudes son de 3, 4 y 7 pulg, respectivamente.
21. La región acotada por la curva $y = \sec x$, el eje x, el eje y y la recta $x = \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.
22. Calcule el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva $y = \csc x$, el eje x y las rectas $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{1}{3}\pi$, se gira alrededor del eje x.
23. Obtenga el volumen del sólido de revolución generado si la región acotada por un arco de la curva senoidal se gira alrededor del eje x. *Sugerencia:* emplee la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.
24. La región limitada por el eje y y las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le \frac{1}{4}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado. *Sugerencia:* utilice la identidad $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$.
25. Determine el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 23 se gira alrededor de la recta $y = 1$.
26. Obtenga el volumen del sólido generado si la región del ejercicio 24 se gira alrededor de la recta $y = 1$.
27. La región acotada por la curva $y = \cot x$, la recta $x = \frac{1}{6}\pi$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.
28. La región limitada por la curva $y = \tan x$, la recta $x = \frac{1}{3}\pi$ y el eje x se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado.

29. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = -4$ la región limitada por esa misma recta y la parábola $x = 4 + 6y - 2y^2$.

30. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

31. Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región del ejercicio 30 alrededor de la recta $x = 4$.

32. Determine el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región acotada por la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 7)$ y las rectas $y = 3$, $y = 7$ y $x = 0$.

33. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $y = -3$ la región limitada por las dos parábolas $y = x^2$ y $y = 1 + x - x^2$.

34. Obtenga el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por el lazo (o bucle) de la curva cuya ecuación es $2y^2 = x(x^2 - 4)$.

35. Determine el volumen del sólido generado cuando la región limitada por el bucle (o lazo) de la curva que tiene la ecuación $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$, se gira alrededor del eje x.

36. Un tanque petrolero tiene la forma de una esfera con un diámetro de 60 pie. ¿Cuánto petróleo contiene el tanque si la profundidad del petróleo es de 25 pie?

37. La región acotada por la curva $y = \csc x$ y las rectas $y = 2$, $x = \frac{1}{6}\pi$ y $x = \frac{5}{6}\pi$, se gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido generado.

38. La región del primer cuadrante limitada por la curva $y = \sec x$, el eje y y la recta $y = 2$, se gira alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido generado.

39. Al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = c$ $(c > 0)$, se generó un sólido de revolución. ¿Para qué valor de c el volumen del sólido será de 12π unidades cúbicas?

40. La región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la recta $y = 1$ y la curva $y = \cot x$, se gira alrededor del eje x. Obtenga el volumen del sólido generado.

En los ejercicios 41 a 50, utilice la graficadora para calcular el volumen del sólido generado al girar la región dada alrededor del eje indicado. Exprese la respuesta con cuatro dígitos significativos.

41. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[4]{x^3 + 4}$, el eje x, el eje y y la recta $x = 2$, alrededor del eje x.

42. La región acotada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^4 - 5}$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 3$, alrededor del eje x

43. La región limitada por la gráfica de $y = \sqrt[4]{x^3 + 4}$, el eje y y la recta $y = 3$, alrededor del eje y.

44. La región acotada por la gráfica de $y = \sqrt[3]{x^4 - 5}$, el eje x, el eje y y la recta $y = 4$, alrededor del eje y.

45. La región limitada por la gráfica de $y = \operatorname{sen} x^3$, el eje y y la recta $y = 1$, si $x \in [0, \sqrt[3]{\pi/2}]$, alrededor del eje x.

46. La región acotada por la gráfica de $y = \tan x^2$, el eje y y la recta $y = 1$, si $x \in [0, \sqrt{\pi/2}]$, alrededor de la recta $y = 1$.

47. La región del ejercicio 45 alrededor de la recta $y = 2$.

48. La región del ejercicio 46 alrededor de la recta $y = -1$.

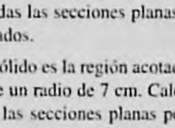
49. La región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x + 2$, $y = \tan x$, y el eje y, alrededor del eje x.

50. La región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = \cos(x^2 + 2)$, alrededor del eje x.

51. La base de un sólido es la región acotada por una elipse que tiene la ecuación $3x^2 + y^2 = 6$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son cuadrados.

52. La base de un sólido es la región limitada por la hipérbola $25x^2 - 4y^2 = 100$ y la recta $x = 4$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son cuadrados.

53. La base de un sólido es la región acotada por una circunferencia que tiene un radio de 7 cm. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.



54. La base de un sólido es la región del ejercicio 52. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

55. La base de un sólido es la región del ejercicio 53. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles cuya altura es igual a la distancia de la sección plana al centro de la circunferencia. El lado que está sobre la base del sólido no es uno de los lados iguales del triángulo.

56. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia con un radio de r unidades, y todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectángulos isósceles que tienen la hipotenusa en el plano de la base. Calcule el volumen del sólido

57. Resuelva el ejercicio 56 si los triángulos rectángulos isósceles tienen un cateto en el plano de la base.

58. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia con un radio de 4 pulg, y cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo isósceles que tiene una altura de 10 pulg y cuya base es una cuerda de la circunferencia.

59. La base de un sólido es la región acotada por la curva $x = 2\sqrt{y}$ y las rectas $x + y = 0$ y $y = 9$. Calcule el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares al eje y son cuadrados que tiene una diagonal con un extremo en la recta $x + y = 0$ y el otro extremo en la curva $x = 2\sqrt{y}$

60. Dos cilindros circulares rectos, cada uno de radio de r unidades, tienen ejes que son perpendiculares. Calcule el volumen de la porción común de los dos cilindros.

Dos cilindros Intersección de los cilindros

61. De un sólido que tiene forma de cilindro circular recto de r centímetros de radio, se corta una cuña mediante un plano que pasa por un diámetro de la base del cilindro y que forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Calcule el volumen de la cuña.

62. De un sólido que tiene forma de cono circular recto cuyo radio de la base es de 5 pie y cuya altura mide 20 pie, se corta una cuña mediante dos semiplanos que pasan por el eje del cono. El ángulo formado por los dos semiplanos mide 30°. Calcule el volumen de la cuña.

63. Al girar la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje x se obtiene un paraboloide de revolución. Calcule el volumen del sólido limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje si el plano está a 10 cm del vértice, y si la sección plana de intersección es un círculo que tiene un radio de 6 cm.

64. Explique la relación entre cálculo de volúmenes mediante el método de rebanado y cálculo de volúmenes por medio de los métodos de discos y de arandelas.

4.10 VOLÚMENES DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE CAPAS CILÍNDRICAS

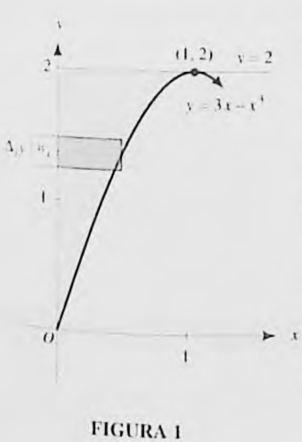


FIGURA 1

En la sección anterior se determinó el volumen de un sólido de revolución tomando los elementos rectangulares de área perpendiculares al eje de revolución, y los elementos de volumen obtenidos fueron discos o arandelas. Para algunos sólidos de revolución este método puede no ser factible. Por ejemplo, suponga que se desea calcular el volumen exacto del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$, el eje y y la recta $y = 2$. Esta región se muestra en la figura 1. Si un elemento de área es perpendicular al eje y como se presenta en la figura, el elemento de volumen es un disco, y determinar el volumen del sólido de revolución implica una integral de la forma $\int_0^2 A(y)\, dy$. Pero para obtener una fórmula de $A(y)$ se necesita resolver la ecuación cúbica $y = 3x - x^3$, para x en términos de y, lo cual es una tarea muy laboriosa. De modo que ahora se estudiará un procedimiento alternativo para calcular el volumen de un sólido de revolución, el cual es más fácil de aplicar en éste y algunos otros casos.

El método implica considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución. Después, cuando un elemento de área se gira alrededor del eje de revolución se obtiene una *capa cilíndrica*. Una **capa cilíndrica** es un sólido contenido entre dos cilindros que tienen el

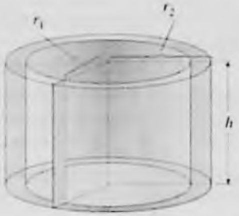


FIGURA 2

FIGURA 3

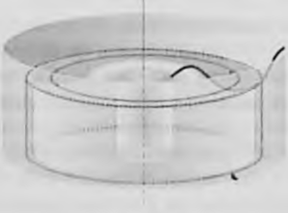


FIGURA 4

mismo centro y el mismo eje. En la figura 2 se muestra una capa cilíndrica de éstas.

Si la capa cilíndrica tiene un radio interior de r_1 unidades, un radio exterior de r_2 unidades y una altura de h unidades, entonces su volumen V unidades cúbicas está dado por

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \tag{1}$$

Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$; además, suponga que $a \geq 0$. La región R se muestra en la figura 3. Si R se gira alrededor del eje y, se genera un sólido de revolución S. Dicho sólido se muestra en la figura 4. Para calcular el volumen de S cuando se toman los elementos rectangulares de área paralelos al eje y, se procede en la siguiente manera.

Sea Δ una partición del intervalo cerrado $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sea m_i el punto medio del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces se tiene que $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Considere el rectángulo cuya altura es $f(m_i)$ unidades y cuyo ancho es de $\Delta_i x$ unidades. Si este rectángulo se gira alrededor del eje y, se obtiene una capa cilíndrica. La figura 4 muestra la capa cilíndrica generada por el elemento rectangular de área.

Si $\Delta_i V$ proporciona la medida del volumen de esta capa cilíndrica, entonces se tiene de la fórmula (1), donde $r_1 = x_{i-1}$, $r_2 = x_i$ y $h = f(m_i)$, de modo que

$$\Delta_i V = \pi x_i^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}^2 f(m_i)$$
$$\Delta_i V = \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(m_i)$$
$$\Delta_i V = \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i)$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$, y puesto que $x_i + x_{i-1} = 2m_i$, entonces al sustituir en la ecuación anterior se tiene

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

Si los n elementos rectangulares de área se giran alrededor del eje y, se obtienen n capas cilíndricas. La suma de las medidas de sus volúmenes es

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

la cual es una suma de Riemann. El límite de esta suma de Riemann cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a cero existe porque f es continua en $[a, b]$, de modo que también lo es la función cuyos valores son $2\pi x f(x)$. El límite es la integral definida $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, y proporciona el volumen del sólido de revolución. Este resultado se resume en el teorema siguiente.

4.10.1 Teorema

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, donde $a \geq 0$. Suponga que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Si R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, si S es el sólido de revolución que se obtiene al girar R alrededor del eje y, y si V unidades cúbicas es el volumen de S, entonces

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \end{aligned}$$

Aunque la validez de este teorema puede resultar obvia debido a las explicaciones anteriores, la demostración requiere probar que se obtiene el mismo volumen mediante el método de discos del teorema 4.9.2. En el número de febrero de 1984 de la revista *American Mathematical Monthly* (Vol. 91, No. 2), **Charles A. Cable** de Allegheny College proporciona una demostración utilizando integración por partes, tema de la sección 7.1.

La fórmula de la medida del volumen de una capa cilíndrica es fácil de recordar observando que $2\pi m_i$, $f(m_i)$ y $\Delta_i x$ son, respectivamente, las medidas de la circunferencia que tiene como radio el promedio de los radios interno y externo (o radio medio) de la capa, la altura de la capa, y el espesor de la capa. De este modo, el volumen de la capa es

$$2\pi(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})$$

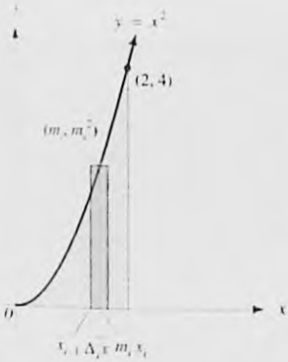


FIGURA 5

EJEMPLO 1 La región limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 2$ se gira alrededor del eje y. Calcule el volumen del sólido generado. Considere los elementos de área paralelos al eje de revolución.

Solución La figura 5 muestra la región y un elemento rectangular de área. La figura 6 muestra el sólido de revolución y la capa cilíndrica obtenida al girar el elemento rectangular de área alrededor del eje y.

El elemento de volumen es una capa cilíndrica cuyo volumen es

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= 2\pi m_i (m_i^2)\, \Delta_i x \\ &= 2\pi m_i^3\, \Delta_i x \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i^3\, \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^2 x^3\, dx \\ &= 2\pi\left(\tfrac{1}{4} x^4\right)\Big]_0^2 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

FIGURA 6

<u>Conclusión:</u> El volumen del sólido de revolución es de 8π unidades cúbicas. ◀

En el siguiente ejemplo se calcula el volumen del sólido de revolución discutido al principio de esta sección.

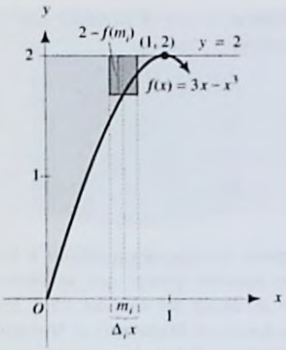


FIGURA 7

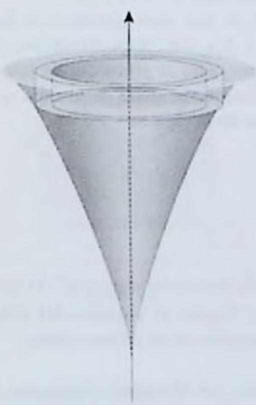


FIGURA 8

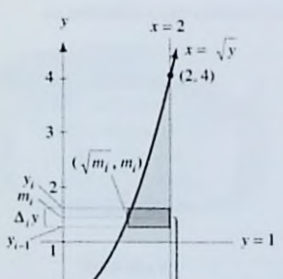


FIGURA 9

EJEMPLO 2 Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje y la región limitada por la gráfica de $y = 3x - x^3$, el eje y y la recta $y = 2$.

Solución Sea $f(x) = 3x - x^3$. La figura 7 muestra la región y un elemento rectangular de área paralelo al eje y. El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se presentan en la figura 8. El radio medio de la capa cilíndrica es m_i unidades, la altura es $[2 - f(m_i)]$ unidades y el espesor es $\Delta_i x$ unidades. Por tanto, si $\Delta_i V$ unidades cúbicas es el volumen de la capa cilíndrica, entonces

$$\Delta_i V = 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x$$

De modo que si V unidades cúbicas es el volumen del sólido de revolución, entonces

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x \\
&= 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x(2 - 3x + x^3)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)\,dx \\
&= 2\pi\left[x^2 - x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 2\pi(1 - 1 + \tfrac{1}{5}) \\
&= \tfrac{2}{5}\pi
\end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El volumen del sólido es $\frac{2}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

EJEMPLO 3 La región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 1$ y $x = 2$ se gira alrededor de la recta $y = -3$. Obtenga el volumen del sólido generado al considerar los elementos rectangulares de área paralelos al eje de revolución.

Solución La región y un elemento rectangular de área se muestran en la figura 9.

La ecuación de la curva es $y = x^2$. Al resolver esta ecuación para x se obtiene $x = \pm\sqrt{y}$. Como $x > 0$ para la región dada, entonces $x = \sqrt{y}$.

El sólido de revolución y una capa cilíndrica, elemento de volumen, se muestran en la figura 10. El radio exterior de la capa cilíndrica es $(y_i + 3)$ unidades, mientras que el radio interior es $(y_{i-1} + 3)$ unidades. En consecuencia, el radio medio es $(m_i + 3)$ unidades. Como la altura y el espesor de la capa cilíndrica son, respectivamente, $(2 - \sqrt{m_i})$ unidades y $\Delta_i y$ unidades, entonces

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\,\Delta_i y$$