

TEORÍA DE LOS VEHÍCULOS AUTOMÓVILES

Francisco Aparicio • Carlos Vera • Vicente Díaz

570

Contrato 09-A-2017/667

MFN: 0000023570

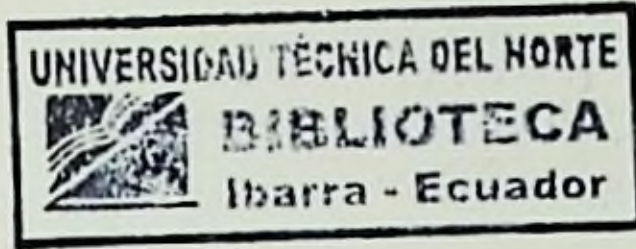
629.222

.A63

Tes

2016

Ej. 1.



<AUTOMÓVILES>

<VEHÍCULOS>

<TRANSPORTE TERRESTRE>

TEORÍA DE LOS VEHÍCULOS AUTOMÓVILES

UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE
BIBLIOTECA

Vía de adquisición: *Compra*

Documento N°: *09-A-2017-667*

Fecha: *27-03-2017*

Valor unitario: *38,00*

Código de Barras: *056774*

Anexo:

TEORÍA DE LOS VEHÍCULOS AUTOMÓVILES

Francisco Aparicio · Carlos Vera · Vicente Díaz

2ª EDICIÓN



Consulte la página www.dextraeditorial.com

Diseño cubierta: ©TheIdeas · www.ideasjc.net

© Rafael Nieto Carlier · Celina González Fernández
Ignacio López Paniagua
Ángel Jiménez Álvaro · Javier Rodríguez Marín

© Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica
Superior de Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Madrid

© Dextra Editorial S.L.
C/Arroyo de Fontarrón, 271, 28010 Madrid
Teléfono: 91 773 37 10

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquier otro, sin la autorización expresa por escrito de Dextra Editorial. S.L.

ISBN: 978-84-16277-61-2
Depósito legal: M-774-2016
Impreso en España. Printed in Spain

PRESENTACIÓN

A nuestras familias...

PRESENTACIÓN

El vehículo automóvil es, en nuestros días, uno de los artefactos más apreciados por los ciudadanos de las sociedades desarrolladas. La movilidad, ese impulso atávico en el ser humano y, en cierta medida relacionado con ella, el deseo de libertad, encuentran en el automóvil una vía muy apropiada para su satisfacción; ello se ve reflejado en el hecho de que habiéndose multiplicado por veinte la movilidad de los españoles entre el año 1950 y 1997, el setenta y ocho por ciento de los nuevos desplazamientos hayan sido absorbidos por los vehículos privados.

La creciente demanda de prestaciones de los vehículos, unida a la necesidad de reducir lo más posible los efectos negativos de su uso masivo, ha conducido al desarrollo de una gran cantidad de conocimientos mediante la investigación de numerosos aspectos relacionados con esta maravillosa máquina con ruedas. Buena parte de estos conocimientos han alcanzado la categoría de disciplinas académicas de nivel universitario desde hace bastantes años. No obstante lo anterior, son escasas las obras en las que se han plasmado, de forma sistemática, los contenidos de tales disciplinas, existiendo un vacío casi total de las escritas en lengua castellana.

Con este libro pretendemos contribuir a reducir tal carencia. Se desarrollan en él los conocimientos que vienen impartándose en la asignatura correspondiente que cursan muchos estudiantes del área de Ingeniero Industrial, en la especialidad de Mecánica, y en diversos *masters*, como por ejemplo el de Ingeniería de Vehículos Automóviles que impartimos en las Universidades Politécnica de Madrid y de Belgrano, en Buenos Aires.

El libro se estructura en siete capítulos. El primero es de carácter introductorio, incluye conceptos generales y sirve de presentación del resto de los temas.

En los capítulos segundo y tercero se analiza la interacción del vehículo, como sistema, con su medio. En el segundo se estudian los neumáticos, prestando atención a su comportamiento dinámico y a la interacción neumático-calzada, incluyendo modelos matemáticos de ambos aspectos. En el capítulo tercero se analiza la aerodinámica de los vehículos, iniciándose con un conjunto de conceptos fundamentales para entender los principales fenómenos asociados a los flujos exterior e interior.

En los restantes capítulos se aborda la dinámica vehicular, la cual, por razones didácticas, se ha dividido en tres partes fundamentales: dinámica longitudinal, que abarca la tracción o propulsión y frenado, contenidos de los capítulos cuarto y quinto, respectivamente; la dinámica lateral, comprendiendo los aspectos de maniobrabilidad, derrape, vuelco y comportamiento virador, la cual se estudia en el capítulo sexto y, por último, la dinámica vertical, que analiza la respuesta del vehículo a las excitaciones de la calzada, y se aborda en el capítulo séptimo.

En todos los capítulos se han incluido ejercicios resueltos con el objeto de ayudar a la comprensión de la teoría y completar los temas tratados, con un enfoque más aplicado.

Confiamos en que esta obra, además de facilitar el estudio a nuestros alumnos, pueda ser útil, también, para ingenieros que desarrollan su labor en industrias del sector y otras empresas o actividades relacionadas con el automóvil.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a nuestro compañero, el profesor Andrés García, por la revisión de buen número de problemas que se incluyen, a Luis Martínez que ha colaborado, también, en la preparación de algunas aplicaciones, y a Rosa Henández por su paciencia y excelente trabajo en la preparación del texto.

NOTA A LA SEGUNDA EDICION

En esta segunda edición se ha mantenido el contenido de la primera. El texto ha sido revisado detenidamente con tres objetivos: eliminar las erratas advertidas en la primera edición, introducir mejoras de redacción y modificar algunos párrafos para facilitar la comprensión de los mismos por parte de los estudiantes.

Confiamos en que esta edición tenga la misma buena acogida entre estudiantes de ingeniería y otras personas interesadas en el conocimiento de la teoría de automóviles y, así mismo, que las mejoras introducidas hagan más sencilla su lectura y estudio.

ÍNDICE

SÍMBOLOS UTILIZADOS CON MAYOR FRECUENCIA	xix
1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS VEHÍCULOS AUTOMÓVILES	1
1.1. Introducción	1
1.2. El vehículo automóvil. Concepto	1
1.3. Principales requerimientos exigidos a los vehículos automóviles	3
1.4. El sistema hombre-vehículo medio	4
1.5. Objetivos y alcance de la teoría de los vehículos automóviles	8
2. INTERACCIÓN ENTRE EL VEHÍCULO Y LA SUPERFICIE DE RODADURA	13
2.1. Características generales de los neumáticos	13
2.1.1. Introducción	13
2.1.2. Estructura de la cubierta	14
2.1.2.1. Componentes principales	14
2.1.3. Materiales	19
2.1.4. Banda de rodamiento y costados	23
2.1.5. Designación de los neumáticos. Parámetros fundamentales	25
2.2. Características mecánicas de los neumáticos	30
2.2.1. Fuerzas y momentos que actúan sobre los neumáticos	30
2.2.2. Fuerza normal. Deformación radial, rigidez radial estática y dinámica	33

2.2.3. Resistencia a la rodadura. Coeficiente de resistencia a la rodadura	38
2.2.3.1. Influencia de los factores de diseño y construcción del neumático en la resistencia a la rodadura	40
2.2.3.2. Influencia de las condiciones operativas en la resistencia a la rodadura	42
2.2.3.3. Influencia de las características de la superficie de rodadura en la resistencia a la rodadura del neumático	45
2.2.3.4. Valores del coeficiente de resistencia a la rodadura	45
2.3. Esfuerzos longitudinales (tracción y frenado). Deslizamiento. Adherencia	47
2.3.1. Tracción	47
2.3.2. Esfuerzo de frenado	49
2.3.3. Coeficiente de adherencia. Valor máximo y valor de deslizamiento puro	50
2.3.4. Comportamiento del neumático sobre superficies cubiertas de agua. Hidroplaneo (Acuaplaning)	55
2.4. Esfuerzos transversales sobre el neumático. Deriva	62
2.4.1. Variación de la fuerza transversal de contacto con el ángulo de deriva	66
2.4.2. Factores que afectan al comportamiento transversal del neumático	67
2.4.3. Ángulo de caída de la rueda (γ)	75
2.4.4. Momento autolineante	77
Ejercicio 2.1	79
2.5. Modelos para simular la interacción neumático-superficie de rodadura	82
2.5.1. El modelo de Dugoff	82
2.5.2. El modelo de Bakker, Nyborg y Pacejka	89
2.5.2.1. Expresiones propuestas	90
2.5.2.2. Obtención de los coeficiente	93
2.5.2.3. Influencia de la carga vertical	96
2.5.2.4. Influencia del ángulo de caída	99
2.5.2.5. Esfuerzos longitudinales y laterales combinados	102
2.5.2.6. Momento autoalineante durante esfuerzos combinados laterales y de frenada	111
Ejercicio 2.2	113

3. AERODINÁMICA DE LOS AUTOMÓVILES	119
3.1. Acciones aerodinámicas sobre los solidos. Conceptos generales	119
3.1.1. <i>Introducción</i>	119
3.1.2. <i>Propiedades de los fluidos incompresibles</i>	122
3.1.3. <i>Flujo exterior</i>	124
3.1.3.1. Resistencia debida al rozamiento	126
3.1.3.2. Resistencia de presión	127
3.1.3.3. Efecto del ángulo de incidencia sobre una placa plana	131
3.1.3.4. Sólidos currentilíneos o aerodinámicos	132
3.1.3.5. Perfil de ala	135
3.1.4. <i>Flujo interior</i>	136
3.1.5. <i>Problemas especiales</i>	138
3.1.5.1. Ruido	138
3.1.5.2. Efecto aeroelástico	139
3.1.5.3. Transporte de partículas	139
3.2. Acciones aerodinámicas sobre los vehículos automóviles	140
3.2.1. <i>Fuerzas y momentos sobre los vehículos</i>	140
3.2.2. <i>Resistencia al avance</i>	143
3.2.2.1. Influencia de la parte delantera	145
3.2.2.2. Influencia de la parte trasera	150
3.2.2.3. Laterales	156
3.2.2.4. Bajos del vehículo	156
3.2.2.5. Ruedas	157
3.2.2.6. Spoiler delantero	157
3.2.2.7. Spoiler trasero	160
3.2.2.8. Influencia de otros factores sobre Cx	161
3.2.3. <i>Optimización de la forma del vehículo</i>	164
3.2.4. <i>Resistencia al avance de vehículos industriales, autobuses y autocares</i>	166
3.2.4.1. Combinaciones de vehículos	167
3.2.4.2. Forma de la cabina	169
3.2.4.3. Influencia de los deflectores aerodinámicos y otros dispositivos	171
3.2.5. <i>Sustentación aerodinámica y momento de cabeceo</i>	173
3.2.6. <i>Fuerza lateral y momento de guiñada</i>	177
3.2.7. <i>Comportamiento dinámico bajo la acción de viento lateral.</i>	

<i>Límite de seguridad</i>	178
3.2.7.1. <i>Límite de seguridad</i>	182
3.2.8. <i>Momento de vuelco</i>	183
3.2.9. <i>Ensayos aerodinámicos de vehículos</i>	184
<i>Ejercicio 3.1</i>	190
4. DINAMICA LONGITUDINAL. PRESTACIONES	193
4.1. Introducción	193
4.2. Resistencia al movimiento	194
4.3. Ecuación fundamental del movimiento longitudinal	199
4.4. Esfuerzo tractor máximo limitado por la adherencia en vehículos de dos ejes	202
4.5. Esfuerzo tractor máximo limitado por la adherencia en vehículos compuestos tractor-semirremolque	205
4.6. Características del motor y transmisión	208
4.6.1. <i>Introducción</i>	208
4.6.2. <i>Características de los motores</i>	208
4.6.3. <i>Transmisión. Funciones y características generales</i>	213
4.6.4. <i>Determinación de relaciones de transmisión</i>	215
4.6.5. <i>Diagrama de tracción de un vehículo</i>	219
4.6.6. <i>Transmisión hidrodinámica</i>	221
4.6.6.1. <i>Introducción</i>	221
4.6.6.2. <i>Embrague hidrodinámico</i>	222
4.6.6.3. <i>Convertidor de par</i>	224
4.6.6.4. <i>Trabajo conjunto del motor y convertidor</i>	228
4.6.6.5. <i>Esfuerzo tractor en llanta y velocidad de desplazamiento del vehículo en función del régimen del motor</i>	230
4.7. Predicción de las prestaciones de un vehículo	231
4.7.1. <i>Introducción</i>	231
4.7.2. <i>Velocidad máxima</i>	231
4.7.3. <i>Aceleración</i>	232
4.7.4. <i>Rampa máxima</i>	236
<i>Ejercicio 4.1</i>	238
<i>Ejercicio 4.2</i>	240
<i>Ejercicio 4.3</i>	247
<i>Ejercicio 4.4</i>	252

Ejercicio 4.5	257
5. FRENADO DE VEHÍCULOS AUTOMÓVILES	275
5.1. Frenado. Introducción	275
5.2. Fuerzas y momentos que actúan en el proceso de frenado	276
5.2.1. <i>Fuerza de frenado</i>	276
5.2.2. <i>Efecto de un desnivel longitudinal</i>	277
5.2.3. <i>Resistencia a la rodadura</i>	277
5.2.4. <i>Acciones aerodinámicas</i>	277
5.2.5. <i>Resistencia del motor y transmisión</i>	278
5.3. Condiciones impuestas por la adherencia. Reparto óptimo de fuerzas de frenado	279
5.3.1. <i>Frenado de vehículos de dos ejes</i>	279
5.3.1.1. <i>Reparto óptimo de fuerzas de frenado</i>	281
5.3.1.2. <i>Curvas de equiaderencia. Modificación del reparto de fuerzas de frenado</i>	286
5.3.2. <i>Frenado de vehículos articulados tractor-semirremolque</i>	292
5.3.2.1. <i>Efectos del bloqueo de ruedas</i>	292
5.3.2.2. <i>Reparto de fuerzas de frenado</i>	292
5.4. El proceso de frenado	296
5.4.1. <i>Rendimiento de frenado</i>	296
5.4.2. <i>Distancia de frenado</i>	297
5.4.3. <i>Tiempo de frenado</i>	299
5.4.4. <i>Potencia disipada durante el frenado</i>	300
5.5. Sistemas antibloqueo de frenado (ABS)	301
5.5.1. <i>Introducción</i>	301
5.5.2. <i>Objetivos de los sistemas ABS</i>	303
5.5.3. <i>Principios físicos de un sistema antibloqueo</i>	303
5.5.4. <i>Elementos fundamentales de un sistema antibloqueo</i>	305
5.5.5. <i>Criterios y ciclos de control</i>	309
5.5.6. <i>Técnicas de control en los sistemas ABS</i>	313
Ejercicio 5.1	317
Ejercicio 5.2	323
Ejercicio 5.3	325
Ejercicio 5.4	330

6. DINÁMICA LATERAL DEL VEHÍCULO	335
6.1. Introducción	335
6.2. Geometría de la dirección	337
6.3. Maniobrabilidad a velocidad muy reducida	344
<i>6.3.1. Desviación de rodadas en movimiento estacionario durante giros</i>	<i>344</i>
<i>6.3.2. Desviación transitoria de rodadas</i>	<i>347</i>
6.4. Circulación en curva. Velocidades límite de derrape y de vuelco	350
<i>6.4.1. Cálculo aproximado de la velocidad límite de derrape</i>	<i>351</i>
<i>6.4.2. Cálculo aproximado de la velocidad límite de vuelco</i>	<i>352</i>
<i>6.4.3. Consideraciones acerca de la adherencia lateral en circulación en curva</i>	<i>354</i>
<i>6.4.4. Estabilidad en condiciones de vuelco estático</i>	<i>355</i>
6.4.4.1. Vehículos con suspensión rígida	355
6.4.4.2. Influencia de la suspensión elástica	358
6.4.4.3. Influencia del centro de balanceo de la suspensión	360
6.4.4.4. Respuesta de vehículos con varios ejes	362
6.4.4.5. Otras variables que influyen en el vuelco de vehículos	365
6.5. Comportamiento direccional del vehículo en régimen estacionario	366
<i>6.5.1. Introducción</i>	<i>366</i>
<i>6.5.2. Modelo lineal simplificado de un vehículo para el estudio de giros estacionarios</i>	<i>368</i>
<i>6.5.3. Respuesta direccional Vehículos neutros, subviradores y sobreviradores</i>	<i>371</i>
<i>6.5.4. Respuesta direccional estacionaria frente a acciones sobre el volante</i>	<i>376</i>
6.5.4.1. Ganancia de aceleración lateral	376
6.5.4.2. Ganancia de velocidad de guiñada	377
6.5.4.3. Ganancia de curvatura	378
<i>6.5.5. Ensayo para el estudio de las características direccionales en régimen estacionario</i>	<i>379</i>
6.5.5.1. Ensayos a radio constante	380
6.5.5.2. Ensayos a velocidad constante	381
6.5.5.3. Ensayos con ángulo de dirección constante	383
6.6. Modelo linealizado para el estudio de la dinámica lateral	384
<i>6.6.1. Introducción</i>	<i>384</i>

6.6.2. Modelo de vehículo linealizado	385
6.6.3. Período transitorio de la respuesta a una variación brusca del ángulo de giro	395
6.6.4. Aplicación al caso de giros estacionarios	397
6.6.5. Condiciones de estabilidad	400
6.6.6. Factores que influyen en la estabilidad direccional	402
6.6.7. Influencia de la suspensión en el comportamiento virador del vehículo	404
6.6.7.1. Efecto de la distribución de momentos de balanceo. Influencia de las barras estabilizadoras	404
Ejercicio 6.1	412
Ejercicio 6.2	418
Ejercicio 6.3	422
Ejercicio 6.4	426
Ejercicio 6.5	431
Ejercicio 6.6	436
Ejercicio 6.7	442
Ejercicio 6.8	447
Ejercicio 6.9	452
Ejercicio 6.10	459
Ejercicio 6.11	463
7. DINÁMICA DE UN VEHÍCULO DOTADO DE SUSPENSIÓN	467
7.1. Introducción	467
7.1.1. Respuesta humana a las vibraciones. Criterios de ICV	468
7.1.2. Las vibraciones en los vehículos automóviles. Influencia de la suspensión	471
7.2. El sistema de suspensión	473
7.2.1. Predimensionamiento de la suspensión	477
7.2.2. Introducción a la función de transferencia	483
7.2.3. Aplicación de la función de transferencia en el diseño de la suspensión	485
7.2.4. Uso y aplicación de la función de transferencia	487
7.2.5. Modelo de 2 grados de libertad (2 G.D.L.)	488
7.2.6. Función de transferencia en el modelo de 2 G.D.L.	492
7.3. Movimientos de cabeceo y vaivén	495
7.3.1. Frecuencias de cabeceo y vaivén	497

7.3.2. Modelos de 4 G.D.L.	502
7.3.3. Aplicación de modelos de 4.G.D.L.	504
7.3.4. Respuesta en curva	508
7.3.5. Suspensión con eje rígido	511
7.4. Suspensión neumática	515
7.4.1. Comportamiento real de los cojinetes neumáticos	517
7.4.2. Modelos con suspensión neumática	519
7.5. El perfil superficial de carretera como una función aleatoria	524
7.5.1. Introducción	524
7.5.2. Principales parámetros estadísticos	526
7.5.3. Correlación entre dos funciones	528
7.5.4. Autocorrelación	529
7.5.5. Transformada de Fourier de funciones periódicas y no periódicas	531
7.5.6. Densidad espectral de un proceso aleatorio	533
7.5.7. Densidad espectral de la carretera	535
Ejercicio 7.1	539
Ejercicio 7.2	543
BIBLIOGRAFÍA	551

SÍMBOLOS UTILIZADOS CON MAYOR FRECUENCIA

α	-	Angulo de deriva de la rueda. Aceleración angular. Angulo de ataque del vehículo.
β	-	Angulo de deriva del vehículo.
β_0	-	Idem a velocidad prácticamente nula.
γ	-	Angulo de caída de la rueda.
γ_r	-	Factor de masa equivalente de la masas rotativas durante procesos de frenado.
γ_m	-	Idem durante procesos de aceleración.
δ	-	Angulo de guiado.
δ_e	-	Angulo de giro de la rueda directriz exterior.
δ_i	-	Angulo de giro de la rueda directriz interior.
δ_0	-	Angulo de giro de ruedas directrices a velocidad prácticamente nula.
δ_v	-	Angulo de giro del volante.
δ^*	-	Angulo teórico de giro de las ruedas directrices.
ζ	-	Angulo de inclinación lateral de la calzada (peralte).
η	-	Rendimiento de la transmisión.
η_r	-	Rendimiento de frenado.
θ	-	Angulo de cabeceo. Angulo de rampa o pendiente de la calzada.
μ	-	Valor de la adherencia neumático-calzada. Viscosidad dinámica.
μ_d	-	Valor de μ con deslizamiento del 100%. Adherencia en el eje delantero.
$\mu_{m\acute{a}x}$	-	Valor máximo de μ .
μ_t	-	Adherencia en el eje trasero.
ν	-	Viscosidad cinemática.
ξ	-	Relación de amortiguamiento.
ξ_c	-	Relación de transmisión proporcionada por el grupo cónico.
ξ_j'	-	Relación j de transmisión en la caja de velocidades.
ξ_j	-	Relación j de transmisión total entre motor y ruedas. ($\xi_j = \xi_j' \cdot \xi_c$).
π	-	Número pi.
ρ	-	Densidad.
ϕ	-	Angulo de balanceo.
ϕ_L	-	Idem correspondiente al umbral de vuelco.

ω, Ω	-	Velocidad angular. Frecuencia angular.
ω_x	-	Velocidad angular de balanceo.
ω_y	-	Idem de cabeceo.
ω_z	-	Idem de guiñada.
A	-	Area.
A_c	-	Area de contacto neumático-calzada.
A_f	-	Area frontal del vehículo.
a	-	Aceleración.
a_x	-	Componente de la ac. respecto al eje x (longitudinal).
a_y	-	Componente de la ac. respecto al eje y (lateral).
a_z	-	Componente de la ac. respecto al eje z (perpendicular a la superficie de rodadura).
B	-	Vía del vehículo.
b	-	Ancho.
b_c	-	Ancho de la superficie de contacto.
b_{ll}	-	Ancho de llanta.
b_n	-	Ancho de sección del neumático.
C	-	Coefficiente aerodinámico total ($1/2 \rho C_x A_f$).
C_{mx}	-	Coefficiente aerodinámico de momento de vuelco.
C_{my}	-	Coefficiente aerodinámico de momento de cabeceo.
C_{mz}	-	Coefficiente aerodinámico de momento de guiñada.
C_p	-	Coefficiente de presión.
C_v	-	Relación de velocidades de un convertidor de par.
C_p	-	Relación de pares de un convertidor de par.
C_x	-	Coefficiente aerodinámico de resistencia al avance.
C_y	-	Coefficiente aerodinámico de empuje lateral.
C_z	-	Coefficiente de sustentación.
D	-	Diámetro.
D_{ll}	-	Diámetro de la llanta.
D_n	-	Diámetro exterior del neumático.
DR	-	Desviación de rodadas.
d	-	Distancia.
d_n	-	Avance del neumático
e	-	Espacio recorrido. Desplazamiento.
F_b	-	Fuerza en la barra de tracción.
F_c	-	Fuerza centrífuga.
F_d	-	Esfuerzo tractor en llanta, en eje delantero.
F_f	-	Esfuerzo tractor en llanta, en eje trasero.
F_{da}	-	Esfuerzo tractor disponible para acelerar el vehículo.
F_f	-	Fuerza de frenado total.

[Símbolos utilizados con mayor frecuencia.]

F_{fd}	-	Fuerza de frenado en eje delantero.
F_{ft}	-	Fuerza de frenado en eje trasero.
F_{fs}	-	Fuerza de frenado en eje semirremolque.
F_l	-	Fuerza lateral que actúa sobre la rueda.
F_T	-	Esfuerzo tractor en llanta.
F_x	-	Fuerza longitudinal.
F_{xa}	-	Resistencia aerodinámica al avance.
F_y	-	Fuerza lateral.
F_{ya}	-	Empuje lateral aerodinámico.
F_{ya}	-	Fuerza lateral de deriva.
F_{yy}	-	Fuerza lateral debida al ángulo de caída.
F_{yd}	-	Fuerza transversal en el contacto rueda delantera calzada.
F_{yt}	-	Fuerza transversal en el contacto rueda trasera calzada.
F_z	-	Fuerza normal a la superficie de rodadura.
F_{za}	-	Sustentación aerodinámica.
F_{zd}	-	Reacción normal a la superficie de rodadura en el eje delantero. Carga dinámica.
F_{zt}	-	Idem en el eje trasero.
F_{xb}	-	Esfuerzo sobre la 50 rueda de un tractor/semirrem. en la dirección x.
F_{zb}	-	Idem en la dirección z.
f	-	Frecuencia.
f_r	-	Coefficiente de resistencia a la rodadura.
f_0	-	Valor del coeficiente de resistencia a la rodadura a velocidad próxima a cero.
f_s	-	Factor de variación de f_r con la velocidad.
G	-	Módulo de elasticidad por cortadura.
G_{ay}	-	Ganancia de aceleración lateral.
GC	-	Garantía de curvatura.
$G\Omega_z$	-	Ganancia de velocidad de guiñada.
g	-	Aceleración de la gravedad.
H	-	Potencia.
H_a	-	Potencia en condiciones normatizadas.
H_m	-	Potencia media.
h	-	Altura del c.d.g. del vehículo.
h_a	-	Altura del punto de aplicación de la resistencia aerodinámica sobre el nivel del suelo.
h_b	-	Altura de la barra de tracción o gancho.
h_n	-	Altura de la sección del neumático.
I	-	Momento de inercia de masas.
I_d	-	Momento de inercia de las ruedas del eje delantero respecto su eje de giro.

I_t	-	Momento de inercia de las ruedas del eje trasero respecto su eje de giro.
I_x	-	Momento de inercia del vehículo respecto del eje x.
I_y	-	Momento de inercia del vehículo respecto al eje y.
I_z	-	Momento de inercia del vehículo respecto al eje z.
i	-	Deslizamiento longitudinal del neumático sometido a esfuerzos longitudinales.
i_p	-	Patinaje, deslizamiento longitudinal del neumático durante el frenado.
j	-	Pendiente, rampa en tanto por uno.
k	-	Rigidez.
k_b	-	Factor de capacidad del convertidor de par.
k_d	-	Coefficiente de rigidez equivalente de la suspensión en el eje delantero. Rigidez del sistema de dirección.
k_{fd}	-	Proporción de la fuerza total de frenado disponible en el eje delantero.
k_{ft}	-	Idem en el eje trasero.
k_{fs}	-	Idem en el eje semirremolque.
k_m	-	Factor de capacidad del motor.
k_s	-	Rigidez de un resorte de la suspensión.
k_t	-	Coefficiente de rigidez equivalente de la suspensión en el eje trasero.
k_x	-	Rigidez longitudinal de un neumático.
k_y	-	Rigidez lateral del neumático.
k_z	-	Rigidez radial del neumático.
k_{ze}	-	Rigidez radial estática de un neumático.
k_{zd}	-	Rigidez radial dinámica de un neumático.
K'_{zd}	-	Rigidez radial dinámica sin rodadura.
k_v	-	Coefficiente de viraje.
k_a	-	Rigidez de la deriva.
k_{ad}	-	Coefficiente equivalente de rigidez de deriva de las ruedas delanteras teniendo en cuenta la elasticidad del sistema de dirección.
k_r	-	Rigidez de caída.
k_ϕ	-	Rigidez de balanceo.
L	-	Distancia entre ejes del vehículo o batalla.
L_1	-	Idem de entre los ejes del tractor.
L_2	-	Distancia en proyección sobre la superficie de rodadura, entre la 50 rueda y el eje equivalente del semirremolque.
l	-	Longitud.
l_1	-	Distancia entre el c.d.g. y el eje delantero en su proyección sobre el plano de rodadura.
l_2	-	Distancia entre el c.d.g. y el eje trasero en su proyección sobre el plano de rodadura.
l_c	-	Longitud de la superficie de contacto neumático-suelo.

[Símbolos utilizados con mayor frecuencia.]

M	-	Par de fuerzas o momento, masa.
M'	-	Par de inercia de masas giratorias.
M_a	-	Par de un motor funcionando a plena admisión.
M_b	-	Par en bomba (de un convertidor de par).
M_c	-	Par de un motor funcionando a contrapresión.
M_{da}	-	Par tractor disponible para acelerar el vehículo.
M_F	-	Par de frenado (en rueda).
M_m	-	Par neto a la salida del motor.
M_T	-	Par de tracción (en rueda).
M_t	-	Par en turbina (de un convertidor de par).
M_x	-	Par de vuelco.
M_{xa}	-	Momento aerodinámico de vuelco.
M_y	-	Par de resistencia a la rodadura de la rueda. Momento de cabeceo del vehículo.
M_{ya}	-	Momento aerodinámico de cabeceo.
M_z	-	Par autolineante de la rueda. Momento de guiñada del vehículo.
M_{za}	-	Momento aerodinámico de guiñada.
m	-	Masa del vehículo.
m_{os}	-	Masa no suspendida.
m_s	-	Masa suspendida.
N	-	Newton.
n	-	Número de revoluciones por minuto.
n_m	-	r.p.m. del motor.
n_{m3}	-	r.p.m. de ralentí del motor.
n_r	-	r.p.m. de giro de las ruedas.
P	-	Peso. Presión.
P_c	-	Peso del vehículo a plena carga.
P_d	-	Proporción del peso del vehículo aplicado al eje delantero. Carga estática sobre el eje delantero sobre superficie horizontal.
P_1	-	Idem al eje trasero.
P_s	-	Idem sobre el eje del semirremolque.
P_v	-	Peso del vehículo en vacío, o en orden de marcha.
P_1	-	Peso de la cabeza tractora.
P_2	-	Peso del semirremolque.
p	-	Presión.
p_i	-	Presión de inflado.
p_{∞}	-	Presión en flujo libre de aire.
p_a	-	Presión atmosférica.
p_v	-	Presión de vapor.
q	-	Flujo de calor.



[*Símbolos utilizados con mayor frecuencia.*]

- X - Primer eje del sistema cartesiano de coordenadas. Eje longitudinal del vehículo, paralelo a la superficie de rodadura.
- x - Coordenada según el eje X.
- Y - Segundo eje del sistema cartesiano de coordenadas. Eje transversal del vehículo, paralelo a la superficie de rodadura.
- y - Coordenada según el eje X.
- Z - Tercer eje del sistema cartesiano de coordenadas. Eje perpendicular a la superficie de rodadura.
- z - Coordenada respecto al eje Z.

1.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LOS VEHÍCULOS AUTOMÓVILES

1.1. INTRODUCCION

El presente capítulo constituye la introducción a la TEORIA DE LOS VEHICULOS AUTOMOVILES, que se desarrolla en los capítulos siguientes de este libro. Con él se pretende ofrecer una panorámica general de los principales contenidos que se consideran integrados en dicha teoría, partiendo del concepto de vehículo automóvil, así como de los requerimientos que éste ha de cumplir en función de una demanda cada vez mas exigente.

Se analizará el sistema hombre-vehículo-medio, que ha de servir como marco de referencia de todo estudio sobre vehículos, y con su ayuda se enunciarán los aspectos fundamentales que componen la respuesta del vehículo en movimiento a excitaciones provocadas por el conductor sobre los elementos de control, o provenientes del medio: calzada o viento.

Por último se presentarán, con cierto nivel de detalle, los contenidos que se estudian en otros capítulos haciendo referencia a los principales problemas abordados, su interés y también sus limitaciones, teniendo en cuenta la necesidad de establecer diferentes hipótesis simplificativas coherentes con el propósito general de este trabajo.

1.2. EL VEHICULO AUTOMOVIL. CONCEPTO

El diccionario de la Real Academia Española, define los términos "vehículo" y "automóvil" de la siguiente forma:

VEHICULO: "Artefacto, como carruaje, embarcación, narrya o litera, que sirve para transportar personas o cosas de un lugar a otro."

AUTOMOVIL: "Que se mueve por sí mismo". "Aplicase principalmente a los carruajes que pueden ser guiados para marchar por una vía ordinaria sin necesidad de carriles y llevar un motor, generalmente de explosión que les pone movimiento".

En estas definiciones, contempladas conjuntamente, se encuentran en forma explícita o implícita los principales elementos asociados al concepto de vehículo automóvil que interesa desde el punto de vista de este trabajo y que expresamos a continuación. Así, por vehículo automóvil entenderemos, en el marco de esta disciplina:

- Una máquina cuya finalidad es transportar a personas o cosas de un lugar a otro.
- Está dotado de al menos cuatro ruedas neumáticas; propulsión mecánica, y sistemas capaces de orientar su trayectoria y de reducir su velocidad o detenerlo.
- Puede desplazarse de forma autónoma.
- Está concebido para moverse por superficies preparadas (carreteras) sin quedar vinculado mecánicamente o por otro medio, a seguir una trayectoria determinada.

De esta definición, más precisa, se deduce que la teoría que será estudiada en éste y los siguientes capítulos, se refiere a vehículos terrestres, no guiados, de carretera; quedan excluidos, por tanto, los vehículos todo terreno en cuanto a su movimiento sobre superficies no preparadas, el cual queda condicionado por la interacción neumático-suelo, que en el caso de terrenos naturales se rige por leyes muy distintas a las que gobiernan el comportamiento del neumático sobre superficies cubiertas por materiales especiales para la rodadura de vehículos (asfalto, hormigón, etc...).

Quedan, así mismo, excluidos de nuestro estudio, los vehículos de menos de cuatro ruedas, entre los que adquiere gran importancia la motocicleta. Se incluyen en cambio, los vehículos de más de dos ejes, generalmente articulados, tanto las combinaciones tractor-semirremolque, como los trenes de vehículos constituidos por uno de dos ejes, que proporciona tracción, y un número variable de remolques, aunque su tratamiento en el libro es mucho más limitado que el de vehículos de dos ejes.

Aunque existen diferentes clasificaciones amplias de los vehículos que tienen en cuenta la gran variedad de los mismos: turismos, furgonetas, camiones, tractor semirremolque, trenes de vehículos, autobuses, autocares, etc; desde el punto de vista de la teoría que nos ocupa tiene interés diferenciar, fundamentalmente entre:

- Vehículos rígidos y vehículos articulados.
- Turismos y vehículos industriales.

En el primer caso, la existencia de más de dos ejes impone disposiciones especiales: diferentes vehículos, o partes, articulados entre sí, o el desplazamiento angular de uno o más ejes para adaptarse a trayectorias curvas, sin producir excesivos deslizamientos laterales entre la calzada y el neumático. Estas circunstancias exigen modelos específicos para el estudio de su comportamiento, diferentes a los utilizados para vehículos de dos ejes.

En cuanto a la segunda diferenciación, consideraremos como vehículos industriales, en general, todos aquellos que no son turismos, es decir, los vehículos destinados al transporte de mercancías o a un número más elevado de personas y sus equipajes. En estos casos se produce, en general, una diferencia notable entre las condiciones de circulación en vacío y a plena carga y, normalmente, sus dimensiones y masas son considerablemente más elevadas que en los turismos, lo cual supone que sus características inerciales son muy distintas. Si a esto unimos algunas diferencias en lo que se refiere a sus prestaciones y otros requerimientos, se comprenderá que sus características mecánicas ofrecen diferencias y también que todo ello aconseja enfoques específicos en su estudio.

1.3. PRINCIPALES REQUERIMIENTOS EXIGIDOS A LOS VEHICULOS AUTOMOVILES

El vehículo automóvil se ha convertido, en aproximadamente un siglo, en el principal medio de transporte, en un producto industrial altamente correlacionado con el desarrollo y riqueza de los pueblos y el instrumento más eficaz para dar satisfacción a los deseos de movilidad, autonomía, y, en ciertos aspectos, de libertad del hombre actual.

El espectacular incremento del número de vehículos ha provocado problemas importantes, entre los que destacan: las enormes pérdidas de vidas humanas y materiales originadas por los accidentes; la agresión que tan elevado número de vehículos ejerce sobre el medio ambiente, especialmente en forma de contaminantes del aire y de ruidos; y los problemas derivados de la congestión de tráfico en las grandes ciudades. Estos problemas han ido alertando a los ciudadanos y autoridades respecto al peligro que entraña el uso generalizado del automóvil; la respuesta ha sido un incremento notable de exigencias técnicas contenidas en abundantes legislaciones nacionales e internacionales, cada vez más severas. Durante las dos últimas décadas tal incremento ha sido muy importante.

La alta competitividad que caracteriza al sector de fabricación de automóviles, las demandas cada vez más específicas de los usuarios y las imposiciones reglamentarias configuran un amplio panorama de exigencias a estos vehículos. Estas exigencias se vieron impulsadas por la preocupación internacional provocada por las llamadas crisis del petróleo y

más recientemente por la creciente preocupación medioambiental. Todas estas circunstancias han configurado un conjunto de requerimientos exigidos a los automóviles actuales y que se resumen en la figura 1.1.

Todos estos requerimientos no son independientes entre sí, por el contrario se encuentran prácticamente interrelacionados cada uno con todos los demás y existe un elevado número de conflictos entre ellos. Por ejemplo, un incremento de seguridad, manteniendo las prestaciones, puede suponer incremento de peso, e incorporación de nuevos sistemas o componentes, lo cual supondrá aumento de consumo, incremento de coste, nuevos problemas de fiabilidad, etc.

El problema fundamental que afrontan los ingenieros, diseñadores y fabricantes es encontrar soluciones que constituyan buenos compromisos entre tan amplio y variado conjunto de requerimientos. La teoría de los vehículos automóviles aporta conocimientos y técnicas para ayudar a encontrar soluciones a muchos de los requerimientos indicados, como veremos más tarde.



Figura 1.1. Requerimientos exigidos a los automóviles actuales.

1.4. EL SISTEMA HOMBRE-VEHICULO MEDIO

El estudio del comportamiento de los vehículos automóviles debe contemplarse en el marco del sistema hombre-vehículo-medio y tener en cuenta las interacciones entre estos tres elementos básicos, que constituyen un sistema controlado en bucle cerrado. En la figura 1.2 se

representa dicho sistema en un diagrama de bloques.

Como puede observarse, el conductor percibe estímulos procedentes de la carretera, medio ambiente, condiciones de tráfico y del propio vehículo: vibraciones, aceleraciones, ruidos, informaciones a través de diversos indicadores, etc. Estos estímulos deben ser interpretados antes de adoptar una decisión que puede implicar alguna acción sobre cualquiera de los elementos de control del vehículo (volante, acelerador y freno). El vehículo, por su parte, recibe del conductor las acciones de control y produce una respuesta en función del comportamiento de sus propios sistemas y de la interacción con el medio: calzada y acciones aerodinámicas.

La respuesta del vehículo se traducirá en un incremento, decremento o mantenimiento de su velocidad; ascensión por una rampa o descenso por una pendiente; modificación de su trayectoria: gestión de curvas; vibraciones o ruidos, etc... Esta respuesta es percibida por el conductor, quien podrá decidir nuevas actuaciones sobre el vehículo.

La interacción del vehículo con el medio tiene una influencia muy importante en su respuesta. En cuanto a la interacción rueda neumática-calzada, en ella se producen las fuerzas principales que permiten al vehículo ejecutar las funciones fundamentales relacionadas con su desplazamiento: fuerzas sustentadoras, de tracción, de frenado y laterales, estas últimas imprescindibles para el guiado del vehículo. Por otra parte, la calzada es la principal fuente de excitación de las vibraciones verticales; éstas producen una modificación de la carga dinámica sobre cada rueda, de gran importancia en el comportamiento del vehículo y, a su vez, influyen directamente en la comodidad de marcha que percibe el conductor (confort).

Se comprende, por tanto, que la geometría y microgeometría de la calzada, generan, en general, excitaciones de tipo deterministas, o bien aleatorias; la naturaleza y estado de la superficie, el diseño y constitución del neumático, que condicionan el rozamiento entre ambos elementos en las direcciones longitudinal y lateral, así como la resistencia a la rodadura, constituyen factores que afectan notablemente al comportamiento general del vehículo: longitudinal, lateral y vertical.

Las acciones del aire sobre el vehículo ejercen, igualmente, una influencia muy destacada sobre su comportamiento. En primer lugar, el aire produce una resistencia opuesta al movimiento, que a velocidades medias y altas es la principal componente de la potencia consumida. Por otra parte, afectan al comportamiento lateral del vehículo, teniendo influencia en la estabilidad direccional. Por último, se ejerce una fuerza sustentadora que reduce el peso adherente, en uno o en ambos ejes, con la incidencia negativa en el comportamiento del vehículo que ello comporta, salvo que se instalen dispositivos especiales que hagan cambiar el sentido a dicha fuerza sustentadora. Las acciones lateral y vertical, adquieren valores de importancia a altas velocidades. Esta última es considerable en vehículos de competición.

Por último, debe tenerse en cuenta que la extraordinaria influencia que el medio (superficie de rodadura, aire, condiciones ambientales) ejerce sobre el vehículo, aconseja establecer ciertas hipótesis de uso a la hora de diseñar un automóvil, buscando que su respuesta sea óptima en ciertas condiciones previamente definidas. Si el vehículo opera fuera de tales condiciones es previsible que su comportamiento se aleje del deseable.

En cuanto al hombre, su capacidad de percepción y respuesta quedan afectadas por un gran número de variables asociadas a cada persona y su estado psicofísico: carácter, capacidad auditiva, de visión y otras; niveles de cansancio y de atención; conocimientos técnicos relacionados con el vehículo; experiencia de conducción, etc... Mediante estudios en simuladores de conducción y carretera se pueden caracterizar diferentes tipos de conductores a través de algunos rasgos de comportamiento como puede ser el tiempo de reacción ante un suceso imprevisto que aconseje modificar las condiciones de marcha del vehículo. De todos modos, la forma de reaccionar cada conductor, incluso un mismo conductor en diferentes momentos, puede ser tan distinta que existe una gran dificultad para modelizar matemáticamente el sistema completo tal como se ha representado en la figura 1.2.

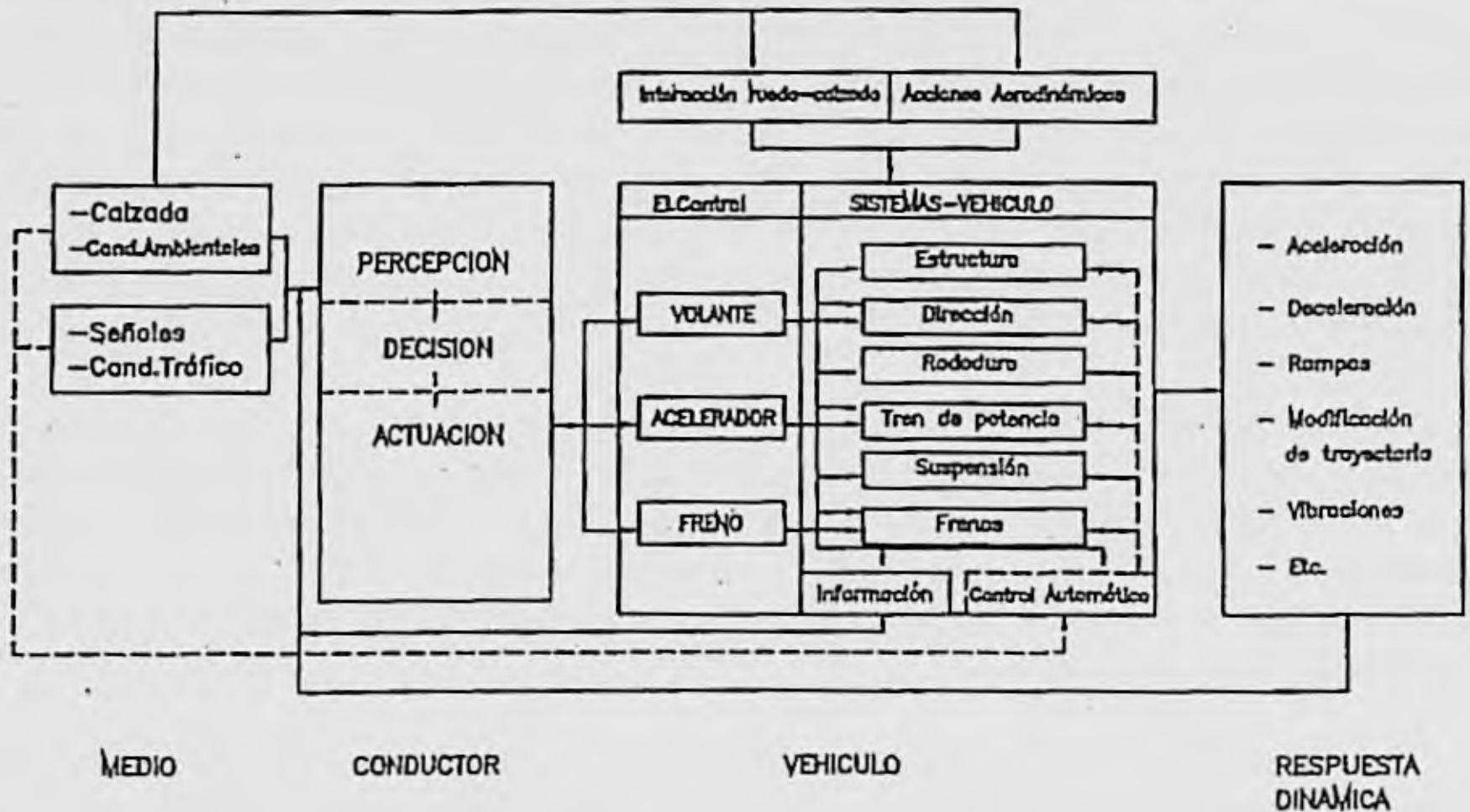


Figura 1.2. Sistema hombre-vehículo-medio.

En líneas de trazos, en la referida figura, se han representado los sistemas de control automático de algunas funciones que han de realizar otros sistemas del vehículo, actuando al margen de la voluntad del conductor. Actualmente existen algunos muy extendidos y familiares para la mayor parte de los usuarios, como son los conocidos ABS o antibloqueo de ruedas, que predicen las condiciones de bloqueo; actúan con una determinada "lógica" para eliminar el riesgo de bloqueo de la rueda; aprovechan, lo mejor posible, la adherencia

disponible y restituyen las condiciones normales de frenado cuando tal riesgo desaparece. En el futuro aumentará considerablemente este tipo de elementos de control, independizando algunas funciones total o parcialmente del conductor y regulando otras que hoy no son modificadas de acuerdo con las condiciones de la marcha como es el caso de la suspensión activa adaptativa o los programas electrónicos de estabilidad. Es previsible que, en solo unas décadas, la mayoría de los sistemas-vehículo incorporen algún tipo de control automático que le otorgue un funcionamiento cada vez menos dependiente del conductor y más adaptado a las condiciones operativas y su variación. Estos sistemas deberán reconocer, mediante sensores, el funcionamiento de otros sistemas, las condiciones de la calzada, la situación del tráfico o la presencia de obstáculos delante del vehículo, etc...

Por último, realizaremos aquí un comentario respecto a la respuesta dinámica del vehículo. A los efectos de nuestro interés, dicha respuesta puede analizarse a través de ciertas variables que permitan su caracterización y comparación. Las más importantes son:

- **Prestaciones**

- * Velocidad máxima
- * Aceleración máxima
- * Rampa máxima

- **Frenado**

- * Rendimiento de frenado
- * Distancia de frenado
- * Comportamiento en condiciones de rozamiento asimétrico.

- **Comportamiento direccional**

- * Maniobrabilidad a baja velocidad
- * Estabilidad direccional

- **Comodidad**

- * Amplitud y frecuencia de las vibraciones.

Algunos autores incluyen el frenado entre las prestaciones del vehículo.

El estudio de la respuesta dinámica del vehículo y la posibilidad de mejorarla tiene incidencia en varios de los requisitos exigibles a los vehículos automóviles, especificados en la figura 1.1. En forma directa, dicha respuesta está relacionada con las prestaciones, comodidad, seguridad, consumo, adaptabilidad a las exigencias del tráfico. Indirectamente su influencia se

extiende a los ruidos, emisiones, coste y otros.

1.5. OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA TEORIA DE LOS VEHICULOS AUTOMOVILES

La disciplina cuyo estudio se inicia en este capítulo y que hemos denominado Teoría de los Vehículos Automóviles tiene como objetivo principal el estudio del movimiento de los vehículos sobre la superficie de rodadura y el comportamiento dinámico de los mismos frente a acciones del conductor sobre los elementos de control, teniendo en cuenta la interacción con el medio: calzada y aire, e incluyendo las excitaciones que tienen como origen dicha interacción.

El estudio se limitará a los vehículos terrestres no guiados de carretera con cuatro o más ruedas, definidos en el apartado 1.2.

Con referencia a la figura 1.2, la disciplina que presentamos se relaciona fundamentalmente con las partes del diagrama que están recuadradas con línea gruesa. En consecuencia, la actuación del conductor se concretará en excitaciones sobre los elementos de control, previamente definidas: giro del volante, acción sobre el freno y acelerador.

Por la influencia, ya comentada, de la interacción del vehículo con la calzada y de las acciones de origen aerodinámico, en la respuesta del vehículo, se iniciará el estudio analizando dichas interacciones.

El capítulo 2 se dedicará al estudio de la rueda neumática. El comportamiento del neumático puede analizarse considerando los esfuerzos longitudinales, es decir, los que actúan en la dirección definida por la traza sobre la superficie de rodadura del plano medio de la rueda; los laterales, perpendiculares a los anteriores y contenidos en el plano de rodadura y los verticales o perpendiculares a los dos anteriores.

Los primeros imponen límites debidos al rozamiento, a los esfuerzos de tracción y frenado. Los segundos proporcionan las fuerzas necesarias para el guiado y originan un comportamiento del neumático denominado de deriva, que tiene gran influencia en la respuesta direccional del vehículo y su estabilidad. En cuanto al comportamiento vertical del neumático, como elemento elástico acompañado de un cierto amortiguamiento, viene a introducir una suspensión primaria entre la superficie de rodadura y las masas no suspendidas, que afecta a la respuesta vertical del vehículo.

Es necesario, por tanto, conocer adecuadamente el comportamiento de los neumáticos antes de iniciar el estudio general del vehículo. Algunos fenómenos específicos como el acuaplaning, cuando ruedan sobre superficies encharcadas de agua, o las vibraciones

de ciertos componentes del neumático, que pueden producirse a determinadas velocidades, son también de interés.

Siendo el neumático un componente de gran complejidad, como se justificará en el capítulo 2, los principales estudios acerca de su comportamiento y datos relativos al mismo, son de origen experimental; no obstante, existen modelos matemáticos de gran utilidad para ser integrados en modelos de vehículos.

El capítulo 3 se dedica al estudio de las acciones aerodinámicas sobre los vehículos automóviles. La aerodinámica automovilística se nutre de conocimientos generales de la ciencia aerodinámica, pero ha de contemplar un conjunto muy importante de peculiaridades de estos vehículos como son su proximidad al suelo o los flujos interiores necesarios para refrigerar el motor y para la aireación del habitáculo de pasajeros.

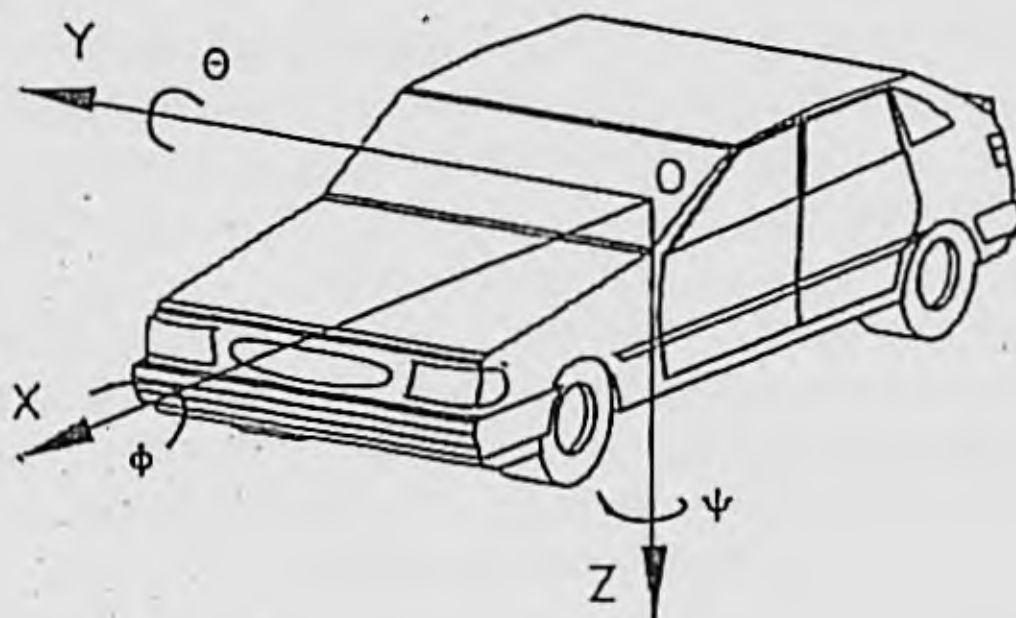
Nuevamente debe ponerse de manifiesto que, la complejidad de la aerodinámica automovilística, hace difícil la utilización de modelos integrales, capaces de predecir eficazmente la influencia de las diferentes partes y formas del vehículo, sobre cada una de las seis componentes que permiten representar las acciones aerodinámicas (tres fuerzas y tres momentos) por lo que es, también, el trabajo experimental en túneles aerodinámicos el que ha permitido acumular un gran número de datos sobre los que basar decisiones de diseño, las cuales han de ser, a su vez, valoradas mediante ensayos con prototipos.

El resto de los capítulos se destinan al estudio del movimiento del vehículo y especialmente de su comportamiento dinámico. La necesidad de acotar el contenido de este trabajo impone límites a la complejidad de los modelos a utilizar en el estudio; ello obliga a establecer hipótesis simplificadoras que permitan considerar desacoplados los movimientos longitudinal, lateral y vertical del vehículo. Con esta limitación se pierde, lógicamente, precisión en el análisis, especialmente en la cuantificación de ciertas variables pero, en cambio, se obtienen notables beneficios didácticos, permitiendo adquirir una base conceptual de gran importancia a la vez que se obtienen herramientas de cálculo útiles si se aceptan soluciones aproximadas que puedan servir de base en la fase de prediseño y en otros trabajos.

El estudio o simulación global del movimiento del vehículo, que requiere modelos más complejos y exige, necesariamente, el uso de ordenadores, constituye una etapa posterior que ha de basarse en conocimientos que se presentan en esta Teoría de Vehículos Automóviles.

La dinámica longitudinal incluye la tracción, o propulsión, y el frenado. A estos temas se destinan los capítulos 4 y 5. Para su estudio, como para el del comportamiento lateral, que se aborda en el capítulo 6, la simplificación más importante será considerar al vehículo como cuerpo rígido, es decir, no dotado de suspensión y movimiento rectilíneo. Esta hipótesis permite considerar únicamente dos grados de libertad para el estudio del movimiento

longitudinal, este es, naturalmente, el desplazamiento X , según el eje longitudinal del vehículo y el movimiento de cabeceo θ . (Fig. 1.3).



SISTEMA DE REFERENCIA	DESPLAZAMIENTO	ÁNGULO
O - Centro de gravedad	X - longitudinal	ϕ - de balanceo
OX - Contenido en el plano longitudinal que contiene a O y es perpendicular al de rodadura. Paralelo al plano de rodadura	Y - Lateral	θ - de cabeceo
OZ - Perpendicular al plano de rodadura	Z - Vertical	ψ - de guiñada
YO - Forma con los anteriores un triedro orientado a derechas		

Figura 1.3. Sistema de referencia empleado para el estudio de los movimientos de un vehículo automóvil.

El estudio del movimiento longitudinal en tracción requerirá la evaluación de las resistencias que se oponen al mismo y de los esfuerzos tractores que proporciona el tren de potencia. Para evaluar tales esfuerzos tractores se considerará la salida del motor (par y potencia) y el papel que juega la transmisión, tanto la de tipo mecánico como la que incorpora convertidor hidrodinámico de par. Uno de los objetivos será determinar las prestaciones del vehículo o los requerimientos que ha de cumplir el tren de potencia para lograr determinadas prestaciones.

En cuanto al frenado, será estudiado, también, en el movimiento en línea recta, tomando la variable X y θ como únicos grados de libertad y se prestará gran atención al reparto de fuerzas de frenado entre los diferentes ejes; a los problemas originados por el

bloqueo de ruedas de un eje y a los métodos existentes para reducir, o eliminar, el riesgo de bloqueo y reducir la distancia de frenado.

El capítulo 6 se dedica al estudio de la dinámica lateral, que tiene como objeto fundamental analizar las características direccionales del vehículo o, lo que es lo mismo, su respuesta a acciones sobre el sistema de la dirección u otras de origen aerodinámico o de interacción con la calzada.

Existen dos problemas fundamentales relacionados con la conducción del vehículo en lo que se refiere a su dirección: el control de dicho vehículo para elegir la trayectoria deseada y la estabilidad de la dirección del movimiento frente a perturbaciones de diferente naturaleza. Ambos serán abordados.

El estudio de la dinámica lateral puede basarse en los movimientos asociados a tres de los 6 grados de libertad: y , ψ , ϕ . En algunos modelos simples puede prescindirse del último y considerar un vehículo en el que las ruedas de cada eje queden representadas en una sola. Se considerará, así mismo, un comportamiento lineal de los neumáticos.

En este capítulo se incluye el estudio de la maniobrabilidad de vehículos y combinaciones de vehículos, así como la estabilidad de vuelco, que tiene fundamental interés en el ámbito de los vehículos industriales de grandes dimensiones.

Por último, en el capítulo 7 se estudiará el comportamiento del vehículo dotado de suspensión. Se analizará el papel que juega ésta y cada uno de sus elementos (resortes y amortiguadores).

La principal atención será prestada a la dinámica vertical, utilizando modelos simplificados que tengan en cuenta dos grados de libertad: por una parte, los desplazamientos verticales de las masas suspendida y semisuspendida (o no suspendida), consideradas concentradas en dos únicas masas; por otra parte, el desplazamiento vertical Z del centro de gravedad y el de cabeceo θ . No se utilizarán modelos más completos que incluyan el ángulo de balanceo ϕ , aunque éste desplazamiento angular forma parte, también, de la dinámica vertical. Se analizarán las funciones de transferencia para modelos de 2 y 4 G.D.L.

En el estudio se consideran tanto excitaciones deterministas como aleatorias. Las primeras serán originadas por órganos rotativos del vehículo y las segundas por la interacción rueda-calzada o la acción del viento.

Como se indicó antes, la dinámica vertical, o lo que es lo mismo, las vibraciones que la marcha del vehículo origina en la dirección z y movimientos angulares asociados (θ y ϕ) tiene su principal efecto en la sensación de comodidad o incomodidad de los pasajeros.

La sensación de incomodidad por exposición a las vibraciones, que denominaremos "incomodidad cinemática", depende de la sensibilidad a las mismas de cada persona y de las características de la vibración: frecuencia, amplitud, aceleración (ello justifica el calificativo adoptado). Algunos investigadores y organismos internacionales (S.A.E., ISO) han propuesto métodos y valores basados en estudios estadísticos sobre muestras amplias de personas, que permiten establecer límites y evaluar las características de un vehículo respecto a la incomodidad cinemática. Este aspecto será también analizado en el capítulo 7.

Como se observará por lo descrito en los párrafos anteriores, no se incluye en esta disciplina el estudio de los sistemas-vehículo y sus componentes, excepto en aquellos aspectos que son imprescindibles para analizar el comportamiento del vehículo.

Resumiendo:

Con el estudio del contenido descrito puede alcanzarse un conocimiento básico de los principales problemas asociados al comportamiento en marcha de los vehículos automóviles, tanto en trayectorias rectas como en curvas, en horizontal o sobre calzadas inclinadas. Se estará en disposición de entender la influencia de la mayor parte de los parámetros asociados a los diferentes sistemas, en el comportamiento del vehículo y se podrán cuantificar muchas de las variables que definen tal comportamiento con un nivel de precisión suficiente para resolver problemas relacionados con la explotación de los vehículos y con la fase de prediseño de los mismos.

En cualquier caso, constituye una base imprescindible para cuantos deseen acceder a modelos más complejos usados en el diseño de vehículos, en el análisis de su comportamiento con fines de explotación o de seguridad de tráfico (reconstrucción de accidentes, etc.) y otros propósitos.

2.

INTERACCIÓN ENTRE EL VEHÍCULO Y LA SUPERFICIE DE RODADURA

2.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS NEUMÁTICOS

2.1.1. Introducción

La totalidad de los vehículos de carretera y gran parte de los que se mueven fuera de ella (extraviarios) utilizan ruedas neumáticas, cuyos cuatro elementos fundamentales son: llanta, cubierta, cámara (hoy en descenso) y aire a una cierta presión, para proporcionar la rigidez necesaria al conjunto.

Por neumático entenderemos la cubierta, sometida a una cierta presión interior y montada sobre la correspondiente llanta con la que proporciona un recinto estanco.

Los neumáticos, como parte de un vehículo, son de gran importancia en el comportamiento dinámico de éste y en el conjunto de sus prestaciones. Todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el vehículo, a excepción de las aerodinámicas, son aplicadas a través de los neumáticos. Sus funciones básicas son:

- Soportar y transmitir al terreno la carga vertical.
- Desarrollar los esfuerzos longitudinales necesarios para la tracción y frenado.
- Proporcionar los esfuerzos laterales precisos para lograr el control y estabilidad de la trayectoria.
- Actuar como "colchón" amortiguador de las acciones dinámicas originadas por las irregularidades de la pista.

Se desprende de lo anterior, que para estudiar el comportamiento dinámico de un vehículo, es necesario un conocimiento previo del comportamiento de los neumáticos y de las relaciones entre las condiciones operativas y las fuerzas y momentos que actúan sobre ellos.

La modelización de los neumáticos, para obtener relaciones matemáticas entre las diferentes variables que permiten cuantificar su comportamiento, ha sido objeto de gran atención por parte de un buen número de investigadores, sin embargo, el neumático puede considerarse como un sistema no lineal de gran complejidad, lo que hace difícil dicho análisis teórico. Los modelos desarrollados cumplen el objetivo de proporcionar un medio de comprensión de los fenómenos asociados a la respuesta de los neumáticos en diferentes situaciones, mientras que los ensayos en laboratorio y en pista, permiten determinar los parámetros suficientes para caracterizar cada tipo de neumático en particular.

Por último debemos señalar que del neumático se exigen características muy diversas y a veces difíciles de asociar para lograr en el vehículo altas cotas de seguridad, confort, capacidad para alcanzar aceleraciones, deceleraciones y velocidad punta elevadas y al mismo tiempo economía, es decir, bajo costo y gran duración.

Algunas de estas características son:

- Elevada adherencia sobre pista seca y mojada, tanto longitudinal como transversal.
- Baja resistencia a la rodadura.
- Capacidad para resistir los esfuerzos dinámicos exteriores.
- Resistencia a la fatiga, al desgaste, a la formación de grietas, etc.
- Bajo nivel de ruidos y de generación de vibraciones.
- Adecuada flexibilidad radial, circunferencial y transversal.

En los puntos siguientes se analizarán las características generales de los neumáticos: estructurales, geométricas, materiales que los componen y la manera de designarlos. También serán analizadas las principales características mecánicas y relaciones, normalmente empíricas, entre las diferentes variables. En la última parte se analizarán algunas aportaciones teóricas básicas, relacionadas con el estudio del comportamiento mecánico de los neumáticos.

2.1.2. Estructura de la cubierta.

2.1.2.1. Componentes Principales.

Las denominaciones utilizadas en la figura 2.1 son ampliamente usadas, aunque pueden variar entre los diferentes fabricantes.

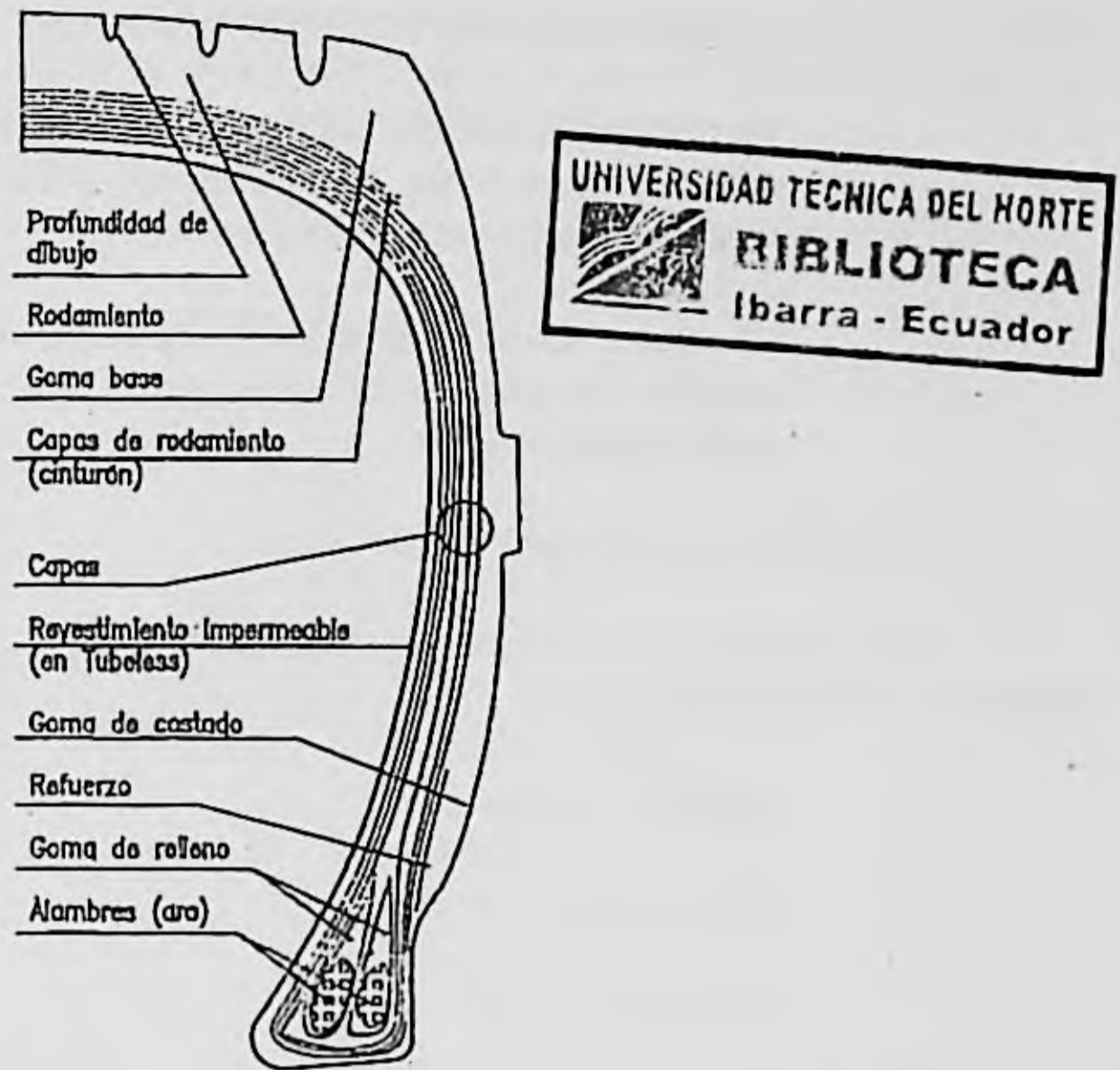


Figura 2.1. Componentes estructurales de la cubierta de un neumático.

Los componentes principales, de los que fundamentalmente dependen las características geométricas y mecánicas de los neumáticos, son:

La carcasa o conjunto de telas o lonas embebidas en caucho y que se extiende de talón a talón. Los talones, el cinturón, compuesto por varias lonas que forman un anillo superpuesto a la carcasa, y la banda de rodamiento, en la que va grabado el dibujo en forma de tacos, nervios, ranuras y estrías.

Los demás componentes indicados en la figura 2.1 pueden considerarse secundarios, aunque juegan papeles de interés en el comportamiento global del neumático, al reforzar puntos de mayor concentración de tensiones, dotar de características especiales al neumático, etc.

Con los diferentes componentes y su disposición se pretende:

- Que el neumático cuente con unos elementos relativamente inextensibles para su adecuado anclaje a la llanta.
- Una rigidez decreciente hacia la línea media de los costados, para lograr la

necesaria estabilidad lateral junto a una cierta flexibilidad.

- Flexibilidad y pequeño espesor de los costados, logrando la deformabilidad necesaria para actuar como elemento elástico-amortiguador y al mismo tiempo una reducida generación de calor.
- Una banda de rodamiento capaz de proporcionar una buena adherencia y soportar, con mínimo deterioro, las agresivas condiciones de trabajo a que es sometida.

Tipos de cubiertas según su estructura

Han existido dos tipos básicos de neumáticos según su estructura y un tipo intermedio entre ellos, estos son (figura 2.2):

- Diagonal o convencional.
- Radial o cinturado.
- Diagonal cinturado.

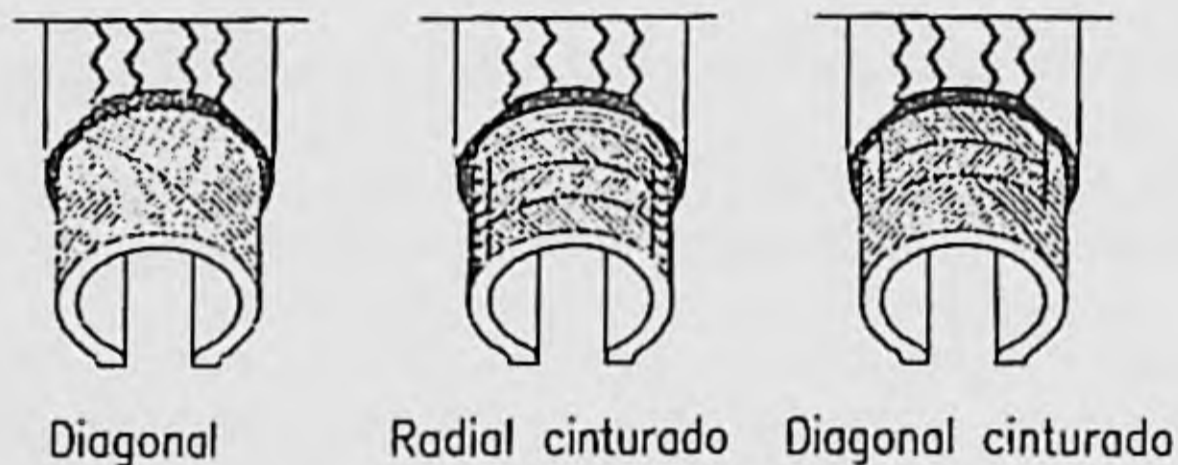


Figura 2.2. Estructuras básicas de los neumáticos.

En la figura 2.2 se representa esquemáticamente estas tres estructuras, apreciándose la dirección de la urdimbre de las diferentes capas de tejido y la existencia de cinturón en las dos últimas.

El neumático radial fue inventado en 1948 por Michelin y hoy ha desplazado casi completamente a los neumáticos diagonales debido a sus mejores prestaciones

La carcasa está formada por una o más lonas cuyos cables se orientan radialmente entre los talones y, por tanto, con ángulo de cordones igual a 90°. Esta estructura es

estabilizada por un cinturón de ancho algo inferior al del neumático, que se sitúa entre carcasa y banda de rodamiento. Este cinturón está formado por un paquete de capas textiles o metálicas, cuyos cordones se alternan con ángulos $\beta \leq 20^\circ$. (Figura 2.3).

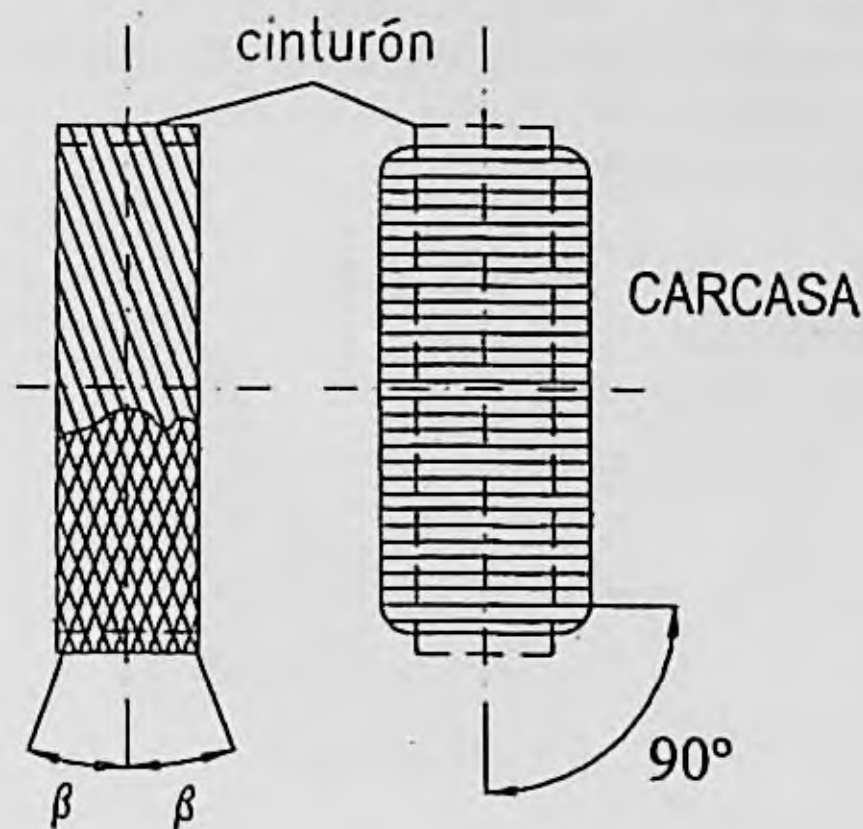


Figura 2.3. Angulo de cordones en la carcasa y cinturón de un neumático radial.

Esta disposición hace necesario un menor número de lonas en la carcasa que en un neumático convencional equivalente, consiguiéndose flancos más flexibles. Por el contrario, la banda de rodamiento está dotada de mayor rigidez, lo que hace disminuir sus deformaciones en recta y curvas, aumentando la superficie de contacto con el suelo, que permanece más constante y con una presión más uniforme. Debido a ello, los neumáticos radiales presentan las siguientes ventajas respecto a los otros tipos:

- Menor desarrollo de calor y, como consecuencia, menor disipación de energía y más lento envejecimiento.
- Menor y más uniforme desgaste.
- Mayor adherencia longitudinal y transversal.
- Mayor rigidez de deriva (su importancia será analizada más tarde).

En resumen, mejora las prestaciones (tracción, frenado, etc.) con un mejor control de la trayectoria y estabilidad, menor resistencia a la rodadura y mayor duración.

Inicialmente los neumáticos incorporaban una cámara o cuerpo tórico hueco de goma muy impermeable, cuya misión era proporcionar un recinto de alta estanqueidad al neumático. El uso de cámara disminuye la exigencia de estanqueidad entre llanta y cubierta, pero tiene el

grave inconveniente de que ante un pinchazo u otro deterioro de la misma, se produce una pérdida rápida de aire y una variación brusca de la rigidez del neumático, que provoca inestabilidad en la trayectoria del vehículo.

Para evitar el inconveniente indicado antes, se han desarrollado los neumáticos sin cámara (Tubeless) que fueron utilizados por primera vez en 1956 y han permitido eliminar la cámara. Entre sus características cabe destacar:

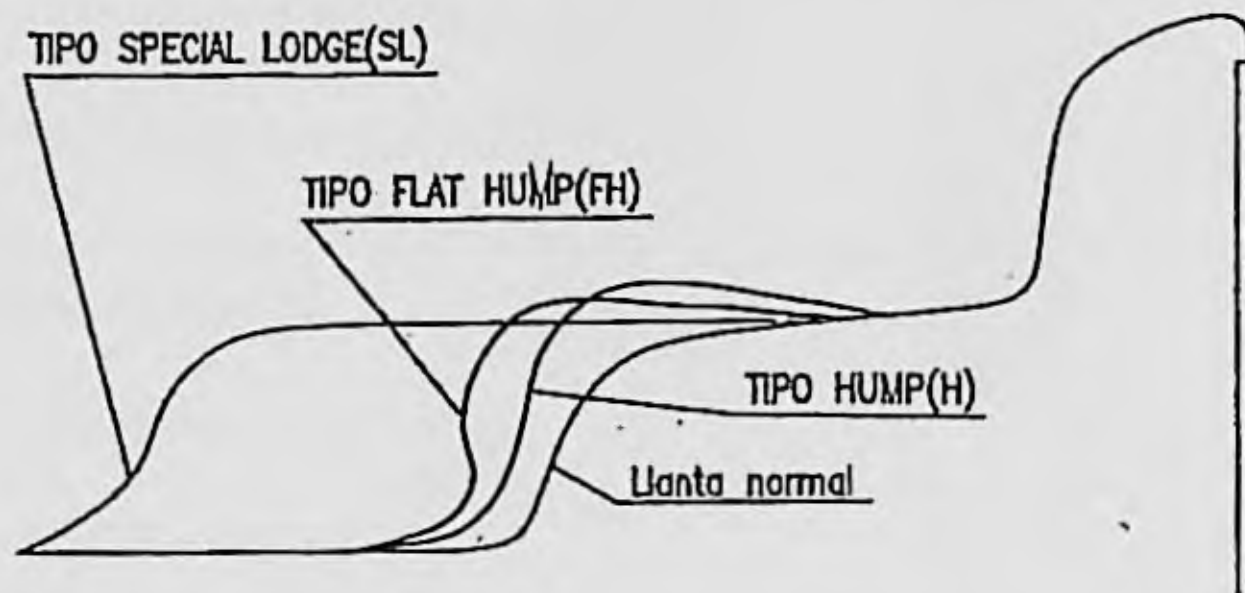


Figura 2.4. Contornos de llantas utilizadas en turismos y camiones ligeros.

- El interior de la cubierta incorpora una capa de 1 a 2 mm de goma especial muy impermeable.
- Las llantas de turismos, aunque pueden ser idénticas a las utilizadas para neumáticos con cámara, mejoran sus características con un diseño especial tipo Hump que dispone de resaltes en los asientos de talones, (figura 2.4), para su mejor fijación.
- En llantas para camión se utiliza un asiento de talón con inclinación de 15° para mejorar el efecto de acuñamiento de éste (figura 2.5) y en los desmontables, guarniciones especiales de goma, aunque se van eliminando estos tipos en las llantas modernas.
- Por último, van dotados de válvulas especiales acopladas directamente a la llanta y asegura su estanqueidad.

Además del mejor comportamiento de los neumáticos sin cámara frente a pinchazos y otras averías, disminuye en ellos la generación de calor y temperatura de funcionamiento y se facilita su instalación; todo ello justifica la desaparición de los neumáticos con cámara.

Las líneas de mejora de los actuales neumáticos contemplan, de forma muy prioritaria, el desarrollo de nuevos tipos, que sin merma de las demás prestaciones, ofrezcan máxima seguridad ante desinflados bruscos y permitan continuar la marcha durante recorridos relativamente largos y a una velocidad suficiente, sin deterioro que les inhabilite para posteriores usos. En esta línea se encuentra el Denovo Dunlop y el Triangular (d I P) de Pirelli.

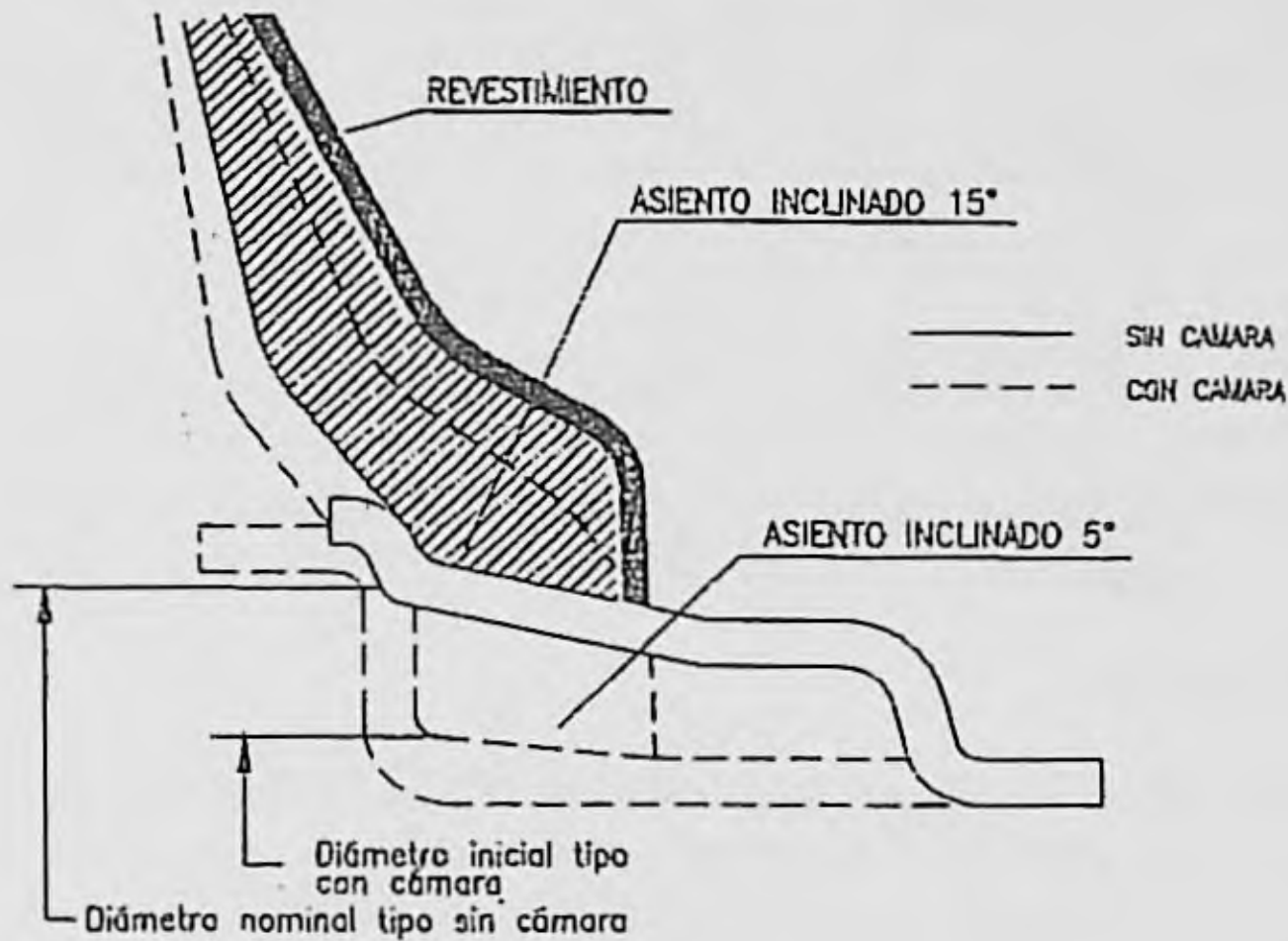


Figura 2.5. Asiento de talones en neumáticos con y sin cámara.

2.1.3. Materiales

En la fabricación de los neumáticos se utilizan tres grupos de materiales:

- Compuestos de goma.
- Tejidos.
- Alambres para talones.

Se trata de materiales de características mecánicas muy diferentes, como se observa en la figura 2.6, que deben trabajar formando parte de una estructura única. A continuación analizamos brevemente cada uno de estos grupos.

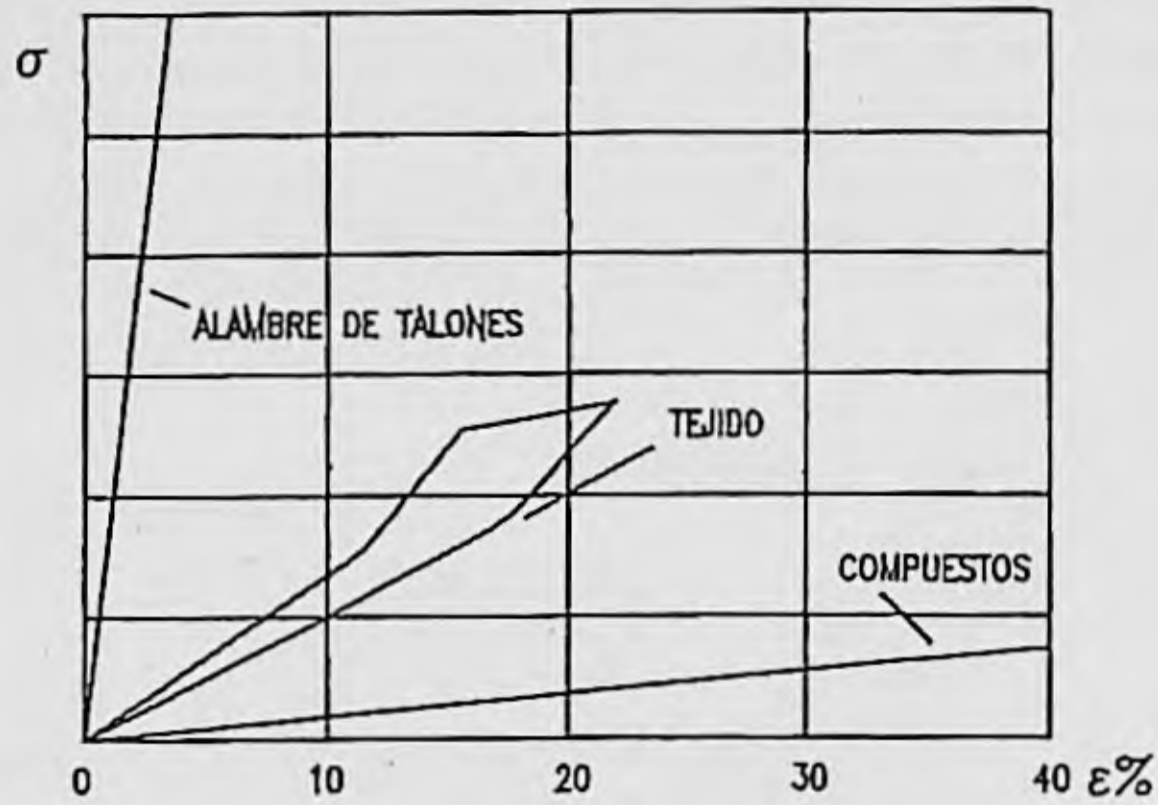


Figura 2.6. Relaciones tensión-deformación de los materiales de uso frecuente en neumáticos.

Compuestos

Se trata de mezclas de cauchos naturales y artificiales, combinados con otros agentes químicos, para lograr propiedades específicas. Estos compuestos termoplásticos son sometidos a un proceso de vulcanización, que los transforma en otros altamente elásticos, que quedan unidos en la estructura del neumático formando un conjunto integrado.

Los polímeros más utilizados en las mezclas son:

- a) Para usos normales:
 - Caucho natural (*NR*)
 - Polisopreno (*PI*)
 - Estireno butadieno (*SBR*)
 - Polibutadieno (*PBD*)

- b) Para usos especiales:
 - Butilo
 - Clorobutilo
 - Etileno propileno dieno modificado (*EPDM*)
 - Neopreno

En la tabla siguiente se comparan las características principales de los polímeros del primer grupo (3) (7).

Característica	NR/PI	SBR	PBD
Resistencia a la rotura	Alta	Media	Baja
Temperatura de rodadura	Baja	Alta	Baja
Resistencia al desgaste	Pobre	Buena	Excelente
Resistencia al calor y envejecimiento	Pobre	Aceptable	Buena

Tabla 2.1. Características de algunos polímeros.

Otras sustancias utilizadas en las mezclas son: negro de humo, azufre, acelerantes, plastificantes, activadores, antioxidantes, antiozonantes, etc. Del negro de humo, del que pueden utilizarse unos 15 tipos diferentes, dependen características tan importantes como la resistencia a la rotura, al desgaste y módulo de elasticidad.

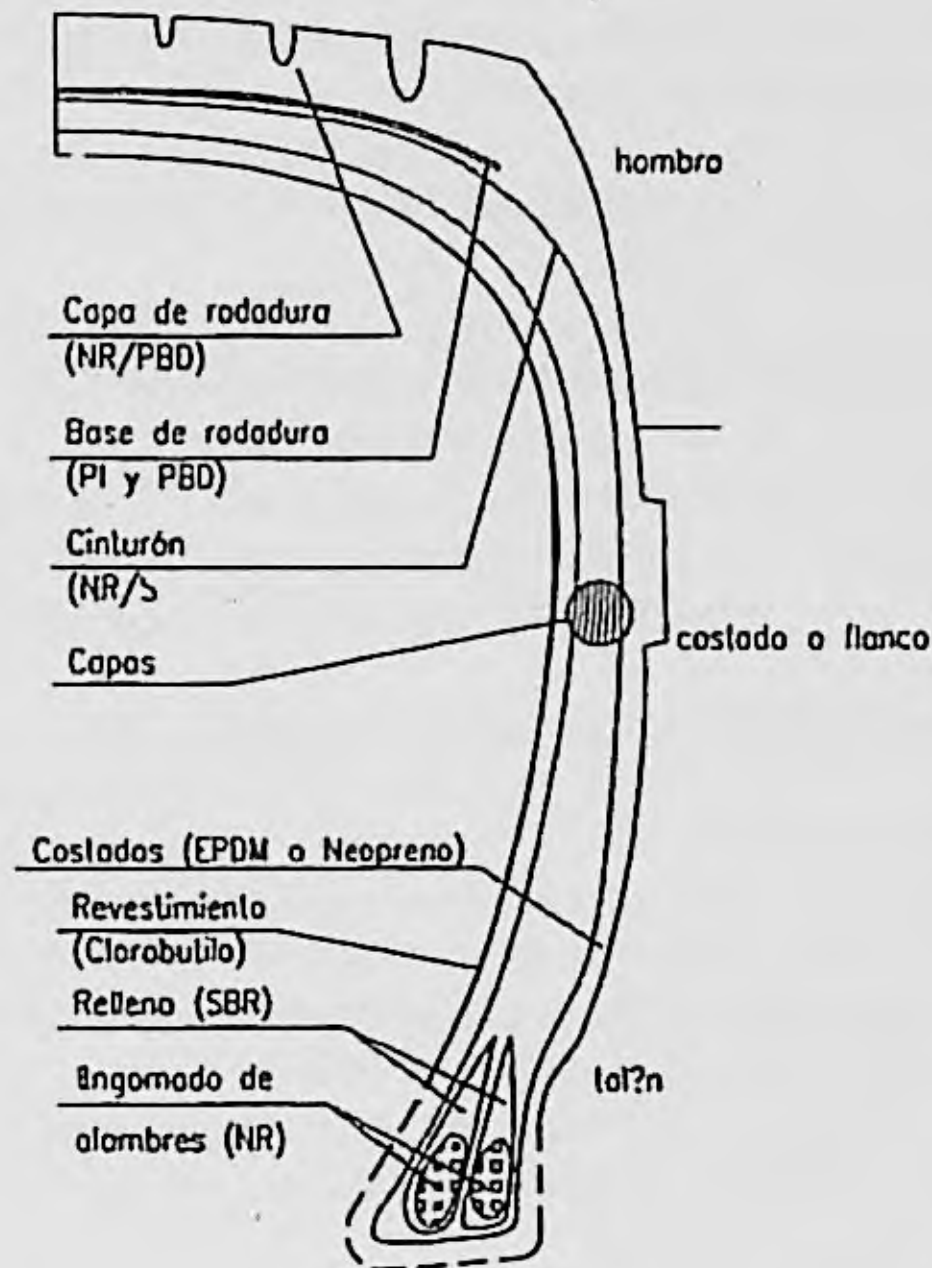


Figura 2.7. Distribución de compuestos en un neumático

Dada la diferente función de cada una de las partes del neumático, deben utilizarse compuestos diferentes para cada una de ellas y su composición suele ser uno de los secretos industriales más celosamente guardados por los fabricantes. Como orientación, en la figura 2.7 se indican posibles polímeros que se emplean en cada una de las partes del neumático, apareciendo indicados 8 tipos distintos, número con frecuencia superado en la fabricación actual.

El caucho natural, ampliamente utilizado en el pasado, se emplea en la actualidad, de forma restringida, donde se hace más útil por su menor producción de calor y alta resistencia, mezclándose con sintético.

Tejidos

Corresponde este término al material utilizado en cada tela, lona o capa, que constituye el elemento resistente principal en la carcasa y cinturón. El tejido está formado por un conjunto de cables orientados en la dirección de la urdimbre y sin trama; únicamente se emplean hilos de baja resistencia para la fijación de los cordones en sus posiciones durante el proceso de fabricación, manteniendo la uniformidad de la urdimbre. Una vez engomado el tejido, la propia goma mantiene dicha uniformidad, sin necesidad de trama que impediría la deformación necesaria entre las diferentes capas, para alcanzar la forma definitiva del neumático y conservar la flexibilidad requerida.

Los cables, cuerdas o retorcidos son los elementos que proporcionan resistencia y estabilidad a la estructura del neumático.

Los materiales utilizados frecuentemente en su fabricación son:

- Fibras textiles: Rayon
Nylon
Poliester
- Hilos de acero
- Fibra de vidrio

Cada uno de estos materiales, tiene propiedades específicas (3) que orientan su utilización, según las aplicaciones de los neumáticos y dentro de un mismo neumático; así por ejemplo, en un neumático radial, la carcasa precisa de un material flexible y resistencia a la fatiga, mientras que en las capas estabilizadoras que forman el cinturón es conveniente tejidos más rígidos y resistentes, de ahí que sea frecuente el uso de hilo de acero.

Como fue dicho anteriormente, el talón requiere alta resistencia y alto límite elástico, para soportar los esfuerzos sin separación de la llanta, de ahí que suele utilizarse en su construcción un paquete de hilos de acero de 0,9 a 1 *mm.* de diámetro en turismos y de unos 2 *mm.* en camiones. Estos alambres reciben un tratamiento superficial generalmente cobreado, para mejorar su adherencia con la goma.

Los alambres se engoman formando capas, que posteriormente se superponen constituyendo un paquete en forma de aro. Durante el proceso de vulcanización, las gomas embeben el paquete de alambres formando un conjunto compacto, relativamente flexible, dentro del cual se distribuyen las tensiones de una manera bastante uniforme.

2.1.4. Banda de rodamiento y costados.

Banda de rodamiento

La banda de rodamiento conecta el propio neumático con la pista o suelo y en la interacción de ambos elementos deben lograrse las fuerzas necesarias para proporcionar los esfuerzos longitudinales y transversales requeridos para la tracción, frenado y control de la trayectoria del vehículo. Debe, por tanto, proporcionar la máxima adherencia longitudinal y transversal, tanto en pista seca como mojada y con el mínimo desgaste. Naturalmente, la estructura del neumático y la naturaleza de los materiales empleados, condicionan estas características, pero también quedan condicionadas por el dibujo de la banda, resultante de la distribución sobre ella de elementos tales como nervios, tacos, ranuras, y estrías.

La función principal del dibujo es la evacuación del agua de la zona de contacto, cuando rueda sobre una pista mojada. Un neumático liso suele ofrecer mayor adherencia que otro con dibujo cuando rueda sobre superficies duras y secas, en cambio, disminuirá rápidamente la adherencia al aumentar la velocidad, si lo hace sobre superficie mojada (9). El dibujo también modifica la relación entre la adherencia lateral y longitudinal del neumático, de ahí que los diseños se deben adaptar a las prestaciones deseables.

Aunque existe una gran variedad de diseños de bandas de rodamiento, podemos citar tres configuraciones básicas. (Figura 2.8):

- A) Acanaladuras y nervios orientados en sentido circunferencial
- B) Tacos o nervios y acanaladuras en sentido transversal.
- C) Diseños para usos especiales.

El tipo *A*, y sus variantes, es el más común y ofrece un buen servicio de conjunto para todas las posiciones de las ruedas. Proporciona mejor adherencia transversal que otros tipos y un desgaste uniforme. Tiene ventajas para ruedas directrices no motrices.

El tipo *B*, ofrece mejores prestaciones en ruedas motrices por su mayor adherencia longitudinal.

El Tipo *C*, y variantes, se caracteriza por disponer de elementos orientados en ambos sentidos (longitudinal y transversal), presentan ranuras más amplias, profundas y con laterales inclinados para una mejor autolimpieza. Son tipos destinados a vehículos extraviarios y a neumáticos para barro-nieve.

La relación entre el área teórica y el área real de contacto con el suelo, en estos tres tipos básicos decrece del *A* al *C* alcanzando valores aproximados de:

- A) 0,75 a 0,80
- B) 0,70 a 0,75
- C) 0,60 a 0,65

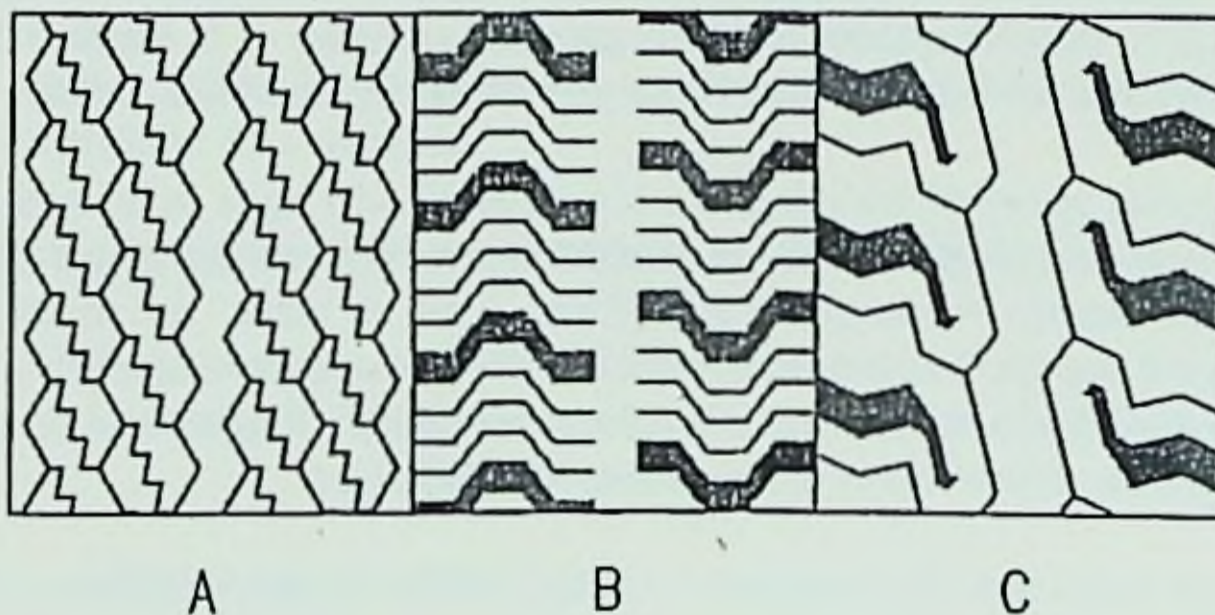


Figura 2.8. Tipos básicos de dibujos en bandas de rodamiento.

En relación con la capacidad de evacuación de agua se han definido diferentes parámetros (9), entre ellos el siguiente:

$$\delta = \frac{\text{Perímetro del área real de contacto}}{\sqrt{\text{Área real de contacto}}}$$

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Como valores aproximados:

$$\frac{\delta_{\text{dibujo}}}{\delta_{\text{liso}}} \approx 4$$
$$\delta_{\text{Tacos}} > \delta_{\text{ranuras zig.zag.}} > \delta_{\text{ranuras circunferenciales}}$$

Aunque los requerimientos fundamentales de la banda de rodamiento son la adherencia; la capacidad de evacuación de agua cuando circule sobre superficie mojada, y el desgaste; otro factor de gran importancia que influye en su diseño es el ruido. El hecho de que el dibujo contenga elementos, repetidos a intervalos iguales en su periferia, puede ser origen de la generación de frecuencias audibles, que son armónicamente dependientes de la velocidad de rotación. Para evitar este efecto, se divide la banda en segmentos, de longitud diferente, que contienen igual número de elementos de diseño. Estos segmentos se unen en la secuencia que mejor tienda a reducir los armónicos de mayor influencia.

Costados

Las paredes laterales exteriores de los neumáticos cumplen dos funciones básicas: la primera, proteger las telas de la carcasa contra golpes, roces, cortes, etc., para lo cual dispone en ocasiones de un cordón de protección en su zona central; la segunda función es la de ser portador de los datos de identificación del neumático, tanto los nombres de marca y otros distintos de libre decisión del fabricante, como aquellos que las normas o reglamentos obligan a consignar para conocimiento del usuario. De estos últimos daremos cuenta en el punto siguiente.

Desde el punto de vista mecánico conviene considerar los siguientes aspectos. El espesor de la capa de goma de los costados depende del tipo de neumático y su diseño estructural. En general, los neumáticos de tipo radial necesitan más protección de goma por la mayor debilidad de su carcasa y su mayor deformación en servicio.

Por otra parte, el diseño de la parte superior del costado, en la zona de los hombros, ha de tener en cuenta la gran generación de calor que suele producirse en esta zona que la convierte en crítica para la duración y comportamiento del neumático. Es frecuente situar en esta zona ranuras en sentido radial o circunferencial y otros elementos que favorezcan la refrigeración de la región.

2.1.5. Designación de los neumáticos. Parámetros fundamentales

Como consecuencia de la rápida evolución tecnológica y la diversidad de fabricantes, han ido desarrollándose distintas formas de denominar los diferentes tipos de neumáticos. En lo que sigue indicaremos las prescripciones contenidas a este respecto en el Reglamento nº 30 "Disposiciones uniformes referentes a la homologación de neumáticos para automóviles y sus

remolques", como Anexo 29 al Acuerdo de las Naciones Unidas "concerniente a la adopción de condiciones uniformes de homologación y de reconocimiento recíproco de homologaciones de equipos y piezas de vehículos a Motor". España está adherida a este Reglamento y en consecuencia, es de uso obligatorio rige en nuestro país como en la mayoría de los países de Europa.

Los parámetros que se utilizan para designar y caracterizar los neumáticos son de tres tipos:

Geométricos:

- Anchura nominal de la sección.
- Coeficiente de forma o relación nominal de aspecto.
- Diámetro nominal de la llanta.

Relativos a la estructura y constitución de los neumáticos:

- Tipo de estructura.
- Utilización o no de cámara.
- Indicación en el caso de contener refuerzos.

Relativos a las condiciones de utilización:

- Carretera o nieve.
- Categoría de velocidad.
- Índice de capacidad de carga.

En lo que se refiere a las dimensiones y características geométricas, en la figura 2.9 se indican las más comúnmente usadas en relación con la cubierta, llanta y huella de contacto.

Como se ha indicado antes, los parámetros geométricos utilizados para designar el neumático son:

Anchura nominal de la sección expresada en $mm.$ (b_n). Se trata de un número convencional, propuesto por el fabricante, que tras ser corregido según se indica en el Reglamento citado, debe coincidir con la medida realizada sobre neumático inflado y en condiciones prefijadas ó quedar dentro de las tolerancias previstas. (10).

Diámetro nominal de la llanta (D_{LL}). Se expresa en *pulgadas* ó $mm.$, y corresponde al diámetro que deben tener las llantas en las que el neumático puede ser instalado.

Relación nominal de Aspecto (R_{NA}). Se define como el céntuplo del número

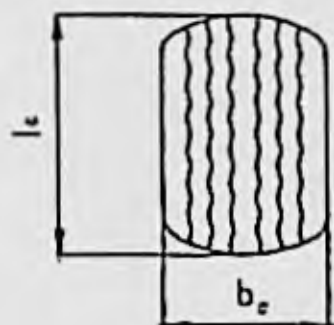
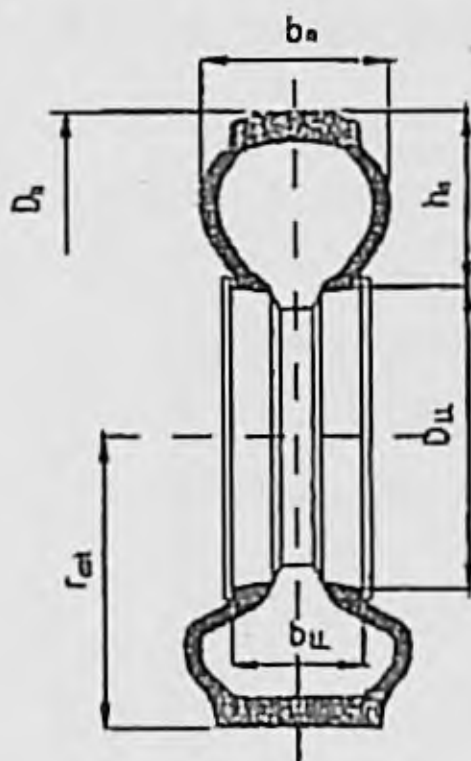
[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

obtenido dividiendo la altura de la sección por su anchura, es decir:

$$100 \frac{h_n}{b_n}$$

Es de destacar la evolución de este parámetro con el tiempo, pasando desde el valor de 113% a principio de siglo, a 90-100% en la década de los años cuarenta y a 50-70% en las series rebajadas y de huella ancha de la actualidad, cuyas ventajas mecánicas se estudiarán más tarde.

Las características dimensionales se expresan mediante los tres parámetros anteriores y en el siguiente orden: b_n , R_{NA} , D_{LL} .



Superficie total de contacto

h_n :	Altura de la sección del neumático.
b_n :	Anchura de la sección del neumático.
D_n :	Diámetro exterior del neumático.
b_{LL} :	Anchura de la llanta.
D_{LL} :	Diámetro de la llanta.
l_c :	Longitud de la superficie de contacto.
b_c :	Anchura de la superficie de contacto.
r_{est} :	Radio bajo carga estática

Figura 2.9. Dimensiones de neumático y llanta.

En relación con los parámetros relativos a la estructura, constitución y condiciones de uso de los neumáticos, se emplean las siguientes denominaciones:

- a) **Tipo de estructura:**
 Neumáticos de estructura diagonal - sin indicación
 Neumáticos de estructural radial - "R" ó "RADIAL".

Neumáticos diagonales cinturados - "B" y "BIASBELTED".

b) **Utilización o no de cámara:**

Neumático con cámara - Sin indicación

Neumático sin cámara - "TUBELESS".

c) **Para neumáticos reforzados: la palabra "REINFORCED".**

d) **Condiciones de utilización:**

Neumáticos tipo nieve - *M + S*, *M . S* ó *M & S*

las letras corresponden a las iniciales de "mud and snow" (barro y nieve).

e) **Categoría de velocidad.**

Se utiliza una letra para expresar la velocidad máxima, expresada en *km/h*, fijada por el fabricante para la utilización del neumático.

En la tabla siguiente se incluyen estas categorías:

Símbolo de la categoría de velocidad	Velocidad máxima <i>km/h</i>
<i>L</i>	120
<i>M</i>	130
<i>N</i>	140
<i>P</i>	150
<i>Q</i>	160
<i>R</i>	170
<i>S</i>	180
<i>T</i>	190
<i>U</i>	200
<i>H</i>	210
<i>V</i>	240
<i>W</i>	270
<i>Y</i>	300

f) **Índice de capacidad de carga (*n*).** Se trata de una cifra que representa una categoría para la cual se define el valor de la carga máxima que puede soportar el neumático.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

La relación entre el índice de capacidad de carga y la carga máxima es:

$$P_{\max} \approx 45 \left(\sqrt[80]{10} \right)^n = 45 \times (1.0292)^n \text{ kg.}$$

$$\text{Ejemplo: } n = 85 \quad P_{\max} = 515 \text{ kg.}$$

Para los neumáticos de estructura diagonal, el Reglamento admite la utilización de un índice de resistencia a efectos de la capacidad de carga máxima, denominado "Ply rating" o "P.R." expresa la resistencia equivalente a un neumático que tuviese el número "R.P." de telas tipo o patrón; así, un neumático puede marcar 6 P.R. y estar su cubierta construida únicamente con 4 telas de resistencia equivalente a 6 telas tipo. Como tela tipo se ha fijado la compuesta de Rayon 1100/3 ó 1650/2 con densidad de 96 *torzales/dm*.

g) **Fecha de fabricación.**

Los neumáticos deben llevar grabada, además de los símbolos relativos a los parámetros ya analizados, la fecha de fabricación expresada por tres dígitos; los dos primeros indican la semana y el tercero corresponde al último guarismo del año.

h) **Designación completa**

Ejemplo. Un neumático que en su costado tenga grabado:

185/70 R 13 85 S TUBELESS M + S 101

Tiene las siguientes características:

- Anchura nominal de la sección 185 mm.
- Relación nominal de aspecto - 70%
- Estructura - Radial
- Diámetro de llanta nominal - 13".
- Posee una capacidad de carga de 515 Kg. (índice 85)
- Pertenece a la categoría de velocidad S.
- Puede ser montado sin cámara (Tubeless)
- Pertenece al tipo nieve (M + S)
- Fue fabricado la semana 10 del año 2001

En el caso de los neumáticos para vehículos industriales y sus remolques, su homologación se realiza de acuerdo con el Reglamento nº 54 de Naciones Unidas (Ginebra). En su descripción se contempla, además de los parámetros ya comentados para los neumáticos de turismo, cuatro índices de carga correspondientes a montajes simple o de ruedas gemelas y categorías de velocidad diferentes. Así mismo se indica la presión de inflado para los ensayos

de homologación. Un ejemplo de designación es el siguiente:

250 / 70 R 20 149 / 145 J $\left(\begin{array}{c} 146L \\ 143 \end{array} \right)$ TUBLESS: M + s
101 90PSI

Las diferencias con el ejemplo anterior son:

- Con la categoría de velocidad J (100 km/h)
 - Índice de carga 149 (3250 kg) en montaje simple
 - Índice de carga 145 (2900 kg) en montaje gemelo
- Con la categoría de velocidad L (120 km/h)
 - Índice de carga 146 (3000 kg) en montaje simple
 - Índice de carga 143 (2725 kg) en montaje gemelo

Debe ser inflado a 620 k Pa para los ensayos de resistencia/carga cuyo símbolo es 90 PSI

2.2. CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LOS NEUMÁTICOS.

Como se indicó en la parte primera, sobre los neumáticos actúan las fuerzas normales y tangenciales de contacto con la superficie de rodadura y los momentos que éstas originan respecto a diferentes ejes ligados al propio neumático o al vehículo. El objeto de esta segunda parte es analizar las citadas acciones y su variación con diferentes factores relacionados con el neumático y con las condiciones operativas a que puede someterse.

2.2.1. Fuerzas y momentos que actúan sobre los neumáticos.

Para analizar las componentes de la fuerza y momento resultante, que actúan sobre el neumático, como consecuencia de su interacción con el suelo, utilizaremos el sistema de ejes recomendado por SAE¹ que se representa en la figura 2.10. Estos ejes se definen de la siguiente forma:

Eje X. Es la intersección del plano medio de la rueda y el plano de la superficie de rodadura. El sentido positivo coincide con el de avance del vehículo.

(1) Vehicle Dynamics Terminology, SAE J 670a, Society of Automotive Engineers, 1965

[*Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.*]

Eje Z. Es perpendicular al plano de la superficie de rodadura y su sentido positivo coincide con el de penetración en el suelo.

Eje Y. Es perpendicular a los anteriores y debe formar con ellos un sistema ortogonal orientado a derechas.

El origen del sistema coincide con el centro de la huella de contacto.

Teniendo en cuenta los parámetros geométricos, fuerzas y momentos representados en la figura 2.10, se consideran las siguientes denominaciones y definiciones:

Plano de la rueda. Plano medio del neumático perpendicular a su eje de rotación.

Centro de la rueda. Punto de intersección entre el eje de rotación y el plano de la rueda.

Centro de la superficie de contacto. Punto de intersección entre el plano de la rueda y la proyección de su eje de rotación sobre el plano de rodadura.

Fuerza longitudinal (de tracción o frenado) F_x . Componente respecto al eje X de la fuerza que actúa sobre el neumático, como consecuencia de su interacción con el suelo.

Fuerza lateral F_y . Componente en la dirección del eje Y, de la fuerza que actúa sobre el neumático, como consecuencia de su interacción con el suelo.

Fuerza normal F_z . Componente en la dirección del eje Z, de la fuerza que actúa sobre el neumático como consecuencia de su interacción con el suelo.

Momento de Vuelco M_x : Es el momento, respecto al eje X, de las fuerzas de contacto que actúan sobre el neumático.

Momento de resistencia a la rodadura M_y . Momento, respecto al eje Y, de las fuerzas de contacto que actúan sobre el neumático. Se opone a la rodadura del neumático sobre el suelo.

Momento autoalineante M_z . Momento, respecto al eje Z, de las fuerzas de contacto que actúan sobre el neumático.

Además de estos parámetros, en la figura 2.10 se indican dos ángulos de gran importancia en el comportamiento de la rueda:

Angulo de deriva o de deslizamiento (α). Es el ángulo que forma la dirección de desplazamiento del centro de la superficie de contacto y la línea de intersección del plano de la rueda con la superficie de rodadura (eje X).

Angulo de caída (γ). Es el ángulo formado por el plano X-Z y el plano de la rueda.

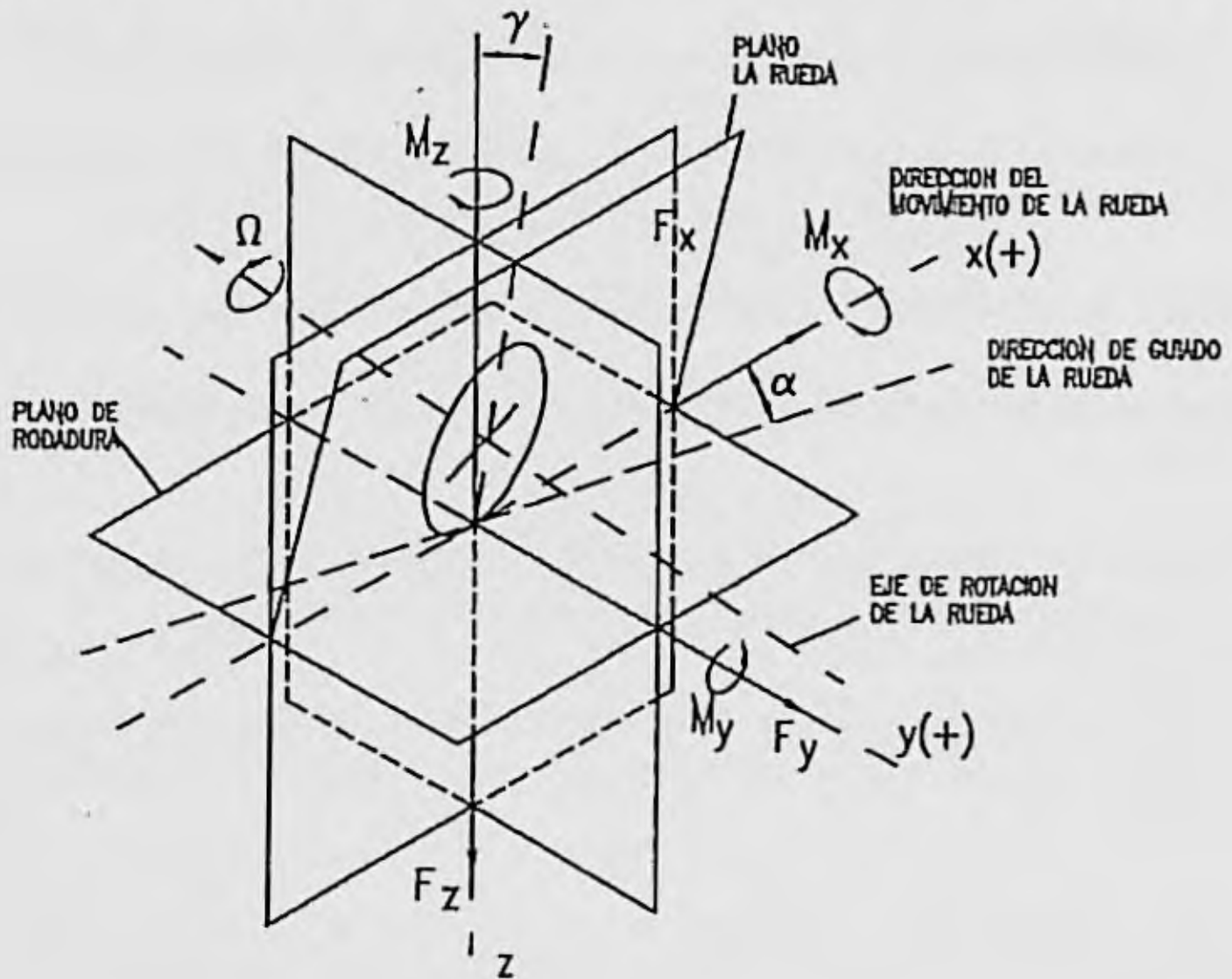


Figura 2.10. Fuerzas y momentos que actúan sobre los neumáticos.

La flexibilidad de la rueda neumática es la causa de la formación de una huella de contacto de superficie no nula, cuando existe una cierta fuerza en la dirección OZ entre el neumático y el suelo; esto hace que las fuerzas de contacto constituyan un sistema distribuido, con una componente debida a la presión normal y otra a las tensiones cortantes en la interfase, por efecto de la adherencia entre ambos cuerpos. Los puntos de aplicación de la resultante de estas fuerzas distribuidas no coinciden con el centro de la huella de contacto, lo que da lugar a la no nulidad de los momentos de éstos respecto a los tres ejes referidos.

En lo que sigue analizaremos estas componentes y la forma en que influyen, en su valor, diferentes factores, tales como: carga, presión de inflado, velocidad, deslizamiento longitudinal, ángulo de deriva y otros.

2.2.2. Fuerza normal. Deformación radial, rigidez radial estática y dinámica.

Las fuerzas estáticas (peso) y dinámicas que actúan sobre el neumático, son transmitidas a la superficie de rodadura a través de la huella de contacto, en la que se genera una presión variable. En la figura 2.11 se ofrece una representación de esta presión (3).

La distribución de presiones, cuando actúa únicamente una fuerza F_z , es simétrica respecto a los planos longitudinal y transversal que contienen al centro de la huella y son perpendiculares a la superficie de rodadura.

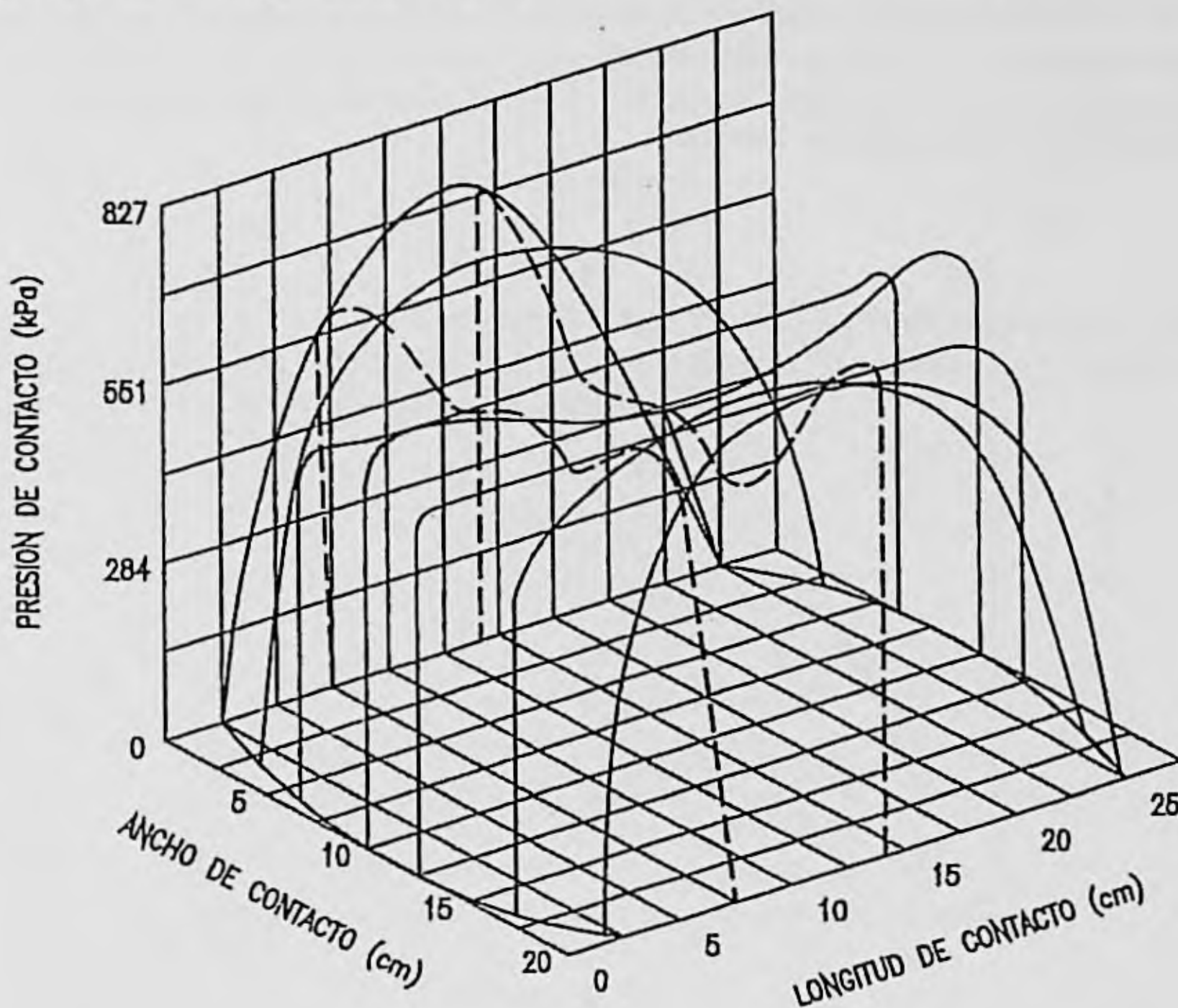


Figura 2.11. Distribución de Presión (neumático diagonal de dimensiones 10.000-20).

Como puede observarse, bajo los hombros se alcanza valores bastante elevados, más altos que a lo largo de los nervios circunferenciales del dibujo de la banda de rodamiento; en éstos se presentan valores máximos en los puntos de entrada y salida de la zona de contacto, debido a la mayor curvatura de la banda en estos puntos. La mayor presión en la zona de hombros se debe a los esfuerzos transmitidos por los costados al aplastarse. Las presiones

máximas de contacto pueden superar a las de inflado en forma significativa (2 a 3 veces mayores).

Los neumáticos radiales ofrecen distribuciones de presión más uniformes, en la dirección transversal de la superficie de contacto, debido a la mayor flexibilidad de los costados y mayor rigidez de la banda de rodamiento.

La carga vertical de un neumático es soportada por el aire a presión y por la carcasa. Dependiendo del tipo de neumático, la proporción de la carga soportada y transmitida por cada uno de estos elementos es diferente. Se ha comprobado (15) que en neumáticos de avión, la carcasa soporta del 3 al 8% de la carga, mientras que en neumáticos de automóviles, la carcasa puede soportar el 15% de la carga y en neumáticos de tractores hasta el 60%, debido a la baja presión que estos últimos utilizan usualmente.

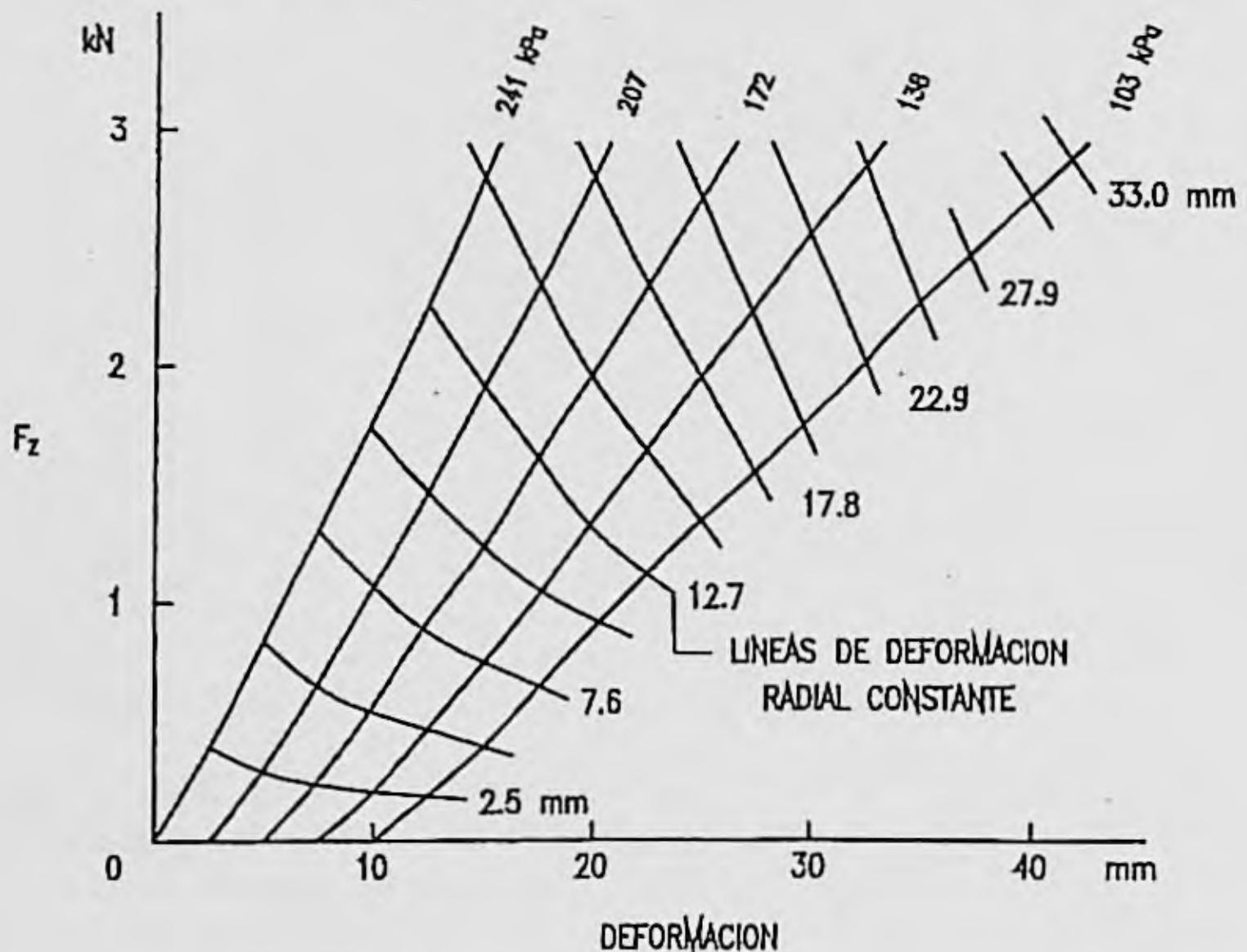


Figura 2.12. Curvas deformación-carga estática de un neumático radial 165x13.

La resultante de las fuerzas normales, que podemos considerar en este apartado como radiales, está lógicamente relacionada con la deformación radial del neumático; es evidente que ésta aumentará con la carga. En la figura 2.12 se indica la variación de la carga con la deformación radial, considerando diferentes presiones de inflado, para un neumático radial 165x13. En este caso se utiliza un gráfico en forma de "celosía", en el que cada curva carga-

deformación está desplazada, a lo largo del eje de deformaciones, una cantidad proporcional a la presión de inflado.

Rigidez Radial

La rigidez radial es un parámetro que caracteriza el comportamiento del neumático en dirección vertical, junto con el coeficiente de amortiguamiento equivalente. Ambos permiten modelizar el neumático como se indica en la figura 2.13, para estudiar el efecto de aislamiento del conductor, pasajeros y carga, de las irregularidades de la carretera y tienen influencia en el diseño de la suspensión.

La rigidez radial se define como:

$$K_z = \frac{\partial F_z}{\partial Z}$$

Pueden considerarse tres valores de la rigidez radial según las condiciones en que se obtengan las relaciones $F(Z)$ o $F_z(\Delta r)$, estas son: rigidez radial estática (K_{ze}), rigidez radial dinámica sin rodadura (K_{zd}) y rigidez radial dinámica (K'_{zd}).

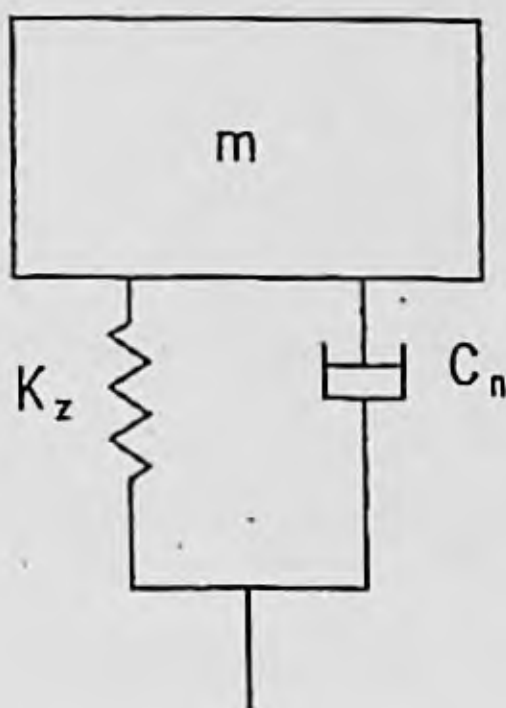


Figura 2.13. Modelo lineal de neumático.

La rigidez radial estática se determina por las pendientes de las curvas carga estática-deformación, como las representadas en la figura 2.12; de éstas y de la figura 2.14 puede deducirse lo siguiente:

- a) En ambos tipos de neumáticos (diagonal y radial) las curvas carga-deformación son casi lineales, excepto para valores relativamente bajos de la

carga y de la presión, de ahí que sea posible suponer que la rigidez estática es independiente de la carga en el intervalo de interés práctico.

- b) La rigidez aumenta con la presión de inflado, siendo éste el factor que más le afecta. En la figura 2.14 se representa esta variación para varios neumáticos. Como puede comprobarse, K_{z_c} aumenta linealmente con P_i .

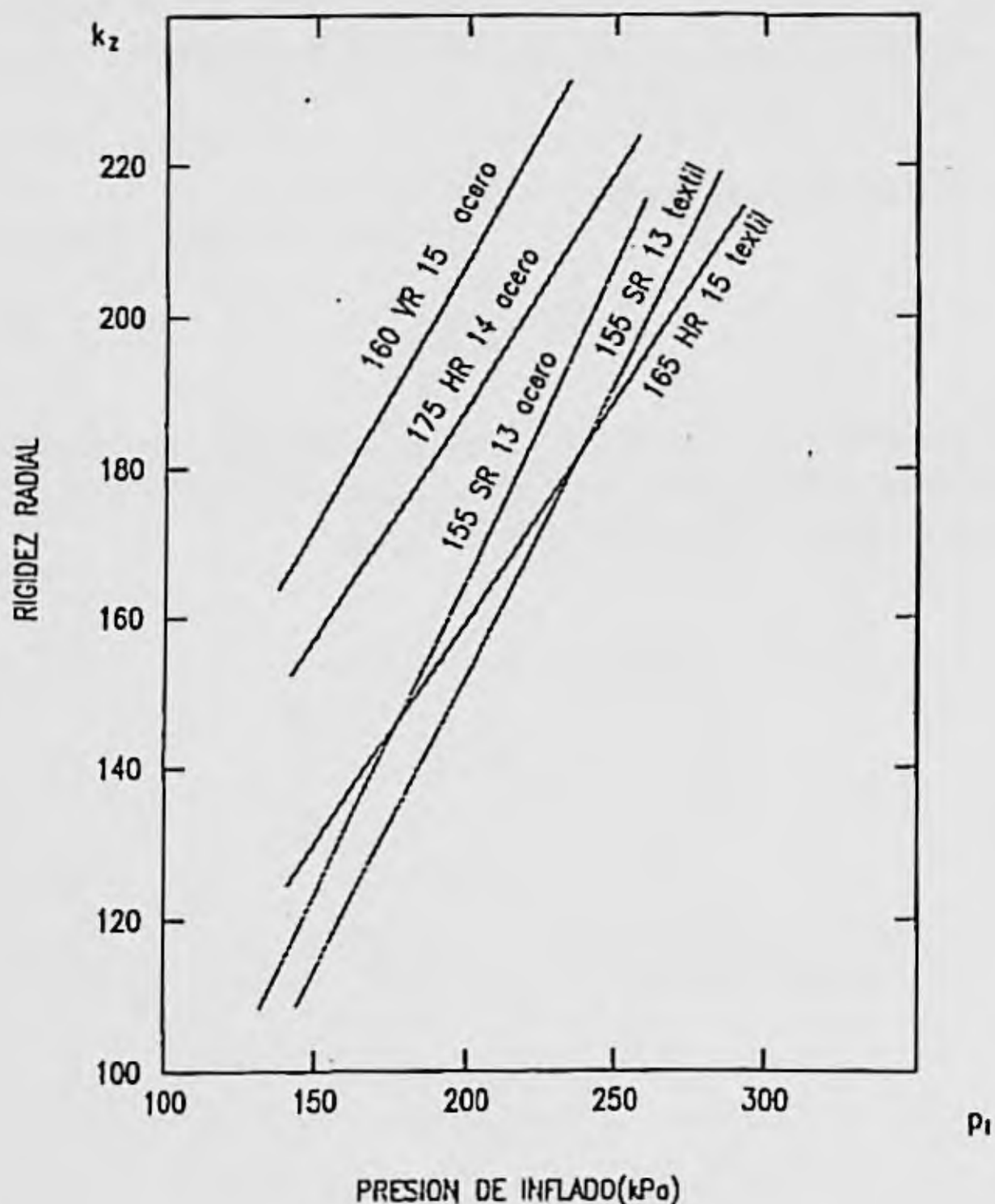


Figura 2.14. Variación de la rigidez radial con la presión.

- c) Los neumáticos diagonales poseen rigidez radial más alta que los radiales de tamaño comparable, pudiendo variar de unos a otros entre el 20 y un 30%.
- d) Los neumáticos radiales con cinturón metálico presentan una rigidez radial superior a los de cinturón textil, en un 5% aproximadamente.

- d) Algunos parámetros de diseño que hacen aumentar la rigidez radial son: disminuir el ángulo de cordones, aumentar el ancho y radio transversal de la banda de rodamiento, aumentar el módulo de elasticidad de los materiales de los tejidos y aumentar el número de telas. En la construcción práctica de los neumáticos, el conjunto de estos factores de diseño pueden hacer variar la rigidez en un diez por ciento aproximadamente.

La rigidez dinámica sin rodadura K_{zd} puede obtenerse, entre otros procedimientos, mediante un ensayo de caída. En este ensayo, el neumático con una cierta carga, es soportado por un dispositivo en una posición, en la que toma contacto con el suelo sin ejercerse prácticamente presión. En esta posición se libera instantáneamente la carga, registrándose la variación de la altura de su eje, que corresponde a la de un movimiento armónico amortiguado. El decrecimiento logarítmico de este movimiento permite calcular la rigidez dinámica sin rodadura y el coeficiente de amortiguamiento. Algunos valores de estos parámetros pueden encontrarse en la referencia (15).

En cuanto a la rigidez radial dinámica K'_{zd} , es el parámetro más representativo y suele determinarse mediante ensayos de rodadura sobre un tambor o cinta deslizante, midiendo su frecuencia de resonancia, o sometiendo el neumático, mientras rueda, a una excitación armónica aplicada sobre la banda de rodadura y midiendo la respuesta en el eje. Estos procedimientos también permiten determinar el coeficiente de amortiguamiento en dirección radial. En la figura 2.15 se representa la variación de K_{zd} con la velocidad para dos neumáticos con diferente estructura.

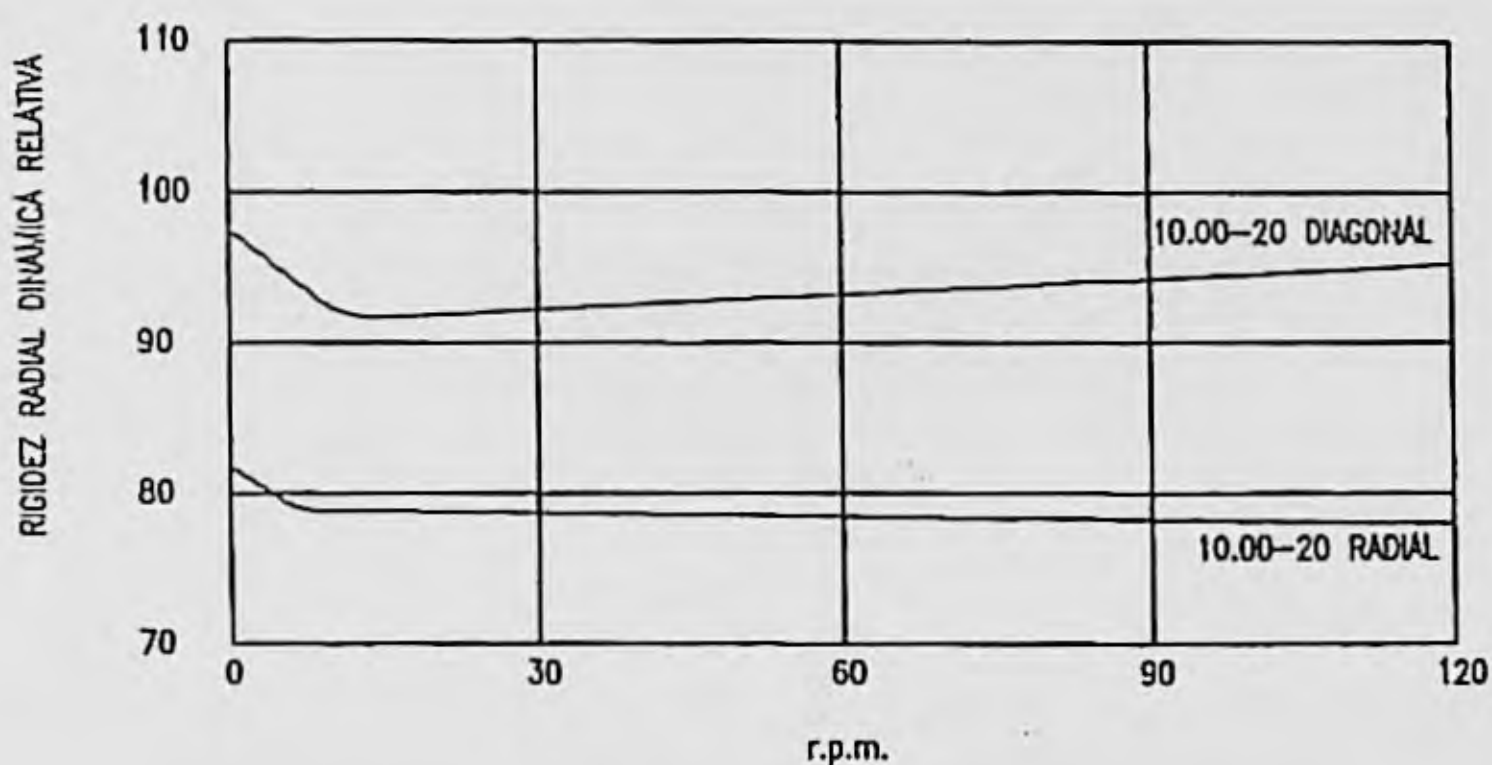


Figura 2.15. Efecto de la velocidad sobre la rigidez radial dinámica de los neumáticos.

De la figura anterior se desprende que la rigidez radial dinámica desciende con la

velocidad rápidamente desde $\omega = 0$ y luego permanece casi constante a velocidades moderadas y altas. Por otra parte, los resultados experimentales demuestran que los valores de la rigidez radial dinámica no difieren demasiado de los de la rigidez radial estática. La relación entre ambas no ha sido establecida con carácter general, Algunos autores (3) (15) señalan que la rigidez dinámica es menor que la estática, siendo esta variación del 5 al 15% en neumáticos de turismos. Algunas experiencias han demostrado, sin embargo, que en neumáticos de tractor la rigidez radial dinámica excede a la estática en un 10% aproximadamente.

2.2.3. Resistencia a la rodadura. Coeficiente de resistencia a la rodadura.

Cuando un neumático rueda sobre una superficie dura, sometido a una carga vertical, se produce, como antes se indicó, una deformación radial de cierta importancia. La distribución de presiones en la superficie de contacto no es simétrica respecto del eje Y. (Figura 2.16).

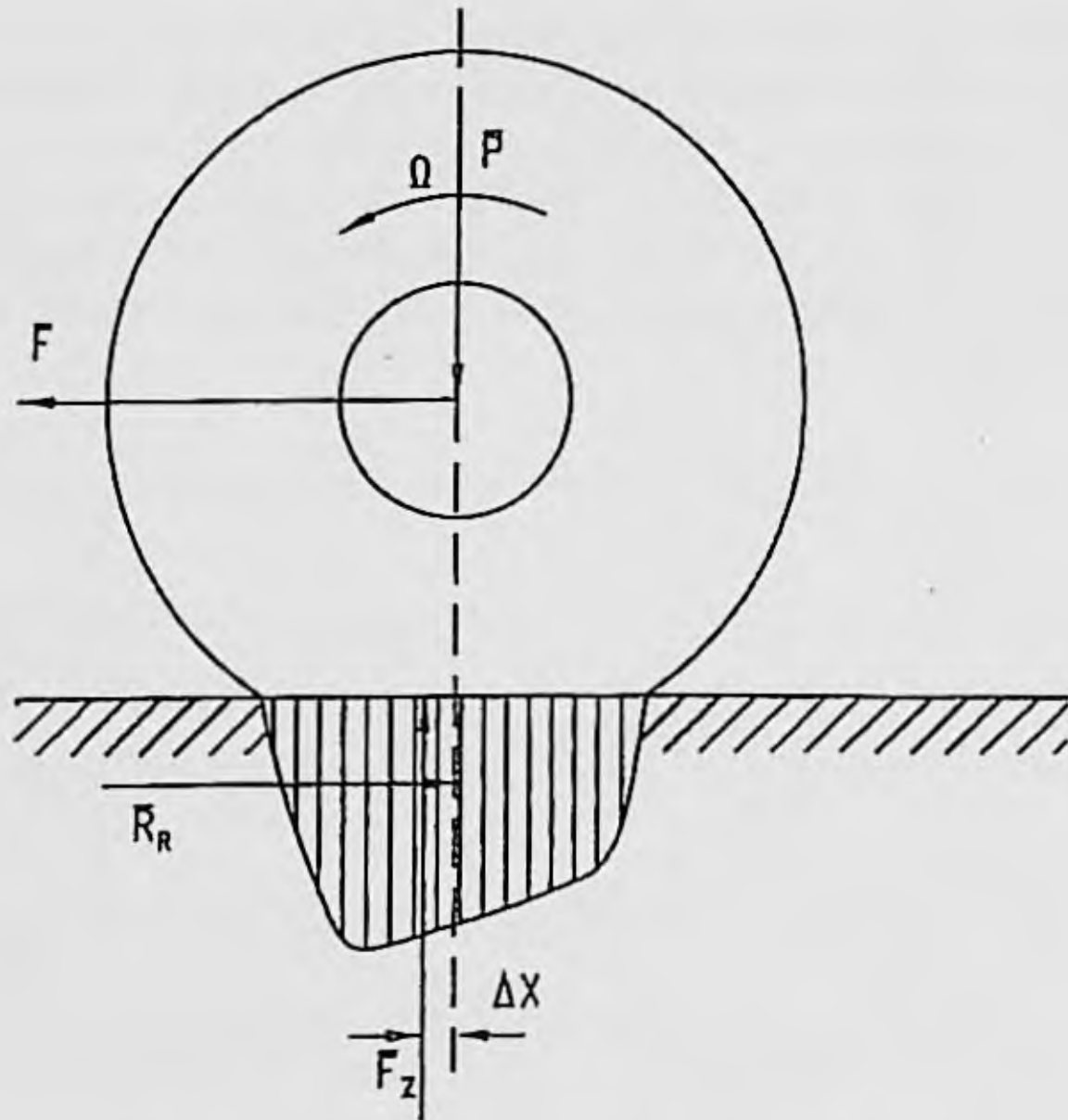


Figura 2.16. Distribución de presiones y resistencia a la rodadura de un neumático rodando sobre una superficie plana y dura.

El centro de presiones y la resultante de fuerzas verticales quedan desplazados una

distancia ΔX del eje Y y hacia adelante, lo que produce un momento alrededor del eje de rotación del neumático, que se opone a su movimiento; a este momento M_y se le denomina momento de resistencia a la rodadura.

Cuando el neumático rueda libremente, sin aplicación de ningún par a su eje, es necesario aplicar una fuerza paralela al plano de rodadura para lograr su movimiento. La condición de equilibrio en dirección longitudinal impone la existencia de una fuerza igual y contraria aplicada en la zona de contacto neumático-suelo; esta fuerza horizontal resultante es comúnmente conocida como resistencia a la rodadura (R_R) y la relación entre esta fuerza y la carga normal a la superficie de rodadura (P) aplicada a la rueda, se denomina coeficiente de resistencia a la rodadura ($f_r = R_R/P$). La resistencia a la rodadura está relacionada con una pérdida de potencia que se debe a los siguientes factores: pérdidas por histéresis en el interior de la estructura del neumático, rozamiento entre neumático y superficies de rodadura causado por deslizamientos locales, resistencias debidas al contacto con el aire interior y exterior, aunque este último factor tiene una importancia mucho menor. Algunos resultados experimentales (15) han puesto de manifiesto, que en el intervalo de velocidades de 128 a 152 Km/h. las pérdidas se distribuyen de la siguiente forma: debido a histéresis interna, 90-95%; debido al rozamiento neumático-suelo 2-10%; debido a resistencia del aire 1.5-3%.

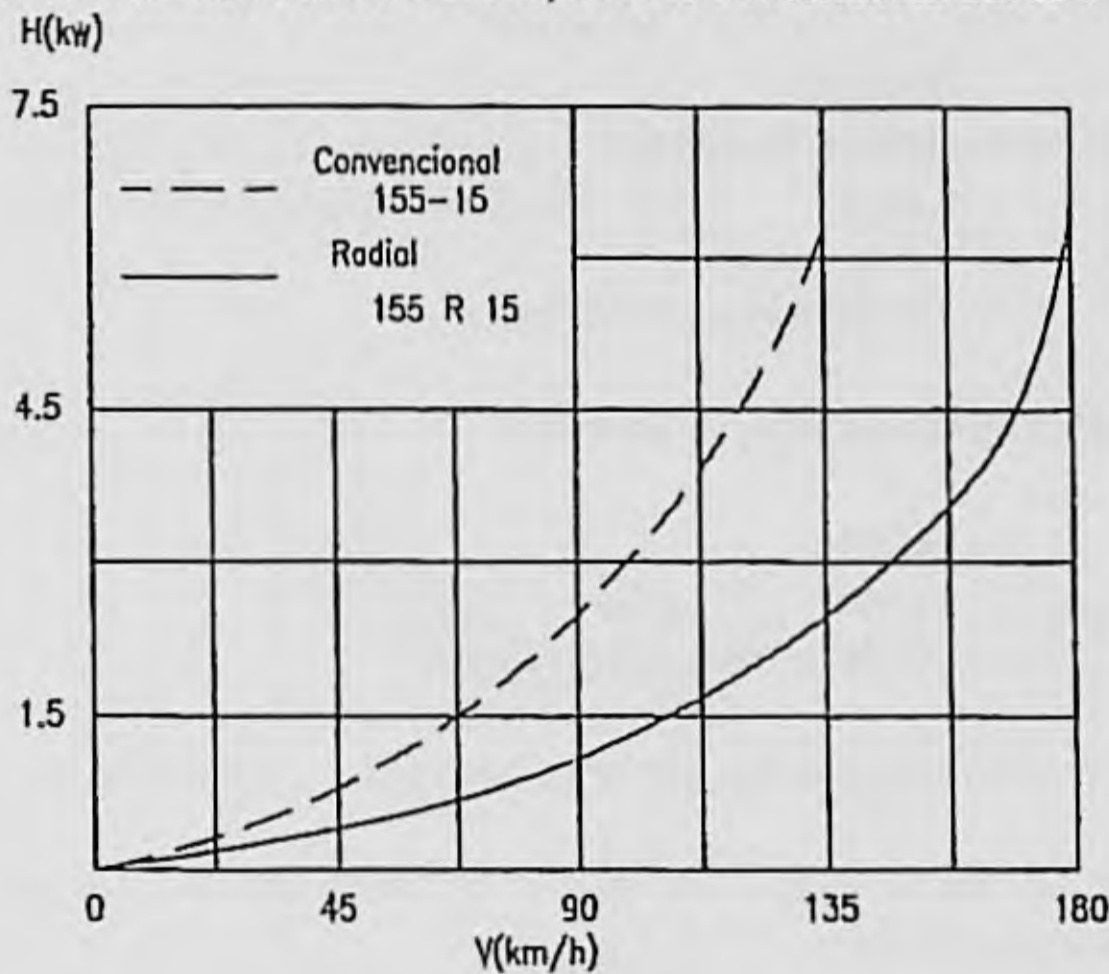


Figura 2.17. Curvas características de absorción de potencia-velocidad de dos neumáticos de análogas dimensiones y diferente estructura.

Como datos orientativos, en la figura 2.17 se indica la potencia absorbida en la rodadura por dos tipos de neumáticos, en función de las velocidades (1). A título de ejemplo, puede señalarse que a 130 Km/h. cuatro neumáticos de automóvil de tipo radial pueden

consumir del orden de 7,5 Kw en vencer la resistencia a la rodadura, lo que puede suponer alrededor del 15% de la potencia total.

Como se indicó antes, la histéresis causa la mayor proporción de pérdidas de energía en forma de calor; en consecuencia, los factores que más afecten a este tipo de pérdida serán también los que más influyan en la resistencia a la rodadura. Los principales son la velocidad y la deformación.

Podemos clasificar estos factores en los siguientes grupos:

a) De diseño y construcción del neumático.

- Tipo de estructura.
- Espesor de la banda de rodamiento y cinturón en su caso.
- Materiales: tejidos y compuestos.
- Diámetro.

b) Condiciones operativas.

- Velocidad.
- Presión de inflado.
- Carga.
- Temperatura.
- Esfuerzos longitudinales.

c) Características de la superficie de rodadura.

- Dureza.
- Lisura.
- Contaminantes y humedad.

Algunos de estos factores están interrelacionados como veremos a continuación.

2.2.3.1. Influencia de los factores de diseño y construcción del neumático en la resistencia a la rodadura.

Estructura: Los neumáticos radiales ofrecen menos resistencia a la rodadura como consecuencia de la menor deformación de la banda de rodamiento y menor espesor de la carcasa. La diferencia puede llegar a ser del 25%. (Figura 2.18).

Cinturón y banda de rodamiento. Cuanto mayor es el espesor de la banda de rodamiento y mayor el número de capas del cinturón, mayores son las pérdidas por histéresis

y, en consecuencia, aumenta la resistencia a la rodadura.

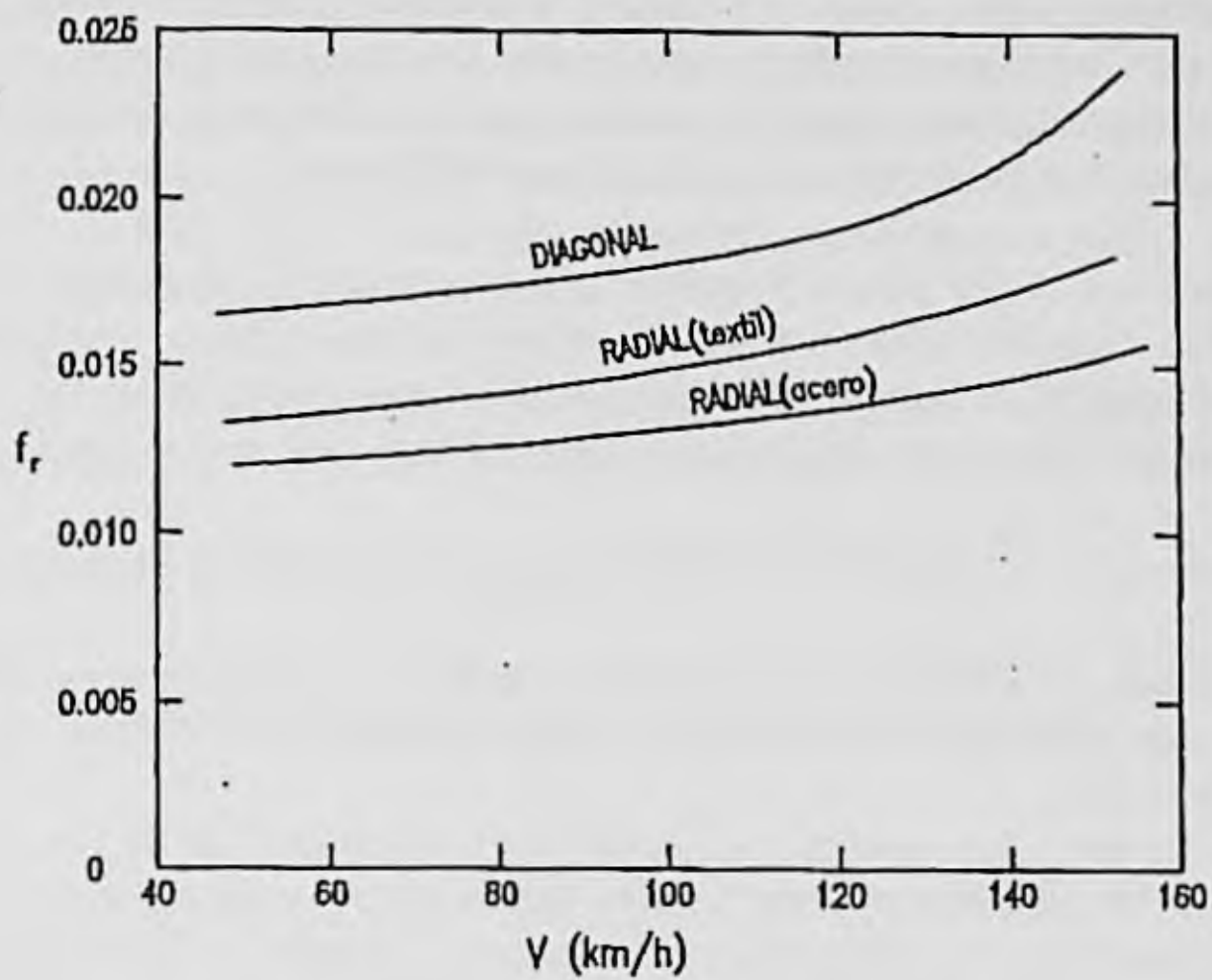


Figura 2.18. Coeficiente de resistencia a la rodadura en función de la velocidad para neumáticos diagonales y radiales.

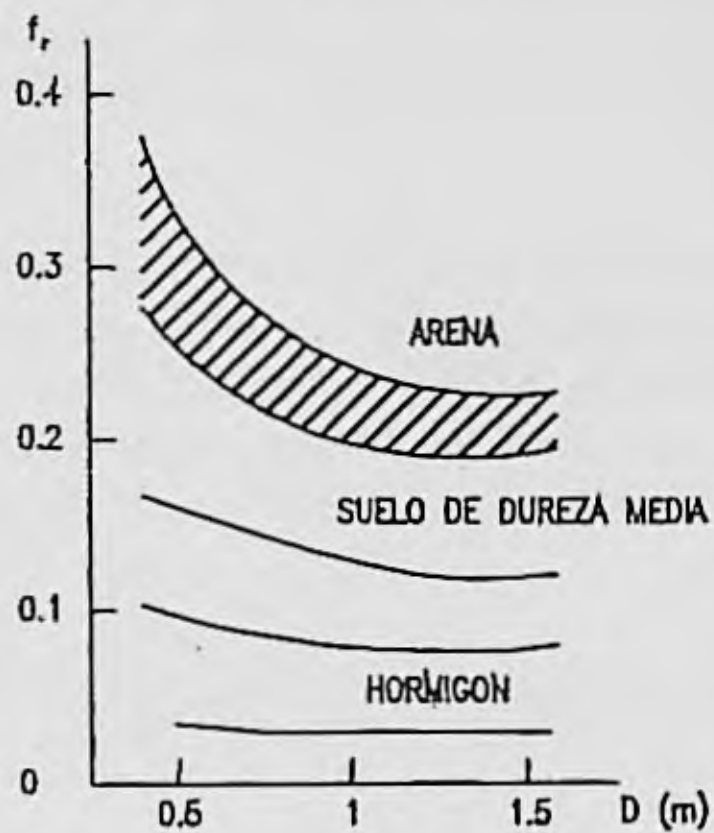


Figura 2.19. Efecto del diámetro del neumático en el coeficiente de resistencia a la rodadura sobre diferentes superficies.

Materiales. Los cinturones de acero mejoran la resistencia a la rodadura de los neumáticos radiales, (figura 2.18). En cuanto a los compuestos, los cauchos sintéticos proporcionan más alta resistencia a la rodadura que el caucho natural, y el caucho butílico, que tiene ventajas en sus propiedades para la tracción, control direccional y confort, aun produce mayor resistencia a la rodadura que los sintéticos convencionales.

Diámetro. El diámetro del neumático afecta muy poco a la resistencia a la rodadura sobre superficies duras; sin embargo, tiene una influencia importante al rodar sobre superficies blandas o deformables, (figura 2.19), ya que, al aumentar el diámetro, disminuye la penetración del neumático en el suelo y la pérdida de energía adicional que esto supone.

2.2.3.2. Influencia de las condiciones operativas en la resistencia a la rodadura

Velocidad. El incremento de velocidad obliga a una deformación más rápida del neumático, lo que genera un incremento de trabajo disipado por ciclo y la aparición de fenómenos vibratorios.

Cuando la velocidad alcanza valores superiores a un cierto límite, la banda de rodamiento no vuelve a la configuración no deformada, después de abandonar la huella de contacto con el suelo, produciendo una ondulación que se va amortiguando en torno a la línea teórica de la periferia del neumático. (Figura 2.20). Estas ondas tienen carácter de estacionarias porque se propagan con velocidad igual y contraria a la de la periferia de la banda de rodamiento, adquiriendo una posición fija para un observador solidario con el eje de la rueda.

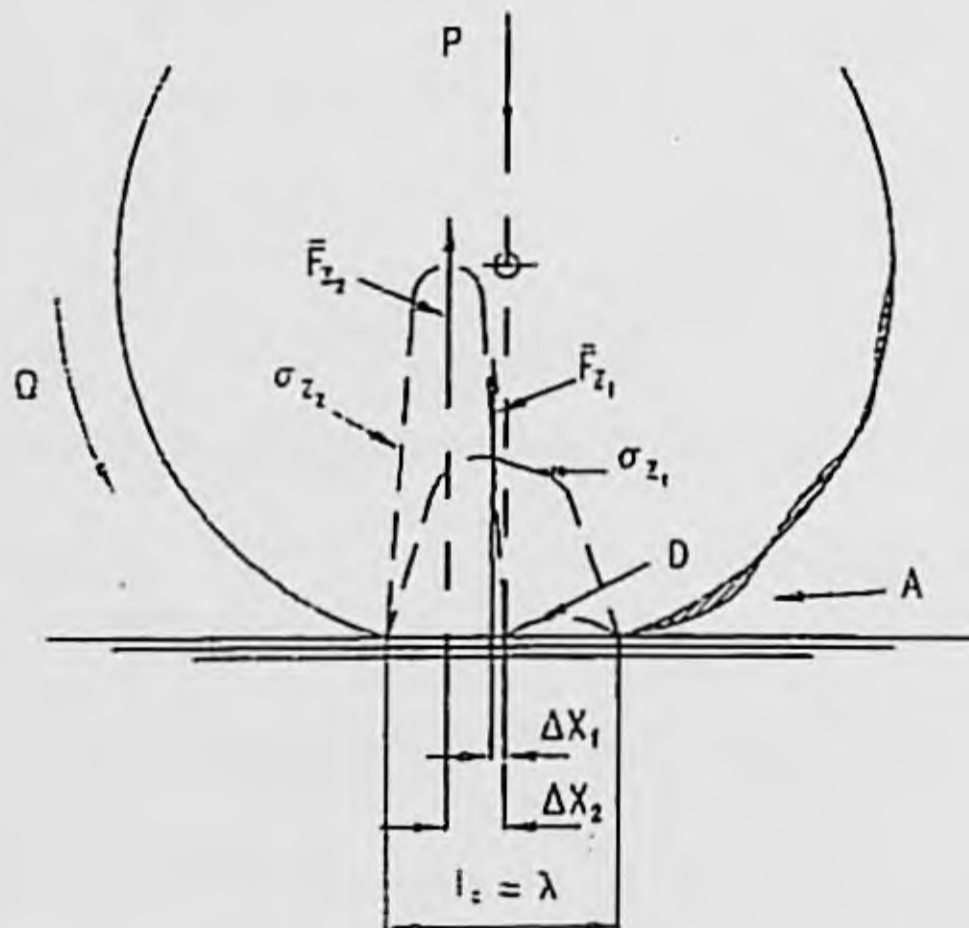


Figura 2.20. Esquema de formación de onda estacionaria en un neumático.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

La longitud de onda λ se hace aproximadamente igual a la longitud de la huella de contacto l_c [8]. Inmediatamente después del contacto con el suelo, se forma una cresta A, en correspondencia con la segunda mitad de la huella de contacto, en que se forma una depresión D, separando del suelo la banda de rodamiento. El diagrama de presiones normales de contacto pasa de σ_{z1} a σ_{z2} , (figura 2.20) y por tanto, la fuerza resultante F_z se aleja del eje de rotación una distancia $\Delta X_2 > \Delta X_1$, lo que hace aumentar notablemente el par de resistencia a la rodadura M_y y, en consecuencia, la potencia consumida. (Figura 2.17).

Existe una velocidad límite, por encima de la cual se producen las ondas estacionarias. El valor aproximado de esta velocidad límite V_L puede determinarse mediante la expresión:

$$V_L = \sqrt{\tau_c / \rho_b}$$

τ_c = Tensión circunferencial en el neumático. ($[F]/[L]$)

ρ_b = Masa del material de la banda de rodamiento, por unidad de área. ($[M]/[L]^2$).

Si se sobrepasa la velocidad límite, la generación de calor es muy considerable y el neumático puede llegar a fallar. Por esta causa, la velocidad V puede considerarse un límite superior de la velocidad de utilización del neumático.

Presión de inflado. La presión de inflado modifica la rigidez del neumático, hace variar la deformación, a igualdad de carga y, por tanto, las pérdidas de potencia; no obstante, el papel de la presión de inflado hay que analizarlo en relación con las características del suelo y, en particular, con su dureza.

Como se observa en la figura 2.21, sobre superficies duras, la resistencia a la rodadura disminuye al aumentar la presión, como consecuencia de una disminución de la deformación; sin embargo, sobre superficies blandas, el efecto es justamente el opuesto, debido a un aumento del trabajo de penetración. Para cada superficie deformable puede considerarse que existe una presión de inflado, que hace mínima la suma de las pérdidas de deformación y de penetración.

Carga sobre el neumático. La carga tiene un efecto contrario a la presión de inflado, pues, a igualdad de esta última, al aumentar la carga aumenta la deformación y, en consecuencia, la resistencia a la rodadura.

Temperatura. El incremento de temperatura de utilización hace disminuir las pérdidas de potencia, y el coeficiente de resistencia a la rodadura, como se muestra en la figura 2.22.

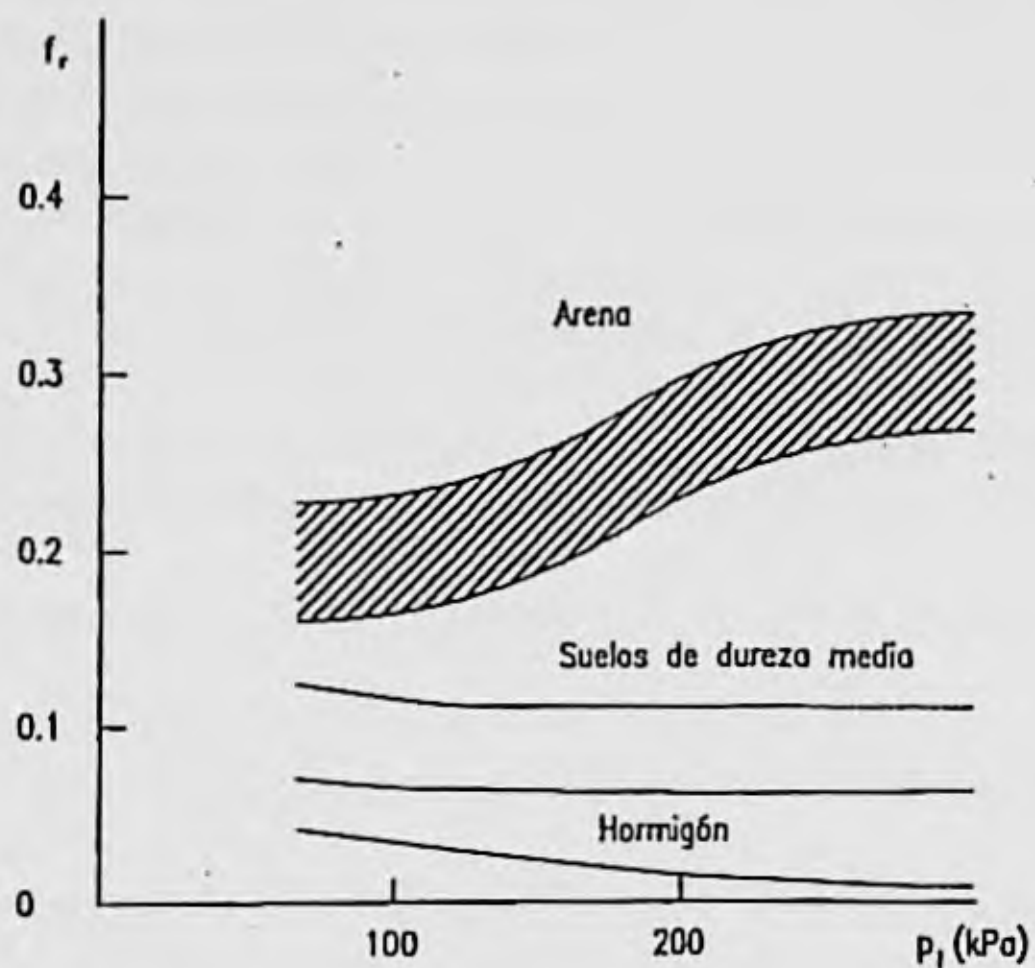


Figura 2.21. Variación del coeficiente de resistencia a la rodadura con la presión de inflado del neumático.

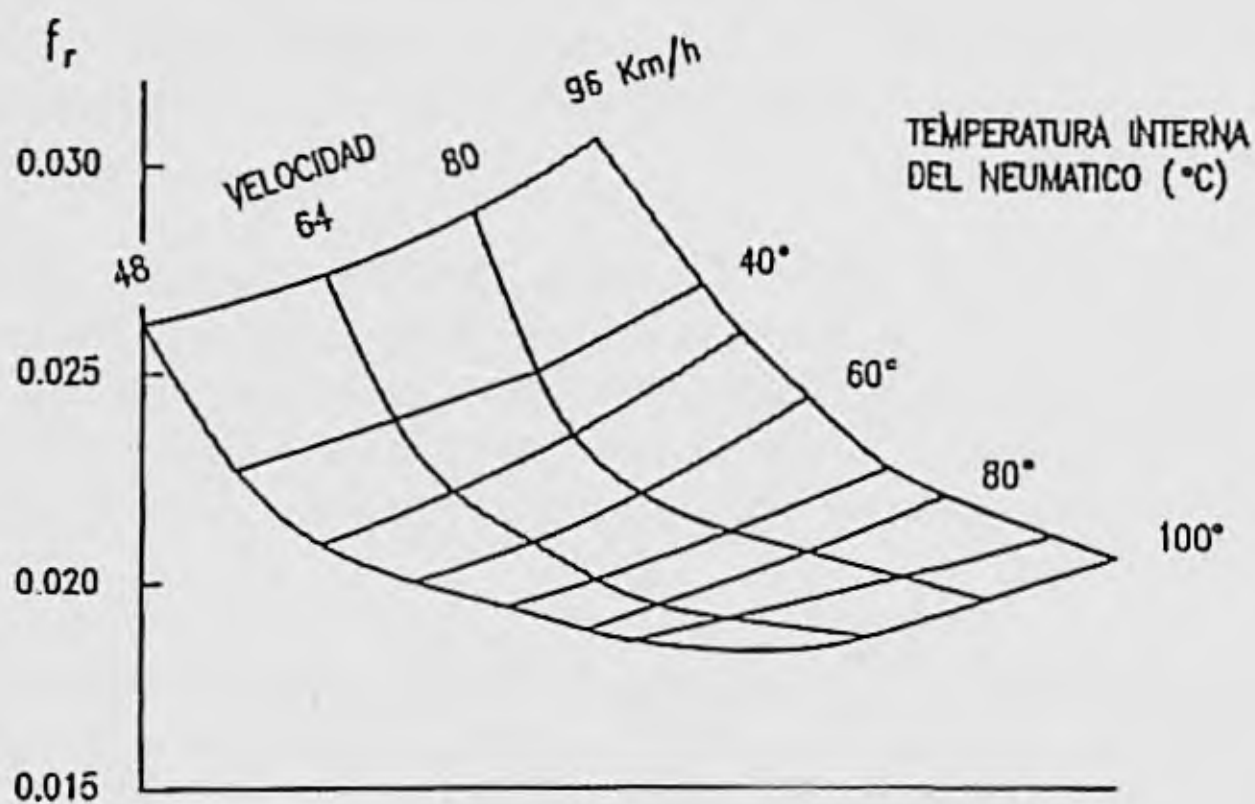


Figura 2.22. Efecto de la temperatura interna del neumático sobre el coeficiente de resistencia a la rodadura

Esfuerzos longitudinales. Al actuar sobre el neumático un momento de tracción, se desarrolla un esfuerzo longitudinal en la superficie de contacto neumático-suelo, aumentando la deformación de éste, especialmente en la mitad delantera de dicha zona de contacto, lo que hace aumentar la distancia ΔX entre F_z y el eje Y y, en consecuencia, el momento de resistencia a la rodadura. La aplicación de un par de frenado también hace aumentar la resistencia a la rodadura, aunque de forma menos importante [15].

2.2.3.3. Influencia de las características de la superficie rodadura en la resistencia a la rodadura del neumático.

Parte de esta influencia ha sido comentada ya. Los efectos de la dureza del suelo, asociada con los efectos de la presión de inflado, y del diámetro del neumático, se muestran en las figuras 2.19 y 2.21. En general puede decirse que, cuanto más duras, lisas, secas y exentas de contaminantes, sean las superficies de rodadura, menor será la resistencia que opongan al movimiento del neumático.

2.2.3.4. Valores del coeficiente de resistencia a la rodadura.

El gran número de factores que influyen sobre la resistencia a la rodadura, hace difícil el establecimiento de expresiones matemáticas que los tengan en cuenta todos. Se han propuesto algunas relaciones empíricas, en base a resultados experimentales, que tienen en cuenta los factores más influyentes como la velocidad o la presión de inflado; así por ejemplo, para neumáticos de turismo, sobre pavimento de hormigón, el coeficiente de resistencia a la rodadura puede estimarse por la ecuación:

$$f_r = f_0 + f_s \left(\frac{V}{100} \right)^{2.5} \quad 2.1$$

Donde V representa la velocidad en km/h; f_0 y f_s son parámetros que dependen de la presión de inflado, y pueden obtenerse de la figura 2.23.

Considerando un intervalo pequeño de variación de la presión (p), puede considerarse, f_r , como una función lineal de la velocidad. Para neumáticos de turismo, con presión de inflado próxima a 179 KPa, rodando sobre hormigón, se ha propuesto la siguiente expresión:

$$f_r = 0.01 \left(1 + \frac{V}{160} \right) \quad 2.2$$

La anterior ecuación predice bien los valores de f_r para velocidades superiores a 128 Km/h. En muchos casos, puede ser despreciado el efecto de la velocidad, y considerarse un valor medio para el coeficiente de resistencia a la rodadura. Como orientación, en la tabla 2.2 se ofrecen algunos valores de este coeficiente, en función del tipo de neumático, según el vehículo a que se destina y la naturaleza del suelo o calzada.

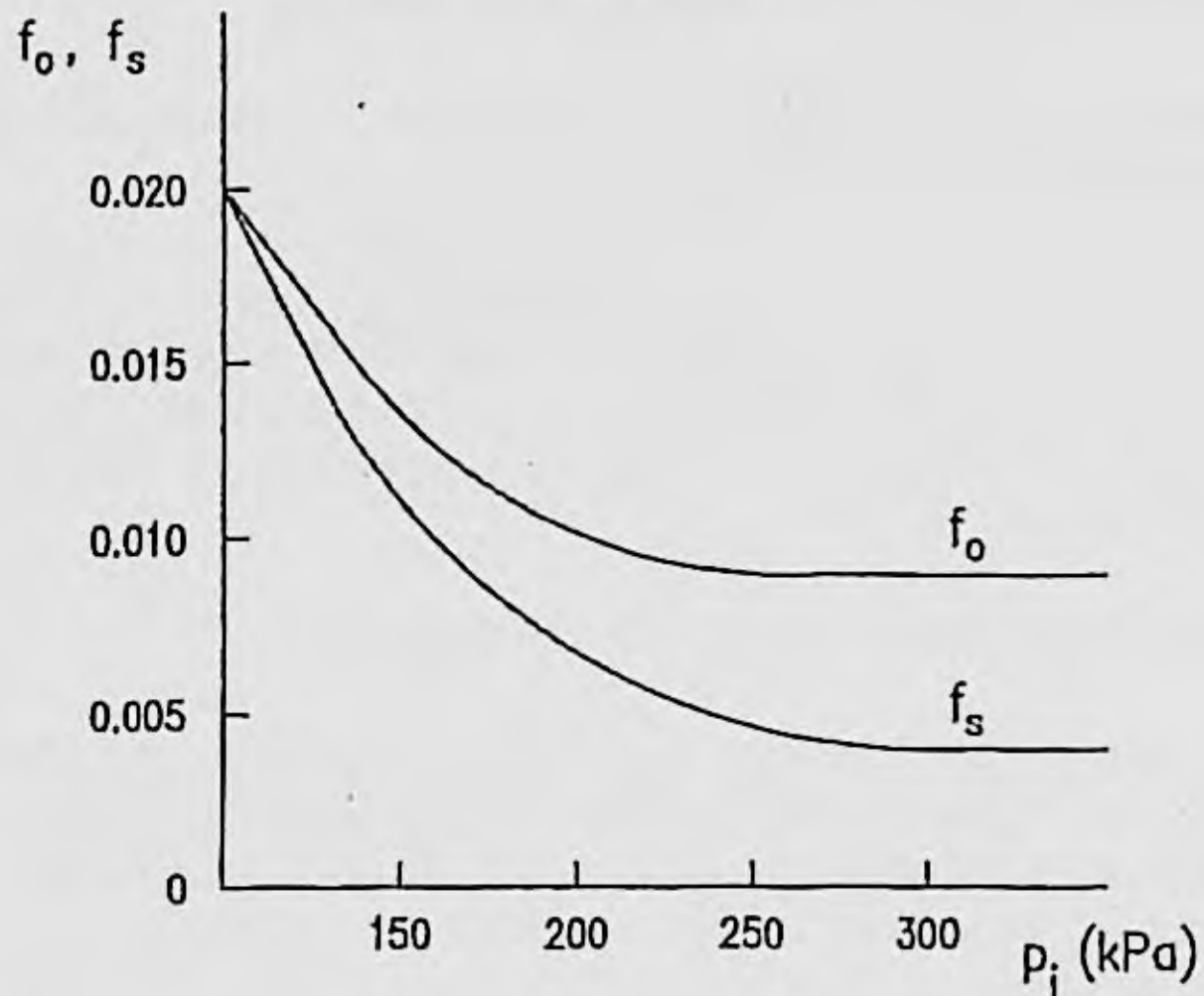


Figura 2.23. Efecto de la presión de inflado de los neumáticos sobre los coeficientes f_o y f_s .

Tipo de vehículo	Superficie		
	Hormigón o Asfalto	Dureza Media	Arena
Turismos	0.015	0.08	0.30
Camiones	0.012	0.06	0.25
Tractores	0.02	0.04	0.20

TABLA 2.2. Valores aproximados del coeficiente de resistencia a la rodadura (f_r) de los neumáticos.

2.3. ESFUERZOS LONGITUDINALES (TRACCION Y FRENADO). DESLIZAMIENTO. ADHERENCIA.

2.3.1. Tracción.

Si a un neumático que rueda soportando una cierta carga, se aplica un momento tractor (M_t), en la zona de contacto se generan, junto a las presiones normales, tensiones tangenciales cuya resultante F_{xt} produce, respecto al eje de giro de la rueda, un momento igual y contrario a M_t (figura 2.24). Ambas acciones antagónicas, sobre el neumático, provocan la deformación de éste, comprimiéndose la banda de rodamiento a la entrada de la zona de contacto, y estirándose a la salida, de tal manera que un elemento circunferencial no deformado, de valor Δl , cuando pasa a la zona de contacto habrá reducido su longitud a $\Delta l(1-\epsilon)$. Debido a esta deformación, el neumático actúa como si la longitud de la banda de rodamiento fuese menor, o lo que es lo mismo, como si su radio fuese más pequeño que el que corresponde a la rodadura libre (sin momento tractor). La velocidad de desplazamiento del eje de la rueda, V , será menor que la teórica, Ωr , siendo r el radio del neumático en condiciones de rodadura libre. Esta diferencia de velocidades es considerada como un deslizamiento por deformación, y el valor de dicho deslizamiento (i), se define por:

$$i = 1 - \frac{V}{\Omega r} = 1 - \frac{r_e}{r} \quad 2.3$$

Siendo:

- V - velocidad de traslación del eje de la rueda
- Ω - velocidad angular de la rueda
- r_e - radio efectivo de rodadura del neumático ($r_e < r$)
- i - deslizamiento longitudinal

El deslizamiento longitudinal, es un parámetro asociado en la generación de esfuerzos longitudinales en la superficie de contacto neumático-suelo. Si denominamos coeficiente de esfuerzo de tracción μ_{xt} a la relación entre el esfuerzo F_{xt} y la carga P que gravita sobre el neumático, la figura 2.25 representa la relación encontrada experimentalmente entre dicho coeficiente y el deslizamiento.

Destacan tres zonas y dos puntos, en la curva, que expresan la variación de μ_{xt} con i . La zona OA corresponde a una variación, prácticamente lineal, del coeficiente de esfuerzo tractor con el deslizamiento i ; esto se explica por el hecho de que, por debajo de un cierto valor del esfuerzo tractor, el deslizamiento se debe, exclusivamente, a la deformación elástica

de la banda de rodamiento. Si aumenta el par aplicado a la rueda, se iniciará el deslizamiento físico del neumático sobre la superficie de rodadura, lo que sucede en la parte posterior de la zona de contacto. En estas condiciones, la relación entre, μ_{xt} e i deja de ser lineal (zona AB). El deslizamiento físico entre neumático y suelo, se extiende progresivamente a toda la zona de contacto, a medida que aumenta el par aplicado a la rueda, hasta alcanzar a la totalidad de la misma; cuando esto sucede, i aumenta hasta la unidad ($V = 0, \Omega \neq 0$), es decir, se produce deslizamiento puro, y el coeficiente de esfuerzo de tracción desciende al valor μ_d . El tránsito desde el punto B al C y del valor $\mu_{m\acute{a}x}$ a μ_d , sucede en forma muy rápida.

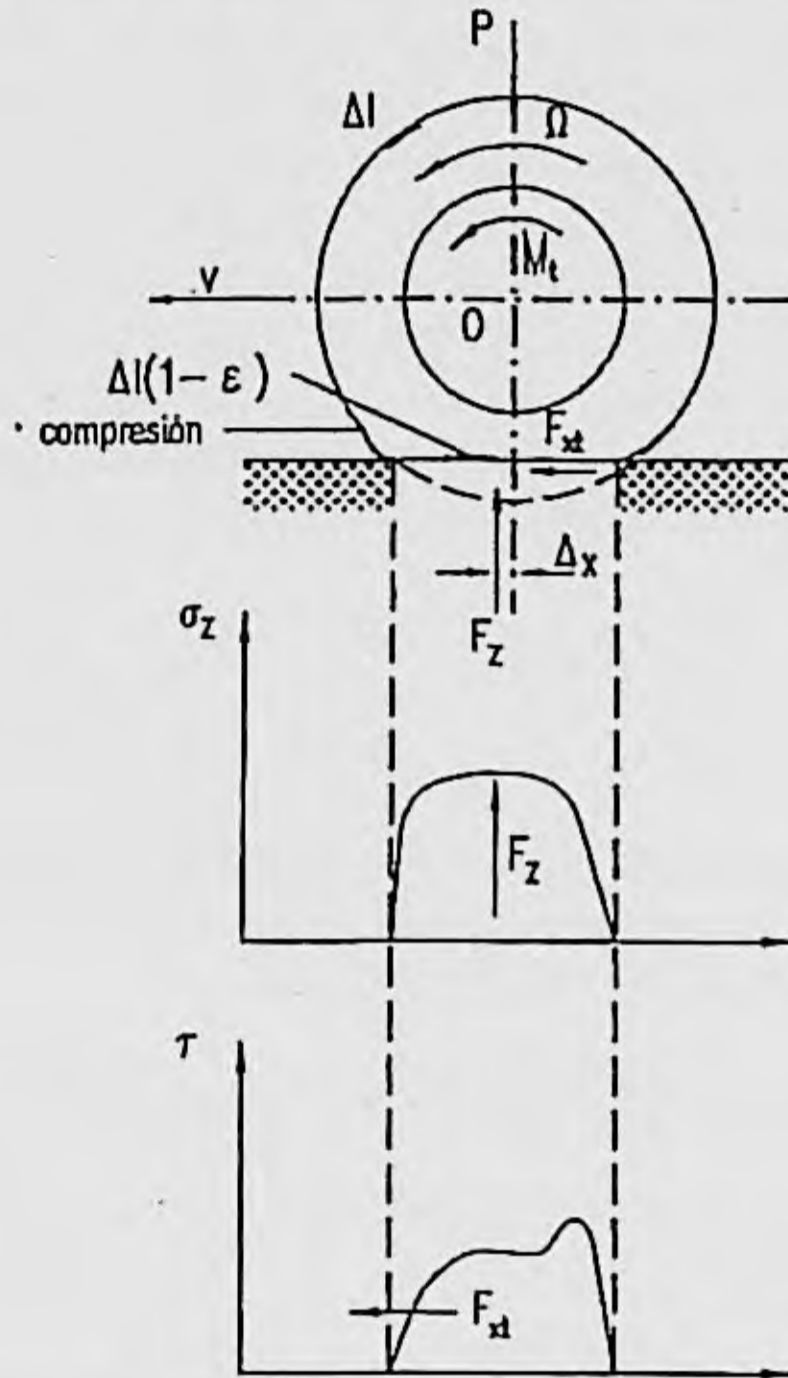


Figura 2.24. Neumático sometido a esfuerzos normal y longitudinal de tracción.

De los datos experimentales, se desprende que el máximo valor de μ_{xt} para un neumático rodando sobre superficie dura, se obtiene cuando el deslizamiento alcanza valores comprendidos entre el 10 al 30%, correspondiendo los valores inferiores a los neumáticos modernos.

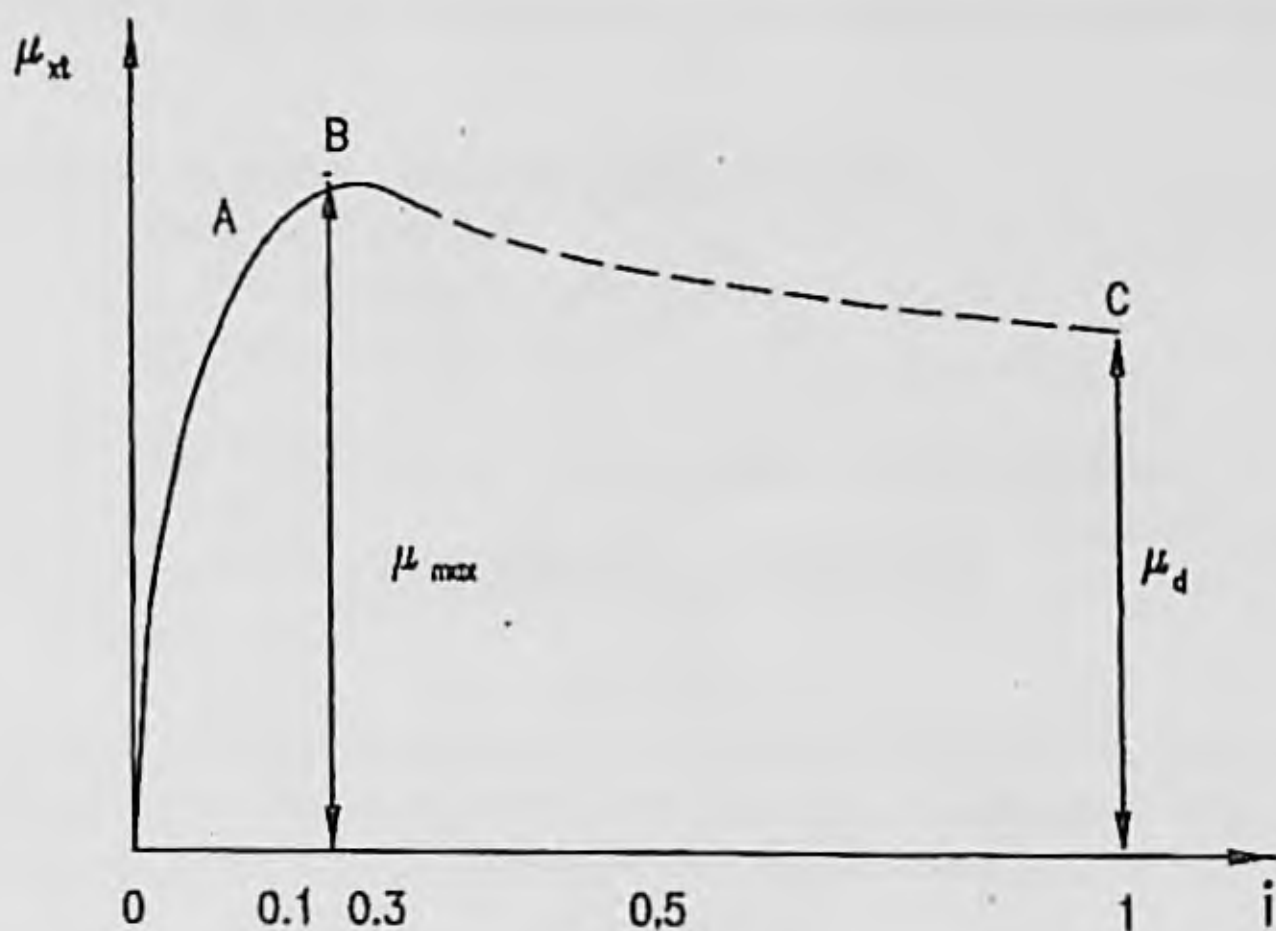


Figura 2.25. Variación del coeficiente de esfuerzo tractor con el deslizamiento longitudinal.

2.3.2. Esfuerzo de frenado

Si se aplica a la rueda un par de frenado M_f , el efecto sobre la banda de rodamiento es opuesto al descrito antes, cuando se consideraba aplicado un par de tracción, es decir, se producirá un alargamiento a la entrada de la zona de contacto y una deformación por compresión a la salida. (Figura 2.26).

En estas condiciones, la rodadura del neumático se produce como si su diámetro fuese mayor que el correspondiente a rodadura libre, bajo la misma carga. La velocidad de desplazamiento del eje de la rueda (V), será superior a la correspondiente a rodadura libre ($r\Omega$). Ahora el deslizamiento será i_p :

$$i_p = 1 - \frac{r\Omega}{V} = 1 - \frac{r}{r_e} \quad 2.4$$

Puede apreciarse en esta expresión que cuando $i_p = 1$ (ó $i_p = 100\%$), $\Omega=0$, la rueda está bloqueada y se produce deslizamiento puro.

Se denomina coeficiente de esfuerzo de frenado μ_{xf} , a la relación entre el esfuerzo de frenado y la carga normal que actúa sobre el neumático. La variación de este coeficiente, con el patinaje, es similar a la expresada en la figura 2.25, entre el coeficiente de esfuerzo tractor y el deslizamiento.

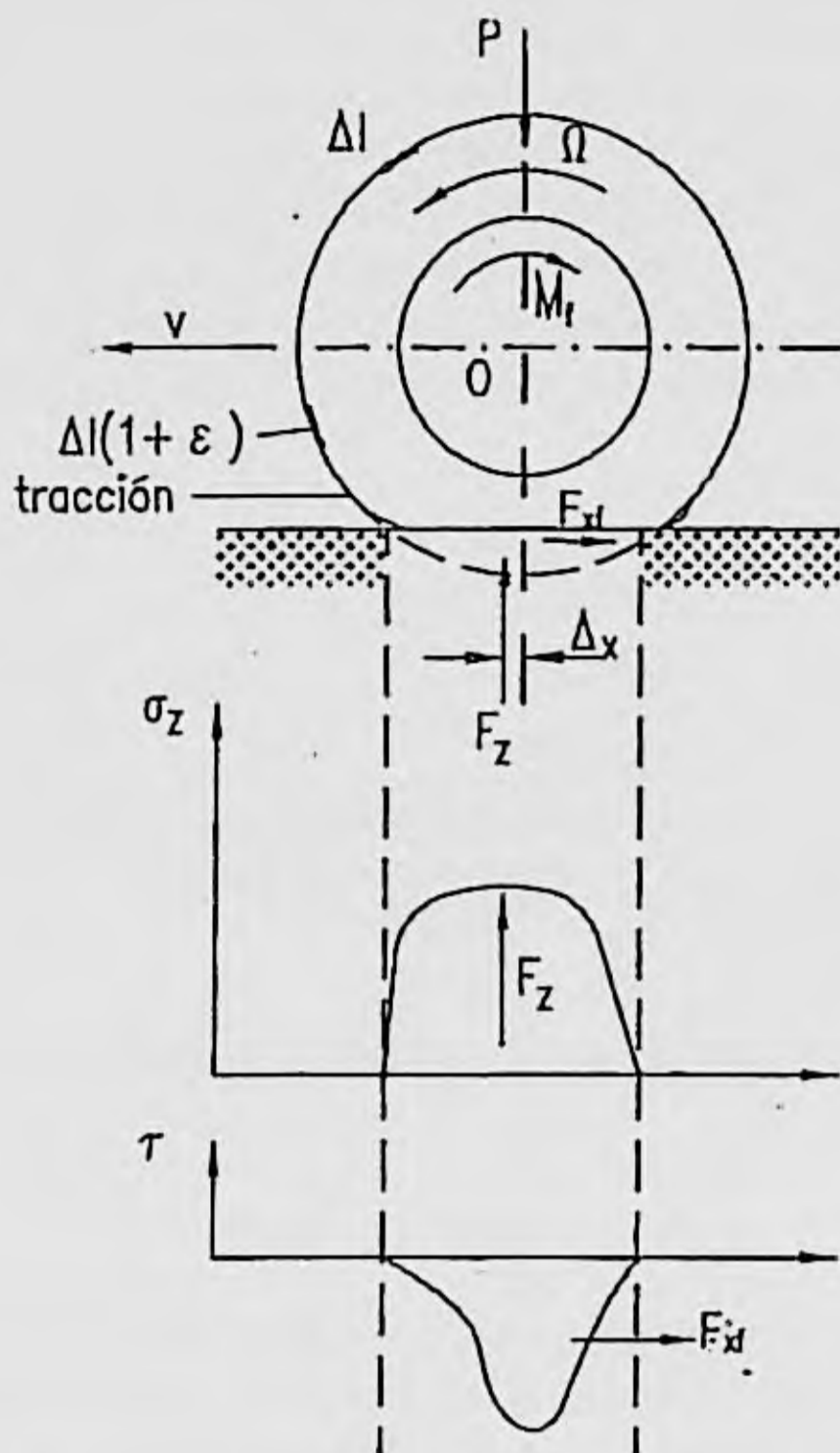


Figura 2.26. Neumático sometido a esfuerzo normal y longitudinal de frenado.

2.3.3. Coeficiente de adherencia. Valor máximo y valor de deslizamiento puro.

El coeficiente de esfuerzo longitudinal de tracción o frenado puede adquirir valores comprendidos entre 0 y μ_{\max} cuanto aumenta el valor de la fuerza F_x . Dicho valor μ_{\max} , denominado coeficiente de adherencia, corresponde al valor máximo de la adherencia entre el neumático y la superficie de rodadura, el cual depende de diversos factores que se analizarán más tarde. Una vez superado este límite, el deslizamiento entre el neumático y la superficie de rodadura se extiende de una forma casi instantánea a toda la huella de contacto y disminuye hasta un valor μ_d (coeficiente de adherencia en deslizamiento).

Los valores del coeficiente de adherencia, están influenciados por diversos factores, que podemos agrupar en internos (relacionados con el propio neumático y el vehículo) y

externos o relativos al ambiente en que se mueve, especialmente la naturaleza y estado de la calzada.

Los principales factores internos que afectan a μ son:

- Velocidad de marcha
- Dibujo de la banda de rodamiento
- Carga normal sobre la rueda

Los principales factores externos, relacionados con la calzada, son:

- Naturaleza
- Humedad superficial o capa de agua
- Limpieza.

Por último, un factor dependiente de la marcha del vehículo y de los factores externos (aire y trayectoria) es la acción simultánea de esfuerzos longitudinal (F_x) y transversal (F_y) en la huella de contacto. A continuación analizamos brevemente la influencia de estos factores.

La velocidad del vehículo influye en μ_{\max} y μ_d , haciendo disminuir éstos, de forma análoga a como sucede en la mayoría de los fenómenos de adherencia y rozamiento. Esta variación puede verse en los datos representados en las figuras 2.27 y 2.28.

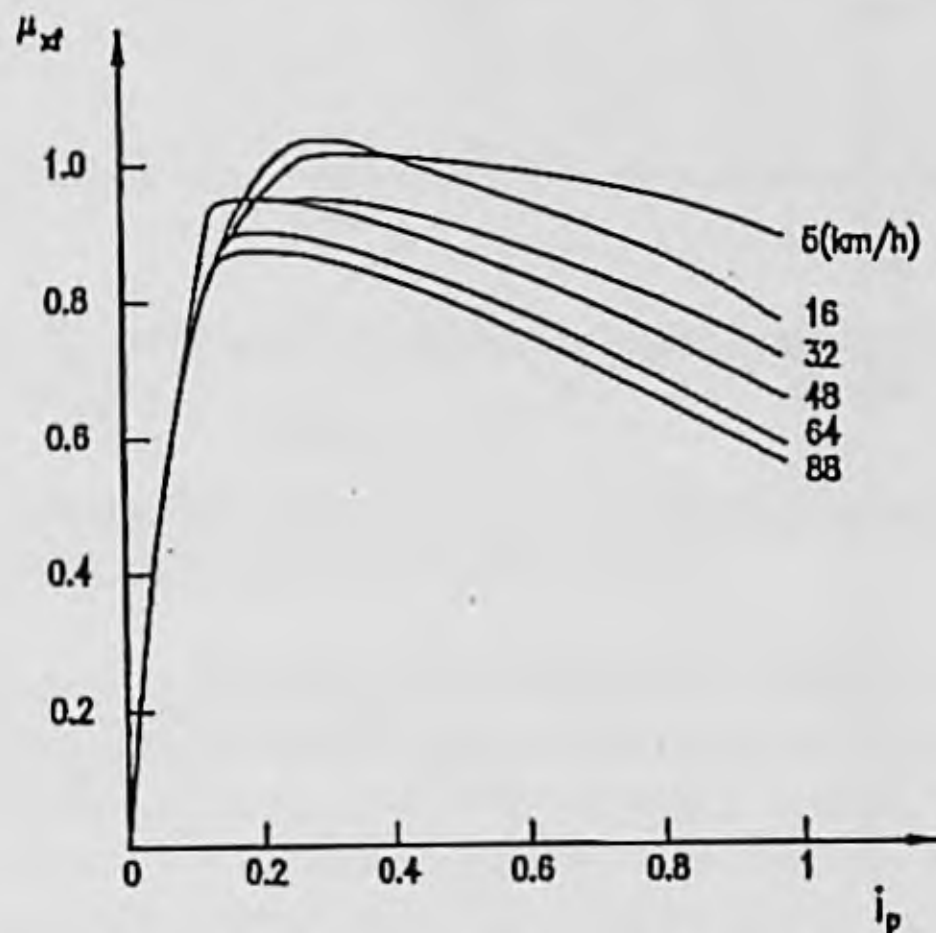


Figura 2.27. Efecto de la velocidad sobre el coeficiente de esfuerzo de frenado (neumático de camión 10.00 x 20/F sobre asfalto).

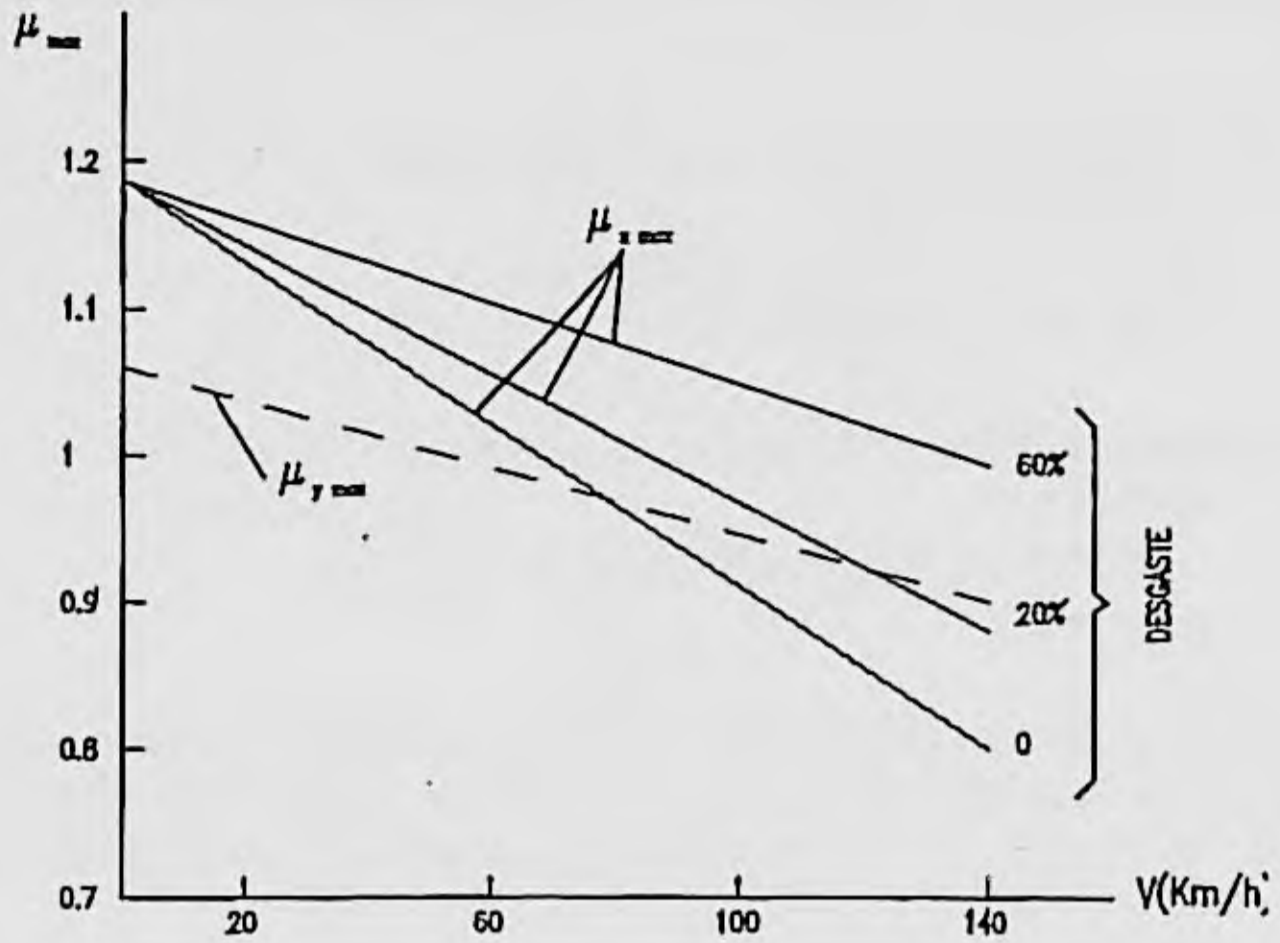


Figura 2.28. Coeficiente de adherencia máxima en función de la velocidad de marcha y del desgaste de la banda de rodamiento.

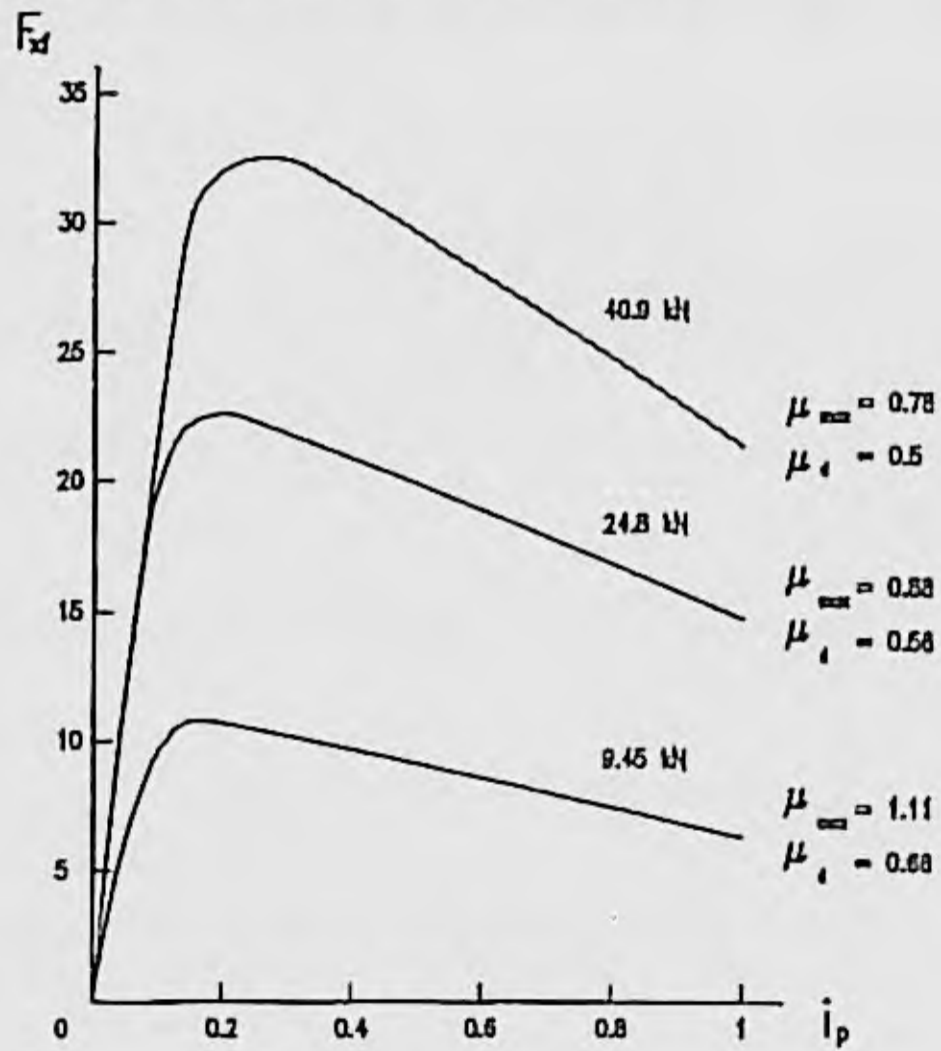


Figura 2.29. Efecto de la carga normal sobre la fuerza de frenado (neumático de camión 10.00 x 20/F sobre asfalto).

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

El diseño de la banda de rodamiento influye, como se indicó en el punto 2.1.4., en el coeficiente de adherencia y, especialmente, en los valores relativos de la adherencia longitudinal y transversal. El desgaste de la banda también tiene influencia en $\mu_{\text{máx}}$, (figura 2.28), aumentando éste valor con un cierto desgaste de dibujo, esta influencia aumenta con la velocidad [8]. El valor $\mu_{\text{Ymáx}}$ que aparece en la figura 2.28 se refiere a la adherencia lateral.

La carga que actúa sobre el neumático hace aumentar la huella de contacto, disminuyendo la tensión tangencial entre neumático y suelo y, así mismo, los valores de $\mu_{\text{máx}}$ y μ_{d} . (Figura 2.29).

En relación con los factores que hemos denominado externos, los principales son la naturaleza de la superficie de rodadura y su estado de humedad y suciedad. En cuanto a la primera, en la tabla 2.3 se indican los valores medios orientativos de $\mu_{\text{máx}}$ y μ_{d} , correspondientes a diferentes tipos de superficies.

Superficie	Valor máximo $\mu_{\text{máx}}$	Valor de deslizamiento μ_{d}
Asfalto y hormigón secos	0.8-0.9	0.75
Asfalto mojado	0.5-0.7	0.45-0.6
Hormigón mojado	0.8	0.7
Grava	0.6	0.55
Tierra seca	0.68	0.65
Tierra húmeda	0.55	0.4-0.5
Nieve dura	0.2	0.15
Hielo	0.1	0.07

TABLA 2.3. Valores medios del coeficiente de adherencia entre neumático y superficie de rodadura.

El estado de humedad y suciedad de las superficies influyen en la adherencia, provocando la disminución de ésta. (Figuras 2.30 y 2.31).

Puede observarse, que sobre calzadas mojadas la adherencia disminuye, tanto más, cuando mayor es el espesor de la capa de agua. La diferencia entre $\mu_{\text{máx}}$ y μ_{d} es pequeña, tanto en superficies secas como mojadas, cuando están limpias y aumenta cuando están húmedas y sucias, como sucede durante los primeros minutos de lluvia. La lluvia puede hacer que, durante los primeros minutos, μ_{p} disminuya desde 0.75 (superficie seca) a 0.4 inmediatamente después de empezar a llover, y aumente a 0.6, al desaparecer los contaminantes superficiales. Al dejar de llover, en un minuto, aproximadamente, se vuelve al valor inicial de superficie seca [1], si la carretera evacúa adecuadamente el agua.

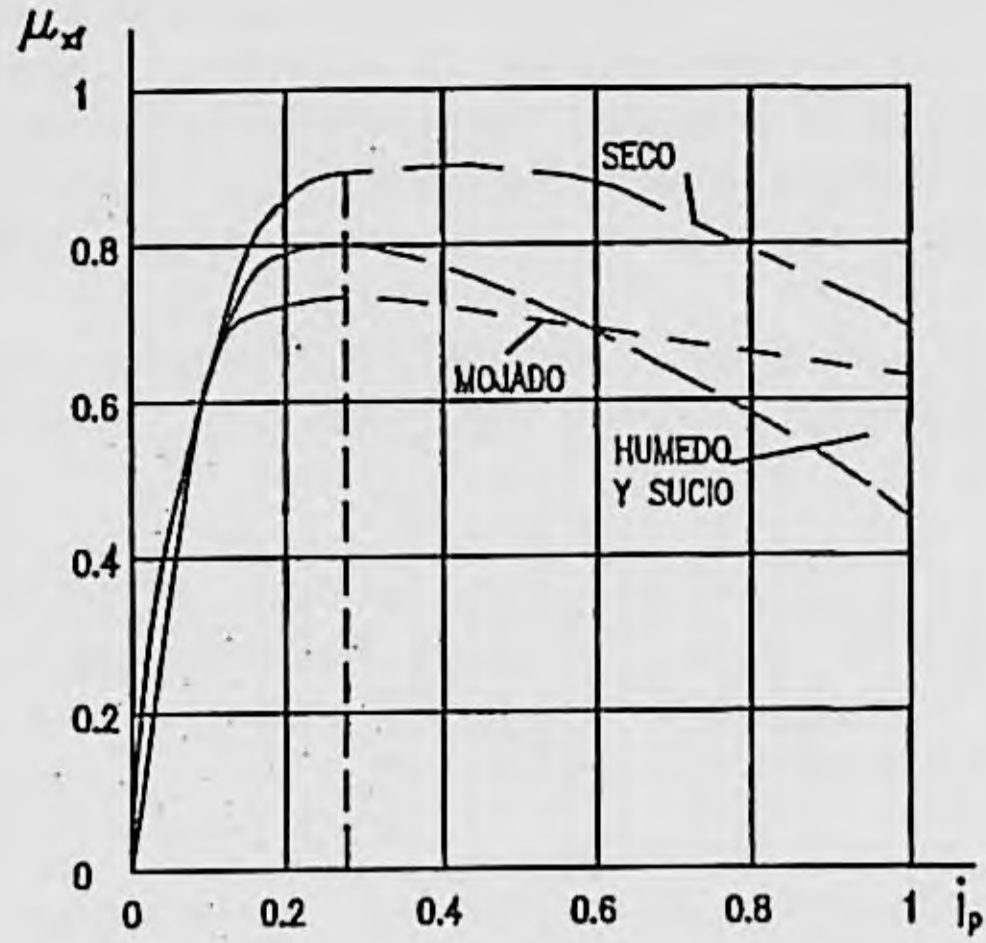


Figura 2.30. Influencia del estado de humedad y suciedad de la calzada sobre la adherencia.

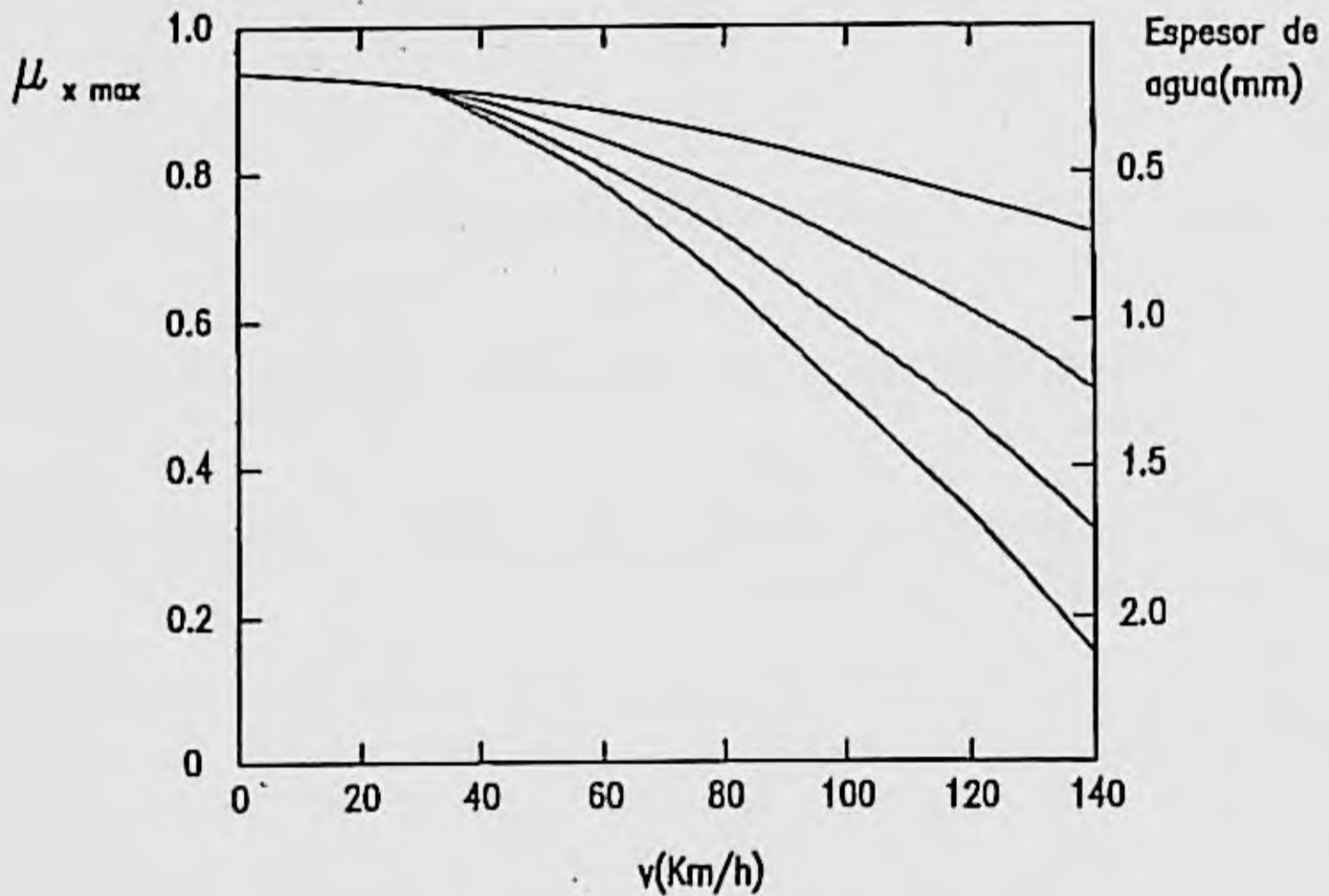


Figura 2.31. Influencia del espesor de la capa de agua y la velocidad sobre el coeficiente de adherencia.

Cuando la capa de agua alcanza cierto valor, y la velocidad aumenta, se puede producir una pérdida de contacto total entre neumático y calzada. Este fenómeno, denominado acuaplaning, será analizado después.

Cuando se solicita de la superficie de contacto neumático suelo una componente de fuerza de adherencia en dirección transversal (F_Y), además de la longitudinal (F_X), el coeficiente total de esfuerzo adherente será:

$$\mu = \frac{F_t}{F_z} = \sqrt{\frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} \quad 2.5$$

siendo: $\overline{F_t} = \overline{F_x} + \overline{F_y}$

2.3.4. Comportamiento del neumático sobre superficies cubiertas de agua. Hidroplaneo (Acuaplaning).

En los apartados anteriores han sido tratados algunos aspectos de este tema. Se indicó el papel que juega el grabado o dibujo de la banda de rodamiento, en la evacuación del agua de la huella de contacto, y se analizó la influencia de la humedad y suciedad, en el coeficiente de adherencia neumático-suelo. En este punto, analizaremos, de manera más detallada, el comportamiento del neumático, cuando rueda sobre una superficie recubierta de una capa de agua. Cuando aumenta el espesor de dicha capa de agua, la acción conjunta de las acanaladuras de la banda de rodamiento y la macrotextura de la calzada, es insuficiente para desplazar toda la masa de agua fuera de la huella de contacto, a cierta velocidad; en esta situación se produce el acuaplaning total o parcial.

En la mayor parte de los diseños de las bandas de rodamiento, se presentan:

- Canales o ranuras principales.
- Canales de alimentación.
- Pequeños cortes o estrías.

Los canales principales se orientan desde el centro al exterior de la huella de contacto, generalmente en sentido longitudinal, y sus dimensiones más frecuentes son: 3 a 5 mm. de ancho y 10 mm. de profundidad.

Los canales de alimentación se orientan, normalmente, en dirección transversal o inclinada respecto a los anteriores. Pueden acabar, en uno de sus extremos, en el interior de un nervio o taco de goma. Su función es ayudar a desplazar el agua hasta los canales principales y permitir los desplazamientos de la banda de rodamiento respecto al suelo, mejorando su acción de limpiado.

En cuanto a las **estriás o pequeños cortes**, no contribuyen, directamente, a la evacuación del agua; su principal función es facilitar las deformaciones de la goma en su adaptación al plano de rodadura.

Las dimensiones de los canales afectan, de manera importante, a la capacidad de evacuación de agua y, en consecuencia, a la adherencia neumático-suelo. En la figura 2.32 puede observarse la influencia de la anchura de los canales en la fuerza de frenado, manteniendo constante el número y ancho de los nervios y el número de ranuras.

Como se pone de manifiesto en la figura 2.32, el aumento del ancho de los canales aumenta la adherencia en frenado, especialmente a velocidades altas. Cuando la anchura supera los 5 mm, la fuerza de frenado no crece en la misma medida, al seguir aumentando dicha anchura. La profundidad de las canales afectan relativamente poco al coeficiente de rozamiento [9].

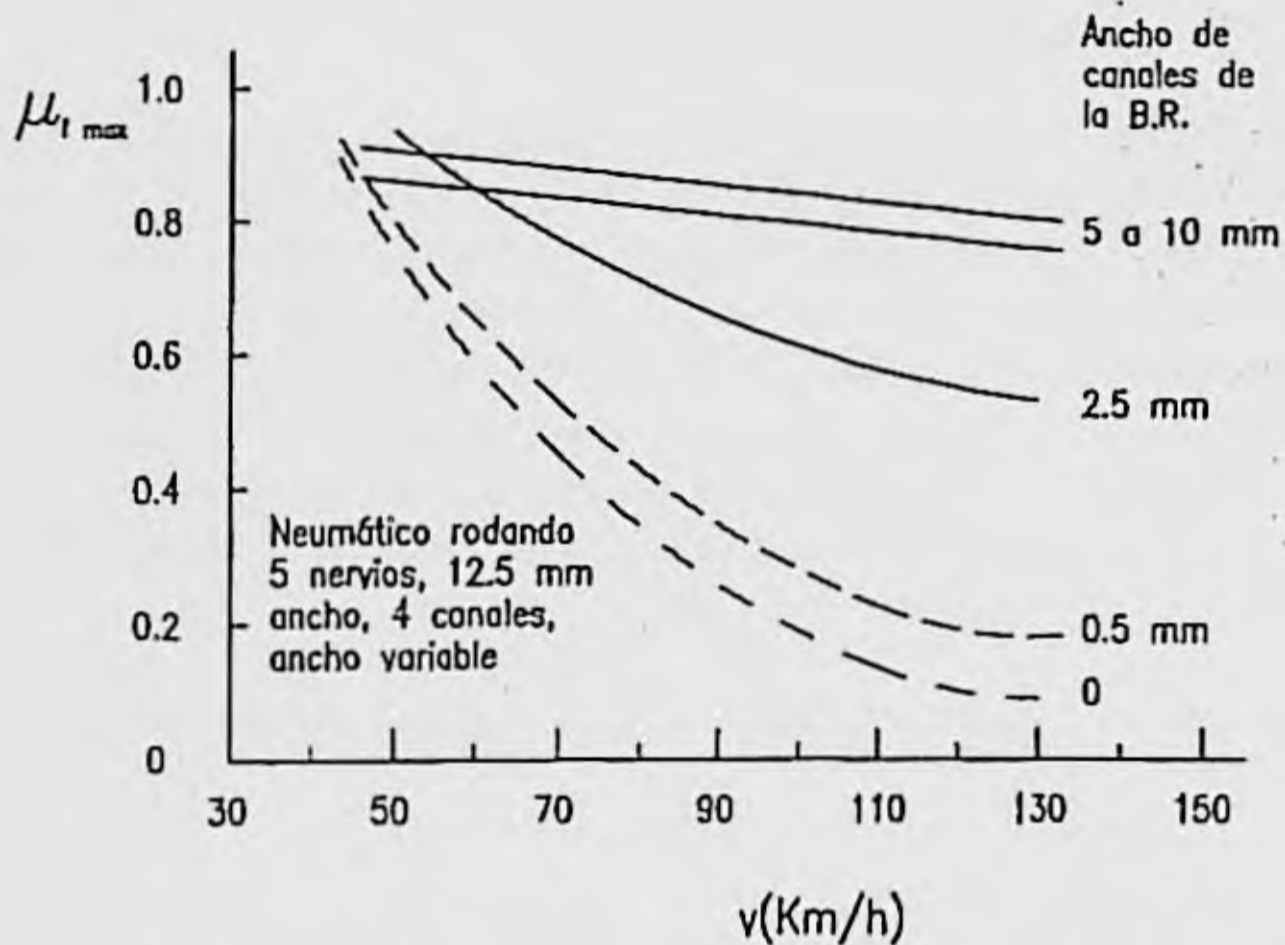


Figura 2.32. Efecto de la anchura de los canales de la banda de rodamiento sobre el coeficiente de fuerza de frenado.

Por otra parte, se ha comprobado [9] que el efecto de las acanaladuras transversales en el pavimento de la calzada, puede ser muy parecido al de las acanaladuras de los neumáticos, en relación con la evacuación de agua.

El espesor de la capa de agua, tiene una escasa influencia, sobre el coeficiente de adherencia para velocidades inferiores a los 50 km/h, (figura 2.31), pero afecta muy

notablemente, a dicho coeficiente, a altas velocidades. Esta influencia se refiere tanto a los esfuerzos longitudinales como transversales.

Hidroplaneo (aquaplaning)

Con este nombre se conoce el efecto de pérdida de contacto total o parcial entre neumático y suelo, cuando aquel rueda sobre superficie cubierta de agua. Dicha pérdida de contacto puede producirse tanto con la rueda girando como bloqueada. Consideremos estos dos casos que denominaremos: a) rodadura y b) deslizamiento. (Figura 2.33).

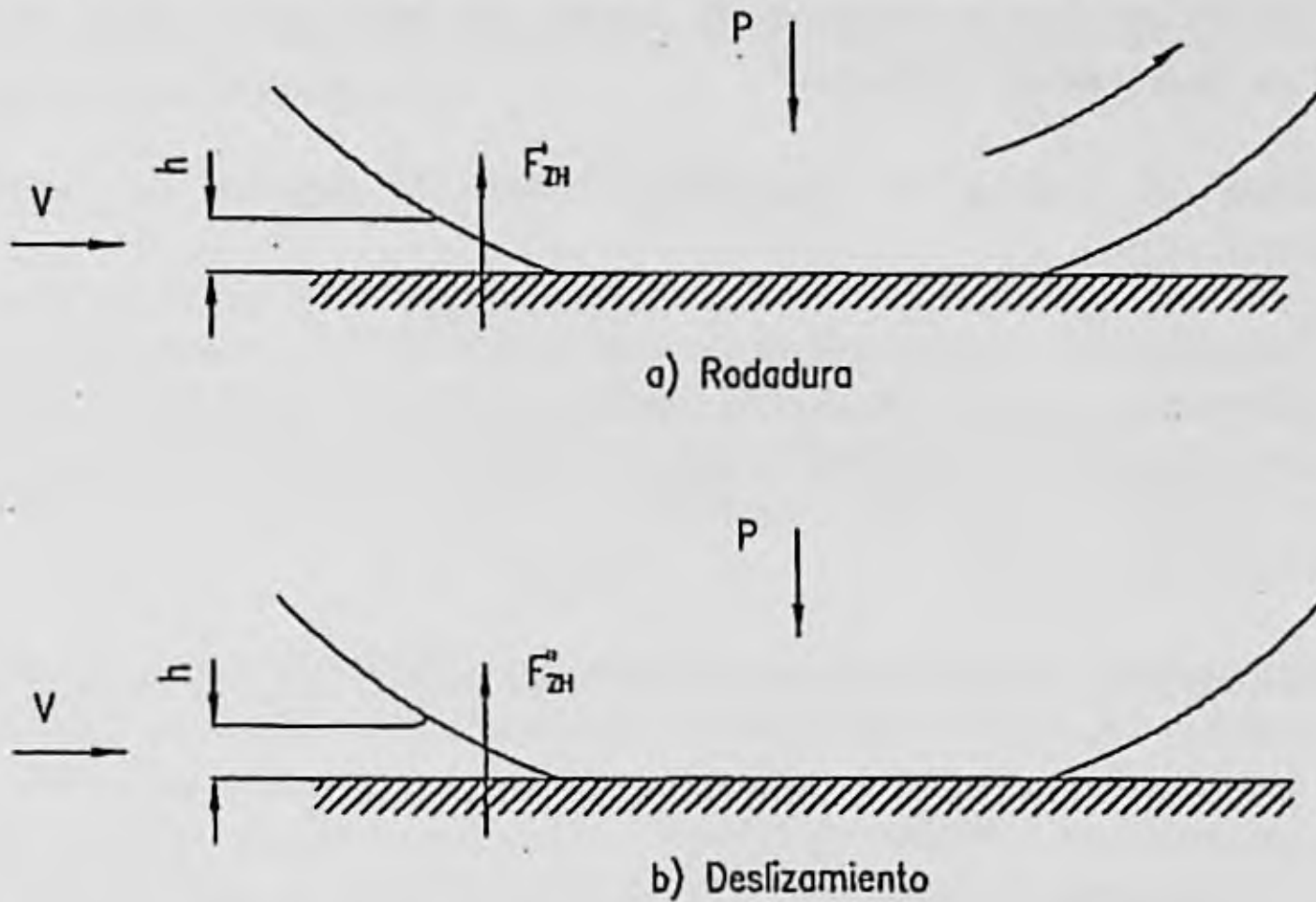


Figura 2.33. Cuña hidrodinámica entre neumático y suelo antes de alcanzarse el límite de acuaplaning.

En ambos casos, suponemos que el eje del neumático está fijo, y la superficie de rodadura, arrastrando la película de agua, se mueve respecto a él. En estas condiciones, la masa de agua choca con la superficie de la banda de rodamiento, experimentándose una fuerte variación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal, la cual produce un empuje hidrodinámico, cuyas componentes en dirección vertical son F_{ZH} y F_{ZH}^a para los casos de rodadura y deslizamiento, respectivamente. A velocidades bajas o moderadas, estos empujes verticales son mucho menores que el peso P que actúa sobre la rueda. Al aumentar la velocidad, F_{ZH} puede llegar a ser igual o mayor que P , produciéndose la completa separación entre el neumático y la calzada.

Considerando que el espesor de la capa de agua es relativamente pequeño, y una misma velocidad, en los dos casos analizados, $F_{Z'H} \approx 2 F_{Z''H}$, lo que se explica por el hecho de que, en el caso de rodadura, el arrastre de agua hacia la zona de cuña fluida, es efectuado por ambas superficies: neumático y calzada. En el caso de deslizamiento, solo la superficie de la calzada, según el modelo indicado, cumple esta función. Cuando el espesor de la capa de agua aumenta, la relación $\frac{F_{Z'H}}{F_{Z''H}}$ disminuye. De la misma forma, el aumento de superficie de cuña fluida, en contacto con el neumático, que se produce en el caso de deslizamiento respecto al de rodadura, por el efecto de acumulación de agua en la parte delantera del neumático, hace disminuir, también, la diferencia entre ambas fuerzas. De todos modos, $F_{Z'H}$ es siempre superior a $F_{Z''H}$ para la misma velocidad V .

Durante el proceso de acuaplaning pueden distinguirse dos velocidades características: V_{A1} y V_{A2} .

La velocidad V_{A1} corresponde al valor de la velocidad de avance, para la cual la presión hidrodinámica en la cuña (p) se hace igual a la presión de inflado (p_i) del neumático. Cuando esto sucede, la banda de rodamiento empieza a deformarse hacia el interior del propio neumático, y la región de cuña fluida se extiende por la huella de contacto. Esta velocidad suele denominarse de **transición**.

A la velocidad V_{A2} , la cuña de agua alcanza la totalidad de la huella de contacto, la presión p es superior a p_i , y el peso que gravita sobre la rueda es completamente soportado por la capa de agua interpuesta entre el neumático y el suelo. Este valor de la velocidad es denominado **velocidad de hidroplaneo**. (Figura 2.34.b). El valor V_{A1} de la velocidad puede determinarse estableciendo la condición $p = p_i$. Denominando F_{XH} al empuje hidrodinámico según la dirección longitudinal.

$$F_{XH} = qV_{A1} = \rho b_c h V_{A1}^2 \quad 2.6$$

Siendo:

q	-	caudal de agua (masa/tiempo)
b_c	-	ancho de la huella de contacto
ρ	-	densidad del agua.

La presión hidrodinámica es, por tanto:

$$p = \frac{F_{XH}}{b_c h} = \rho V_{A1}^2 \quad 2.7$$

y haciendo $p = 1.2 p_i$ para tener en cuenta la rigidez de los costados del neumático:

$$V_{A1} = \sqrt{\frac{1.2}{\rho} P_i} \quad 2.8$$

Expresado p_i en kPa y V_1 en km/h resulta:

$$V_{A1} = 3.94 \sqrt{p_i} \quad 2.9$$

Para estimar el valor de la velocidad de hidroplaneo V_{A2} , W.B. Horne y otros (1.966) han propuesto la siguiente expresión:

$$V_{A2} = 6.34 \sqrt{p_i} \quad 2.10$$

en la que p_i se expresa en kPa y V_{A2} en km/h .

Cuando la capa de agua ha alcanzado la totalidad de la superficie de la huella de contacto, siendo φ el ángulo de cuña fluida, el empuje hidrodinámico en dirección vertical es:

$$F_{ZH} = p h \text{Cot } \varphi b_c \quad 2.11$$

Al aumentar V , disminuye φ hasta el valor φ_2 entonces $V = V_{A2}$ (figura 2.34.b).

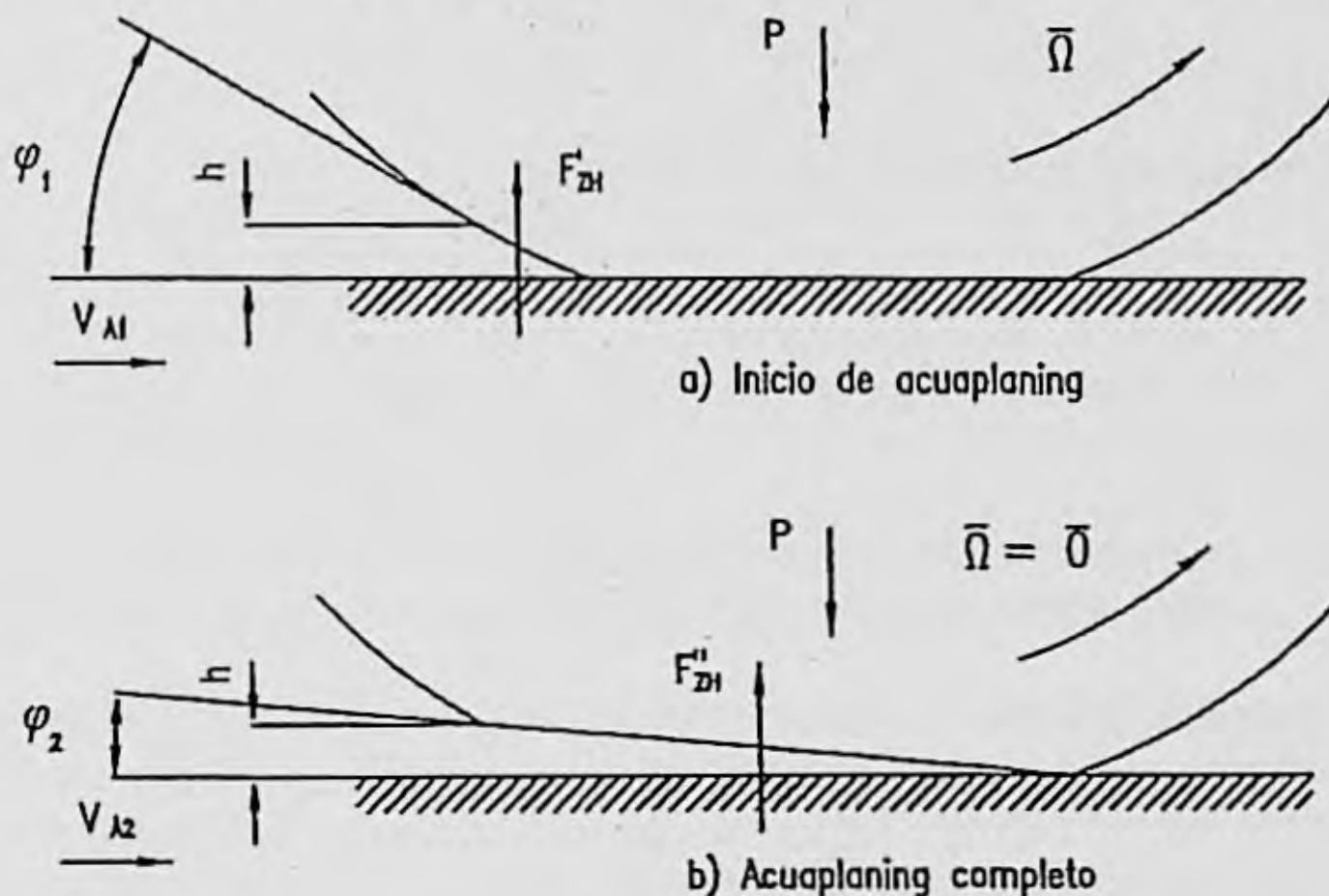


Figura 2.34. Hidroplaneo parcial (a) y completo (b).

Sustituyendo la ecuación (7) en (11) y sustituyendo V_{A1} por V_{A2} :

$$F_{ZH} = \rho V_{A2}^2 h \cot \varphi b_c \quad 2.12$$

Esta expresión anterior y la (2.10), permiten analizar algunos factores de interés:

- A carga constante, al disminuir la presión de inflado, disminuye φ , y si los demás parámetros permanecen constantes, la velocidad de V_{A2} disminuye.
- Al variar el espesor de la carga de agua (h), F_{ZH} varía en el mismo sentido que éste, a igualdad de los demás factores. Para diferentes valores de h , puede obtenerse un valor constante de F_{ZH} con diferentes estados de desarrollo de la cuña fluida, esto puede verse en la figura 2.35, puntos a y b. Aunque los neumáticos, presentan velocidades de acuaplaning análogas para diferentes espesores de agua, la rapidez con que éste fenómeno se desarrolla, es mayor a medida que aumenta h .

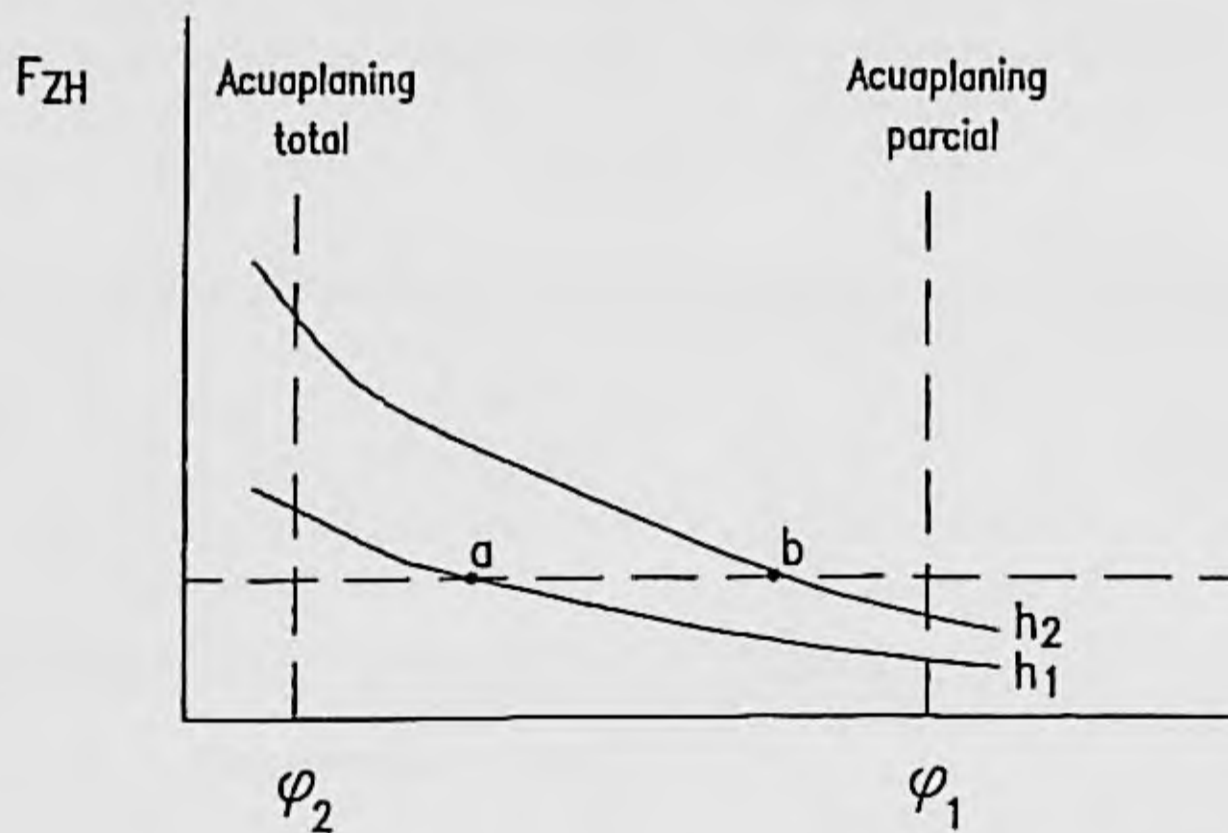


Figura 2.35. Fuerza hidrodinámica de sustentación en función del ángulo de la cuña fluida y del espesor de agua. ($h_2 > h_1$).

En el análisis anterior no ha sido tenido en cuenta la textura de la superficie de la calzada. El estudio realizado para la determinación de V_{A1} resulta independiente de las rugosidades de la pista de rodadura. En condiciones de acuaplaning, la textura superficial tiene influencia sobre la presión de la cuña fluida, especialmente en la parte posterior de la huella de contacto. Los resultados de la ecuación (2.10) solo pueden considerarse como aproximados, ya que diferentes neumáticos pueden presentar distintas resistencias a la deformación debido a la

estructura y materiales de su carcasa y cinturón.

Hemos considerado, en todo este apartado, que la superficie de rodadura estaba cubierta por una capa considerable de agua (espesor superior en 2 mm). Cuando la capa de agua es más delgada, o la superficie está simplemente húmeda, se produce contacto fluido y seco, y el comportamiento del neumático difiere del señalado aquí. Un estudio detallado de estas condiciones puede encontrarse en la referencia [9], aunque no existe ninguna teoría de aceptación general. En la figura 2.36, se indica la variación de adherencia del neumático con la calzada, en función de la velocidad y de la profundidad del dibujo. Como puede observarse, μ_x decrece rápidamente para profundidades inferiores a 2 mm.

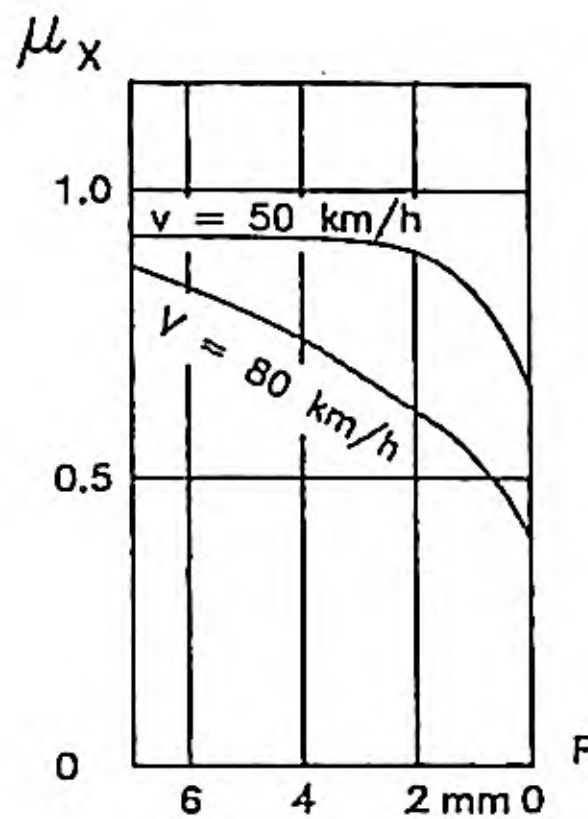


Figura 2.36. Variación de la adherencia del neumático con la calzada en función de la profundidad del dibujo.

En cuanto a los efectos del acuaplaning, el más importante es la reducción del coeficiente de adherencia entre neumático y suelo. Esta reducción afecta al frenado, tracción, control direccional y estabilidad direccional. En la figura 2.37 puede verse la drástica reducción de la fuerza transversal de adherencia en un neumático de turismo, en función de la velocidad, para dos valores del espesor de agua y sobre dos superficies distintas.

Puede señalarse, entre otras diferencias, que la influencia del grabado de la banda de rodamiento y la textura superficial, es grande cuando el espesor de la capa de agua es pequeño, no así cuando dicho espesor aumenta considerablemente.

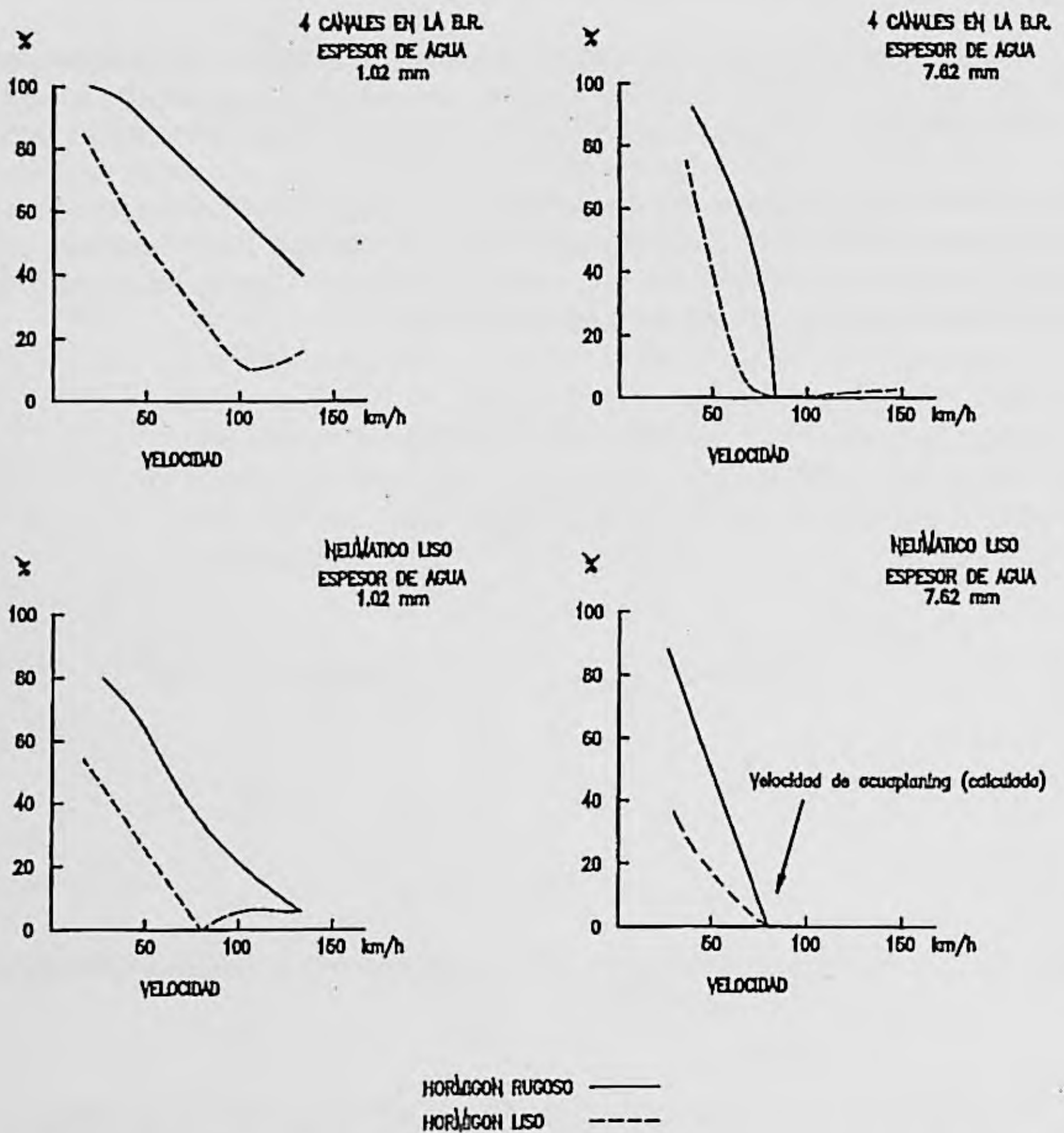


Figura 2.37. Variación de la fuerza de adherencia transversal con la velocidad en diferentes condiciones.

2.4. ESFUERZOS TRANSVERSALES SOBRE EL NEUMÁTICO. DERIVA.

Si un neumático rueda sometido exclusivamente a fuerzas verticales (carga) y longitudinales (tracción o frenado), la dirección del movimiento coincide con el eje X (figura 2.38), contenido en el plano medio de la rueda. Cuando además de estas fuerzas, actúa una fuerza lateral (F_1) en dirección perpendicular al referido plano de la rueda, debido a la

aceleración centrífuga en curvas o al empuje del aire, el movimiento real del neumático respecto al suelo, se produce siguiendo una trayectoria que forma un ángulo α con el plano de la rueda (figura 2.38) que se denomina ángulo de deriva¹

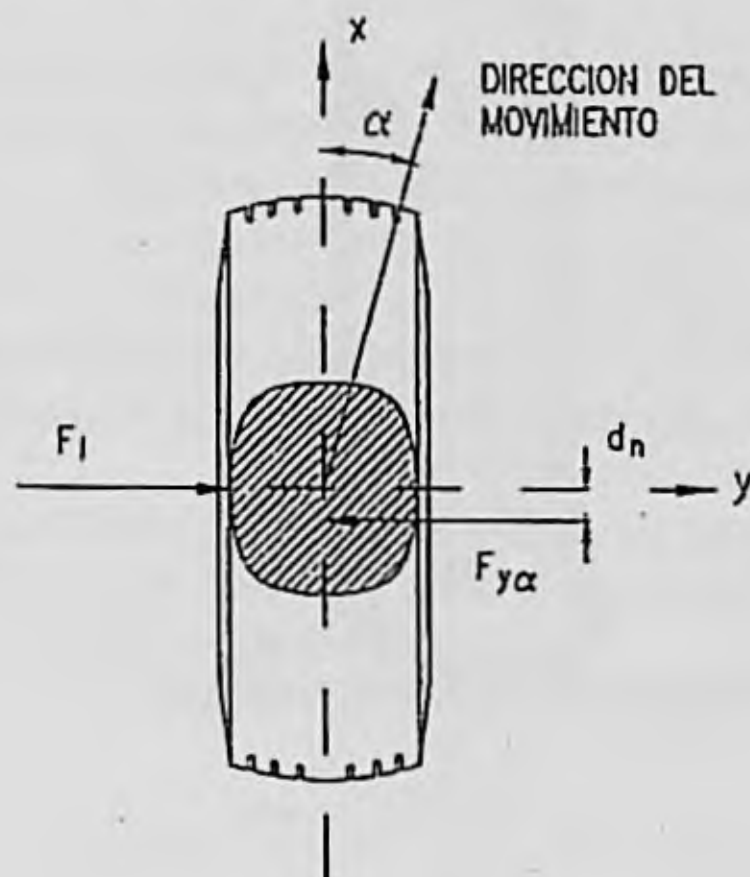


Figura 2.38. Esquema del comportamiento del neumático sometido a esfuerzos laterales.

El comportamiento del neumático puede explicarse de la siguiente forma [14]. Las fuerzas F_1 (aplicada al eje de la rueda) y $F_{y\alpha}$ (en la zona de contacto de la banda de rodamiento con el suelo) producen la deformación transversal del neumático, como se indica en la figura 2.39. Esta deformación afecta en parte a la carcasa y en parte a la banda de rodamiento, y dependerá de la rigidez de una y otra. Al rodar el neumático en estas condiciones, un punto de su periferia se desplazará ligeramente de su posición indeformada, a medida que se acerca a la zona de contacto Z_1 . Este desplazamiento se debe a la deformación de la carcasa, exclusivamente. Cuando siguiendo el movimiento de rotación de la rueda, penetra en la zona de contacto (posición M_1), seguirá desplazándose transversalmente por la deformación de la carcasa, banda de rodamiento y un pequeño deslizamiento, hasta que alcanza una posición M_2 , en el borde de la zona Z_2 . En esta zona la presión neumático-suelo es suficiente para evitar todo deslizamiento. Durante su movimiento a través de la zona Z_2 , la adherencia le impone una trayectoria recta $M_2 - M'_2$, que forma con el plano de la rueda un ángulo α . Al abandonar la zona 2 se produce nuevamente deslizamiento, en sentido opuesto, dentro de la zona 1 y

(1) Es frecuente que el ángulo α sea denominado ángulo de deslizamiento (slip angle), aunque tal denominación puede considerarse incorrecta si se tiene en cuenta que para las aceleraciones transversales usuales, no se produce prácticamente deslizamiento entre el neumático y la calzada.

posteriormente continua su desplazamiento, fuera de la zona de contacto, hasta volver a la posición no deformada que le corresponde en el neumático.

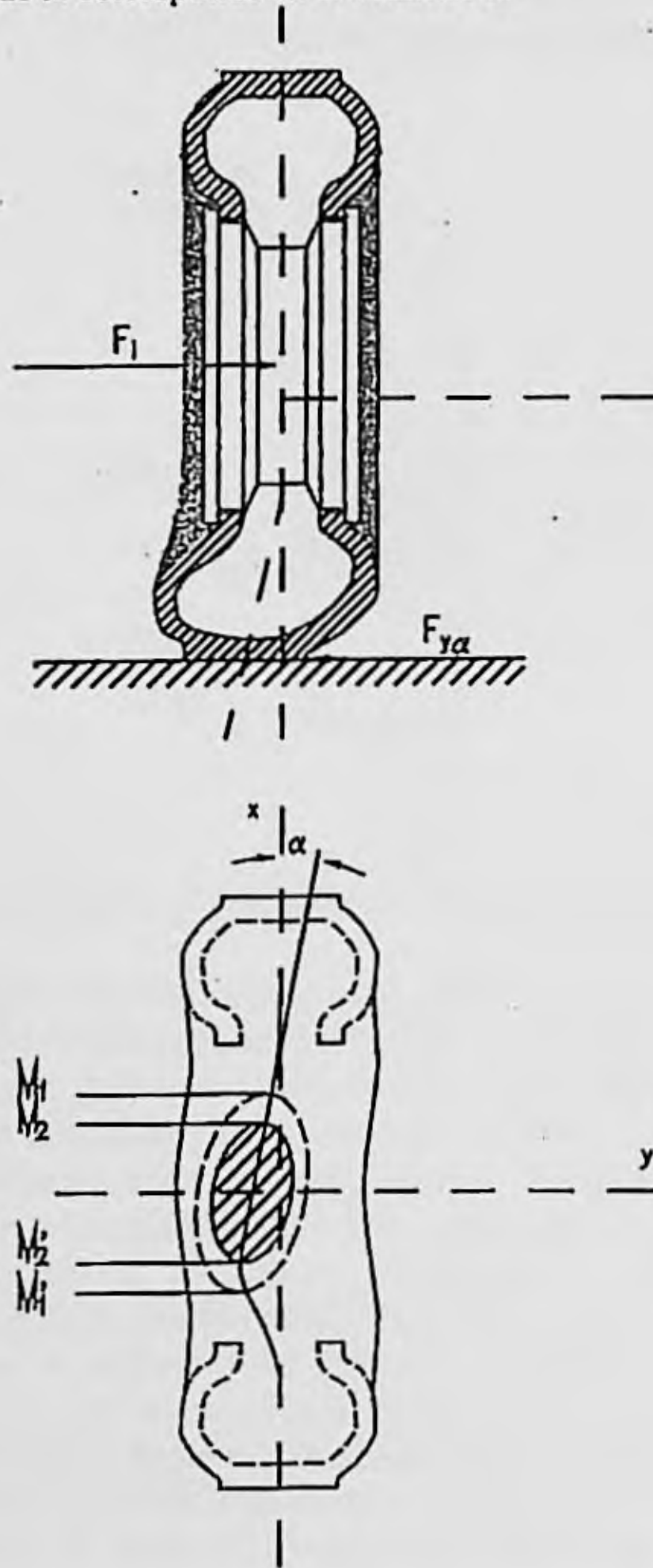


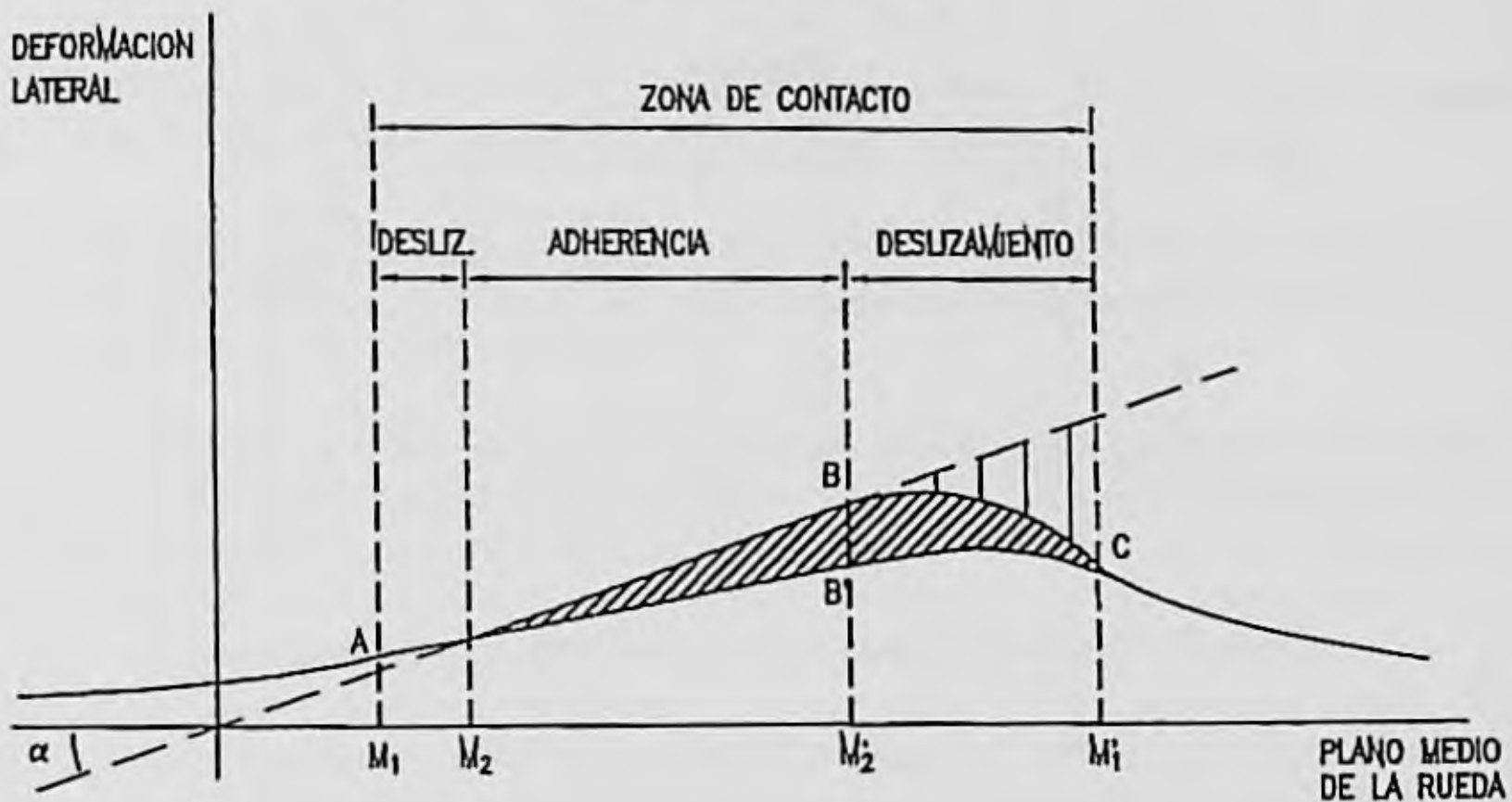
Figura 2.39. Deformación transversal del neumático bajo la influencia de una fuerza transversal

Para valores pequeños del ángulo de deriva se produce un deslizamiento prácticamente despreciable y el segmento recto $M_2 - M'_2$ se extiende a toda la zona de

contacto. A medida que aumenta el ángulo de deriva, se incrementa el deslizamiento, siendo éste mucho más acentuado en la parte posterior de la huella de contacto. En el borde anterior, el deslizamiento es muy pequeño, debido, en parte, a la mayor presión normal en la mitad delantera. Figura 2.40.

En la huella de contacto neumático-suelo se genera una fuerza transversal $F_{Y\alpha}$ igual y opuesta a F_l aunque no colineal con la proyección de ésta sobre el plano de rodadura, (figura 2.38). Para ángulos de deriva pequeños, esta fuerza actúa retrasada respecto a F_l en la dirección OX, una distancia d_n denominada avance del neumático. El producto d_n por $F_{Y\alpha}$ es el valor de un momento respecto al eje vertical, que tiende a alinear el plano de la rueda con la dirección del movimiento, ayudando a las ruedas a volver a su posición original, al terminar de recorrer una curva. Este momento se denomina autoalineante ($M_{Z\alpha}$).

Este fenómeno, denominado de deriva, es uno de los factores fundamentales en el control direccional y estabilidad de los vehículos automóviles, siendo de especial importancia la relación entre la fuerza transversal y el ángulo de deriva.



- A B C Línea ecuatorial deformada del neumático.
- M_1A . Deformación lateral en el punto inicial de contacto, debido a la deformación de la carcasa.
- M_2B Deformación total en el límite de la zona de adherencia.
- B B' Deformación de la banda de rodadura.
- M_2B' Deformación de la carcasa.

Figura 2.40. Deformación y deslizamiento lateral en la huella de contacto neumático-suelo.

2.4.1. Variación de la fuerza transversal de contacto con el ángulo de deriva.

La relación entre la fuerza transversal desarrollada en la huella de contacto del neumático con el suelo y el ángulo de deriva, ha sido ampliamente investigada. En la figura 2.41 se representa la variación de $F_{Y\alpha}$ con α , de dos neumáticos equivalentes, uno radial y otro diagonal.

La relación $F_{Y\alpha}(\alpha)$ define las propiedades de un neumático, bajo condiciones operativas específicas (presión de inflado y carga normal), y pueden variar ampliamente de unos neumáticos a otros, en función de su estructura y demás características constructivas.

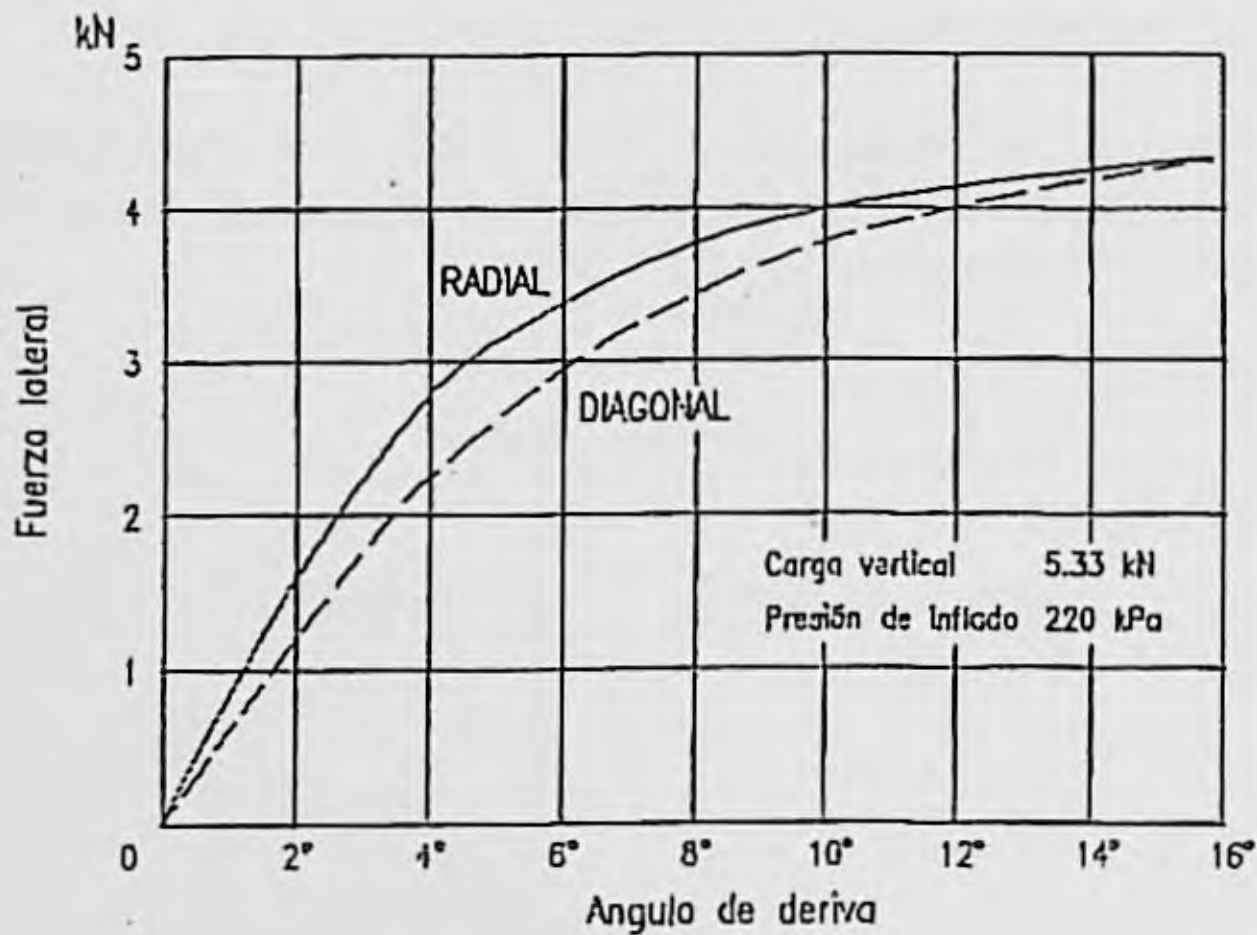


Figura 2.41. Fuerza transversal en función del ángulo de deriva.

Para valores pequeños del ángulo de deriva ($\alpha < 4$ ó 5°), la relación $F_{Y\alpha}(\alpha)$ es prácticamente lineal. Corresponde a aceleraciones laterales menores de $0.3 g$, y es despreciable el deslizamiento lateral neumático-suelo en esta zona. A medida que se incrementa la fuerza lateral que actúa sobre la rueda, aumenta el deslizamiento lateral y decrece rápidamente la pendiente de la curva $F_{Y\alpha}(\alpha)$. La fuerza transversal sigue creciendo con α hasta alcanzar el límite de la adherencia disponible en esta dirección, produciendo el derrape de la rueda.

Rigidez de deriva (K_d)

Se define por la derivada de la fuerza transversal con respecto al ángulo de deriva, considerando nula la influencia del ángulo de caída de la rueda. Normalmente se considera el valor correspondiente a $\alpha = 0$, es decir:

$$K_{\alpha} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \quad 2.13$$

Este valor representa bien el comportamiento del neumático en la zona correspondiente a pequeños valores de α y, en consecuencia, en el intervalo usual de las condiciones operativas.

2.4.2. Factores que afectan al comportamiento transversal del neumático.

Los principales son:

- Características estructurales y geométricas del neumático.
- Carga normal.
- Presión de inflado.
- Fuerza longitudinal.
- Angulo de caída.

Analizaremos, a continuación, la influencia de estos factores sobre el ángulo de deriva y la fuerza transversal y, posteriormente, sobre el momento autoalineante.

Las características del neumático que más afectan al comportamiento transversal son las correspondientes al diseño y construcción de la carcasa y cinturón, en su caso, y el tamaño y la forma de la sección transversal.

En general, la deformación de la carcasa del neumático diagonal es mucho más localizada que en un neumático radial; la mayor rigidez de la banda de rodadura de este último hace que los esfuerzos transversales, transmitidos a la carcasa, se distribuyan a lo largo de una mayor longitud de ésta. Como consecuencia de lo anterior, cabe esperar que los neumáticos diagonales sean más flexibles que los radiales y entre los de este tipo, los de cinturón semirrígido (textil) más flexibles, a su vez, que los de cinturón de acero. (Figura 2.41). Sin embargo, aunque en general lo anterior es cierto, no debe pensarse que la estructura radial, por sí sola, asegura una mayor rigidez de deriva al neumático, esta propiedad está altamente influenciada por los materiales y demás características de construcción, pudiendo suceder que algunos neumáticos diagonales presenten mayor rigidez de deriva que otros equivalentes radiales.

El ancho de sección y la relación nominal de aspecto influyen en el comportamiento lateral del neumático. Considerando una sección transversal, al actuar una fuerza lateral F_l , se produce una deformación, ocasionada por la acción de esta fuerza y la de reacción con el suelo $F_{Y\alpha}$. Desde la llanta al suelo, a través de la carcasa, se transmiten los esfuerzos como se indica en la figura 2.42 (b).

T y t son las tensiones, por unidad de longitud, que actúan sobre la carcasa, en los bordes de la zona de contacto con el suelo. Estas tensiones son las resultantes de considerar

las correspondientes a los cables, como consecuencia de la presión de inflado y las de compresión debidas a la carga sobre el neumático [7] [14].

Considerando la sección producida por un plano paralelo a la superficie de contacto, que pasa por los puntos de aplicación de T y t , la curvatura del neumático en ambos lados puede considerarse igual y de valor $1/\rho$. Los radios de curvatura de la sección transversal en los puntos indicados son R y r , como se indica en la figura 2.42, siendo los valores de éstos mucho menor que el de ρ .

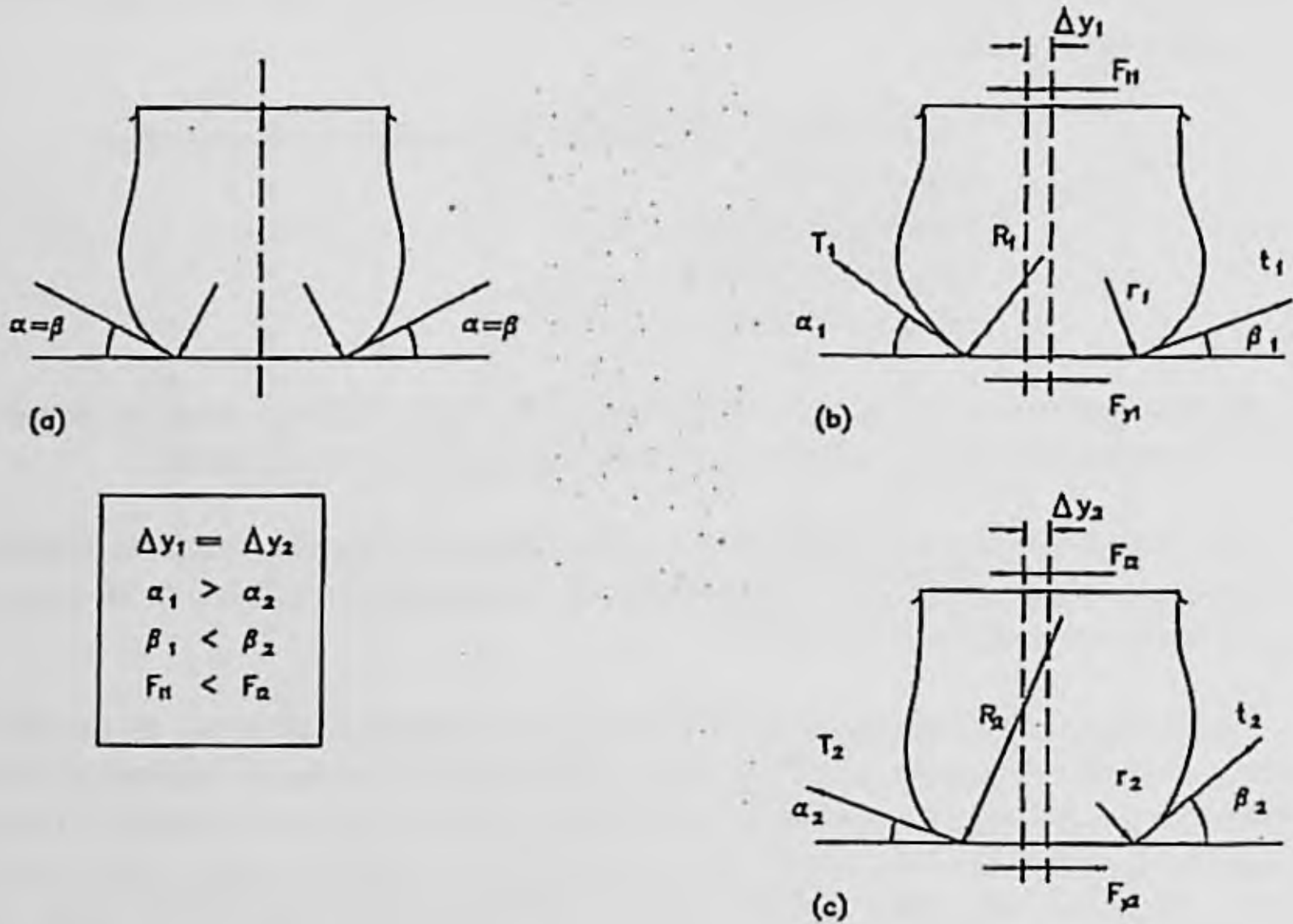


Figura 2.42. Deformación transversal del neumático bajo la influencia de un esfuerzo transversal.

Aplicando la ecuación de Laplace, a un elemento de la carcasa, en el borde de la zona de contacto:

$$\frac{T}{R} + \frac{T'}{\rho} = \frac{t}{r} + \frac{t'}{\rho} = p_i \quad 2.14$$

T y t' son las tensiones, por unidad de longitud, perpendiculares a T y t respectivamente y p_i es la presión de inflado.

Considerando despreciable $\frac{T'}{\rho}$ y $\frac{t'}{\rho}$ en relación a T/R y t/r , respectivamente:

$$p_i \approx \frac{T}{R} = \frac{t}{r} \quad 2.15$$

Por otra parte, y siendo l_c la longitud de la huella de contacto.

$$F_l \approx l_c (T \cos \alpha - t \cos \beta) = l_c p_i (R \cos \alpha - r \cos \beta) \quad 2.16$$

De la anterior expresión pueden extraerse algunas conclusiones relacionadas con el fenómeno de deriva y las características geométricas de los neumáticos.

En relación con el ancho de la sección b_n , si ésta se incrementa, a igualdad de las demás características, se necesita una presión de inflado menor para soportar la misma carga vertical, debiendo aumentar la deformación correspondiente a la fuerza lateral. En consecuencia, neumáticos más anchos, con menor presión de inflado, tienen peor comportamiento a la deriva.

La relación nominal de aspecto tiene también influencia en el comportamiento transversal del neumático. Cuando ésta es baja (neumático de gran anchura respecto a su altura, (figura 2.42c), un mismo desplazamiento transversal hace aumentar más R y disminuir r , con lo que el valor de F_l es mayor. Análogamente, si consideramos un valor constante de F_l la deformación lateral en un neumático de baja relación nominal de aspecto, será menor que en otro equivalente en que esta relación sea mayor. En consecuencia, su rigidez transversal será más alta y mejorará su respuesta en curva.

La carga normal que actúa sobre el neumático afecta de manera importante a sus características de deriva. La consideración de este parámetro adquiere mayor importancia, en el estudio de la estabilidad y control de la trayectoria del vehículo, si se tiene en cuenta el efecto de transferencia de carga de unas ruedas a otras, tanto durante la circulación en curva o bajo los efectos de otras acciones laterales, como en los períodos de aceleración y frenado. En general, la fuerza de deriva aumenta con la carga normal, para un valor constante del ángulo de deriva. (Figura 2.43). No obstante lo anterior, la capacidad relativa para soportar esfuerzo lateral disminuye al aumentar la carga, este efecto puede evaluarse mediante el coeficiente de deriva (C_α) que se define por la siguiente relación:

$$C_\alpha = \frac{K_\alpha}{F_z} \quad 2.17$$

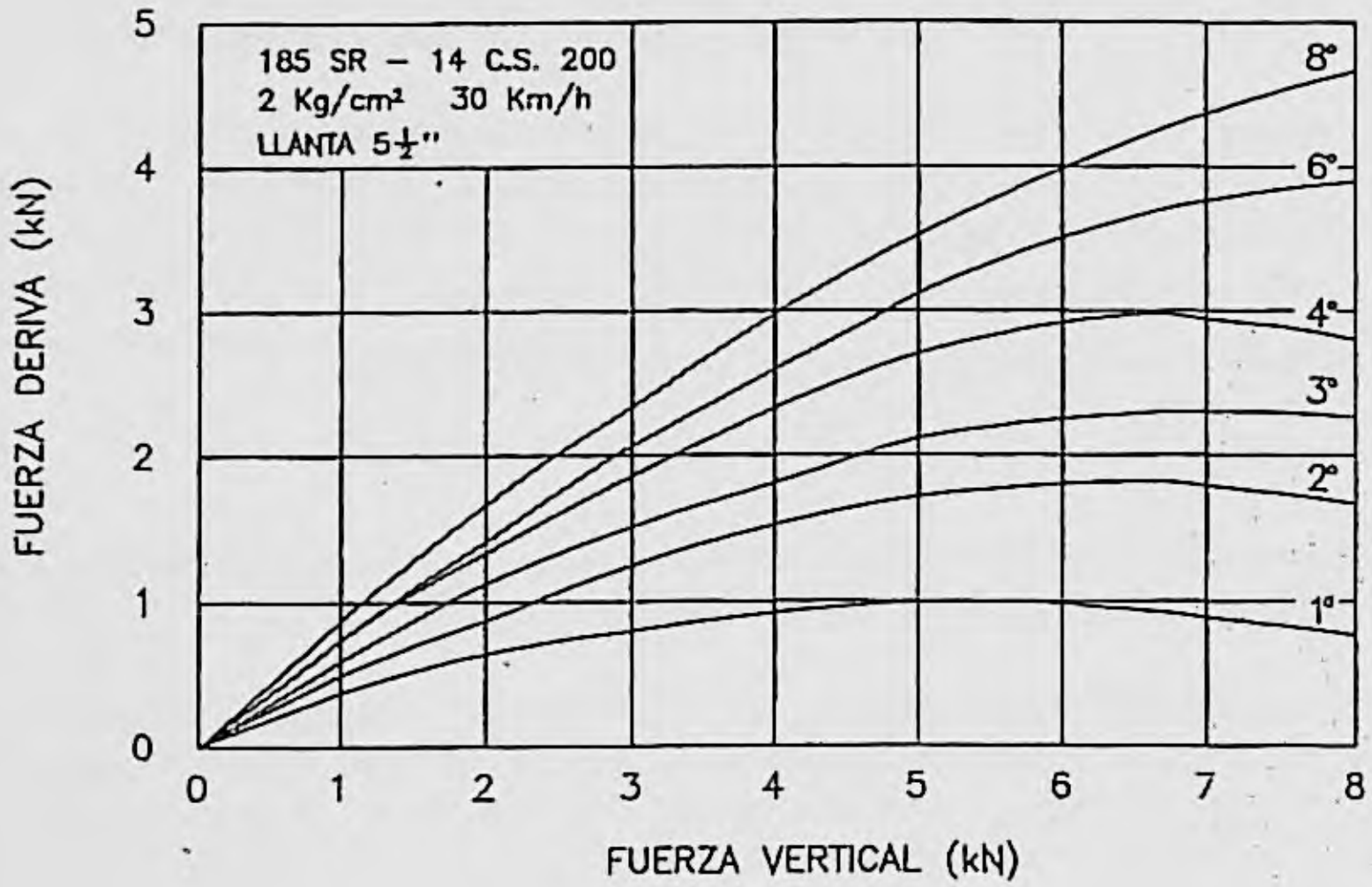


Figura 2.43. Efecto de la carga normal sobre la fuerza de deriva.

La variación de C_{α} con F_z se presenta en la figura 2.44.

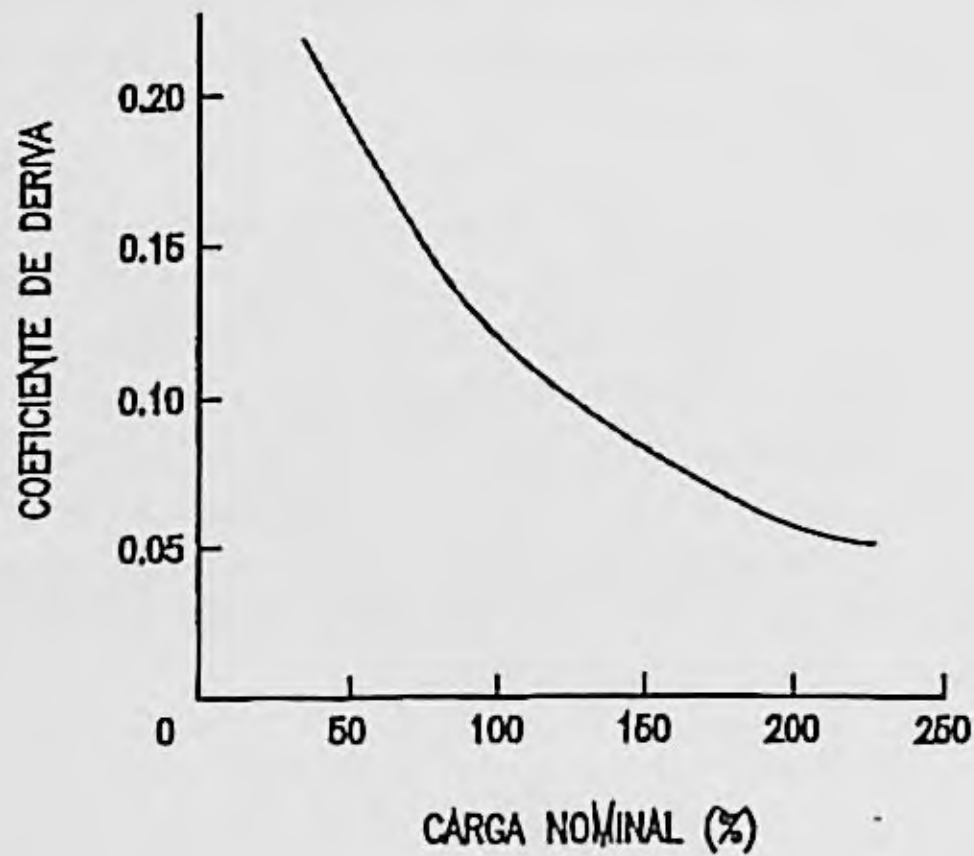


Figura 2.44. Variación del coeficiente de deriva con la carga normal.

La transferencia de carga entre ruedas, afecta, como antes se ha dicho, a la rigidez de deriva de los neumáticos de un vehículo. En particular, la existencia de un momento de vuelco produce transferencia de carga de una rueda a la otra de un mismo eje; si dicho momento de vuelco es debido a la aceleración centrífuga, la carga transferida de la rueda interior a la exterior dependerá de la altura del centro de gravedad y de la vía¹ del vehículo. El efecto de la transferencia de carga sobre la pareja de neumático de un mismo eje puede verse en la figura 2.45, en ella se representan dos curvas de variación de la fuerza de deriva con la carga normal, para dos neumáticos: radial y diagonal. Si se supone que la carga sobre cada neumático es F_z , en ausencia de momento de vuelco u otras acciones, la fuerza de deriva desarrollada por ambas ruedas es $2F_{y\alpha}$. Al producirse transferencia de carga, la rueda interior soportará una carga $F_{zi} < F_z$ y la exterior $F_{ze} > F_z$. Suponiendo que ambas ruedas están rígidamente unidas al eje, ambas estarán obligadas a moverse con el mismo ángulo de deriva ($\alpha_i = \alpha_e$) y la fuerza transversal total desarrollada será $F_{y\alpha i} + F_{y\alpha e} < 2F_{y\alpha}$ como puede verse en la figura 2.45, es decir, la transferencia de carga entre las ruedas de un mismo eje disminuye la fuerza transversal desarrollada por el conjunto, para un valor determinado del ángulo de deriva. Por el contrario, el ángulo de deriva debe aumentar para proporcionar, en condiciones de transferencia de carga, la misma fuerza transversal que si dicha transferencia no se produjese. Este efecto, que supone una disminución de la rigidez de deriva del conjunto de las dos ruedas del eje, tiene importancia en el comportamiento direccional del vehículo cuando la aceleración lateral es elevada.

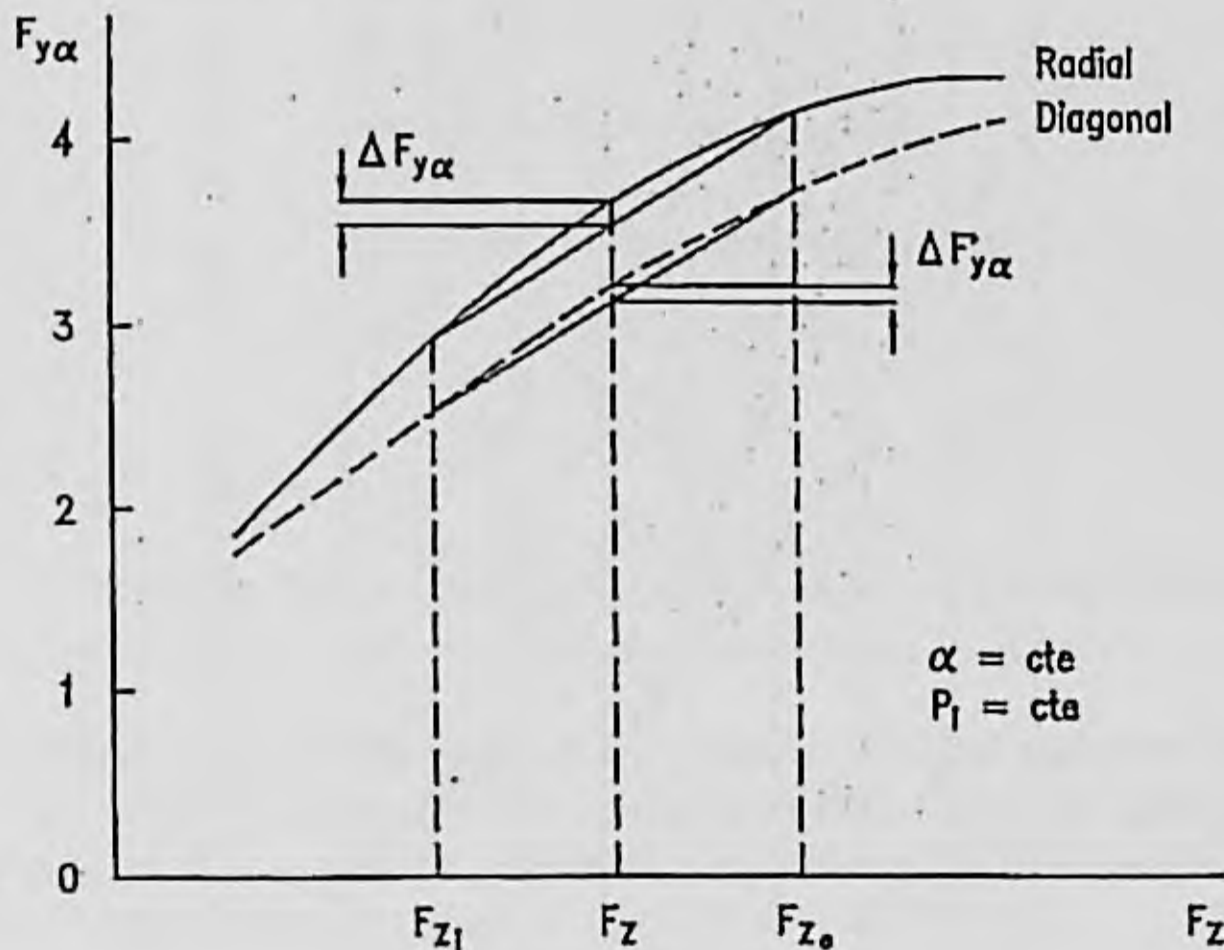


Figura 2.45. Efecto de la transferencia de carga, entre ruedas de un eje sobre la fuerza de deriva.

(1) Vía del vehículo es la distancia entre los planos medios de las ruedas de un mismo eje.

Los neumáticos radiales son, en general, más sensibles al efecto de transferencia de carga, como puede verse en la figura 2.45.

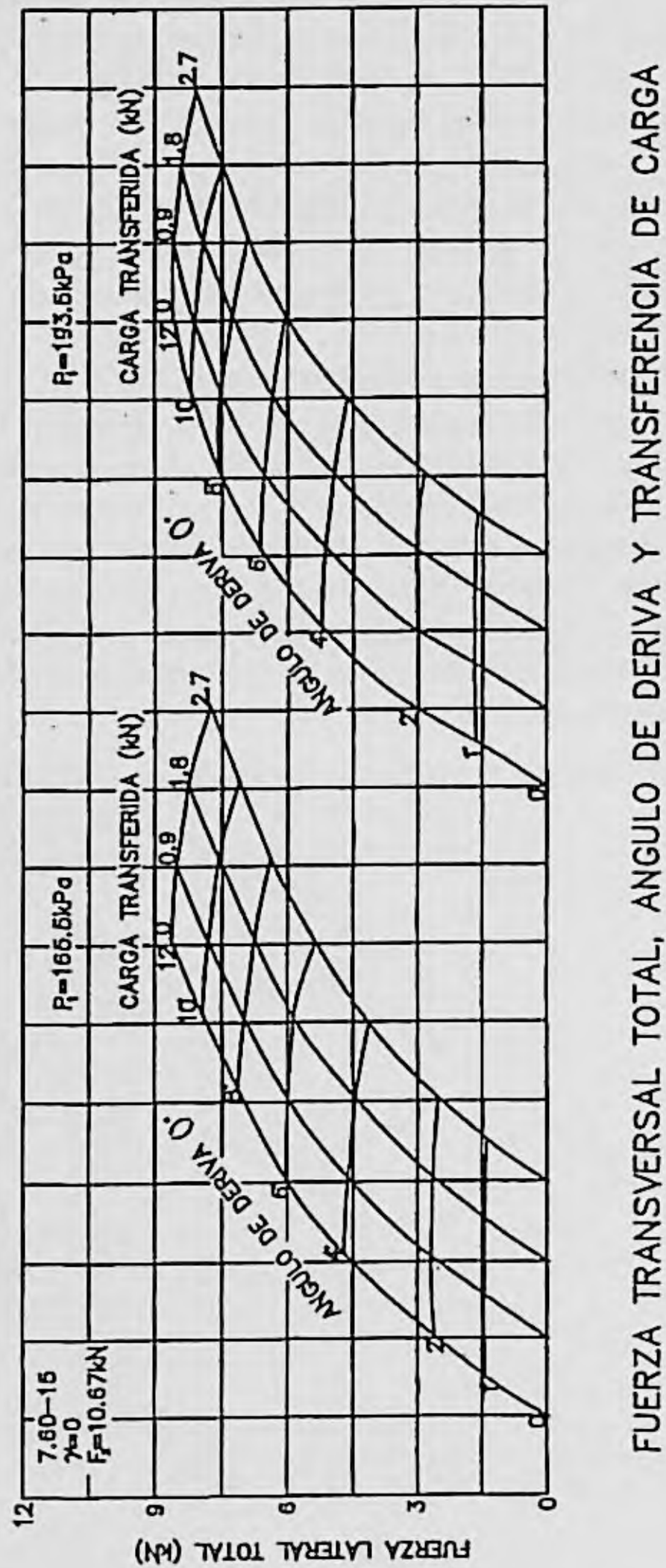


Figura 2.46. Fuerza transversal total, ángulo de deriva y transferencia de carga.

La presión de inflado tiene una influencia moderada en las propiedades de deriva de los neumáticos, especialmente dentro de los márgenes usuales de aplicación. La rigidez de deriva aumenta con la presión de inflado, aunque su variación es pequeña, este efecto puede utilizarse para modificar las características direccionales del vehículo como se verá en el capítulo correspondiente. En la figura 2.46 se representa la variación de la fuerza transversal con el ángulo de deriva, en varias situaciones de transferencia de carga y para dos presiones de inflado diferentes. (Datos obtenidos en máquinas de ensayo de General Motors).

La figura 2.47 presenta los resultados de ensayos en neumáticos en máquina de tambor, obtenidos por H. SAKAI [13].

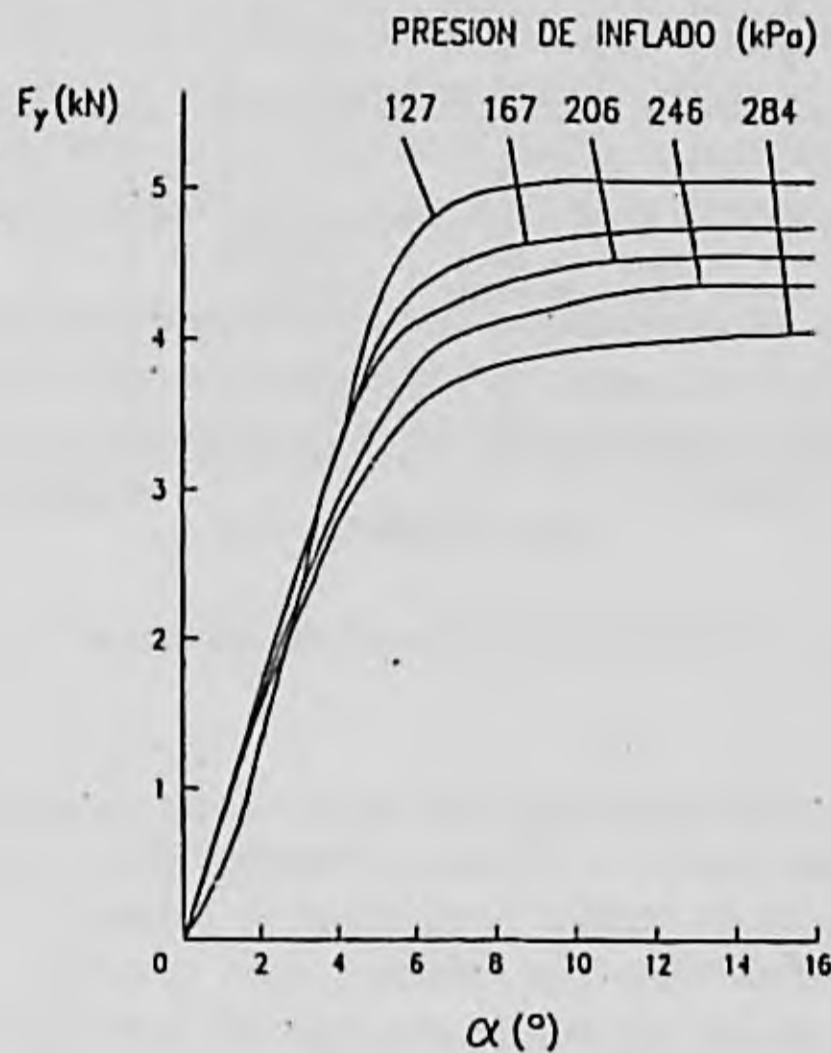


Figura 2.47. Influencia de la presión de inflado sobre el comportamiento lateral del neumático.

La velocidad tiene una influencia muy pequeña sobre el comportamiento lateral de los neumáticos, sin embargo, a medida que aumenta, se produce mayor generación de calor, debido a las pérdidas de energía por histéresis. El aumento de temperatura ocasiona un incremento de la presión del aire y, por tanto, de la rigidez de deriva.

La aplicación simultánea de esfuerzos longitudinales y transversales influye en el comportamiento lateral del neumático.

Para un ángulo de deriva constante, cuando aumenta considerablemente el esfuerzo longitudinal aplicado al neumático, disminuye el esfuerzo lateral que éste es capaz de desarrollar.

En la figura 2.48 se muestran curvas típicas de variación para dos valores del ángulo de deriva (4° y 8°). La causa principal de este efecto es la existencia de un límite para la adherencia total disponible; a medida que aumenta la sollicitación de adherencia en una dirección (X) disminuye la proporción disponible en la otra (Y).

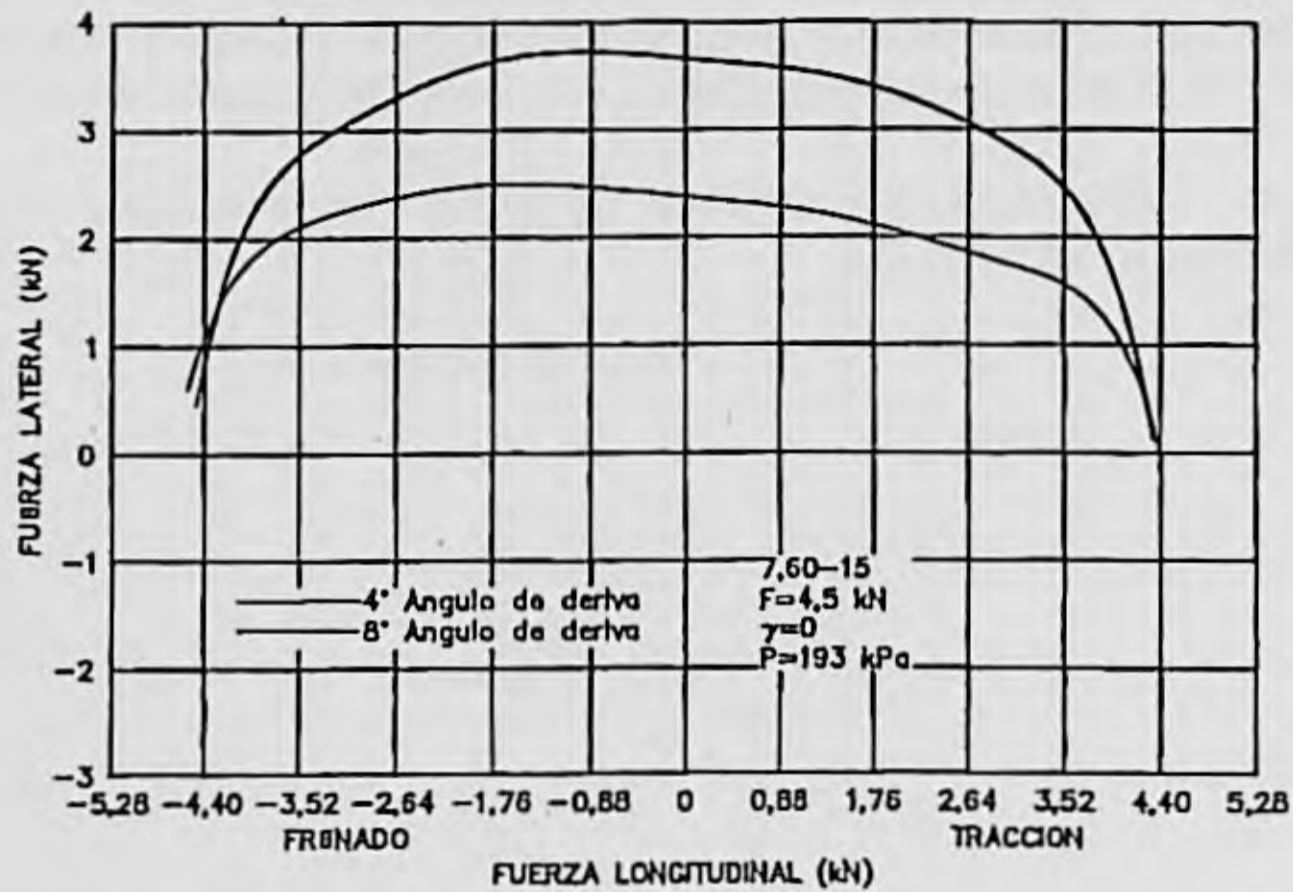


Figura 2.48. Variación de la fuerza lateral con los esfuerzos longitudinales de tracción y frenado.

En la figura 2.48 puede observarse que las curvas de variación de $F_{Y\alpha}$ con F_X no son simétricas respecto a la línea de $F_X = 0$. Tanto en frenado como en tracción, la fuerza lateral decrece rápidamente, cuando en sentido longitudinal se alcanzan valores de los esfuerzos próximos al límite de adherencia; sin embargo, para pequeños valores de la fuerza longitudinal, mientras en tracción se produce un progresivo decrecimiento de $F_{Y\alpha}$, en frenado se origina un aumento del valor de esta fuerza hasta alcanzar un máximo. Si la fuerza de frenado sigue aumentando, $F_{Y\alpha}$ disminuye en forma análoga al caso de tracción. Los neumáticos radiales tienen un comportamiento menos asimétrico que los diagonales.

Si sobre el neumático actúa una fuerza lateral constante, y se aplica un esfuerzo longitudinal, para pequeños valores de éste, la tracción hace aumentar el ángulo de deriva y el frenado lo disminuye, aunque moderadamente. Si el esfuerzo longitudinal aplicado es de un valor cercano al de la fuerza adherente disponible, el ángulo de deriva aumenta notablemente hasta la situación de deslizamiento total.

La asimetría antes indicada puede explicarse cualitativamente de la siguiente forma. La deriva causa mayor deformación transversal en la parte posterior de la zona de contacto que en la anterior. Los esfuerzos de frenado tienden a aumentar la presión normal en la zona posterior de la huella de contacto, y esto hace aumentar ligeramente la fuerza transversal a igual valor de α . La aplicación de un esfuerzo de tracción tiene efecto contrario.

2.4.3. Angulo de caída de la rueda (γ)

Todo lo indicado anteriormente, en relación con el comportamiento lateral del neumático, se ha hecho sin considerar la inclinación del plano medio de la rueda respecto de la normal a la superficie de rodadura, es decir, se ha considerado que $\gamma = 0$.

Cuando una rueda se mueve con un cierto ángulo de caída, se genera una fuerza transversal cuyo sentido queda definido por la posición del eje instantáneo vertical de rotación de la rueda inclinada, como se indica en la figura 2.49. La proyección sobre el plano $Z = 0$ de la circunferencia media exterior del neumático será un elipse cuyo eje menor aumentará con el ángulo de caída. (Figura 2.50). Cualquier punto de esta línea, al recorrer la huella de contacto está obligado a seguir una línea recta, generándose un empuje tangencial transversal F_{γ} del suelo sobre el neumático. Este empuje resultante, debido al ángulo de caída, tiene su línea de acción adelantada respecto al centro de la huella, lo que produce un momento que se sumará o restará al de autoalineación según la posición de la rueda y el signo de γ .

La fuerza transversal de caída es mucho más pequeña que la de deriva para un mismo valor de α y γ . En neumáticos diagonales la fuerza lateral correspondiente a $\alpha = 1^\circ$ es del mismo orden que el que corresponde a $\gamma \approx 6^\circ$ (lo usual es $\gamma \approx 1^\circ$). En neumáticos radiales esta diferencia se acentúa algo.

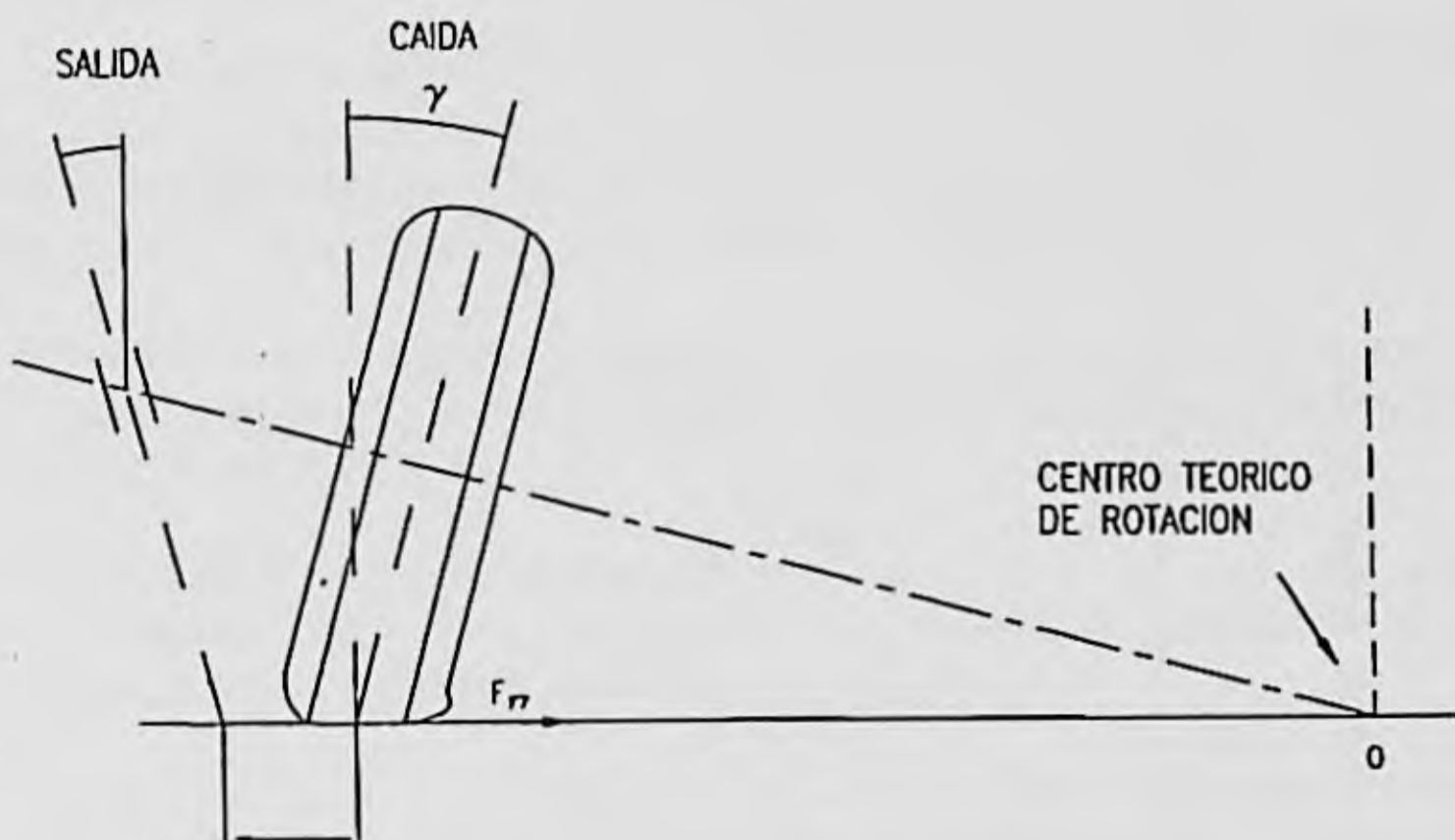


Figura 2.49. Angulo de caída y fuerza lateral.

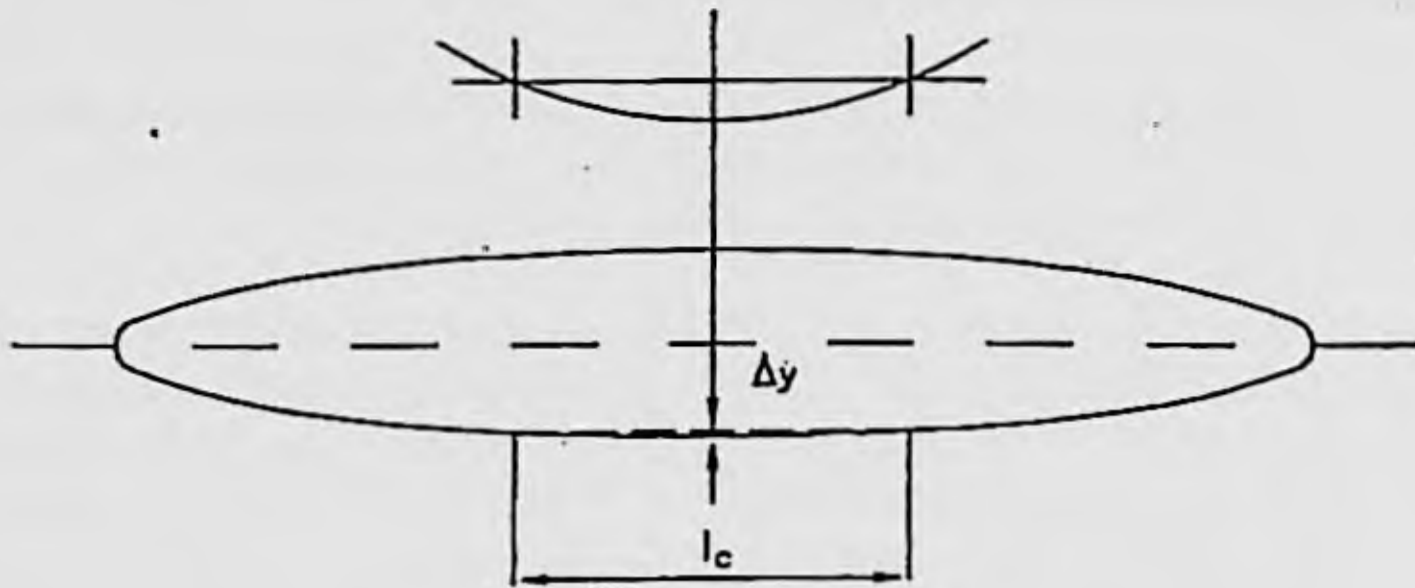


Figura 2.50. Deformación lateral de un neumático inclinado.

La relación entre la fuerza lateral F_Y y el ángulo de caída, considerando nulo el ángulo de deriva, se muestra en la figura 2.51. Los factores que influyen en el empuje debido a la inclinación de la rueda, son esencialmente los mismos que afectan a la relación fuerza transversal-ángulo de deriva, entre ellos, la presión de inflado y la carga normal. En lo que se refiere a la presión de inflado, ésta influye poco en la rigidez de caída de los neumáticos radiales. En cuanto a la carga normal, afecta apreciablemente a la fuerza transversal correspondiente a $\gamma = Cte$ como puede apreciarse en la figura 2.51.

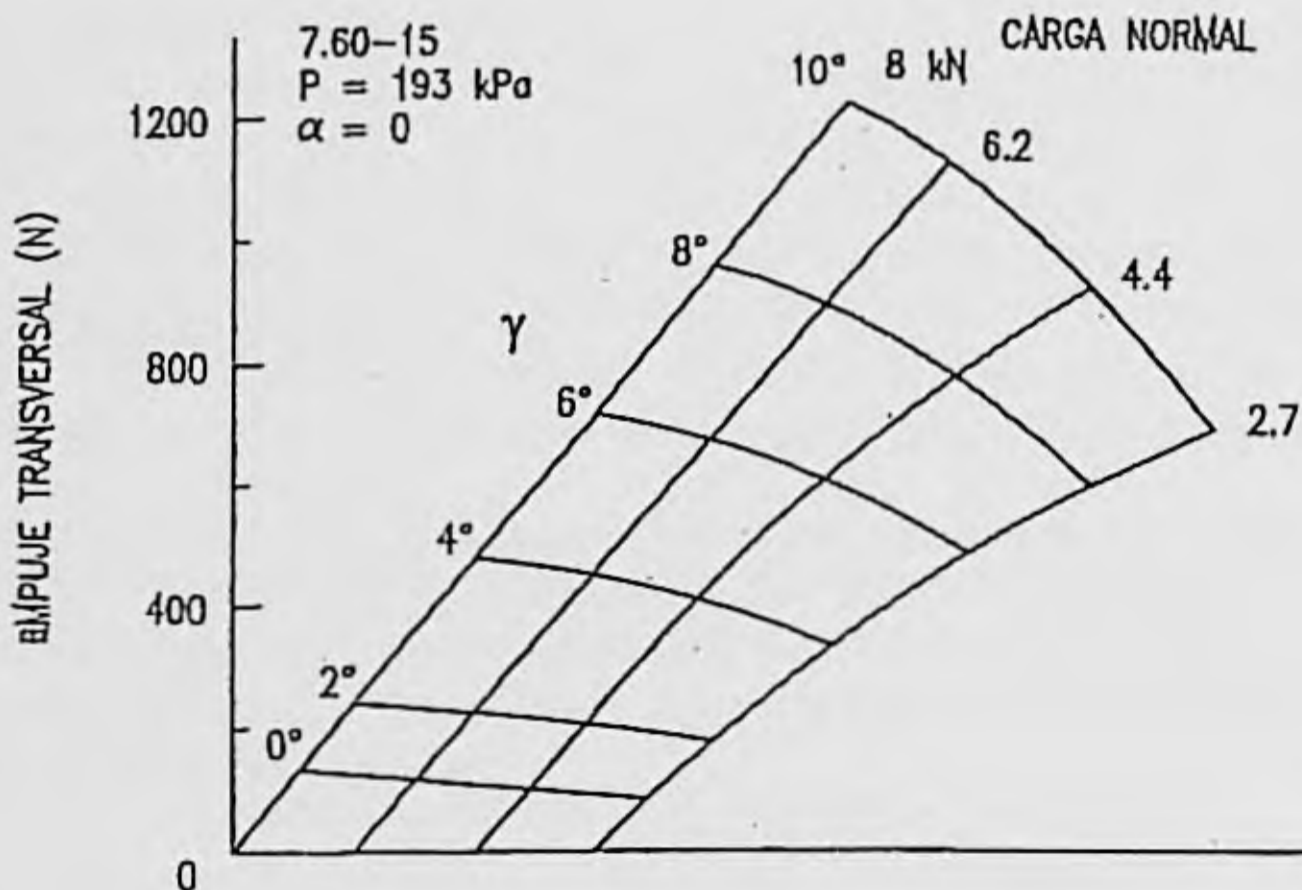


Figura 2.51. Variación del empuje transversal con el ángulo de caída, para varios valores de la carga normal.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Un parámetro utilizado para comparar las características de diferentes neumáticos en cuanto al ángulo de caída, es la rigidez de caída que se define como:

$$K_{\gamma} = \left(\frac{\partial F_{Y\gamma}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} \quad 2.18$$

la fuerza transversal total que actúa sobre una rueda con ángulo de caída no nulo es:

$$F_Y = F_{Y\alpha} \pm F_{Y\gamma} \quad 2.19$$

El signo dependerá de la coincidencia o no de los sentidos de $F_{Y\alpha}$ y $F_{Y\gamma}$ y ésta, a su vez, del sentido del empuje lateral que actúa sobre el vehículo y de la inclinación (positiva o negativa) de cada rueda.

Para valores pequeños de los ángulos de deriva y caída, las relaciones entre éstos y las correspondientes fuerzas transversales son lineales, pudiéndose expresar por:

$$F_Y = K_{\alpha} \alpha \pm K_{\gamma} \gamma \quad 2.20$$

2.4.4. Momento autoalineante

Como se indicó al principio, la fuerza transversal de contacto entre el neumático y el suelo, $F_{Y\alpha}$, actúa generalmente retrasada respecto al centro de la huella de contacto, una distancia que denominamos avance del neumático. El producto de esta distancia por la fuerza transversal ($d_n \times F_{Y\alpha}$) es el momento autoalineante M_Z .

El momento autoalineante es, en realidad, la suma de los momentos, respecto al eje Z de las fuerzas transversales de deriva y de caída; sin embargo, la primera de ellas tiene una mayor importancia que la segunda.

Todos los factores que afectan al valor de $F_{Y\alpha}$, y que han sido analizados anteriormente, influirán en el momento autoalineante. Así mismo, modificarán su valor, e incluso su signo, aquellos parámetros que afecten al valor de d_n .

Por ejemplo, al aumentar la carga normal sobre la rueda, o disminuir la presión de inflado, aumenta el tamaño de la huella de contacto y con ésta el avance del neumático y el momento autoalineante.

En la figura 2.52 puede verse la relación entre fuerza transversal y momento autoalineante para diferentes cargas normales, con expresión de la variación del ángulo de deriva. En esta figura se ha representado un haz de curvas que pasa por el origen de coordenadas y que corresponden a valores constantes del avance de neumático. Puede observarse, que para un valor constante de la carga normal, al aumentar la fuerza transversal,

aumenta el ángulo de deriva; como consecuencia de este aumento, se amplía la zona de deslizamiento en la parte posterior de la huella de contacto, disminuye el avance de neumático y se incrementa el momento autoalineante, alcanzando éste un valor máximo y disminuyendo posteriormente. Cuando sobrepasa un cierto valor, M_z puede cambiar de signo haciéndose negativo.

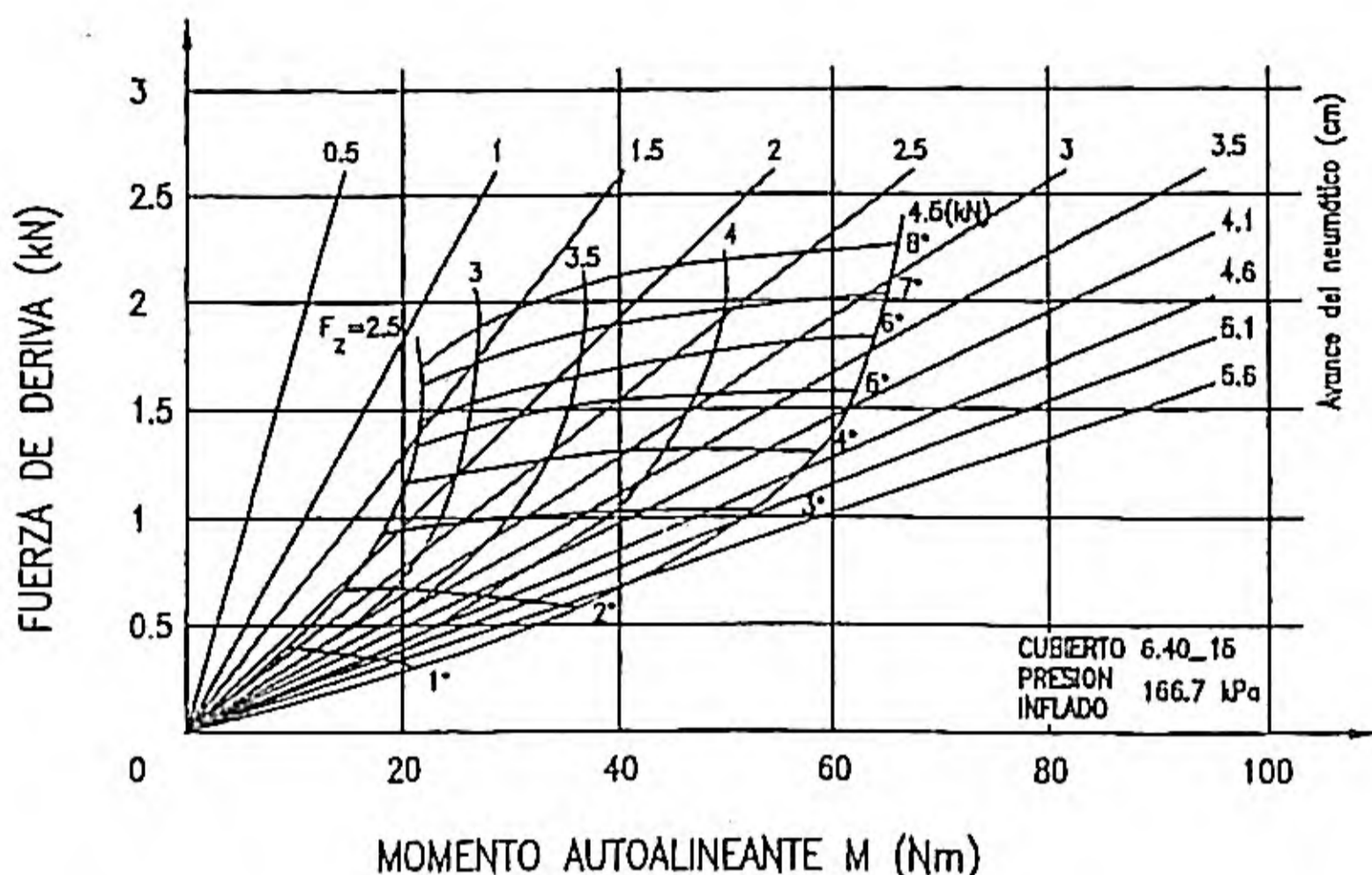


Figura 2.52. Variación del momento autoalineante con la fuerza transversal.

Un valor positivo del momento autoalineante, cuando α es también positivo, tiende a alinear el plano medio de la rueda, con la dirección del movimiento. Este efecto es deseable; origina un cierto momento resistente en el volante al circular en curva, y a la salida de ésta ayuda a disminuir el radio de giro de las ruedas. Un valor negativo del momento autoalineante originaría un efecto opuesto al descrito; tendería a aumentar el ángulo de giro de las ruedas, y reclamaría del conductor una acción sobre el volante, de sentido contrario al de la curva recorrida, existiendo el riesgo de inestabilidad direccional. Este efecto es sumamente indeseable.

Conviene señalar que el par necesario para modificar la orientación de las ruedas directrices, depende, no solo del momento autoalineante ocasionado por el avance de neumático, sino también del avance geométrico del pivote de la dirección.

La aplicación simultánea de esfuerzos longitudinales de tracción o frenado, afectan significativamente al valor del momento autoalineante (figura 2.53); como puede observarse en esta figura, la aplicación de un momento tractor, sobre la rueda, hace aumentar el

momento autoalineante hasta alcanzar éste un valor máximo, disminuyendo después si sigue aumentando dicho esfuerzo tractor. Los esfuerzos de frenado tienen un efecto contrario, pudiendo ocasionar el cambio de signo del momento autoalineante.

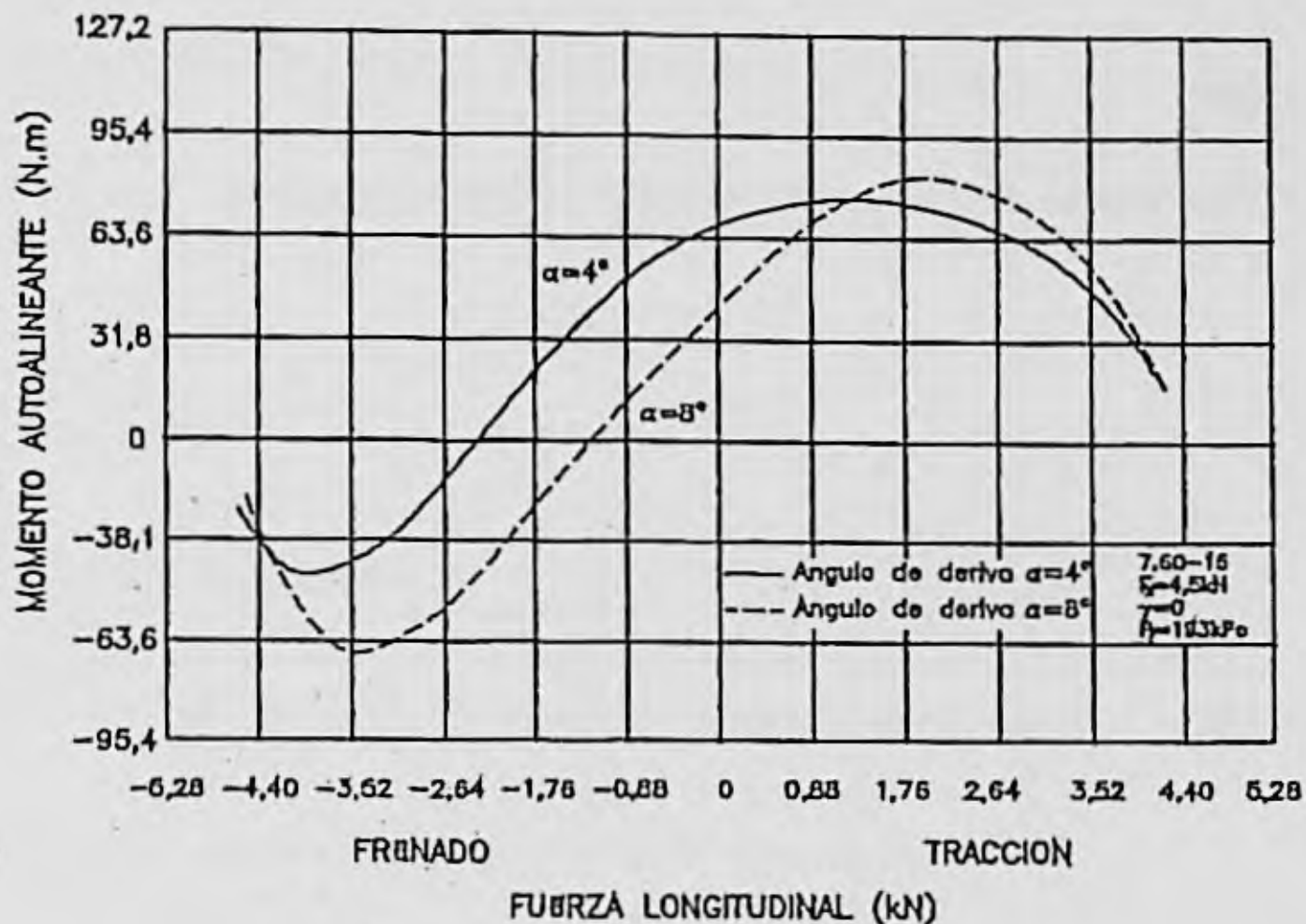


Figura 2.53. Variación del momento autoalineante con los esfuerzos longitudinales.

Ejercicio 2.1.

Un vehículo automóvil de 16,8 kN de peso está equipado con neumáticos de dimensiones 7,6-15. La presión de inflado de las ruedas delanteras es 193 kPa. La batalla¹ mide 275 cm y se sabe que el centro de gravedad se encuentra situado en un plano vertical transversal separado 128 cm del eje delantero. Suponiendo que el vehículo circula por una curva de 300 m de radio, determinar de forma aproximada:

- 1) Velocidad a la que el ángulo medio de deriva de las ruedas del eje delantero es igual a 4°. Se supone una transferencia de carga de 1 kN.
- 2) Valor máximo del par de frenado aplicable al vehículo en el eje delantero, manteniendo las condiciones anteriores en los neumáticos.
- 3) Valor del momento autoalineante bajo la acción simultánea de los esfuerzos

(1) La batalla es la distancia entre los ejes de un vehículo.

longitudinales y transversales determinados en los apartados anteriores.

Utilícense los valores expresados en las figuras 2.46, 2.48 y 2.53 considerando nulo el ángulo de caída.

SOLUCION:

Primeramente determinaremos el peso sobre el eje delantero.

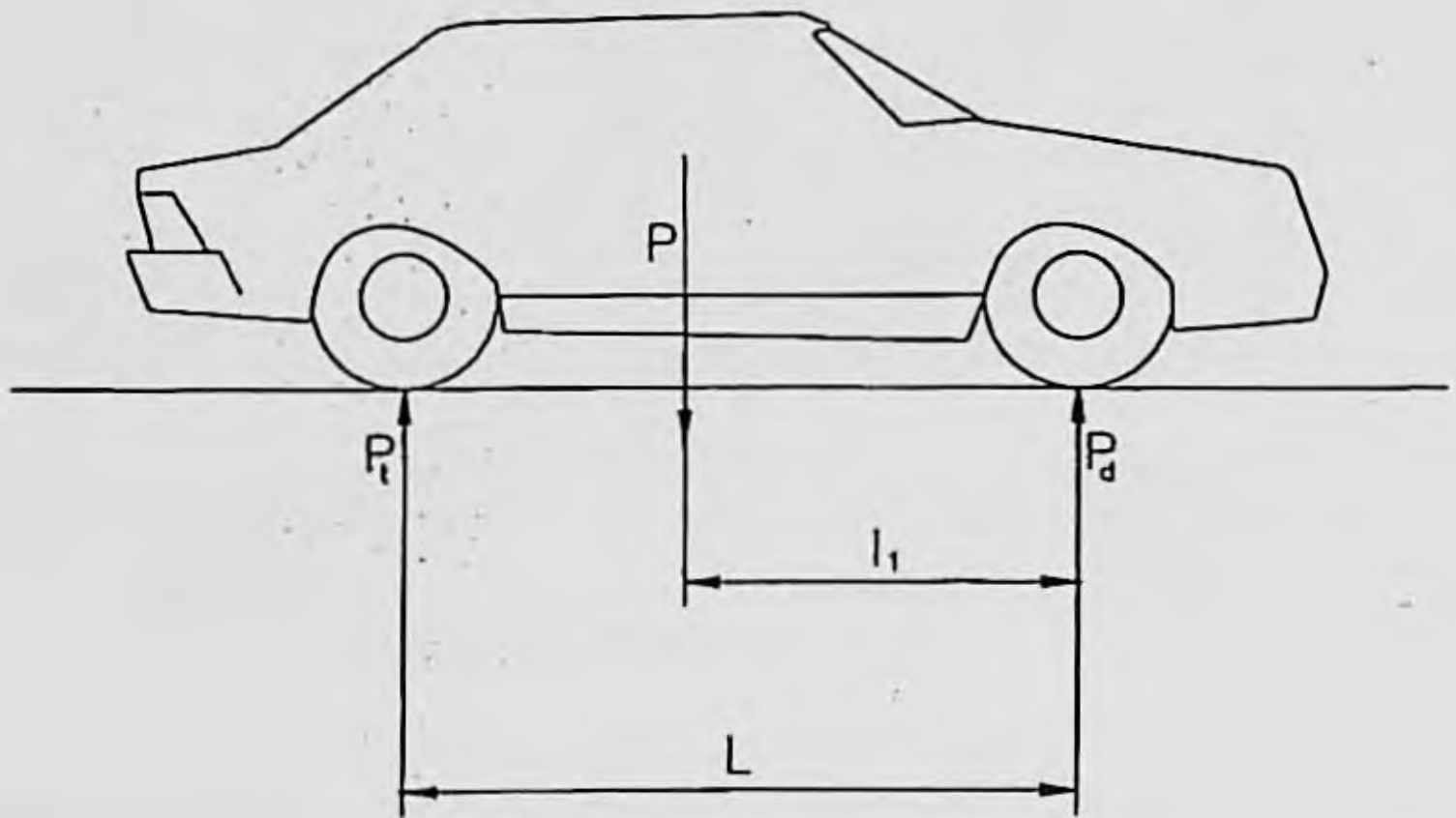


Figura 2.54. Reparto de pesos por eje.

como,

$$L = 275 \text{ cm} \quad l_1 = 128 \text{ cm} \quad \text{y} \quad P = 16,8 \text{ kN}$$

se obtiene:

$$P_d = P \frac{L - l_1}{L} = 8,98 \text{ kN}$$

De la figura 2.46 considerando $P_d = 10,67 \text{ kN}$, que la presión de inflado es 193 kPa y la transferencia de carga 1 kN y $\alpha = 4^\circ$:

$$F_{y\alpha d}^1 \approx 5 \text{ kN}$$

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Considerando una variación lineal de la fuerza transversal $F_{y\alpha d}$ con P_d ,

$$F_{y\alpha d} = \frac{8,98}{10,67} \cdot 5 = 4,21 \text{ kN}$$

El error cometido al considerar variación lineal es por defecto.

$$F_{y\alpha} = F_{y\alpha d} \frac{L}{L - l_1} = 7,88 \text{ kN}$$

como:

$$F_{y\alpha} = m \frac{v^2}{R}$$

se obtiene la velocidad del vehículo:

$$V = 37,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ es decir una velocidad de, aproximadamente } V \approx 134 \text{ km/h}$$

2) De la figura 2.48 y considerando para cada rueda delantera:

$$F_{y\alpha d}^l = 2,1 \text{ kN} \quad F_{x\alpha} = -3,6 \text{ kN}$$

El radio del neumático, es:

$$r = \frac{(7,6 \cdot 2 + 15) \cdot 25,4}{2} = 383,5 \text{ mm}$$

luego,

$$M_{fd}^l = 3,6 \cdot 383,5 \cdot 10^{-3} = 1,38 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

de lo que el par en el eje es:

$$M_{fd} \approx 2 \cdot 1,38 = 2,76 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

En realidad será algo menor puesto que el radio bajo carga es inferior a r .

3) De la figura 2.53, para $F_{x\alpha} = -3,6 \text{ kN}$, se obtiene que $M_{za} \approx -40 \text{ m}\cdot\text{N}$

2.5. MODELOS PARA SIMULAR LA INTERACCION NEUMATICO - SUPERFICIE DE RODADURA.

2.5.1. El modelo de Dugoff.

Cada día es más necesario simular el comportamiento de los vehículos mediante ordenador para, de esta forma, optimizar el diseño de sus diferentes sistemas. Puesto que un elemento principal para obtener resultados fiables es el neumático, éste debe ser simulado mediante modelos teóricos que, a pesar de sus simplificaciones, deben ajustarse al complejo comportamiento del mismo en marcha, de manera suficientemente precisa.

Uno de estos modelos es el de Dugoff, el cual contempla el comportamiento del neumático frente a esfuerzos longitudinales y laterales simultáneamente.

El desarrollo seguido está realizado a partir del análisis clásico para neumáticos en rodadura libre de Fiala y presenta, respecto a esta teoría, algunas simplificaciones.

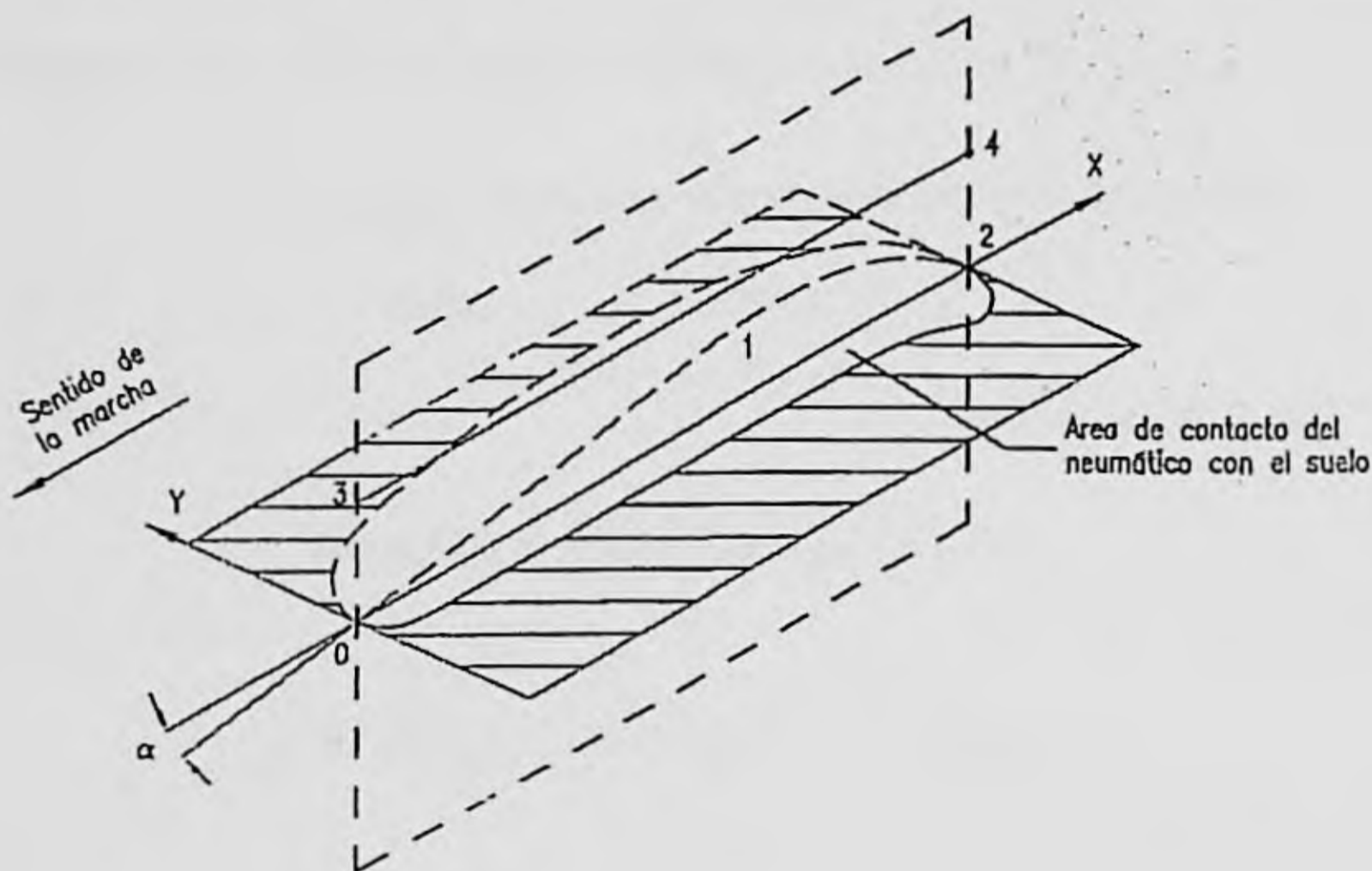


Figura 2.55. Forma del área de contacto.

Los resultados de la simulación del comportamiento del neumático a través del modelo de Dugoff han sido comprobados experimentalmente por el Highway Safety Research Institute de la Universidad de Michigan y publicados en el artículo "A computer based mathematical method for predicting the directional response of trucks and tractor-trailers" 1973.

Se supone el área de contacto neumático-calzada de la forma vista en la figura 2.55, y que el neumático tiene un ángulo de caída nulo.

La línea 0-1-2 de la figura 2.55 es la línea ecuatorial deformada del neumático sobre el área de contacto. Se toma como origen del sistema de coordenadas (X, Y) el punto 0. La línea 3-4 es la línea central longitudinal de la carcasa del neumático, y se supone cada punto de esta línea unido elásticamente, tanto en sentido longitudinal como transversal, a la banda de rodadura del neumático (0-1-2). De tal forma, que un punto de la banda de rodadura sigue la trayectoria de su homólogo de la carcasa a no ser que aparezca una fuerza que lo aparte de ella.

El punto 1 corresponde al límite de deslizamiento, la zona de 0 a 1 es zona donde hay adherencia y de 1 a 2 existe deslizamiento de la goma del neumático sobre la calzada, debido a que los esfuerzos a transmitir superan los valores máximos de adherencia. Ver figura 2.40.

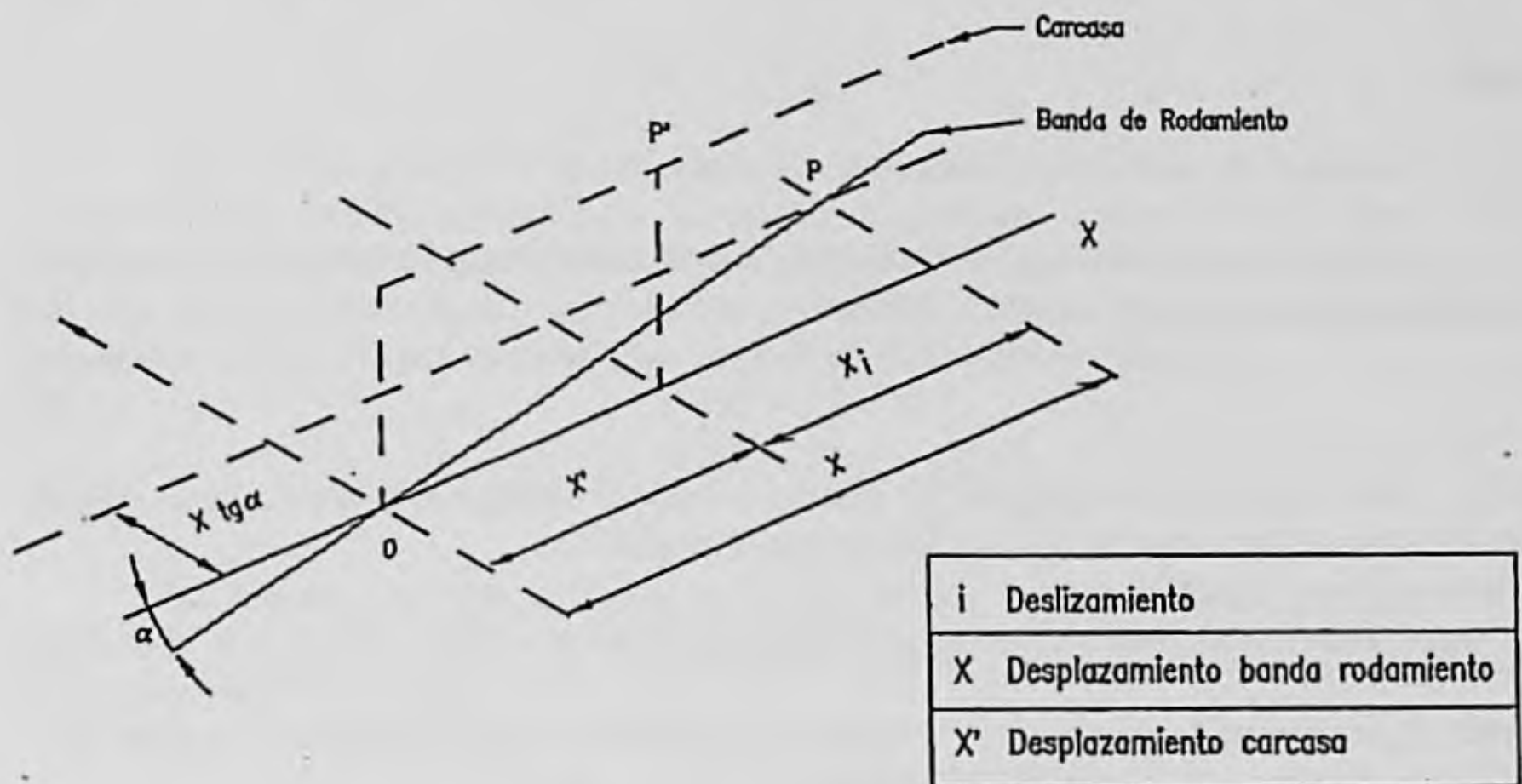


Figura 2.56. Deformada en la zona de adherencia.

En la figura 2.56 se ha representado la deformada de un punto P, comprendido en la zona de adherencia 0-1 de la huella. Al punto P de la banda de rodadura (deformada) le corresponde el P' de la carcasa (posición no deformada).

La coordenada longitudinal del punto P viene dada por:

$$X = V \cdot \Delta t$$

2.21

Donde V es la velocidad longitudinal de desplazamiento de neumático en la dirección OX y Δt el intervalo de tiempo desde que el punto P entró en el área de contacto hasta el instante considerado.

El punto homólogo del P , perteneciente a la carcasa, P' , tendrá a su vez una coordenada longitudinal X' de valor:

$$X' = \Omega \cdot r \cdot \Delta t \quad 2.22$$

donde Ω es la velocidad angular de giro de la rueda y r el radio de rodadura del neumático.

La deformación longitudinal del punto P , relativa a P' , será la diferencia de ambas coordenadas.

$$X - X' = V \cdot \Delta t - \Omega \cdot r \cdot \Delta t = \Delta t \cdot (V - \Omega \cdot r) = V \cdot \Delta t \cdot \left(1 - \frac{\Omega r}{V}\right) \quad 2.23$$

luego,

$$X - X' = V \cdot \Delta t \cdot i \quad 2.24$$

Donde i , de acuerdo con lo definido anteriormente es el coeficiente de deslizamiento en frenado. Sustituyendo $V \cdot \Delta t$ por X queda:

$$X - X' = X \cdot i \quad 2.25$$

La componente longitudinal de tensión en el punto P será el producto de la rigidez por la deformación sufrida longitudinalmente por el neumático.

$$\sigma_X = K_X \cdot X \cdot i \quad 2.26$$

siendo K_X la rigidez longitudinal del neumático expresada en N por unidad de longitud, por unidad de anchura y por unidad de deformación.

La deformación lateral de P , de acuerdo con la figura 2.56 es:

$$y = -X \cdot \operatorname{tag} \alpha \quad 2.27$$

y la tensión lateral será entonces,

$$\sigma_Y = -K_Y \cdot \operatorname{tag} \alpha \cdot X \quad 2.28$$

donde K_Y es la rigidez lateral del neumático expresada en N por unidad de longitud, por unidad de anchura y por unidad de deformación lateral.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Por otra parte, la máxima tensión cortante admisible en un punto cualquiera del contacto neumático-calzada, considerando un coeficiente de adherencia μ_a es:

$$\sigma_m = P_r \cdot \mu_a \quad 2.29$$

Se va a suponer que la distribución normal de presiones es constante en toda la área de contacto, hipótesis que es bastante aproximada excepto en las zonas extremas de la huella:

$$P_r = \frac{P}{l_c \cdot b_c} \quad 2.30$$

Siendo l_c , la longitud de la huella de contacto, b_c , su anchura y P la carga total sobre el neumático.

Sustituyendo 2.30 en 2.29 queda:

$$\sigma_m = \frac{P}{l_c \cdot b_c} \cdot \mu_a \quad 2.31$$

Una vez conocida la tensión máxima admisible en el área de contacto, y las expresiones que dan las componentes de tensión longitudinal y lateral de un punto de la huella, se pueden calcular las coordenadas del punto de la superficie de contacto a partir del cual deja de haber adherencia y comienza el deslizamiento. Para ello basta igualar la tensión admisible al valor de la tensión resultante de las tensiones elásticas del punto:

$$\sigma_m = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \frac{\mu_a \cdot P}{l_c \cdot b_c} \quad 2.32$$

Sustituyendo en esta expresión σ_x y σ_y por los valores hallados anteriormente y despejando X , se puede obtener la coordenada X_i del punto de la banda de rodadura donde va a comenzar el deslizamiento.

$$X_i = \frac{\mu_a P}{l_c \cdot b_c} \cdot \frac{l}{\sqrt{(K_x \cdot i)^2 + (K_y \cdot \tan \alpha)^2}} \quad 2.33$$

El punto homólogo de la carcasa (X') se puede calcular sustituyendo X por X_i en 2.25; despejando X' , y sustituyendo 2.33:

$$X_i - X'_i = X_i \cdot i \quad 2.34$$

es decir,

$$X'_i = (1-i) X_i = (1-i) \frac{\mu P}{l_c \cdot b_c} \frac{l}{\sqrt{(K_x \cdot i)^2 + (K_y \cdot \tan \alpha)^2}} \quad 2.35$$

Lógicamente, si $X'_i \geq l_c$ en todo el área de contacto habrá adherencia, no existiendo deslizamiento. Si $X'_i < l_c$ habrá deslizamiento en la parte trasera del área de contacto, concretamente en la zona comprendida entre X'_i y l_c .

A partir de aquí, se pueden obtener los esfuerzos longitudinales y laterales que actúan sobre la huella, que serán la suma de los generados en la zona de adherencia y en la zona de deslizamiento. En ésta última se supone que la tensión tangencial de contacto va a ser uniforme.

Para calcular los esfuerzos, se integrarán las fuerzas de contacto referidas a la coordenada no deformada (carcasa) a lo largo de todo el área de contacto.

Teniendo en cuenta que, como se ha definido anteriormente, puede obtenerse la expresión de la tensión referida a las coordenadas del punto equivalente en la carcasa, despejando X de 2.25:

$$X = \frac{X'}{1 - i} \quad 2.35$$

Y sustituyendo en 2.26:

$$\sigma_{X'} = \frac{K_X \cdot X' \cdot i}{1 - i} \quad 2.36$$

En el caso de que X' sea mayor que X'_i , la expresión anterior se mantendrá con el valor constante:

$$\sigma_{X'} = \frac{K_X \cdot X'_i \cdot i}{1 - i} \quad \text{para } l_c > X' > X_i \quad 2.37$$

Integrando las tensiones:

$$F_X = \left[\int_0^{X'_i} \sigma_{X'} \cdot b_c \cdot dX' + \int_{X'_i}^{l_c} \sigma_{X'} \cdot b_c \cdot dX' \right] \quad 2.38$$

Para $X'_i \geq l_c$, es decir no habiendo deslizamiento sobre la huella, de la primera integral, considerando 2.36, e integrando entre 0 y l_c resulta:

$$F_X = \frac{K_X \cdot i \cdot l_c^2 \cdot b_c}{2(1 - i)} \quad 2.39$$

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Si hay deslizamiento sobre la huella, es decir $X'_i < l_c$, de ambas integrales; sustituyendo 2.36 en la primera y 2.37 en la segunda:

$$F_X = \frac{K_X \cdot i \cdot X'_i \cdot l_c \cdot b_c}{1 - i} - \frac{K_X \cdot i \cdot (X'_i)^2 \cdot b_c}{2(1 - i)} \quad 2.40$$

Siguiendo un proceso análogo para los esfuerzos laterales se obtienen los esfuerzos laterales, F_Y :

$$\sigma_{Y'} = - \frac{K_Y \cdot \text{tag } \alpha \cdot X'}{1 - i} \quad \text{si } X' \leq X'_i \quad 2.41$$

$$\sigma_{Y'} = - \frac{K_Y \cdot \text{tag } \alpha \cdot X'_i}{1 - i} \quad \text{si } X' > X'_i \quad 2.42$$

$$F_Y = \left[\int_0^{X'_i} \sigma_{Y'} \cdot b_c \cdot d'X + \int_{X'_i}^{l_c} \sigma_{Y'} \cdot b_c \cdot d'X \right] \quad 2.43$$

Resultando para $X'_i \geq l_c$:

$$F_Y = - \frac{K_Y \cdot \text{tag } \alpha \cdot l_c^2 \cdot b_c}{2 \cdot (1 - i)} \quad 2.44$$

Si $X'_i < l_c$:

$$F_Y = - \frac{K_Y \cdot \text{tag } \alpha \cdot X'_i \cdot l_c \cdot b_c}{1 - i} + \frac{K_Y \cdot \text{tag } \alpha \cdot (X'_i)^2 \cdot b_c}{2 \cdot (1 - i)} \quad 2.45$$

Una vez obtenidas las expresiones para los esfuerzos longitudinales y laterales que actúan sobre el neumático, éstos se van a poner en función de otros parámetros de uso más normal.

De la expresión de F_X para $X'_i \geq l_c$, (ecuación 2.39)

$$\left. \frac{\partial F_X}{\partial i} \right|_{i=0} = l_c^2 \cdot b_c \cdot K_x / 2$$

La $\partial F_X / \partial i$ para $i = 0$, se denomina coeficiente de rigidez al deslizamiento del neumático y se expresa por k_i , por lo tanto:

$$K_i = \left. \frac{\partial F_X}{\partial i} \right|_{i=0} = l_c^2 \cdot b_c \cdot K_x / 2 \quad 2.45$$

Haciendo lo mismo para el esfuerzo lateral en función del ángulo de deriva (ecuación 2.44) se tiene:

$$\left. \frac{\partial F_Y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -l_c^2 \cdot b_c \cdot K_Y / 2$$

Recordando,

$$\left. \frac{\partial F_Y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = K_\alpha$$

queda que:

$$K_\alpha = -l_c^2 \cdot b_c \cdot K_Y / 2 \quad 2.46$$

Sustituyendo las expresiones de K_i y K_α en las ecuaciones de los esfuerzos longitudinales y laterales, se puede llegar a las expresiones siguientes, donde, para mayor comodidad, se sustituye X'_i por la relación $\lambda = X'_i / l_c$, de tal forma que cuando $\lambda = X'_i / l_c \geq 1$ no habrá deslizamiento en el área de contacto, y cuando $\lambda = X'_i / l_c < 1$, habrá deslizamiento.

Teniendo en cuenta 2.39, 2.40, 2.35 y 2.45 para F_x y las ecuaciones equivalentes para F_y , se obtiene:

$$F_x = \frac{K_i \cdot i}{1 - i} \cdot f(\lambda) \quad 2.47$$

$$F_y = \frac{K_\alpha \operatorname{tag} \alpha}{1 - i} \cdot f(\lambda)$$

Con:

$$f(\lambda) = 1 \text{ si } \lambda \geq 1, \text{ es decir, si no hay deslizamiento.} \quad 2.48$$

$$f(\lambda) = \lambda \cdot (2 - \lambda) \text{ si } \lambda < 1, \text{ si existe deslizamiento.}$$

El valor de λ , se obtiene de la expresión de X'_i , teniendo en cuenta 2.45:

$$\lambda = \frac{\mu_a P (1 - i)}{2 \cdot \sqrt{(k_i i)^2 + (k_\alpha \operatorname{tag} \alpha)^2}} \quad 2.49$$

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

En las ecuaciones anteriores, el coeficiente de adherencia μ_a es función, entre otros parámetros, de la velocidad de deslizamiento. Se puede calcular por la fórmula:

$$\mu_a = \mu_{a0} (1 - A_i \cdot V_i)$$

Donde A_i es el factor de reducción de la fricción con la velocidad; un valor aproximado para un neumático convencional es: 0,011 sg/m V_i es la velocidad total de deslizamiento y μ_{a0} coeficiente nominal de adherencia a velocidad 0.

$$V_i = V \sqrt{i^2 + \text{tag}^2 \alpha} \quad 2.50$$

Para el caso de que $i = 1$ se calculan los esfuerzos longitudinales y laterales mediante las expresiones:

$$F_x = \frac{K_i \cdot \mu_a \cdot P}{\sqrt{K_i^2 + K_\alpha^2 \text{tag}^2 \alpha}} \quad 2.51$$

$$F_y = \frac{K_\alpha \cdot \text{tag} \alpha \cdot \mu_a \cdot P}{\sqrt{K_i^2 + K_\alpha^2 \text{tag}^2 \alpha}} \quad 2.52$$

Por último hay que destacar el hecho de que Sankar y Guntur demostraron que, cuando $X'_i > l_c$, el coeficiente de adherencia utilizado es menor o igual que la mitad del máximo posible. Es decir para $\lambda > 1$ se cumple:

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{P} \leq \frac{\mu_a}{2}$$

y también $\lambda < 1$ cuando:

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{P} > \frac{\mu_a}{2}$$

2.5.2. El modelo de Bakker, Nyborg y Pacejka

En 1987, fue desarrollado por Bakker, Nyborg y Pacejka, un nuevo método para la representación del comportamiento de los neumáticos. Según estudios realizados de comparación entre los diferentes modelos existentes, este modelo es el que más se ajusta al comportamiento real de los neumáticos, aunque presenta el inconveniente de que necesita cálculos más laboriosos que los demás y disponer de datos experimentales del neumático que se modeliza.

Este método se ha desarrollado partiendo de numerosos ensayos realizados tanto con solicitaciones aisladas, por ejemplo frenadas o circulación en curva, como con solicitaciones combinadas de frenada en curva.

El objetivo consiste en obtener expresiones matemáticas cuyos coeficientes puedan identificarse con valores característicos de los neumáticos, como son la rigidez transversal, la rigidez longitudinal, o los valores pico de esfuerzos que se producen entre el neumático y el suelo.

Las expresiones así obtenidas describen con precisión las características de las fuerzas longitudinales, laterales y el momento autolineante.

Para ello se siguen dos caminos diferentes. El primero de ellos consiste en partir de expresiones en forma de serie (Fourier, Polinomiales), y el segundo en utilizar funciones especiales.

En el primer caso aparecen bastantes desventajas, pues son necesarios muchos coeficientes para ajustar las curvas y, por otra parte, las derivadas a lo largo de ellas difieren considerablemente. Además, los coeficientes no se corresponden con valores característicos de los neumáticos y en general se producen grandes desviaciones, cuando es necesario estimar valores intermedios mediante interpolación.

Bakker, Nyborg y Pacejka plantean que el mejor camino es encontrar funciones especiales que se ajusten a las curvas obtenidas en los ensayos, con la particularidad de que los parámetros de esas funciones deben corresponderse con valores característicos de los neumáticos.

2.5.2.1. Expresiones propuestas

La forma básica de cada una de las curvas características de los neumáticos se muestran en la figura 2.57, y sugieren en principio el uso de funciones seno.

La primera expresión planteada por los autores es:

$$Y = D \cdot \text{sen}(B \cdot X)$$

Donde Y representa la fuerza lateral, el momento autolineante o la fuerza longitudinal y X, el ángulo de deriva o el deslizamiento longitudinal. D es el valor máximo de los esfuerzos y el producto DB, como coeficiente de la derivada, es igual a la rigidez transversal o longitudinal del neumático, para ángulo de deriva nulo ó deslizamiento nulo, respectivamente.

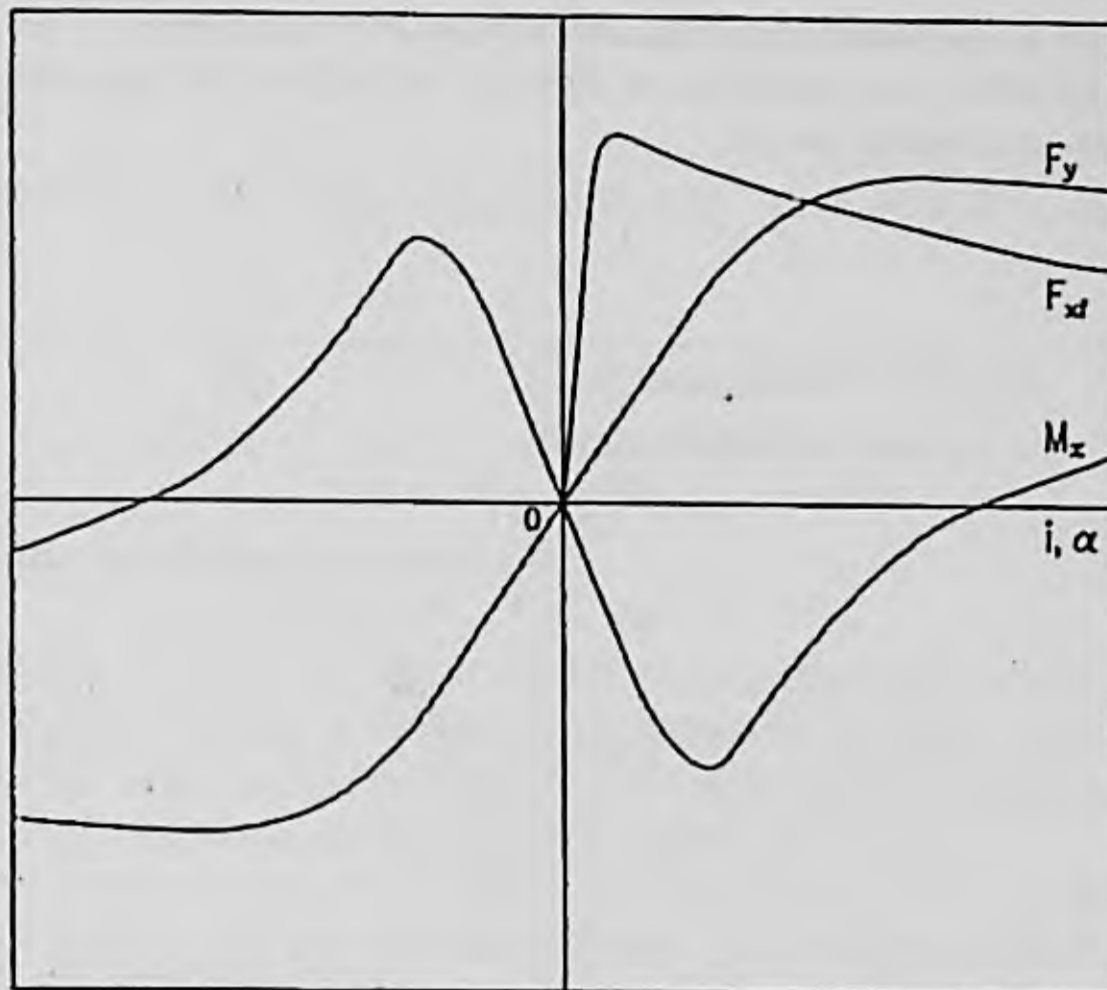


Figura 2.57. Curvas características de neumáticos.

Esta ecuación no se ajusta bien para valores altos del ángulo de deriva o de deslizamiento, y para solucionar este inconveniente se plantea añadir una función arctan. de tal forma que la nueva expresión es:

$$Y = D \cdot \text{sen}(C \cdot \text{arctan}(B \cdot X))$$

En esta ecuación, D sigue representando los valores máximos de los esfuerzos y la rigidez transversal o longitudinal, es ahora el producto BCD. El coeficiente C se denomina de forma de la curva y su valor oscila entre 1,3 y 2,4 dependiendo de si se trata de los esfuerzos laterales, el par de autoalineación o los esfuerzos longitudinales.

Todavía esta ecuación, no se ajusta suficientemente bien a las curvas de comportamiento, principalmente en los codos. Para terminar de ajustar las curvas se añade un último coeficiente E, denominado factor de curvatura.

Las expresiones quedan entonces:

$$Y = D \cdot \text{sen}(C \cdot \text{arctan}(B \Phi))$$

Siendo:

$$\Phi = (1 - E) \cdot X + (E/B) \cdot \text{arctan}(B \cdot X)$$

En la figura 2.58 puede verse la influencia del coeficiente E en el caso de los esfuerzos laterales. Efectos muy similares se obtienen respecto a los esfuerzos longitudinales así como para el momento autoalineante.

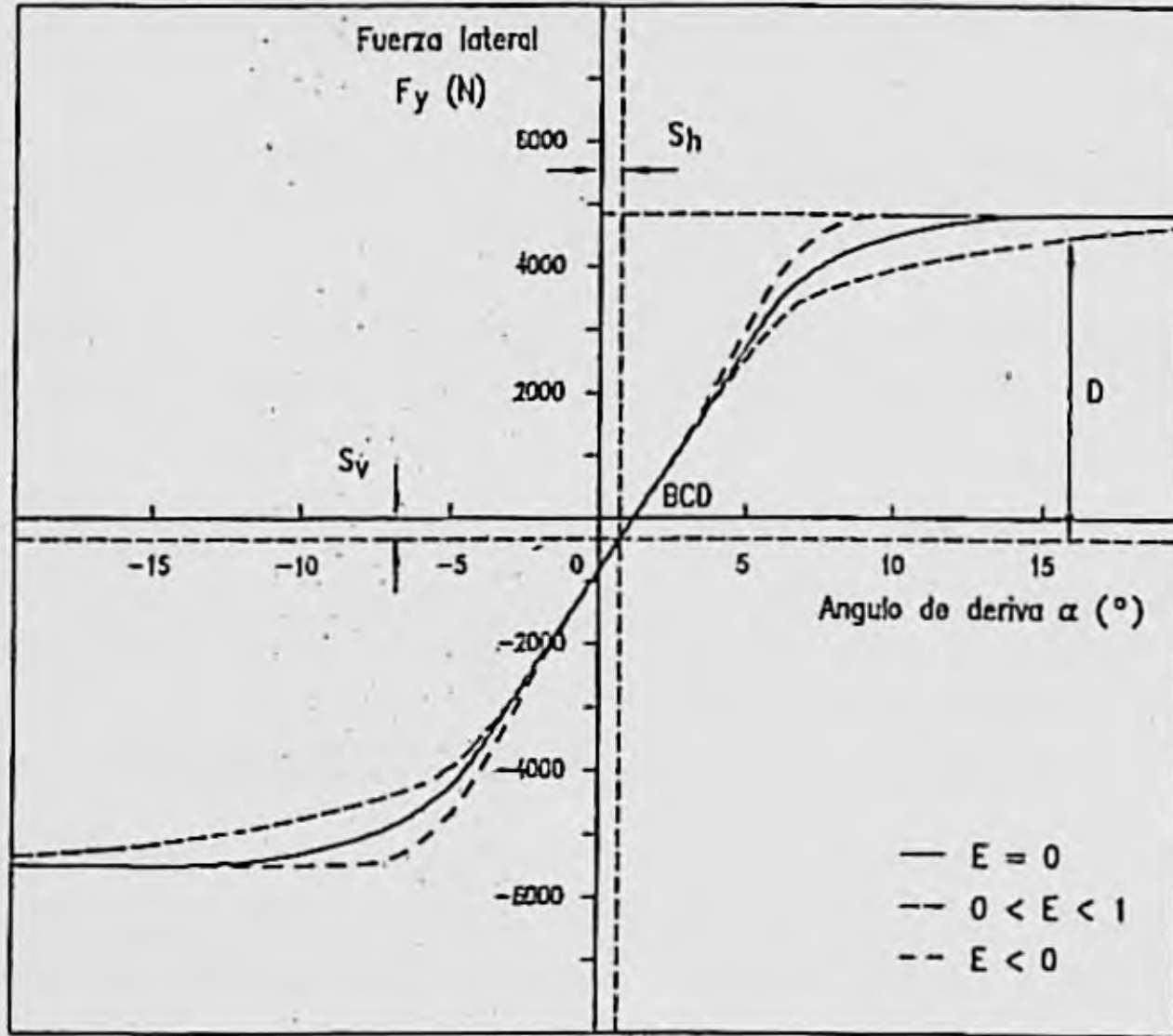


Figura 2.58. Coeficientes que aparecen en las expresiones de neumáticos.

Como se puede observar, el resultado definitivo es una ecuación con cuatro coeficientes, capaz de describir todas las curvas características medidas durante los ensayos. Los cuatro coeficientes se denominan:

- B - Factor de rigidez
- C - Factor de forma
- D - Factor pico
- E - Factor de curvatura

En principio se supone que las curvas características pasan por el origen de coordenadas, pero en realidad esto no siempre es exacto, debido, principalmente, al ángulo de caída de la rueda y a la resistencia a la rodadura. Estos fenómenos hacen que se produzca un desplazamiento de las curvas respecto a los ejes de referencia y las ecuaciones pueden ponerse como:

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

$$Y = D \cdot \text{sen}(C \cdot \arctan(B \cdot \Phi)) + S_v$$

siendo,

$$\Phi = (1 - E) \cdot (X + S_h) + (E/B) \cdot \arctan(B(X + S_h))$$

donde,

$$\begin{aligned} S_h &= \text{desplazamiento horizontal} \\ S_v &= \text{desplazamiento vertical} \end{aligned}$$

2.5.2.2. Obtención de los coeficientes

Para obtener el valor de los coeficientes que aparecen en las expresiones dadas anteriormente, Bakker, Nyborg y Pacejka, han ensayado un gran número de neumáticos, realizando las pruebas sobre carretera de asfalto seco. Las cantidades medidas fueron la fuerza lateral (F_y) la fuerza longitudinal (F_x) y momento autolineante (M_z).

Estas fuerzas y pares fueron medidos tanto en pruebas de excitación individual, es decir, vehículo en curva sin frenar, para obtener esfuerzos laterales puros y vehículo en recta sometido a diferentes frenadas para obtener los esfuerzos longitudinales puros, como también pruebas de excitación combinada, en donde al vehículo en curva se le aplican diferentes frenadas.

En cuanto se refiere a las pruebas para obtener esfuerzos laterales puros, se le hizo circular al vehículo por curvas a una velocidad de 70 km/h, haciendo variar el ángulo de deriva entre -10° y 14° con diferentes cargas verticales sobre la rueda (2, 4, 6, 8 kN). Los ángulos de caída de rueda podían variarse desde -5° hasta 5° .

El ángulo de deriva se variaba en las curvas desde 0 al valor máximo, y de éste al mínimo pasando otra vez por 0. Las medidas se realizaban a intervalos de 1/4 de grado. Posteriormente se realizaron las correcciones necesarias en función de las variaciones de carga vertical que ocurre durante las pruebas, correcciones que se hicieron mediante aproximaciones cuadráticas en el entorno de los puntos de medida.

En cuanto se refiere a los ensayos de frenada en recta para obtener los esfuerzos longitudinales puros, se realizaron a una velocidad de 60 km/h y fueron llevadas a cabo incrementando gradualmente la presión de frenada hasta que se produce el deslizamiento de todas las ruedas. Los datos fueron tomados desde el 0 al 100% de deslizamiento.

Las pruebas de esfuerzos combinados, vehículo en curva sometido a frenadas, fueron realizadas fijando los valores del ángulo de deriva y haciendo 0 el ángulo de caída de la rueda.

Los valores obtenidos para los coeficientes se presentan en la tabla 4. Hay que hacer constar que el desplazamiento vertical S_v , obtenido para los esfuerzos longitudinales representa el valor de la resistencia a la rodadura.

	CARGA (kN)	B	C	D	E	S_h	S_r	BCD
F_y	2	0,244	1,50	1936	-0,132	-0,280	-118	780,6
	4	0,239	1,19	3650	-0,678	-0,049	-156	1038
	6	0,164	1,27	5237	-1,61	-0,126	-181	1091
	8	0,112	1,36	6677	-2,16	-0,125	-240	1017
M_z	2	0,247	2,56	-15,53	-3,92	-0,464	-12,5	-9,82
	4	0,234	2,68	-48,56	-0,46	-0,082	-11,7	-30,45
	6	0,164	2,46	-112,5	-2,04	-0,125	-6,00	-45,39
	8	0,127	2,41		-3,21	0,009	-4,22	-58,55
F_x	2	0,178	1,55	2193	0,432	0,000	25,0	605
	4	0,171	1,69	4236	0,619	0,000	70,6	1224
	6	0,210	1,67	6090	0,686	0,000	80,1	2136
	8	0,214	1,78	7711	0,783	0,000	104	2937

TABLA 2.4. Coeficientes para las expresiones (α [grados], K %).

En las figuras 2.59, 2.60 y 2.61 se puede observar la precisión de las expresiones teóricas representadas en este modelo, al comparar sus resultados con los obtenidos durante los ensayos. Como se muestra en las curvas el grado de aproximación, es muy alto.

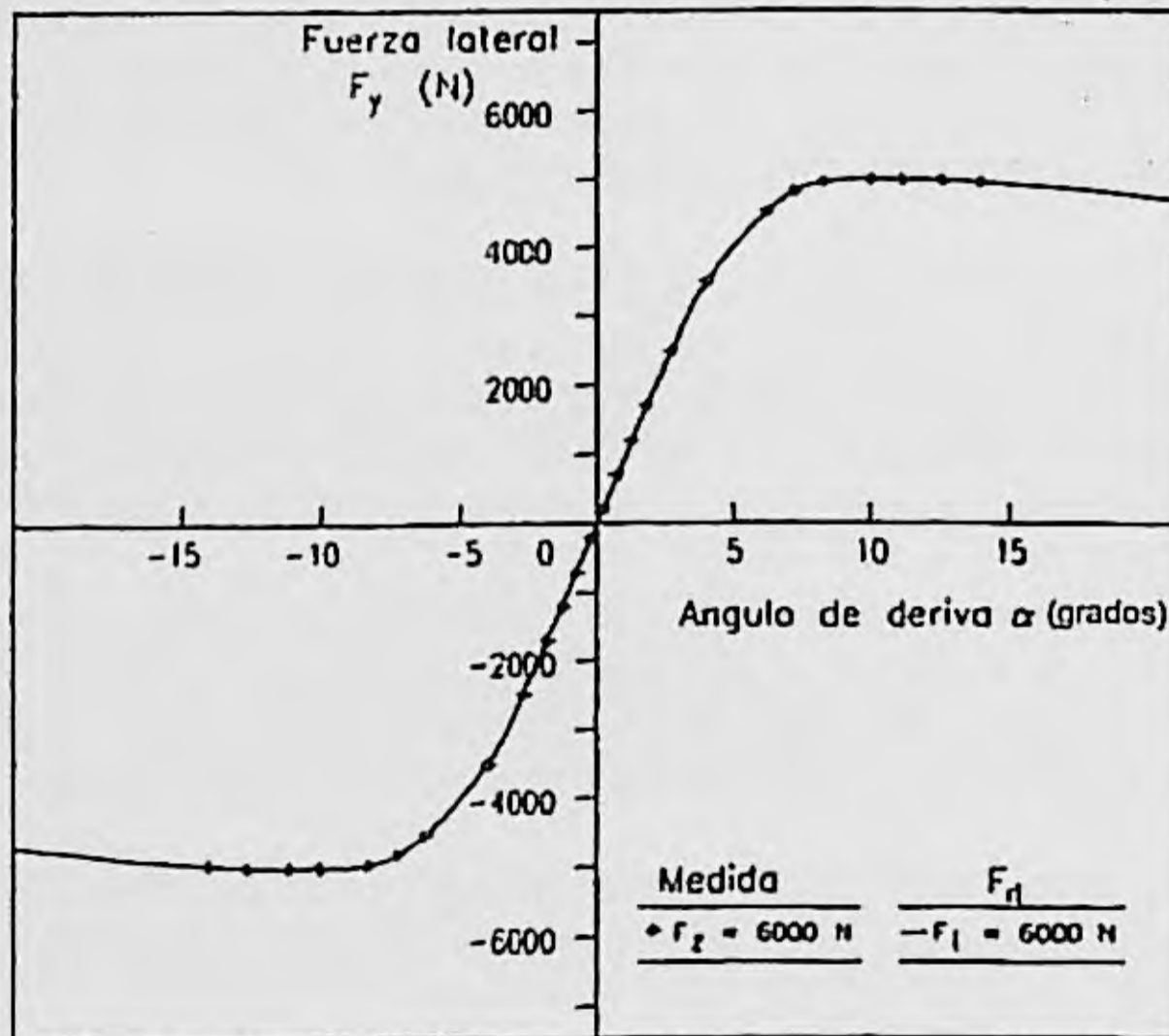


Figura 2.59. Comparación entre cálculos y medidas de fuerzas laterales.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

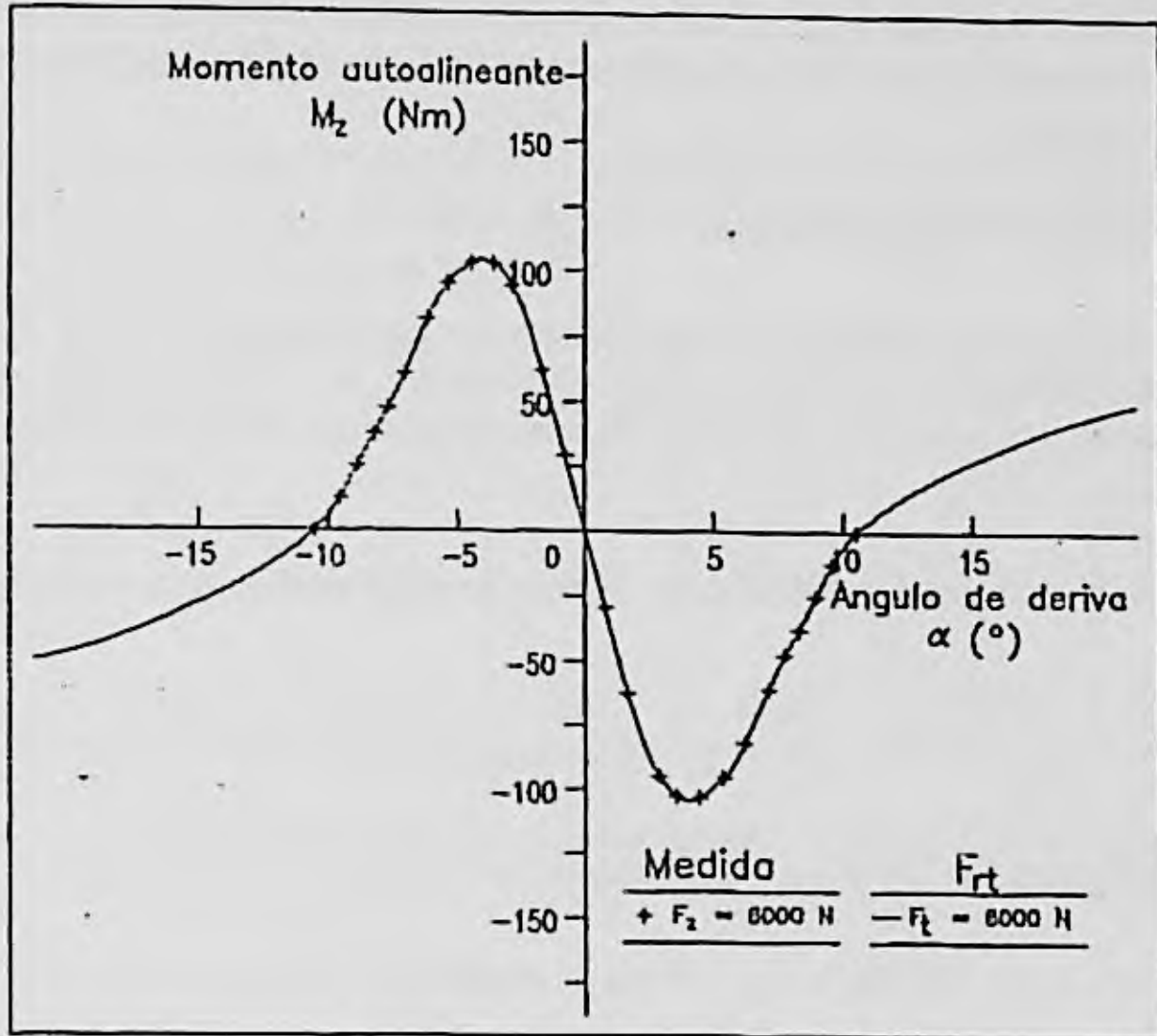


Figura 2.60. Momento autolineante. Comparación entre cálculos y medidas.

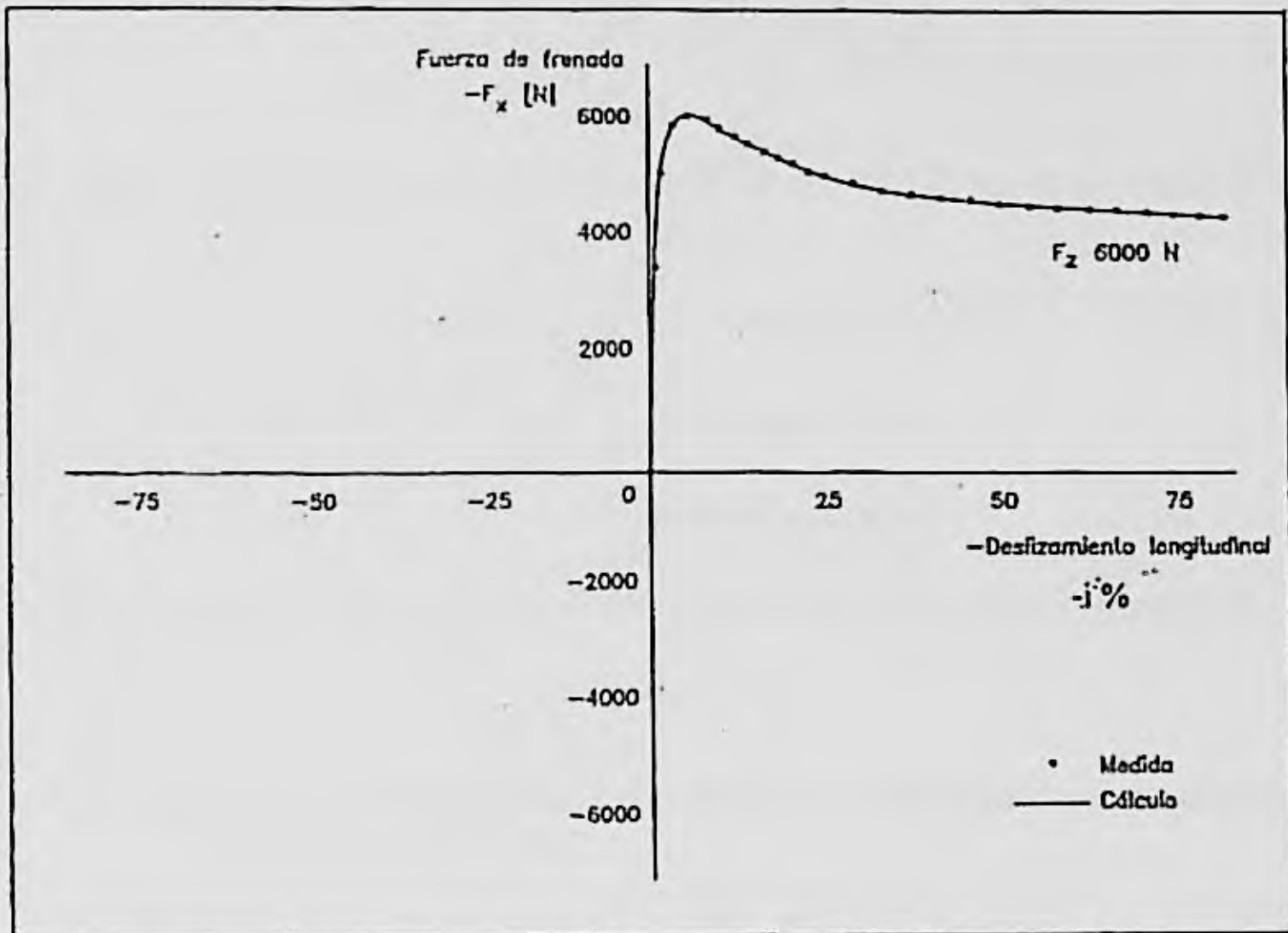


Figura 2.61. Fuerzas longitudinales de frenada. Comparación entre cálculos y medidas.

En los casos representados en estas figuras, no se han tenido en cuenta la resistencia a la rodadura así como los demás fenómenos que producen los desplazamientos horizontales y verticales de las curvas.

2.5.2.3. Influencia de la carga vertical

En la tabla 2.4 se encuentran los valores de los coeficientes para diversas cargas verticales usadas durante los ensayos, pero para incluir la carga vertical de una forma explícita, los coeficientes de las fórmulas deben ser escritos como funciones de la carga vertical (F_z).

El valor pico (D) como función de F_z , puede ser aproximadamente representado por la relación:

$$D = a_1 \cdot F_z^2 + a_2 \cdot F_z$$

Para la rigidez (BCD) de la fuerza lateral, se emplea:

$$BCD = a_3 \cdot \text{sen}(a_4 \cdot \arctan(a_5 \cdot F_z))$$

Y para los esfuerzos longitudinales de frenada y el momento autolineante, en ambos casos se usa la aproximación:

$$BCD = \frac{a_3 \cdot F_z^2 + a_4 \cdot F_z}{e^{a_5 \cdot F_z}}$$

El factor de forma (C) parece ser prácticamente independiente de la carga vertical F_z y se tiene:

- Fuerza lateral	C = 1.3
- Fuerza frenado	C = 1.65
- Par de autoalineación	C = 2.4

El factor de rigidez (B) se obtiene dividiendo BCD por los valores de C y D.

$$B = BCD / CD$$

Finalmente el factor de curvatura (E), como función de F_z se expresa como:

$$E = a_6 \cdot F_z^2 + a_7 \cdot F_z + a_8$$

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

En la tabla 2.5 se muestran los valores de estos coeficientes para el mismo tipo de neumático que el representado en la tabla 2.4.

La comparación entre las medidas y las nuevas expresiones obtenidas se muestran en las figuras 2.62, 2.63 y 2.64. La influencia de la carga vertical que ahora es tomada en cuenta no supone una pérdida significativa de precisión.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	A_7	a_8
F_y	-22,1	1011	1078	1,82	0,208	0,000	-0,354	0,707
M_z	-2,72	-2,28	-1,86	-2,73	0,110	-0,070	0,643	-4,04
F_x	-21,3	1144	49,6	226	0,069	-0,006	0,056	0,486

TABLA 2.5. Coeficientes para las expresiones con la influencia de carga (F_z [kN])

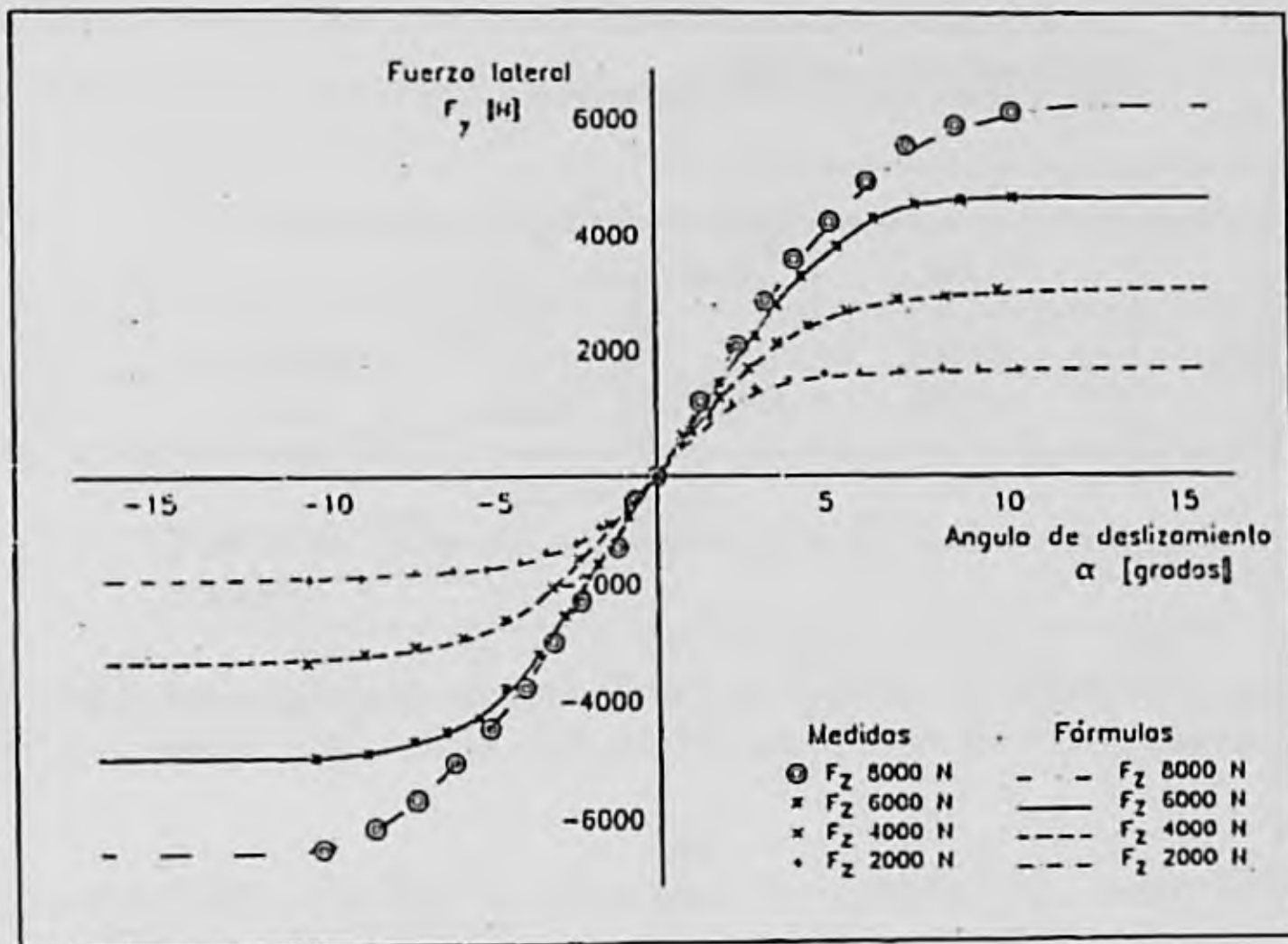


Figura 2.62. Curvas de fuerza lateral. Comparación de expresiones con influencia de carga vertical y medidas.

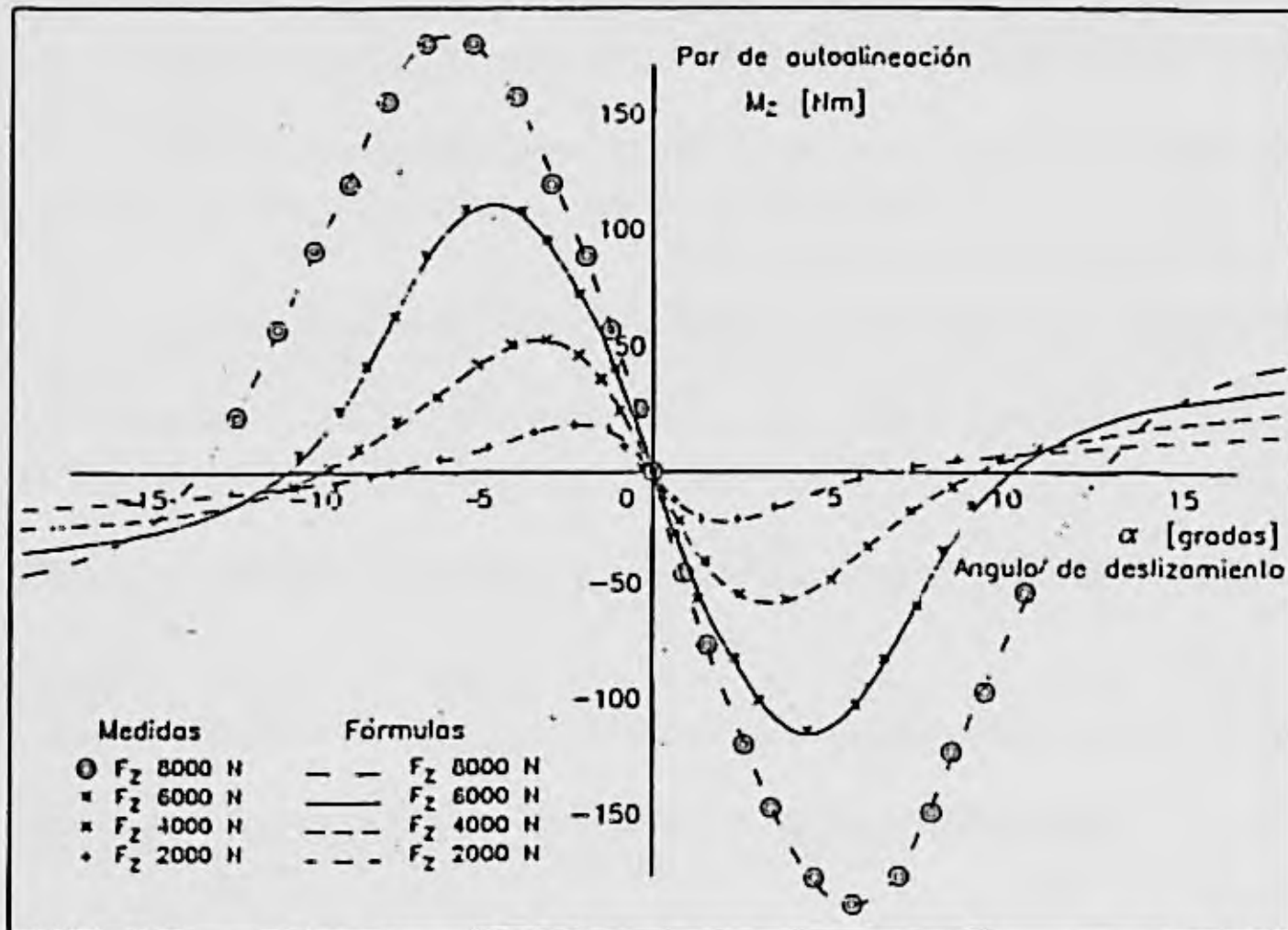


Figura 2.63. Par de autoalineación. Comparación entre expresiones con influencia de carga vertical y medidas.

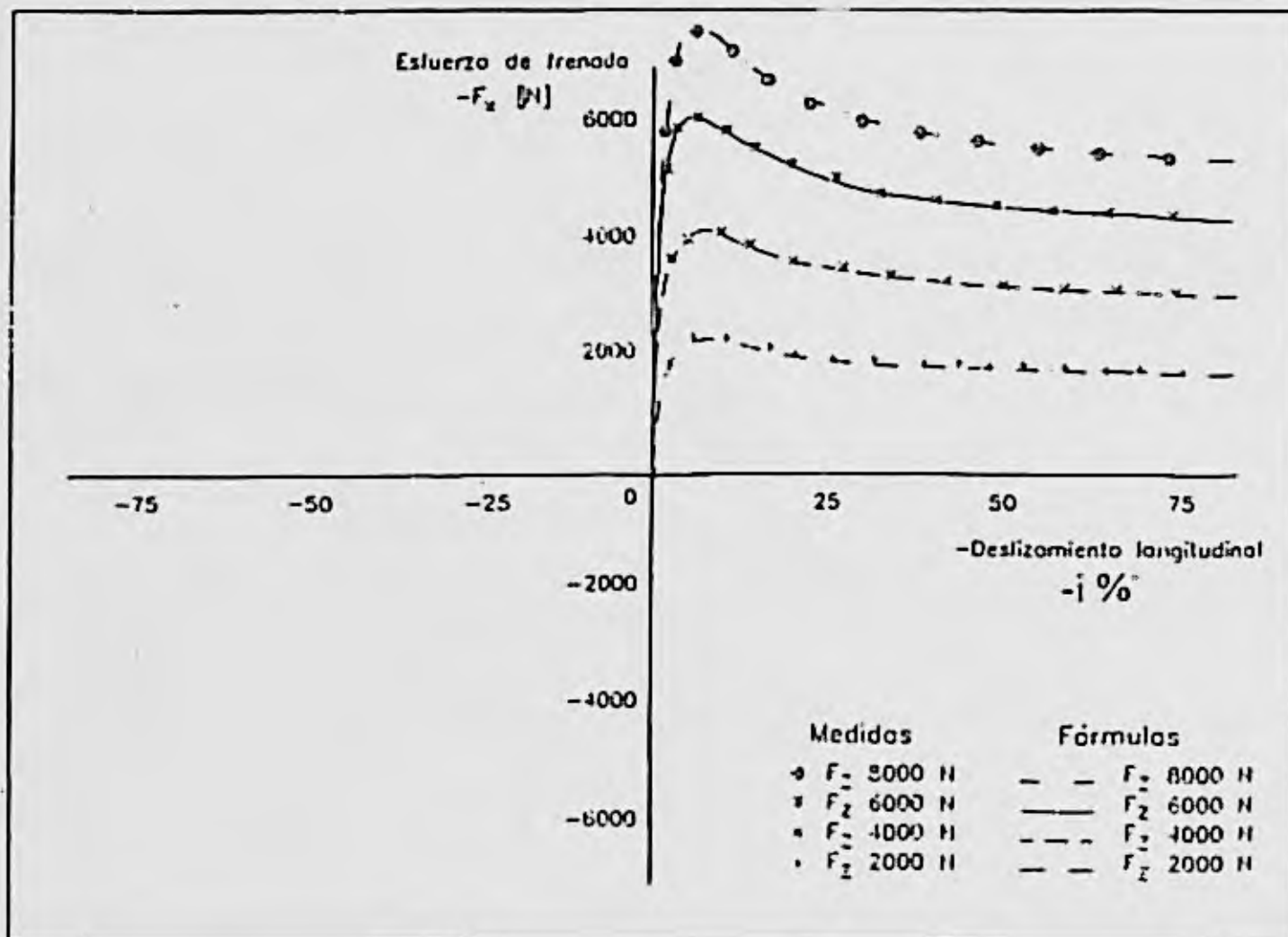


Figura 2.64. Esfuerzos de frenada. Comparación entre expresiones con influencia de carga vertical y medidas.

2.5.2.4. Influencia del ángulo de caída

Si se quiere tener en cuenta la influencia del ángulo de caída (γ) de la rueda, es necesario añadir los incrementos de desplazamiento en las curvas y un cambio del factor de rigidez. Los dos desplazamientos adicionales son:

$$\Delta S_h = a_9 \cdot \gamma$$

$$\Delta S_v = (a_{10} \cdot F_z^2 + a_{11} \cdot F_z) \cdot \gamma$$

El cambio del factor de rigidez se obtiene multiplicando B por $(1 - a_{12} \cdot |\gamma|)$. En definitiva se tiene un incremento de B:

$$\Delta B = - a_{12} \cdot |\gamma| \cdot B$$

El factor de curvatura para el momento autoalineante (M_z), debe ser dividido por $(1 - a_{13} \cdot |\gamma|)$. Para las fuerzas laterales no es necesario modificar el valor del factor de curvatura (E).

En la tabla 2.6, se encuentran los valores de los nuevos coeficientes.

	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
F_y	0,028	0,000	14,8	0,022	0,000
M_z	0,015	-0,066	0,945	0,030	0,070

TABLA 2.6. Coeficientes para las expresiones con influencia del ángulo de caída (γ [grados]).

En definitiva se presentan en este modelo un conjunto de expresiones, que mediante coeficientes, se ajustan con mucha precisión a las curvas de comportamiento de los neumáticos.

Los esfuerzos laterales, longitudinales de frenada, así como el momento autoalineante, pueden obtenerse directamente de las expresiones, además de otras informaciones como por ejemplo $dF_y/d\alpha$, en función del ángulo de deriva o de las fuerzas laterales. Estos dos ejemplos se muestran en las figuras 2.65 y 2.66.

También es posible calcular el avance de neumático o retraso de la fuerza lateral respecto al centro del área de contacto, como una función del ángulo de deriva o de la fuerza lateral. Esta longitud se obtiene dividiendo el par de autoalineación por la fuerza lateral. Figuras 2.67 y 2.68.

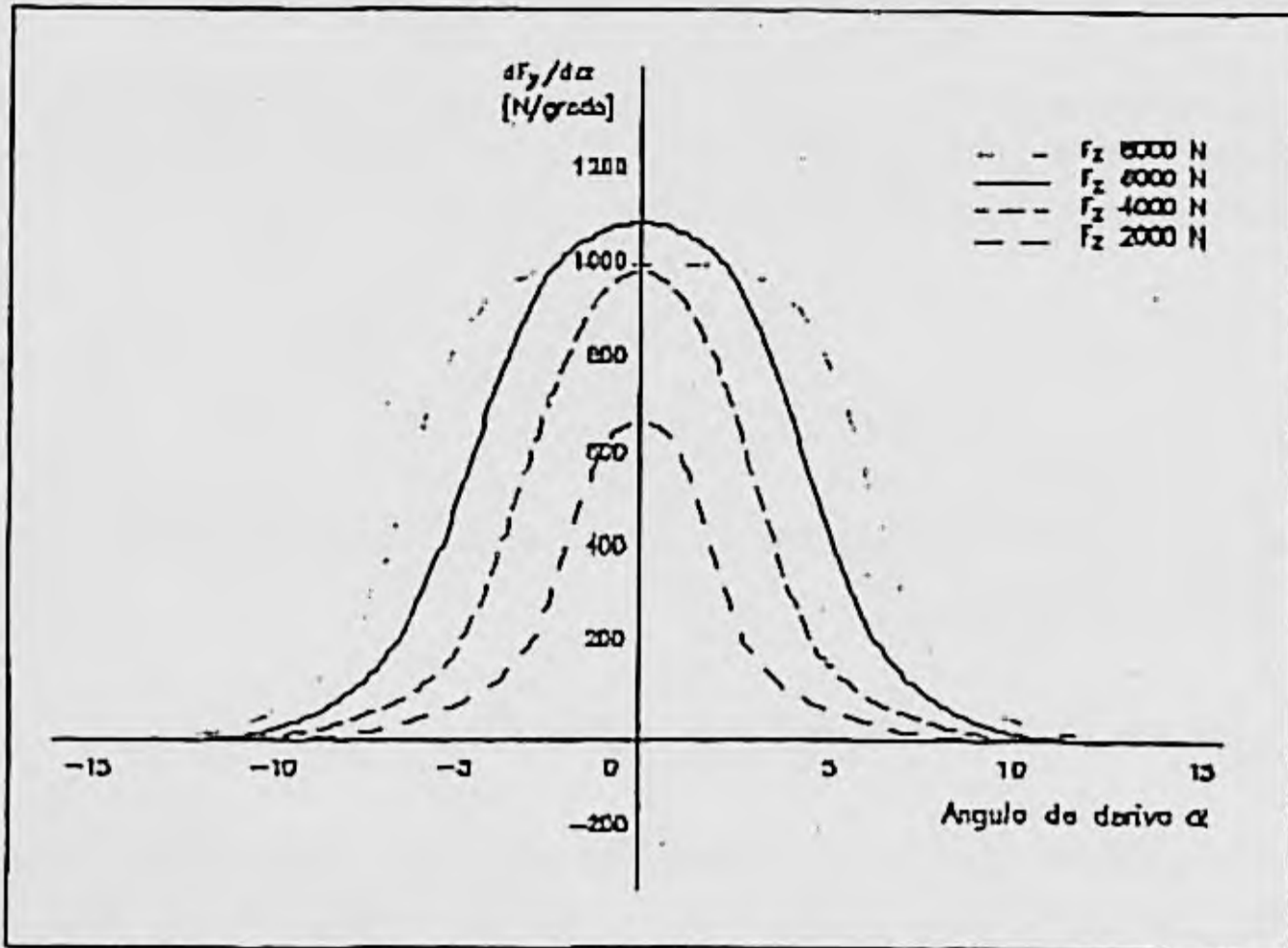


Figura 2.65. Cálculo de $dF_y/d\alpha$ en función del conjunto de deriva para diferentes cargas.

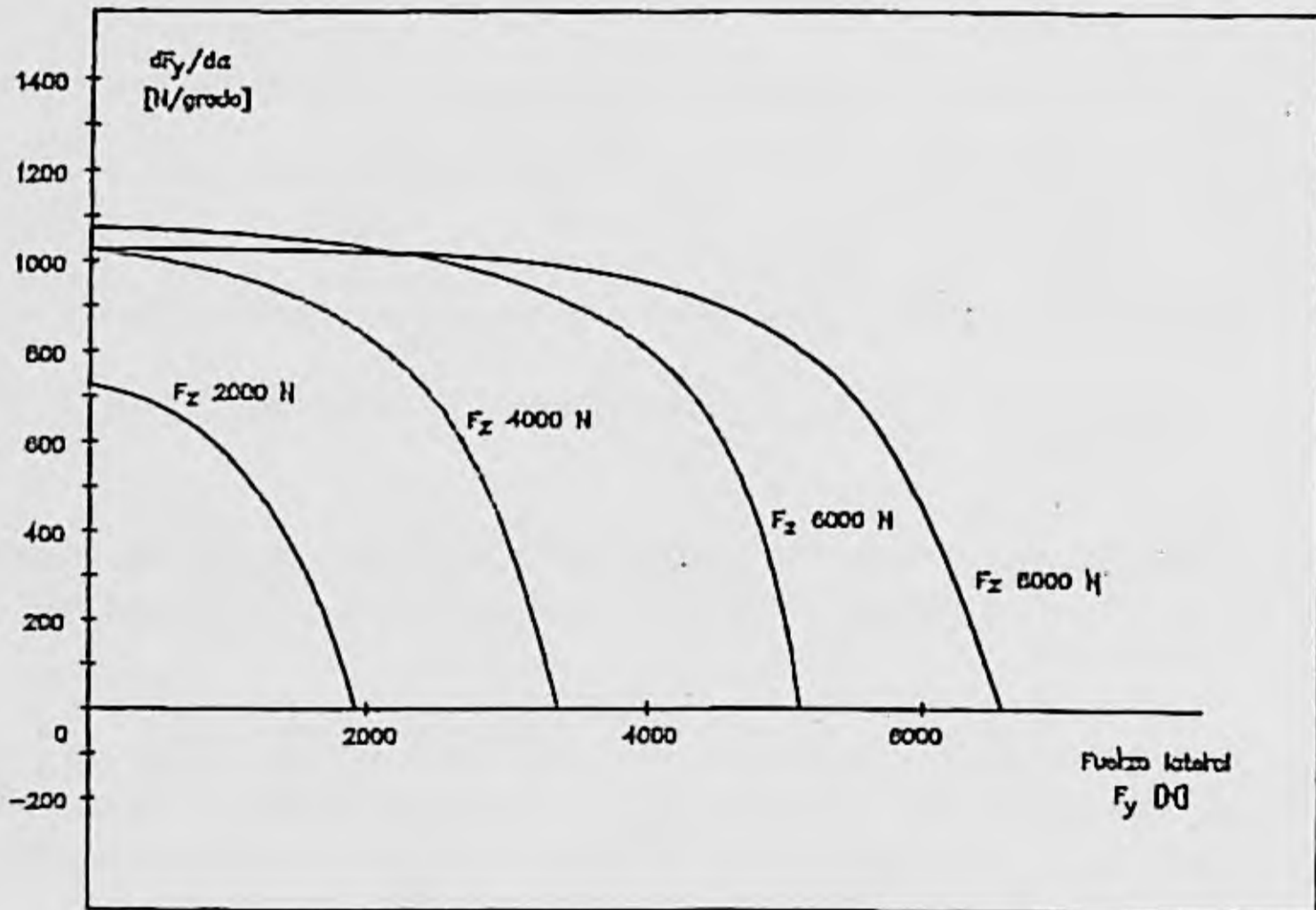


Figura 2.66. Cálculo de $dF_y/d\alpha$ en función de la fuerza lateral para diferentes cargas.

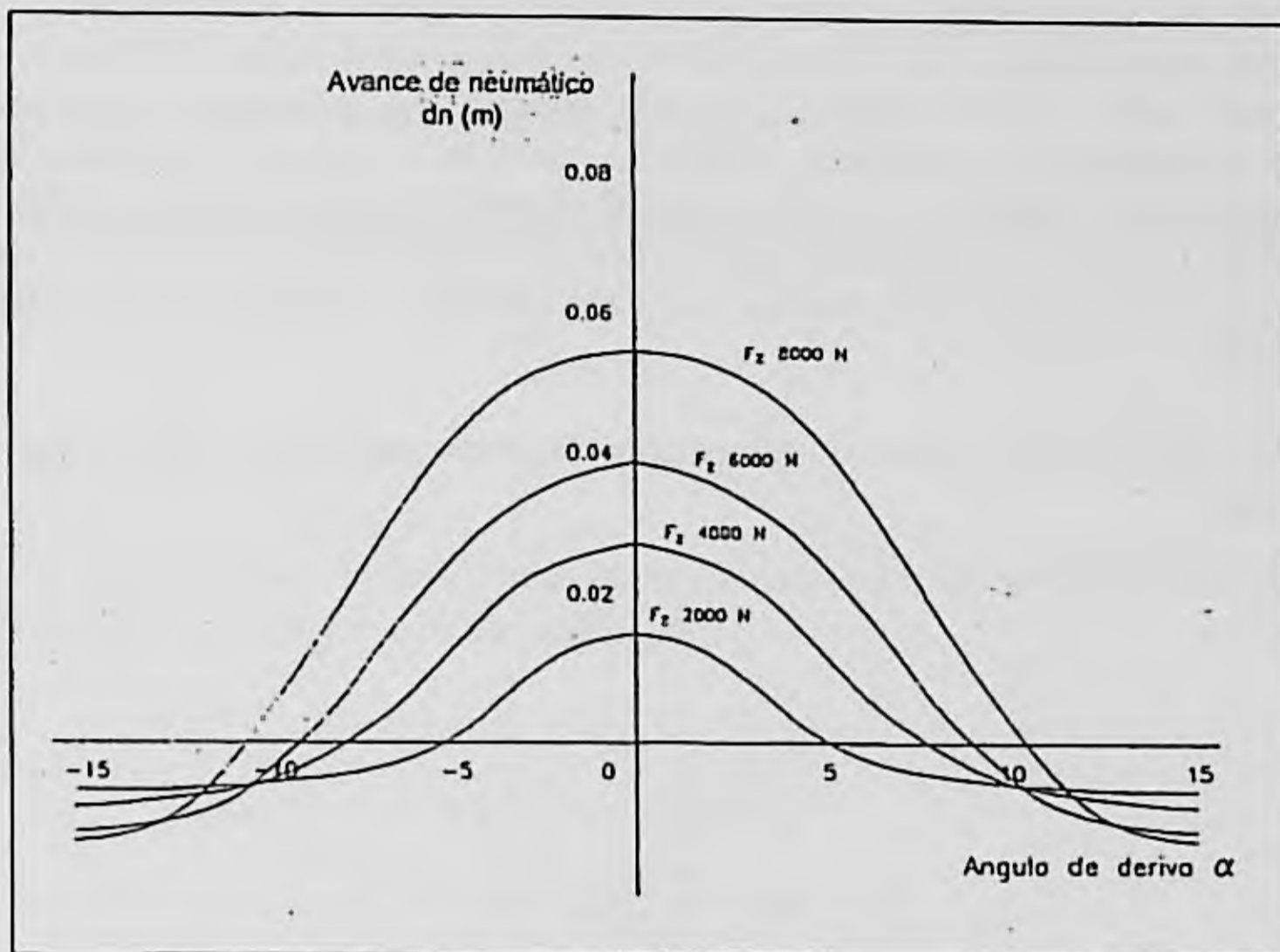


Figura 2.67. Retraso de la fuerza lateral calculado para diferentes cargas.

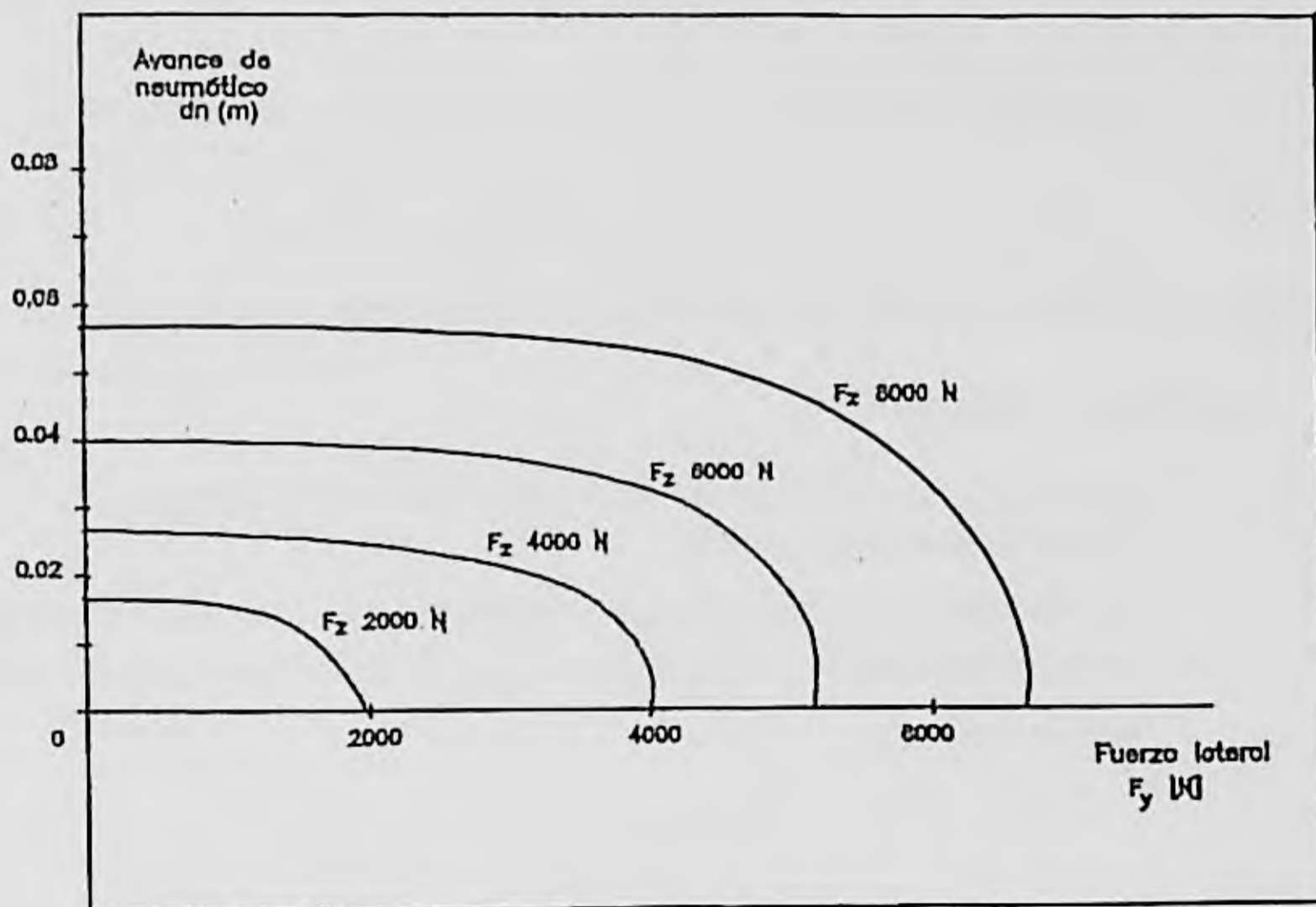


Figura 2.68. Avance de neumático en función de la fuerza lateral para diferentes cargas.

2.5.2.5. Esfuerzos longitudinales y laterales combinados

Hasta ahora se han planteado en este apartado las expresiones que permiten determinar los esfuerzos longitudinales y laterales, así como el momento autoalineante, ante excitaciones puras de frenado o de esfuerzo lateral. A partir de ahora se van a utilizar estas expresiones para simular el comportamiento del neumático ante excitaciones combinadas que aparecen en el mismo ante una frenada en curva. En adelante se supondrá que el ángulo de caída y es nulo.

En la figura 2.69, se muestra un neumático en planta sometido a esfuerzos laterales y longitudinales.

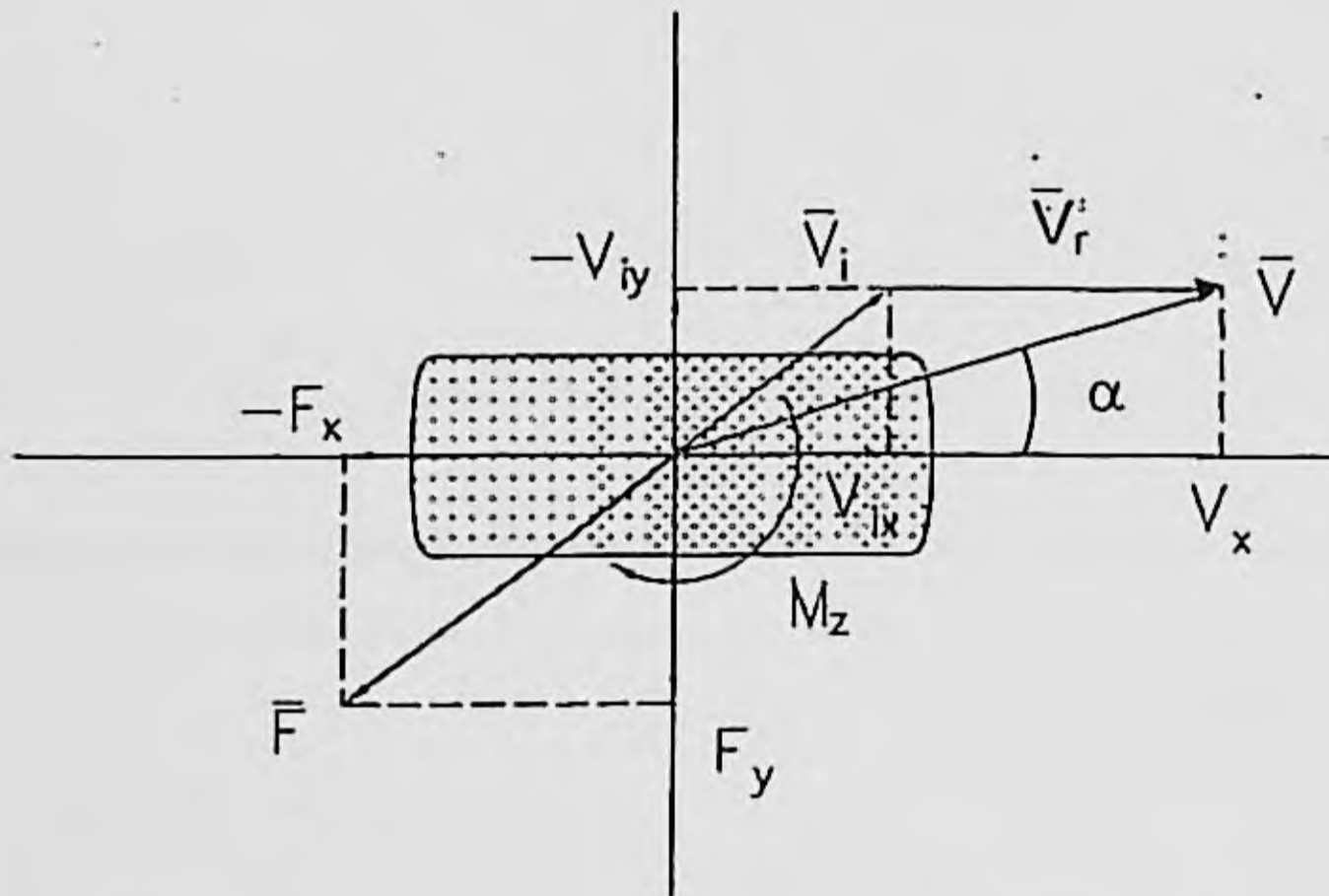


Figura 2.69. Vista en planta del neumático con los esfuerzos y los deslizamientos.

En esta figura puede observarse:

- La fuerza total con componentes en sentido lateral y longitudinal (F_y , F_x).
- El momento autoalineante M_z
- La velocidad en la dirección de desplazamiento \bar{V} , que está compuesta por el vector velocidad de deslizamiento \bar{V}_i , y el vector velocidad de rodadura del neumático \bar{V}_r .

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

Suponiendo que el comportamiento del neumático es isótropo, es decir que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones, la fuerza total que se produce entre el suelo y el neumático es opuesta al vector velocidad de deslizamiento \bar{V}_i .

Las componentes teóricas del deslizamiento tienen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}i_x &= V_{ix} / V_r \\i_y &= V_{iy} / V_r \\i &= \sqrt{i_x^2 + i_y^2}\end{aligned}$$

El vector \bar{i} tiene la misma dirección que el vector \bar{V}_i (velocidad de deslizamiento). En consecuencia los esfuerzos vendrían dados por:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= (\bar{i} / i) \cdot F(i) \\ \bar{F}_x &= (\bar{i}_x / i) \cdot F(i) \\ \bar{F}_y &= (\bar{i}_y / i) \cdot F(i)\end{aligned}$$

La velocidad de rodadura del neumático es:

$$V_r = V_x - V_{ix}$$

Las componentes teóricas del deslizamiento pueden expresarse según:

$$i_x = \frac{V_{ix}}{V_r} = \frac{V_{ix}}{V_x - V_{ix}} = \frac{V_{ix} / V_x}{1 - \frac{V_{ix}}{V_x}} = - \frac{K}{1 + K}$$

por otra parte se verifica que;

$$V_{iy} = -V_x \operatorname{tg} \alpha$$

de lo que:

$$i_y = \frac{V_{iy}}{V_r} = \frac{-V_x \operatorname{tg} \alpha}{V_x - V_{ix}} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{1}{1 + K}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha &= -V_{iy} / V_x \\ K &= -V_{ix} / V_x\end{aligned}$$

La teoría presentada es válida para neumáticos con propiedades isotrópicas (las mismas características para el comportamiento lateral que para el longitudinal). Pero en la práctica los neumáticos no son isótropos y por lo tanto la teoría debe ser ajustada.

A lo largo de este apartado se han presentado varias figuras donde se representaban los esfuerzos laterales y longitudinales obtenidos en ensayos de excitación pura, es decir solamente circulación en curvas para hallar los esfuerzos laterales y solamente frenada para los longitudinales. Estos esfuerzos se han dado hasta ahora en función de los deslizamientos prácticos, ángulo de deriva α y K .

Se denominan curvas originales básicas de los neumáticos a las que reflejan los esfuerzos laterales y longitudinales, obtenidos en ensayos de excitación pura, en función de los deslizamientos teóricos i . En adelante se representarán por $F_{X0}(i)$ y $F_{Y0}(i)$. En la figura 2.70 se muestran algunas de estas curvas para diferentes cargas verticales.

Si en las expresiones anteriores dadas para F_X y F_Y se sustituye $F(i)$ por $F_{X0}(i)$ y $F_{Y0}(i)$, se habrá considerado el comportamiento no isotrópico del neumático y las fuerzas pueden ahora obtenerse como:

$$F_X = -(i_X / i) \cdot F_{X0}(i)$$

$$F_Y = -(i_Y / i) \cdot F_{Y0}(i)$$

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$$

Observando la figura 2.70, aparece un problema de naturaleza física cuando los deslizamientos correspondientes a los picos de F_{X0} y F_{Y0} difieren considerablemente el uno del otro. Sucede entonces que para un deslizamiento i entre estos dos picos, nos encontramos con el hecho de que para una curva se ha producido el deslizamiento total mientras que para otra, el deslizamiento es todavía parcial. Pero en la realidad el neumático solamente tiene una condición de deslizamiento.

Para resolver este problema, Bakker, Nyborg y Pacejka definen una nueva cantidad de deslizamiento que normaliza los deslizamientos teóricos. Estos nuevos deslizamientos se denominan deslizamientos normalizados i^* . Los deslizamientos normalizados se obtienen dividiendo i por el deslizamiento que corresponde al pico del valor de las curvas. Se designan como i_{Xm} y i_{Ym} para F_X y F_Y respectivamente. Los componentes del deslizamiento normalizado son:

$$i'_X = i_X / i_{Xm}$$

$$i'_Y = i_Y / i_{Ym}$$

$$i' = \sqrt{i'^2_X + i'^2_Y}$$

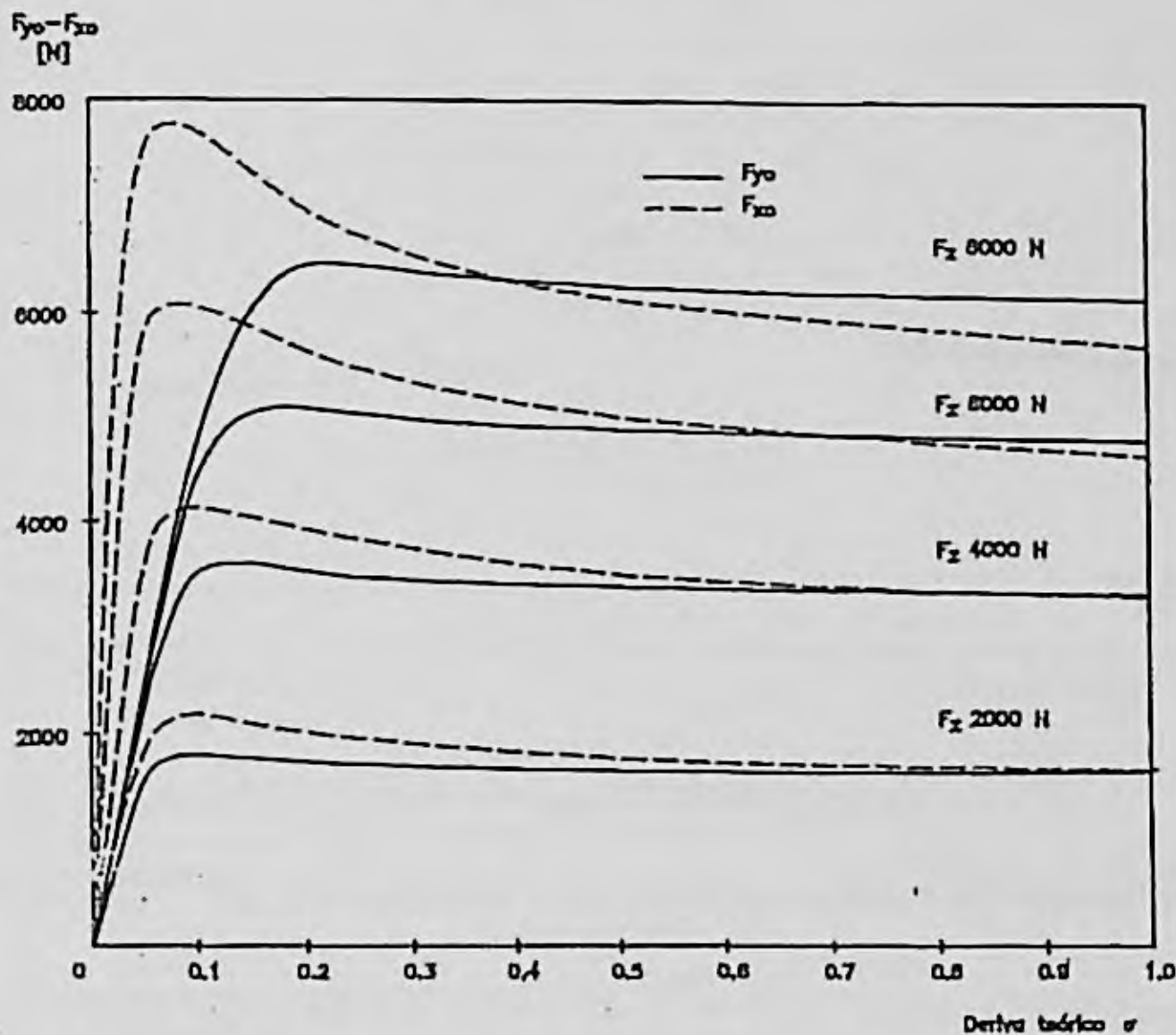


Figura 2.70. Curvas originales básicas calculadas.

Las curvas originales básicas, pero ahora como una función de i' , se muestran en la figura 2.71. En ambas ocurren deslizamientos parciales, para valores de i' más pequeños que 1, y aparece el deslizamiento total para valores más grandes que 1. Con i' como nuevo deslizamiento las ecuaciones de los esfuerzos quedan:

$$F_X = - (i'_X / i') \cdot F_{X0}(i')$$

$$F_Y = - (i'_Y / i') \cdot F_{Y0}(i')$$

$$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$$

La dirección de la fuerza resultante es la misma que la de i° pero de sentido contrario, y para pequeños valores de i° , las fuerzas F_X y F_Y pueden considerarse independientes, de tal forma que se tendría:

$$F_{X0} = k_{Fk} \cdot i_{Xm} \cdot i^\circ$$

$$F_X = - (i_X^\circ / i^\circ) \cdot F_{X0}(i^\circ)$$

$$= - (i_X^\circ / i^\circ) \cdot k_{Fk} \cdot i_{Xm} \cdot i^\circ$$

$$= - k_{Fk} \cdot i_X$$

y para F_Y de una forma similar:

$$F_Y = - k_{Fa} \cdot i_Y$$

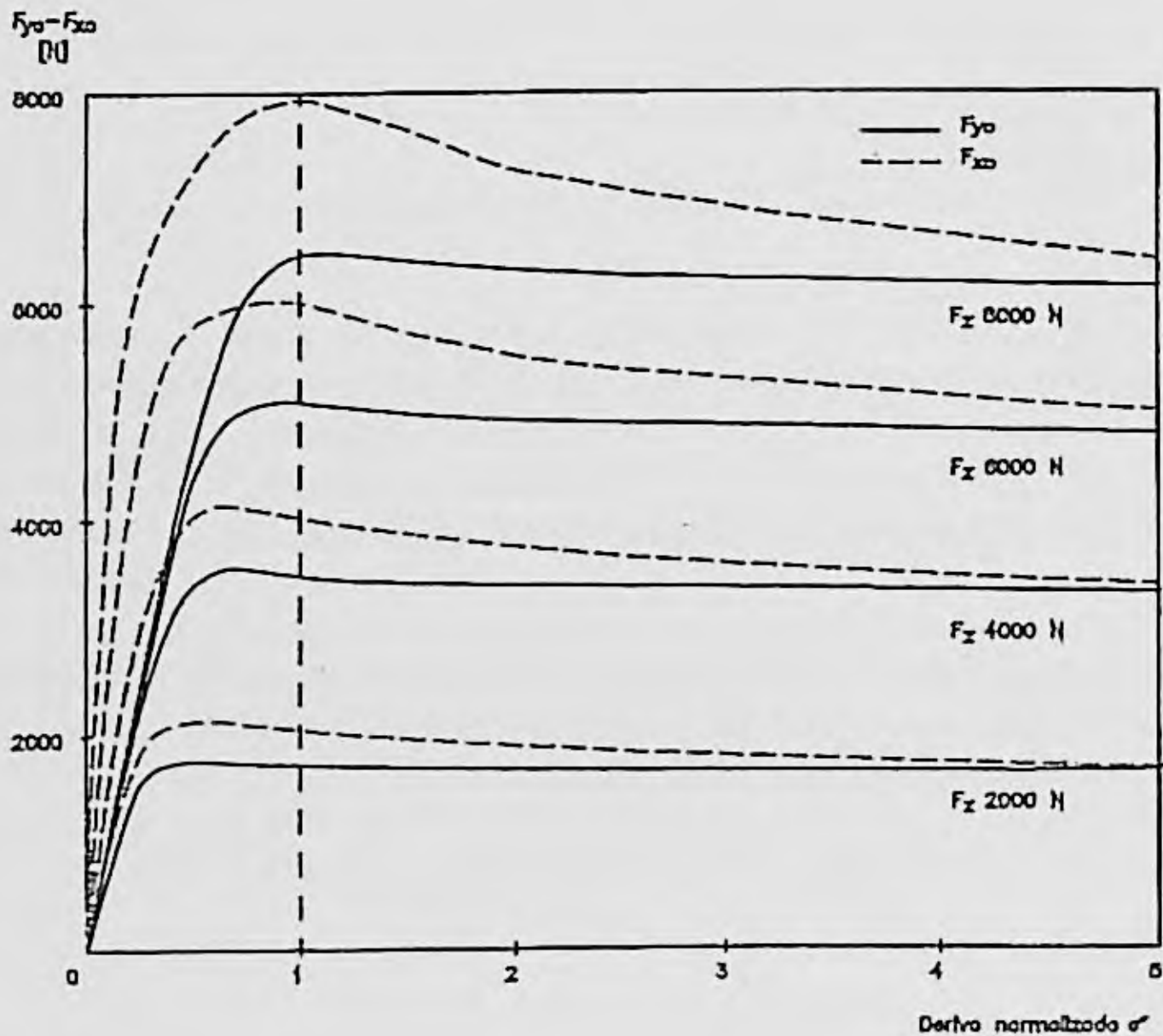


Figura 2.71. Curvas originales básicas normalizadas.

[Interacción entre el vehículo y la superficie de rodadura.]

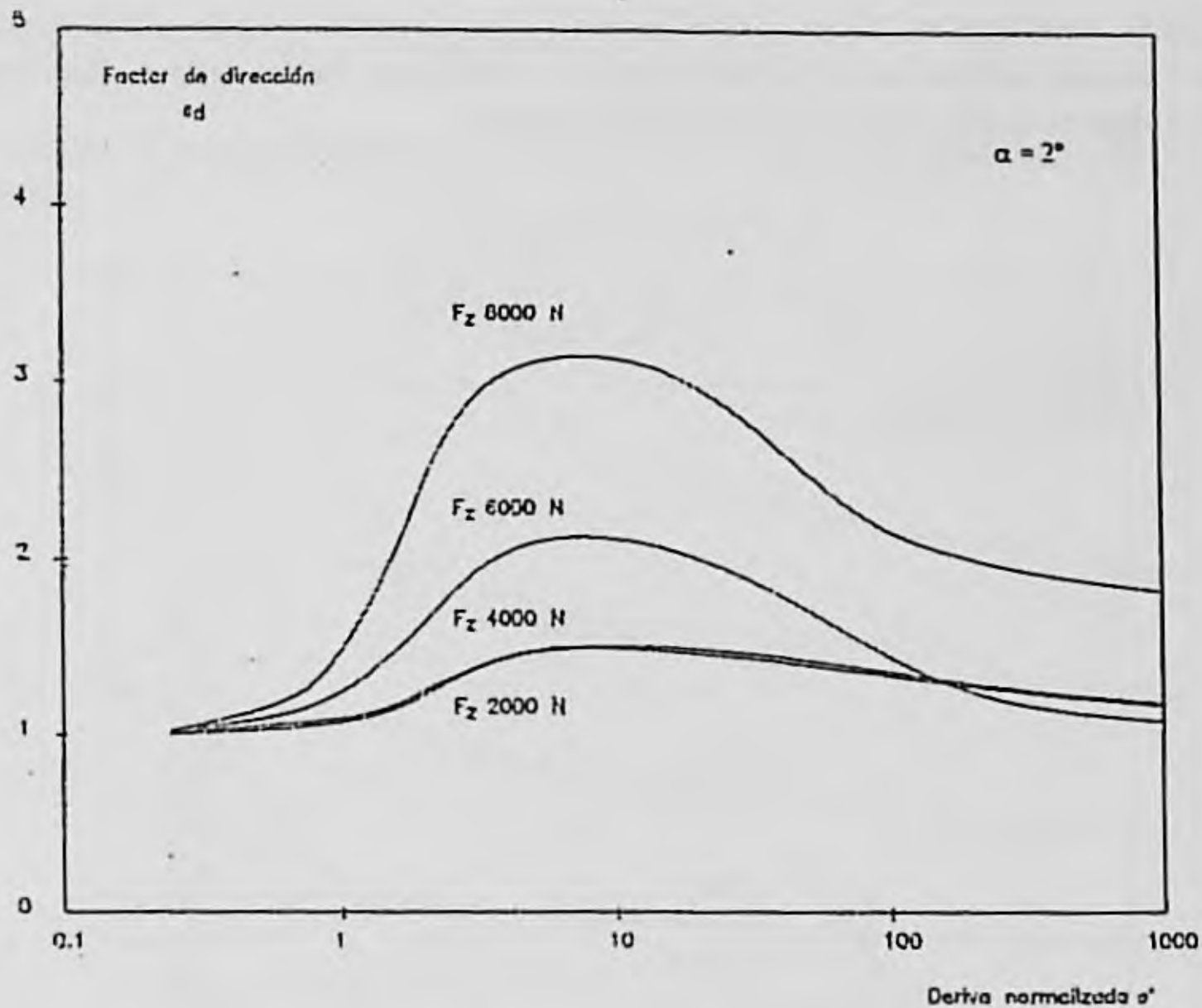


Figura 2.72. Valores de ϵ_d para diferentes cargas y $\alpha = 2^\circ$.

Siendo $k_{F_k} \cdot k_{F_v}$ las rigideces longitudinales y transversales respectivamente.

No obstante para grandes valores de i° , e igual fricción, (coeficiente μ) en las direcciones X e Y, la fuerza total esta en oposición directa al vector velocidad de deslizamiento \vec{i} , se tiene:

$$F_{x0} = \mu \cdot F_z$$

$$F_x = -(i_x / i) \cdot F_{x0} (i^\circ)$$

$$= -(i_x / i) \cdot \mu F_z$$

y de forma similar para F_y .

$$F_y = -(i_y / i) \cdot \mu \cdot F_z$$

En la realidad el coeficiente de fricción (μ), no es igual en la dirección X que en la Y, siendo necesario utilizar un factor adicional que modifica la fuerza lateral. Este factor de dirección se denomina (ϵ_d) y una vez introducido se tiene:

$$F_X = - (i_X^* / i^*) \cdot F_{X0} (i^*)$$

$$F_Y = - \epsilon_d \cdot (i_Y^* / i^*) \cdot F_{Y0} (i^*)$$

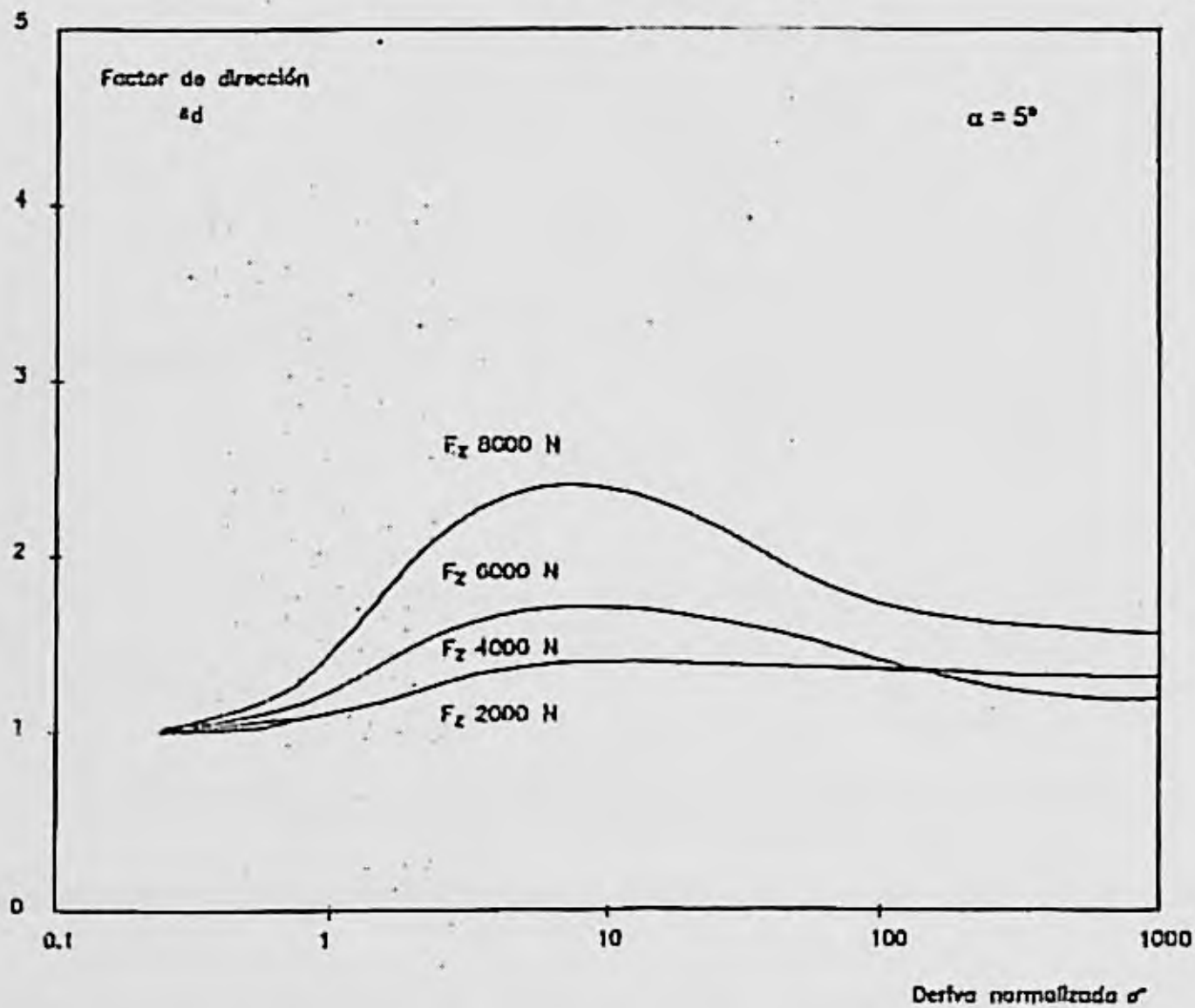


Figura 2.73. Valores de ϵ_d para diferentes cargas y $\alpha = 2^\circ$.

La magnitud de ϵ_d , es 1 para pequeños valores de i^* y, i_{Ym}/i_{Xm} para grandes valores de i^* . Para valores intermedios de i^* , ϵ_d se determina por medio de las medidas obtenidas durante los ensayos combinados de esfuerzo lateral y longitudinal.

Las figuras 2.72 y 2.73 muestran ejemplos de la variación de ϵ_d (i^* , F_z , α) para diferentes cargas verticales y ángulos de deriva.

Por último hay que señalar que, debido a la acción de las fuerzas de frenado, la rigidez transversal del neumático se hace más pequeña. Por esta razón las fuerzas transversales se dan para un ángulo de deriva fijo y en función de las fuerzas de frenado.

Este hecho puede ser tenido en cuenta sin más que ajustar el coeficiente B de las fuerzas laterales. El incremento de B es:

$$\Delta B = -\beta \cdot F_x \cdot B \quad (\beta > 0)$$

Siendo β la sensibilidad de la rigidez transversal a las variaciones de las fuerzas longitudinales.

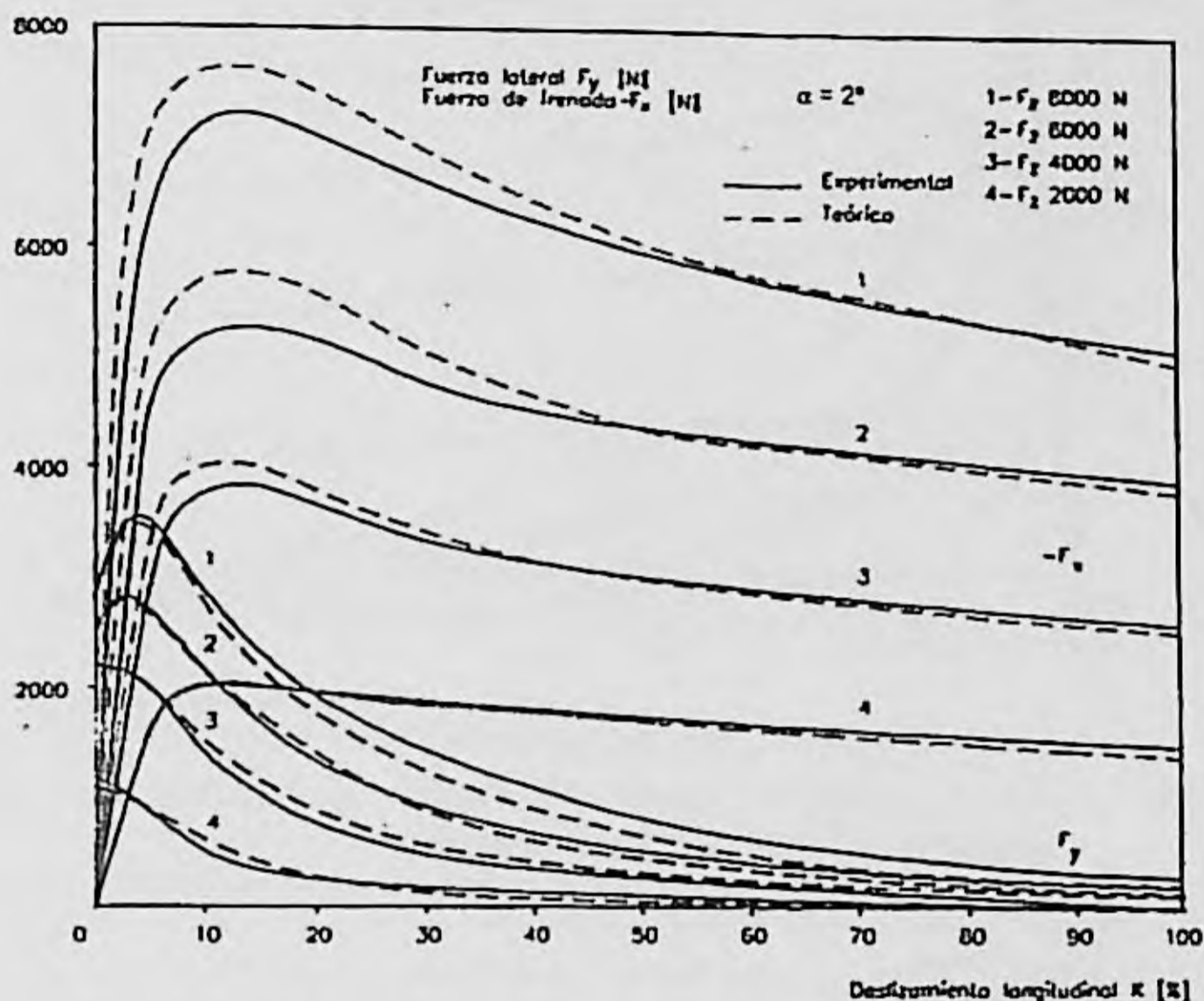


Figura 2.74. Fuerza lateral y fuerza de frenada en función del deslizamiento longitudinal K , y 2° de ángulo de deriva.

En las figuras 2.74. y 2.75 se comparan los resultados de las medidas con los obtenidos mediante cálculo, en varias situaciones de esfuerzos combinados longitudinales y transversales. Las curvas dan la variación de los esfuerzos de frenada y los esfuerzos longitudinales en función del deslizamiento longitudinal y, también, las fuerzas laterales en función de las fuerzas de frenada.

Para comparar los cálculos y las medidas, los esfuerzos de frenada medidos fueron corregidos con el valor de la resistencia a la rodadura.

Como se observa en la figura 2.74 y 2.75, con la ayuda de ϵ_d y el ajuste del valor del coeficiente B , para las fuerzas laterales, el modelo teórico tiene una buena aproximación a las medidas.

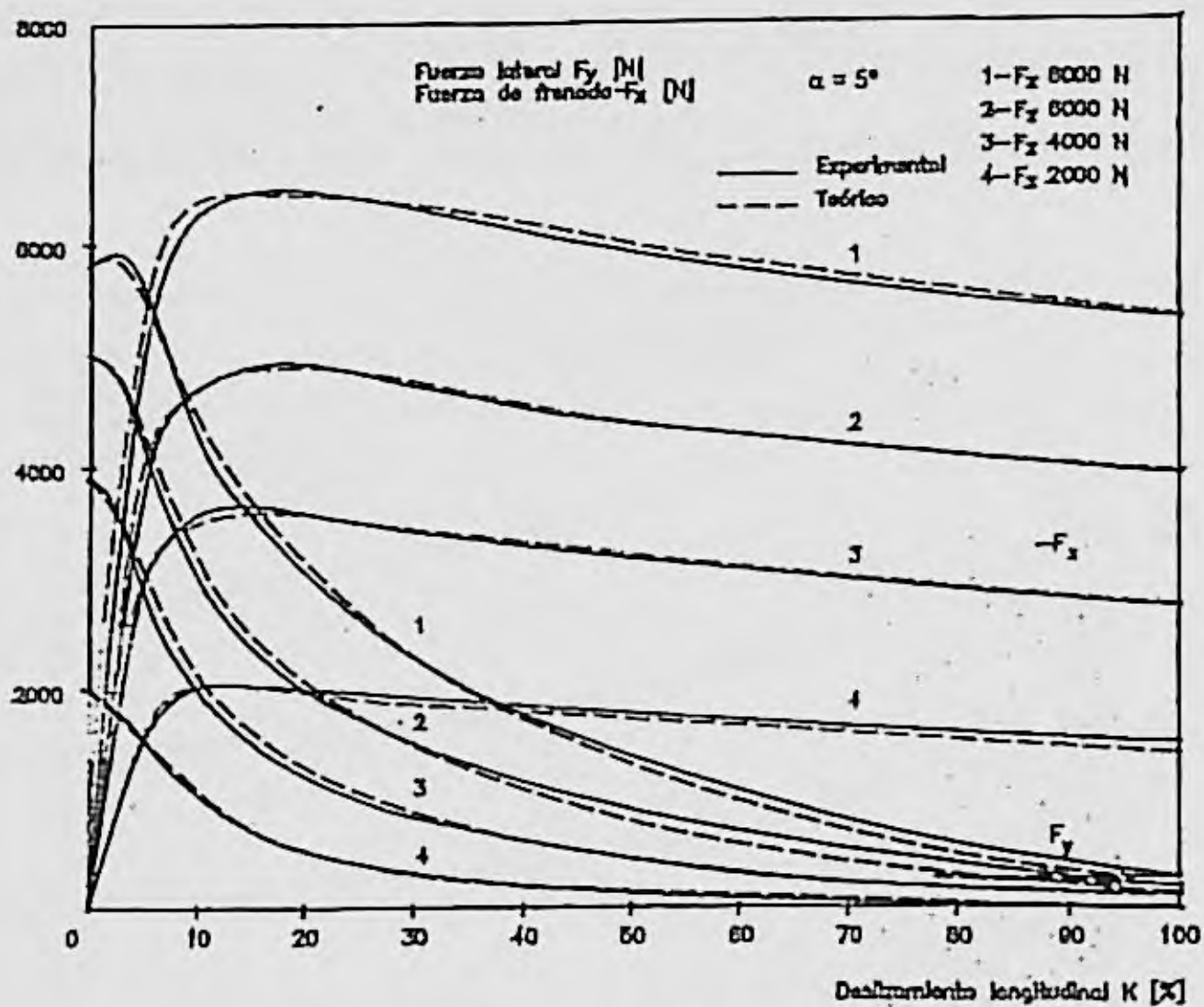


Figura 2.75. Fuerza lateral y fuerza de frenada en función del deslizamiento longitudinal K , y 5° de ángulo de deriva.

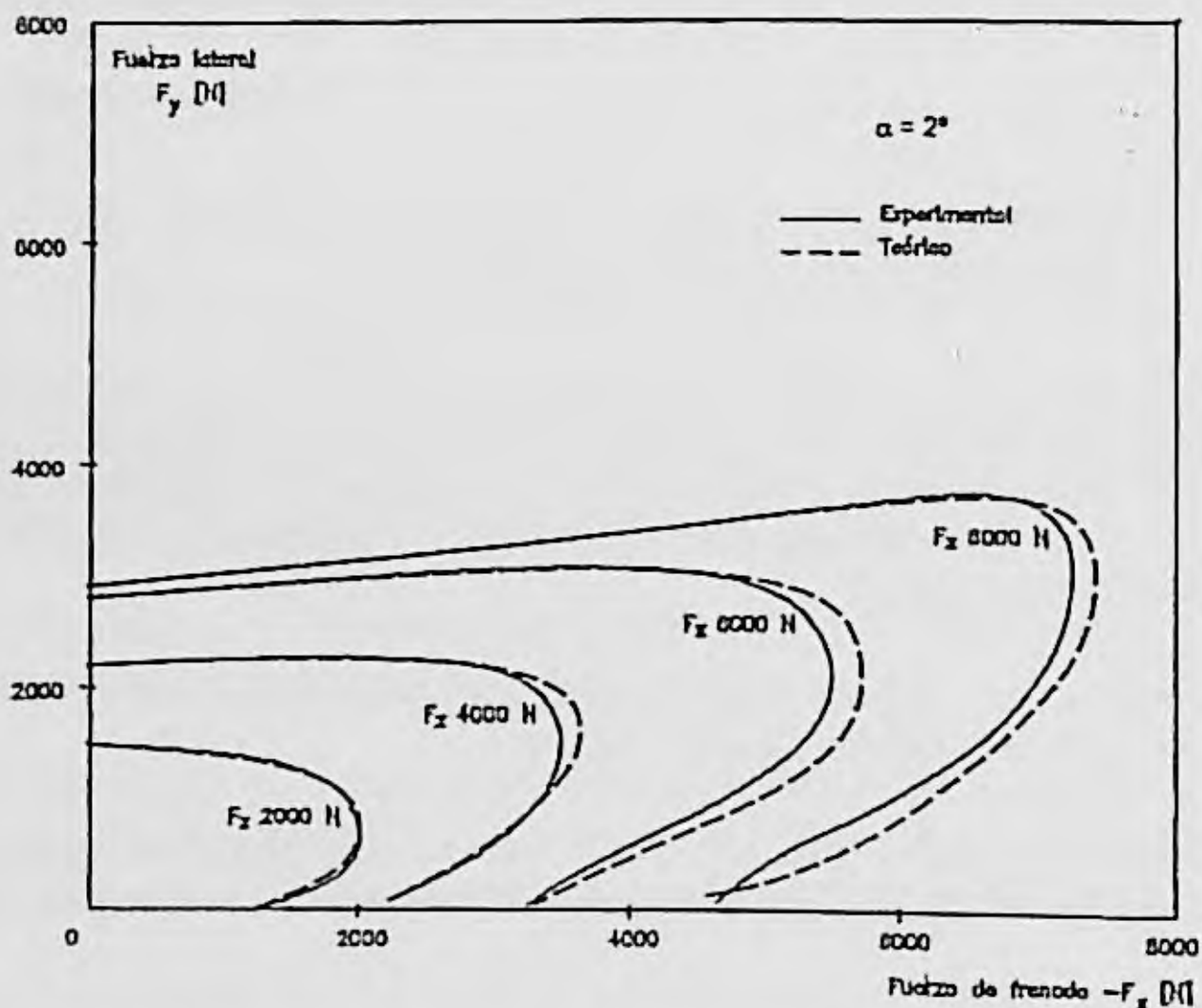


Figura 2.76. Fuerza lateral en función de fuerza de frenada con $\alpha = 2^\circ$.

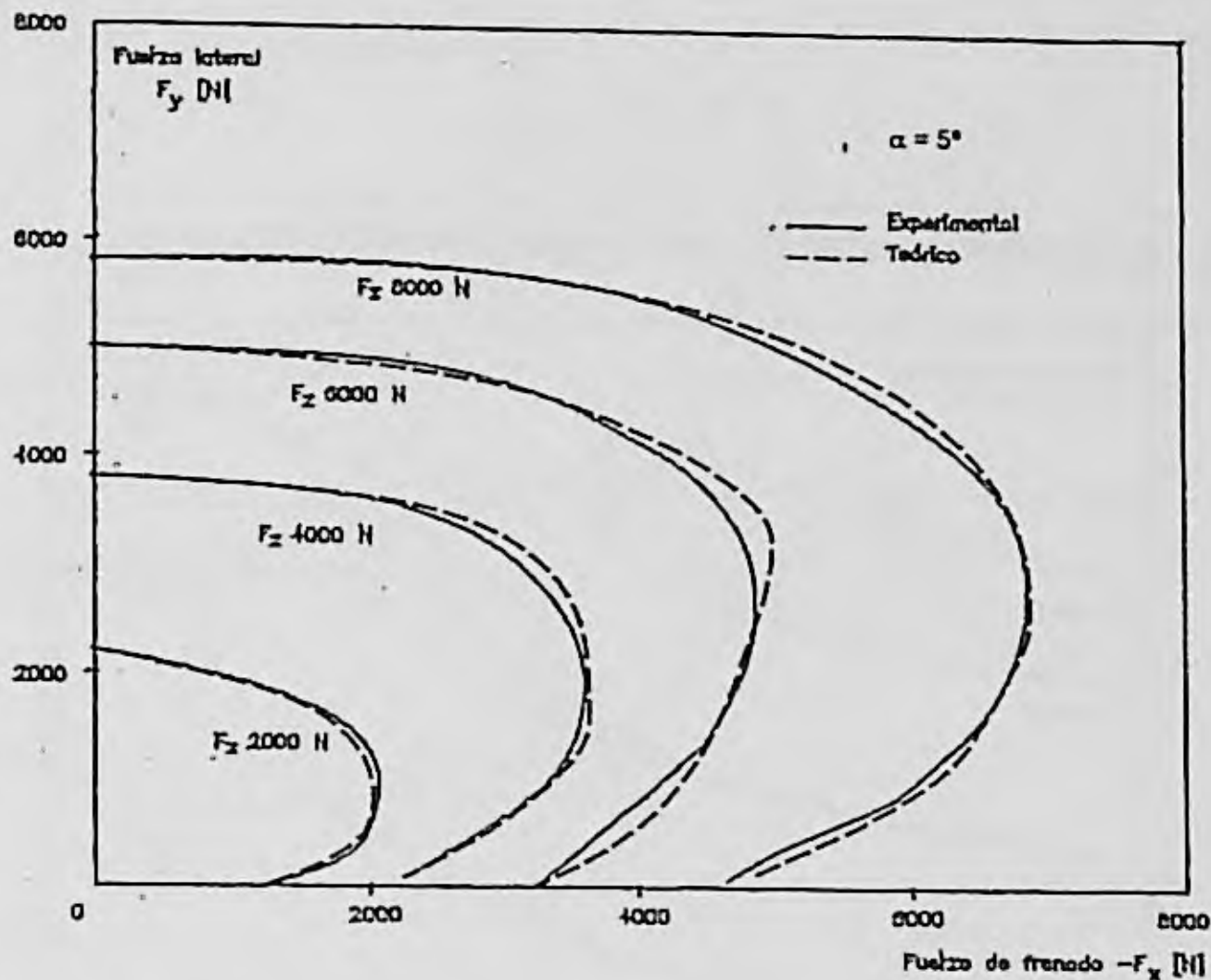


Figura 2.77. Fuerza lateral en función de fuerza de frenada con $\alpha = 5^\circ$.

2.5.2.6. Momento autoalineante durante esfuerzos combinados laterales y de frenada.

Para obtener el momento autoalineante durante situaciones de esfuerzos combinados laterales y de frenada, hay que multiplicar las fuerzas laterales por la distancia de retraso de la fuerza lateral en el suelo respecto al centro del área de contacto (avance de neumático). Esta distancia se obtiene en función del ángulo de deriva α ó $\tan\alpha$ durante las pruebas de esfuerzo lateral puro. La deformación a lo largo del área de contacto durante situaciones de esfuerzos combinados es prácticamente igual a la que se produce ante excitaciones puras de curva y, por lo tanto, puede suponerse que $\tan\alpha = i$. Consecuentemente, denominando dn , a la distancia que se retrasa el esfuerzo lateral respecto al centro del área de contacto, se tenía que esta distancia era función de la $\tan\alpha$ es decir $dn(\tan\alpha)$ y debido a lo comentado en el párrafo anterior puede suponerse $dn(i)$, lo cual podrá convertirse en $dn(i^\circ)$. El momento autoalineante quedará como:

$$M_{X'} = dn(i) F_Y$$

Por último y debido a la flexibilidad de la carcasa, las líneas de acción tanto de las fuerzas laterales como de las de frenada se ven desplazadas, originando este hecho un par de autoalineación. De tal forma que el momento autoalineante queda definitivamente:

$$M_Z = M_{Z'} - q \cdot F_X \cdot F_Y$$

con:

$$q = \frac{l}{k_{cY}} - \frac{l}{k_{cX}}$$

siendo k_{cX} y k_{cY} la rigidez longitudinal y lateral respectivamente de la carcasa.

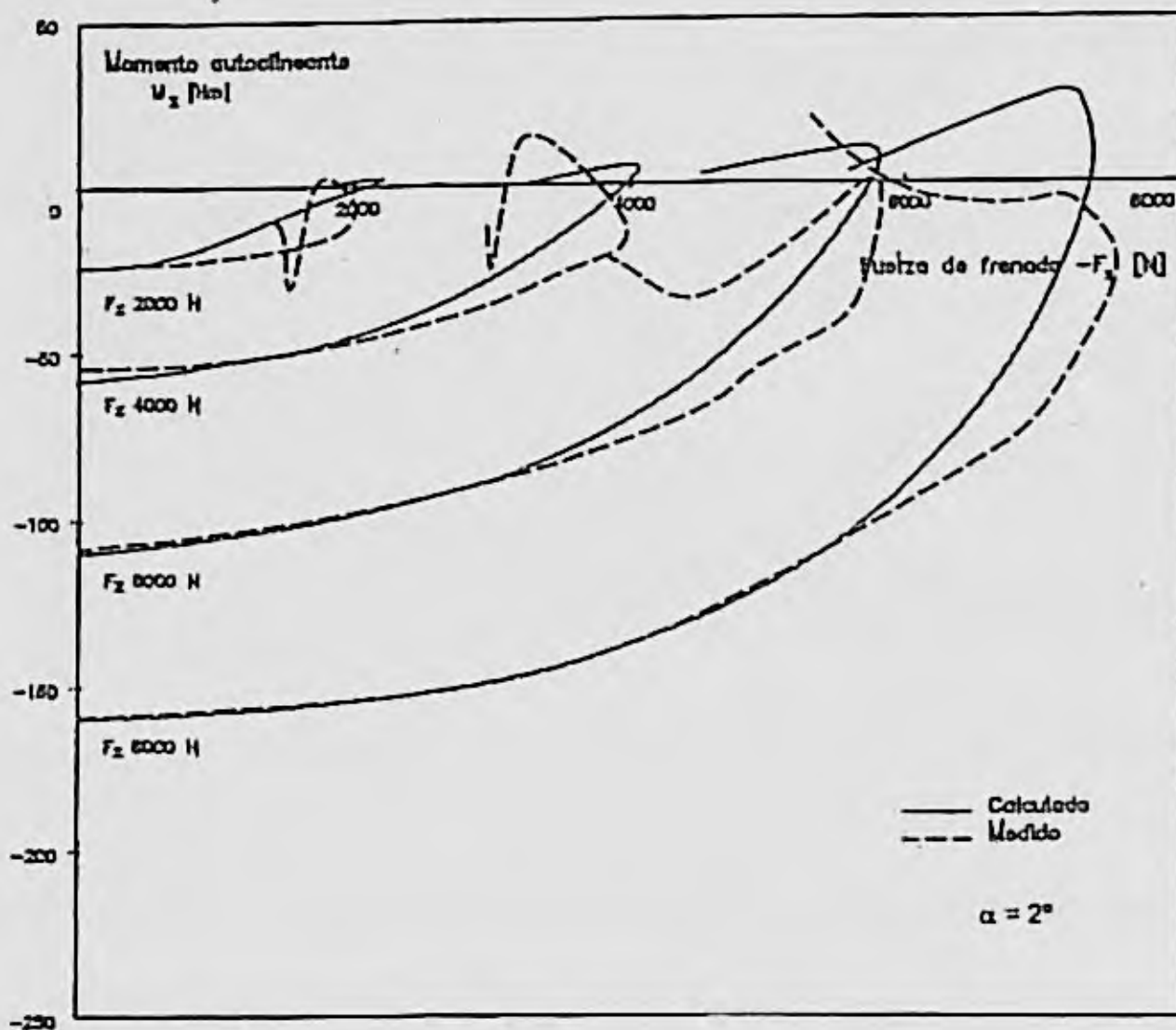


Figura 2.78. Momento autoalineante en función de la fuerza de frenada con $\alpha = 2^\circ$.

En las figuras 2.78 y 2.79 se muestra la comparación entre los momentos autoalineantes medidos y calculados.

El modelo propuesto por Bakker, Nyborg y Pacejka, desarrollado en este apartado, constituye hoy día el que más se ajusta a las curvas de comportamiento real de los neumáticos actuales.

Cuando este modelo es introducido en ordenador resulta más lento de computación que la mayoría de los ya existentes, pero, no obstante, y a pesar de este inconveniente, su uso parece imprescindible en base a obtener una suficiente precisión en los cálculos teóricos.

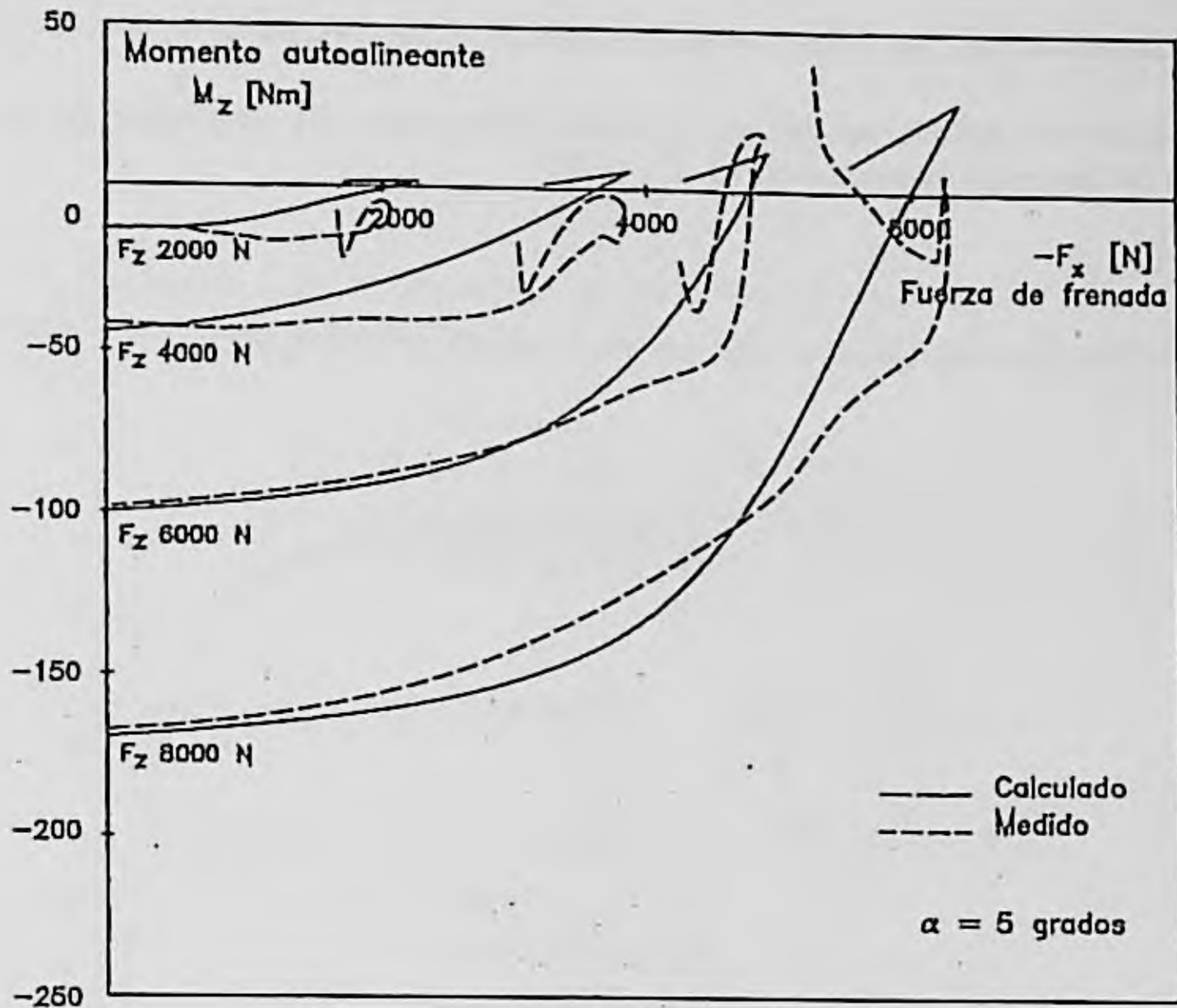


Figura 2.79. Momento autoalineante en función de la fuerza de frenada con $\alpha = 5^\circ$.

Ejercicio 2.2

Un neumático de camión soporta una carga vertical de 30 kN y presenta las siguientes características elásticas:

- Rigidez longitudinal $K_l = 255$ kN/u.desliz.
- Rigidez de deriva $K_\alpha = 140$ kN/rad.

Suponiendo que rueda sobre un pavimento de coeficiente de adherencia $\mu = 0,8$, determinar, para diferentes valores de la velocidad. (Particularícense las ecuaciones para $V_1 = 10$ km/h y $V_2 = 80$ km/h):

- 1) Variación de la fuerza de frenado con el deslizamiento en el intervalo $i_p = 0-30\%$ suponiendo $F_y = 0$.
- 2) Variación de la fuerza transversal con el ángulo de deriva en el intervalo $\alpha = 0-20^\circ$, suponiendo $F_x = 0$.

- 3) Variación de las fuerzas transversal y longitudinal, suponiendo $\alpha=6^\circ$.

Utilizar un método empírico y expresar gráficamente los resultados. El valor del coeficiente de reducción de adherencia es $A_i = 0,011$.

SOLUCION:

Para resolver este ejercicio utilizaremos el modelo de DUGOFF.

$$\lambda = \frac{\mu_0 \cdot P \cdot \left(1 - A_i \cdot V \sqrt{(i_p^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \right) (1 - i_p)}{2 \sqrt{K_i^2 i_p^2 + K_\alpha^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$F_x = \frac{K_i \cdot i_p}{1 - i_p} f(\lambda) \quad f(\lambda) = \lambda (2 - \lambda) \quad \text{para } \lambda < 1$$

$$F_y = \frac{K_\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - i_p} \quad f(\lambda) = 1 \quad \text{para } \lambda \geq 1$$

siendo:

1. Variación de la fuerza de frenado

Para la velocidad $V = 10 \text{ km/h}$ despreciando $A_i \cdot V (\approx 0)$, se tiene que:

$$\lambda = \frac{\mu_0 \cdot P \cdot (1 - i_p)}{2 \cdot K_x \cdot i_p} = \frac{0,8 \cdot 30 \cdot (1 - i_p)}{2 \cdot 255 \cdot i_p}$$

es decir:

$$\lambda = 0,047 \frac{1 - i_p}{i_p}$$

Análogamente para la velocidad de $V = 80 \text{ km/h}$,

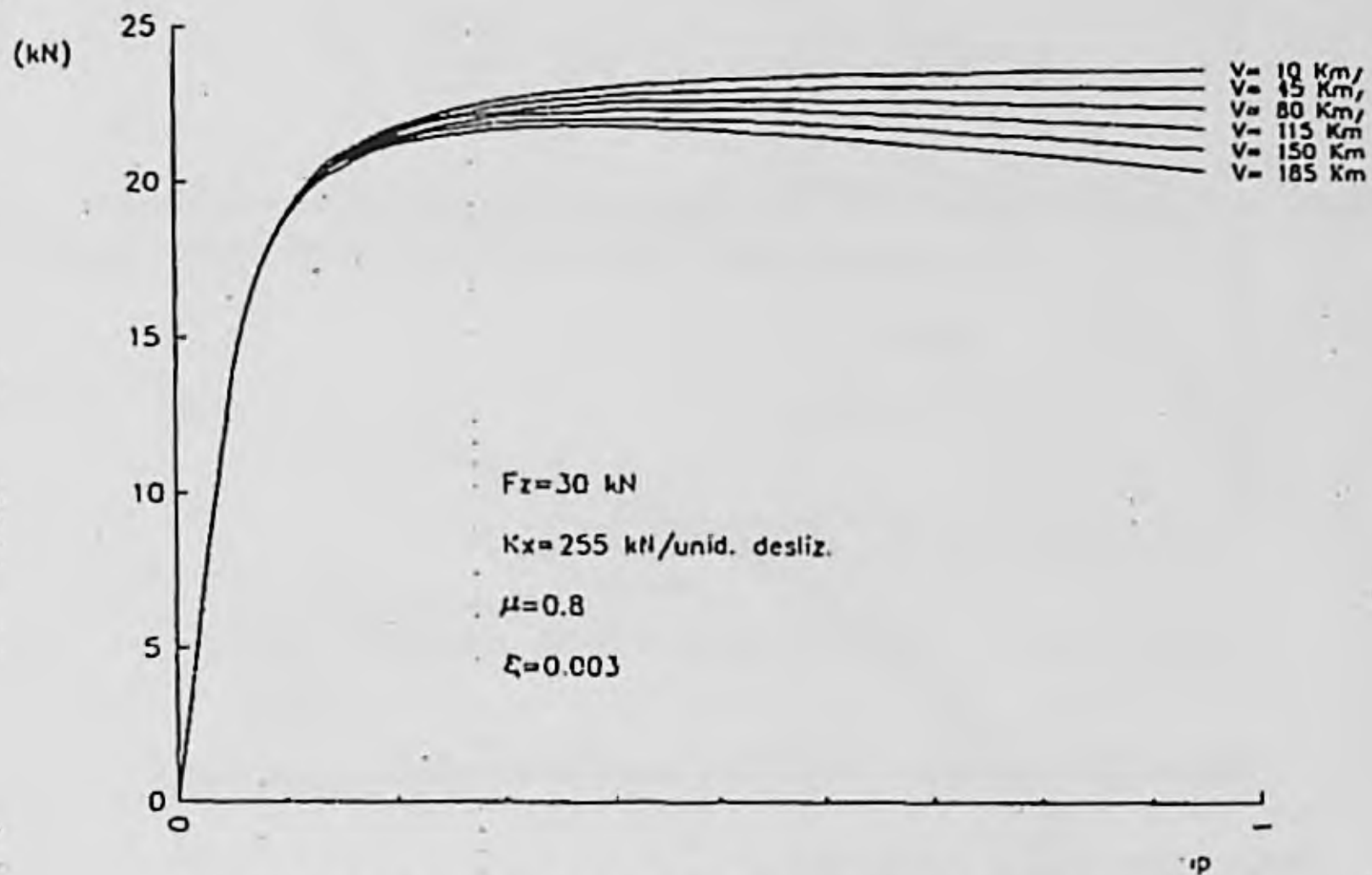
$$\lambda = \frac{\mu_0 \cdot P \cdot (1 - A_i \cdot V \cdot i_p) \cdot (1 - i_p)}{2 \cdot K_x \cdot i_p}$$

$$\lambda = 0,047 \frac{(1 - 0,24 \cdot i_p) \cdot (1 - i_p)}{i_p}$$

luego la fuerza longitudinal es:

$$F_x = \frac{255 \cdot i_p}{1 - i_p} f(\lambda)$$

En la figura 2.80 se representa la variación de la fuerza de frenado con el deslizamiento para diferentes velocidades.



VARIACION DE LA FUERZA DE FRENADO CON EL DESLIZAMIENTO.

Figura 2.80. Variación de la fuerza de frenado con el deslizamiento.

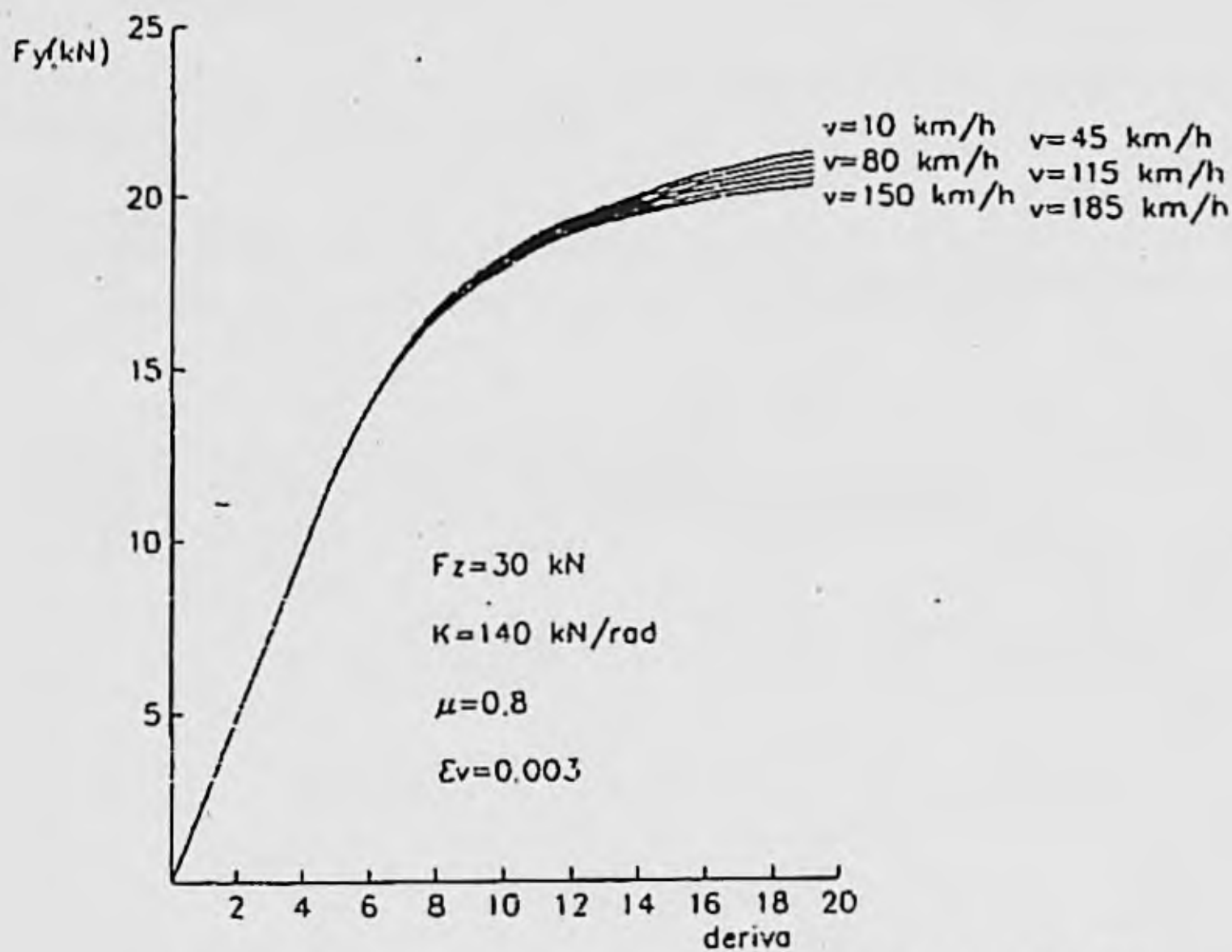
2. Variación de la fuerza lateral

Con los datos del enunciado se tiene que par $V = 10 \text{ km/h}$

$$\lambda = \frac{\mu_0 \cdot P}{2 \cdot K_\alpha \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{0,8 \cdot 30}{2 \cdot 140} \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

es decir,

$$\lambda = 0,0857 \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$



VARIACION DE LA FUERZA LATERAL CON EL ANGULO DE DERIVA

Figura 2.81. Variación de la fuerza lateral con el ángulo de deriva.

Para una velocidad de $V = 80 \text{ km/h}$,

$$\lambda = \frac{\mu_0 P (1 - A_i \cdot V \cdot \text{tg } \alpha)}{2 \cdot K_a \cdot \text{tg } \alpha}$$

luego,

$$\lambda = \frac{0,0857}{\text{tg } \alpha} - 0,02$$

por lo que la fuerza transversal es:

$$F_y = 140 \cdot \text{tg } \alpha \cdot f(\lambda)$$

En la figura 2.81 se representa la variación de la fuerza lateral con el ángulo de deriva, para diferentes valores de la velocidad.

3. Variación de la fuerza transversal y longitudinal para $V = 80 \text{ km/h}$

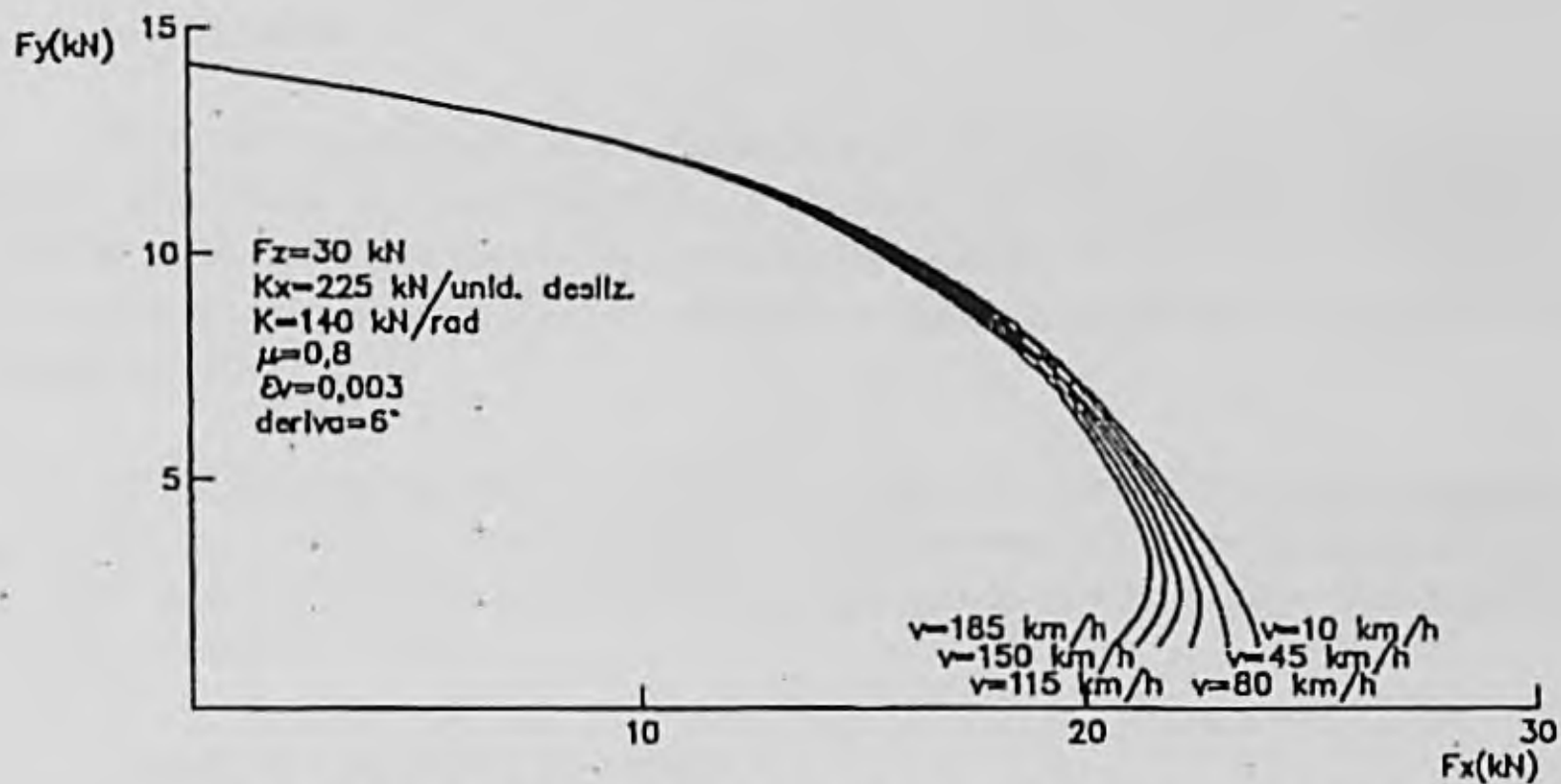
En este caso:

$$\lambda = 12 \cdot \frac{(1 - 0,24 \cdot \sqrt{0,011 + i_p^2}) \cdot (1 - i_p)}{\sqrt{65025 \cdot i_p^2 + 216,52}}$$

Es decir:

$$F_x = \frac{255 \cdot i_p}{1 - i_p} f(\lambda) \quad F_y = \frac{140 \cdot \text{tg } \alpha}{1 - i_p} f(\lambda)$$

En la figura 2.82 se representa la variación de la fuerza lateral en función de la fuerza longitudinal para diferentes valores de la velocidad.



VARIACION DE LA FUERZA LATERAL EN FUNCION DE LA FUERZA LONGITUDINAL

Figura 2.82. Variación de la fuerza lateral en función de la fuerza longitudinal

* BIBLIOGRAFIA

Referencias: [1], [2], [3], [4], [6], [8], [11], [21], [22], [31], [33], [34], [36], [40], [44], [47], [48] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

3.

AERODINÁMICA DE LOS AUTOMÓVILES

3.1. ACCIONES AERODINAMICAS SOBRE LOS SOLIDOS. CONCEPTOS GENERALES.

3.1.1. Introducción.

En el capítulo anterior se ha estudiado la interacción del vehículo con la superficie de rodadura, a través de la rueda neumática, y puesto de manifiesto la gran importancia de tal interacción en el comportamiento del vehículo. Para completar el análisis de las acciones que el medio ejerce sobre el automóvil, es necesario estudiar la interacción de éste con el aire, en cuyo seno se mueve.

La aerodinámica vehicular tiene como objeto el estudio del conjunto de acciones y efectos que ejerce el aire sobre el vehículo en movimiento, así como la forma de lograr que éstos sean lo más favorables posible. Pueden distinguirse dos grupos de efectos asociados a dos flujos diferentes de aire:

- Flujo de aire externo al vehículo.
- Flujo de aire que pasa a través de compartimentos del vehículo.

El primer flujo de aire, actuando sobre las superficies exteriores del vehículo, produce zonas de presión o depresión y rozamiento viscoso con las paredes; todo ello origina esfuerzos que influyen, no solo en el avance del vehículo, ofreciendo una resistencia de naturaleza aerodinámica, sino que afectan a las cargas sobre las ruedas y, en ocasiones, a la estabilidad del automóvil. Por otra parte, las partículas en suspensión en el seno del aire, arrastradas por la corriente, se precipitan sobre superficies del vehículo, ensuciando éstas; cuando se trata de las superficies acristaladas o luces, esta suciedad afecta a la visibilidad y, por tanto, a la seguridad. El fenómeno se verá influenciado por el diseño aerodinámico del vehículo.

Por otra parte, ciertos fenómenos, como los de despegue de la capa límite, pueden

producirse en forma intermitente a frecuencias audibles, por lo que se convierten en fuentes de ruido.

En lo que se refiere a la circulación interna del aire, ésta viene exigida por dos necesidades fundamentales: la refrigeración del motor y la aireación del habitáculo de pasajeros. La primera ha ido adquiriendo un mayor interés en el proceso de diseño, debido al aumento de potencia de los motores, a los diseños más compactos que han requerido reducciones del tamaño del motor y a la reducción de la superficie abierta para entrada de aire, tanto por motivos de estética, como por criterios de seguridad que reclaman refuerzos en la parte delantera del vehículo.

En cuanto a la aireación del habitáculo de pasajeros, los criterios de confort, tanto con clima caluroso como frío, son cada vez más exigentes; la circulación de aire sobre las superficies acristaladas, para evitar formación de hielo o condensación de vapor, así como la extracción de gases o vapores del compartimento y su reemplazamiento por aire, en forma adecuada, plantea problemas a los que se han ido prestando cada vez más atención.

Ambos flujos de aire, el interior y el exterior, no son independientes. Las zonas de mayor presión o depresión externas, influyen en la decisión de situar las superficies previstas para las entradas y salidas de aire, con objeto de asegurar una aireación adecuada de los compartimentos interiores y evitar el paso del agua, incluso en condiciones exteriores extremas.

Aunque los aspectos aerodinámicos de los vehículos han sido estudiados casi desde el inicio de la era automovilística, la llamada crisis del petróleo hizo incrementar considerablemente la atención por estos problemas, lo cual es completamente lógico si se piensa que a 100 Km/h la resistencia aerodinámica viene a representar del orden del 80% de la resistencia total de un vehículo de tamaño medio europeo.

De todos modos, cada tipo de vehículo plantea problemas aerodinámicos que son críticos en aspectos diferentes. La principal preocupación en turismos ha sido, durante estos últimos años, reducir la resistencia al avance, por razones de economía. En microbuses o furgonetas, los problemas de sensibilidad al viento lateral han requerido más atención. En cuanto a los vehículos de competición, uno de los problemas fundamentales es la fuerza de tracción, cuyo incremento impone el uso de elementos que producen una sustentación aerodinámica negativa.

La aerodinámica de los vehículos ha aprovechado y aprovecha conocimientos y experiencia obtenida del campo de aeronáutica. Sin embargo, los procedimientos seguidos en ambos casos son diferentes y, así, mientras que el diseño aerodinámico de un avión suele iniciarse mediante una modelización matemática, aplicando normalmente métodos numéricos, que es seguida de una fase experimental, en vehículos automóviles los mayores progresos se han realizado experimentalmente, no existiendo aun una teoría general aplicable a los mismos.

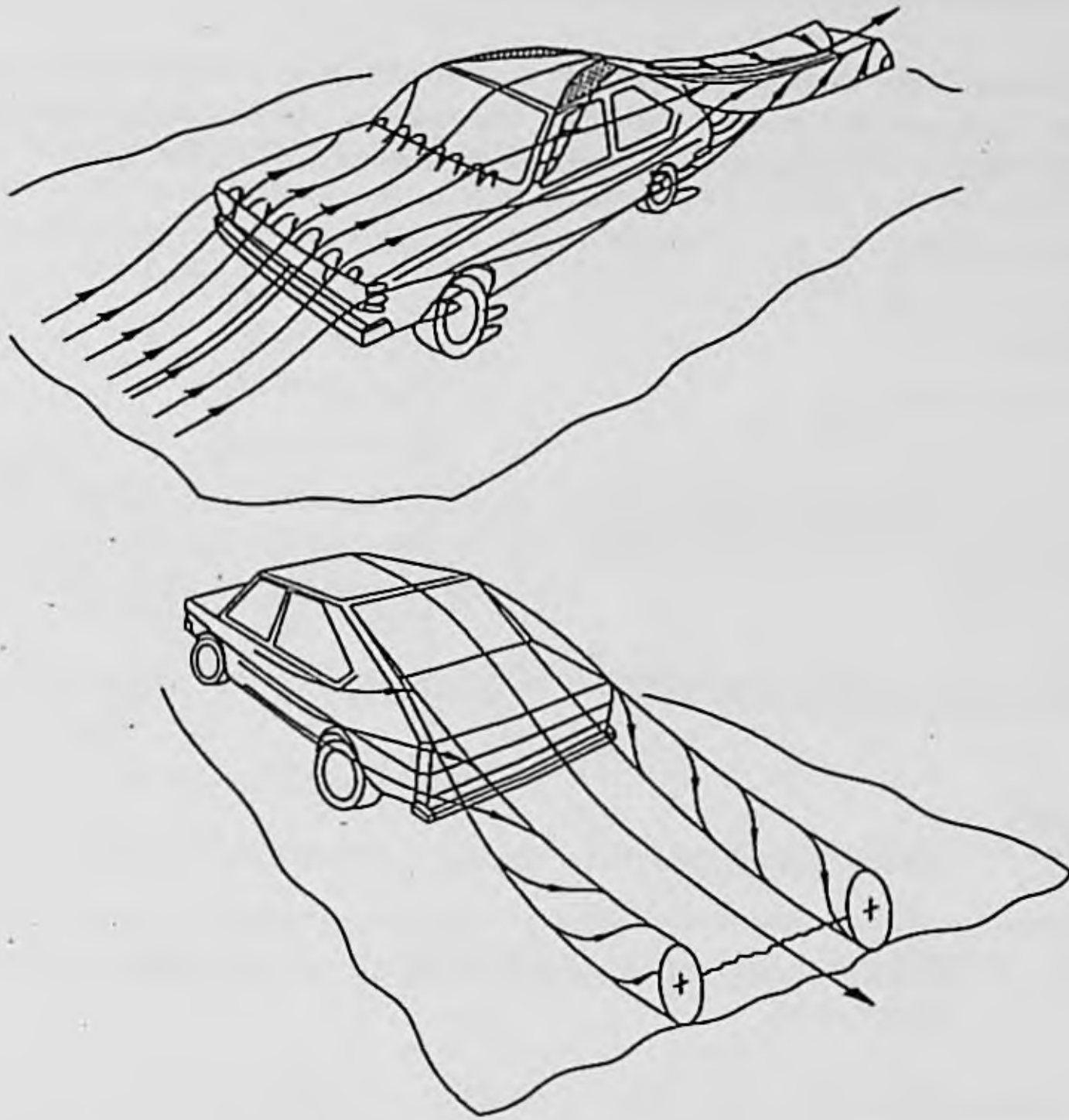


Figura 3.1. Flujo alrededor de un vehículo automóvil. (Hucho 1986).

Mientras que la aerodinámica es un factor clave en el diseño de aeronaves, en el caso de los vehículos de superficie, las demandas respecto a su estilo, prestaciones, comportamiento direccional, seguridad, confort y problemas de producción, disminuyen su importancia relativa. Por otra parte, la proximidad al suelo, dimensiones y formas de los vehículos, condicionadas, entre otras, por exigencias de optimización de sus habitáculos, y otros aspectos constructivos, crean un campo de flujo alrededor del automóvil, (figura 3.1) muy diferente al de los aviones.

En este capítulo se presentan, en forma resumida, los principales problemas aerodinámicos de los vehículos automóviles. Se presta una mayor atención a los esfuerzos que actúan sobre ellos. En la primera parte se incluyen conceptos generales de mecánica de fluidos y acciones sobre cuerpos en el seno de un fluido, que ayudan a comprender los problemas aerodinámicos específicos de los automóviles.

3.1.2. Propiedades de los fluidos incompresibles.

Desde el punto de vista del estudio de la aerodinámica de los vehículos interesan tres propiedades fundamentales del aire: densidad, viscosidad y conductividad térmica. En el estudio que se realiza en este texto, las dos primeras tienen una mayor importancia.

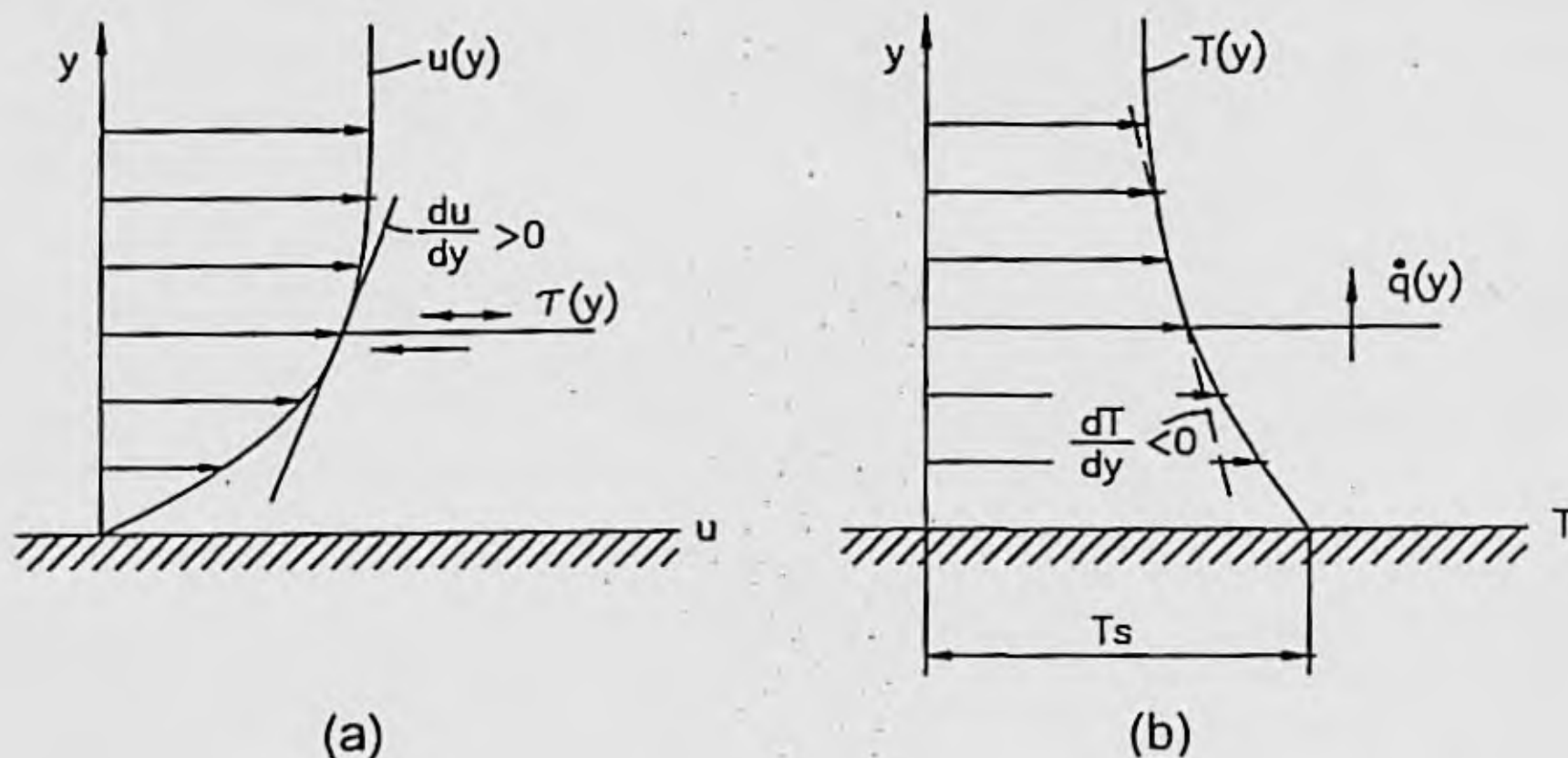


Figura 3.2. Distribución de velocidad y temperatura en la zona próxima a la superficie de un cuerpo.

Como es bien sabido, la densidad de un fluido se ve influenciada por la presión y la temperatura. Los vehículos automóviles alcanzan velocidades máximas muy alejadas de la velocidad del sonido; para las gamas normales de velocidad, la variación de la presión y de la temperatura en el campo de flujo, varía poco respecto a los valores correspondientes al flujo libre del fluido, a cierta distancia del vehículo, por tanto, resulta apropiado suponer que la densidad no varía y, en consecuencia, que el aire actúa como un fluido incompresible. El valor de la densidad, en condiciones normales (1 atm y 288° K) es 1.225 Kg/m³ (Ns²/m⁴). Los valores para diferentes altitudes se incluyen en la Tabla 3.1.

La viscosidad está originada por rozamiento molecular en el seno del fluido, el cual origina un gradiente de velocidad entre las partículas que se encuentran en contacto con la superficie de un cuerpo y la zona del fluido que circula libremente alrededor del mismo, (figura 3.2 a). En la figura, u es la velocidad.

La zona en la que se produce la variación de velocidad se denomina capa límite y tiene un espesor muy reducido. La viscosidad relaciona las tensiones cortantes entre superficies paralelas a la del cuerpo, dentro de la capa límite, con el gradiente de velocidad, siendo:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad 3.1$$

μ es denominada viscosidad dinámica y, para unas condiciones determinadas del fluido, es un factor constante que, en general, depende de la temperatura del mismo. Suele utilizarse también otro valor, deducido del anterior, que es la viscosidad cinemática ν , siendo:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad 3.2$$

Este valor está afectado por la presión y la temperatura y en fluidos incomprensibles solo por la segunda. En las condiciones normales antes señaladas, la viscosidad del aire tiene los siguientes valores:

$$\mu = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$$

$$\nu = 1.4607 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

En la tabla 3.1 se presentan valores de ν para diferentes altitudes.

Z (m)	$\rho(\text{Kg/m}^3)$	$\nu(\text{m}^2/\text{s})$
0	1.225	1.453×10^{-5}
500	1.168	1.510×10^{-5}
1000	1.112	1.571×10^{-5}
1.500	1.059	1.636×10^{-5}
2.000	1.007	1.705×10^{-5}
2.500	0.957	1.777×10^{-6}
3.000	0.909	1.853×10^{-6}

TABLA 3.1. Valores de la densidad y de la viscosidad cinemática en función de la altitud.

La viscosidad del aire produce, en los vehículos, una resistencia aerodinámica, como consecuencia del rozamiento con las superficies de éstos, siempre que exista una capa límite con un gradiente de velocidad.

En cuanto a la conductividad térmica K , ésta relaciona el flujo de calor por unidad de área q , con el gradiente de temperatura (ver figura 3.2b) según la expresión:

$$q = -K \frac{dT}{dy} \quad 3.3$$

El valor de K depende de la temperatura. Para el aire, en las condiciones normales ya definidas, este valor es: $K = 0.00253 \text{ J/ms}^\circ\text{K}$.

3.1.3. Flujo exterior

Si consideramos que el aire está en reposo, o se mueve a una velocidad despreciable frente a la del vehículo, podemos suponer que éste está quieto y el aire se mueve respecto a él con la velocidad V_∞ con que el automóvil avanza. En torno al vehículo se forma un campo de flujo como el representado en la figura 3.3.

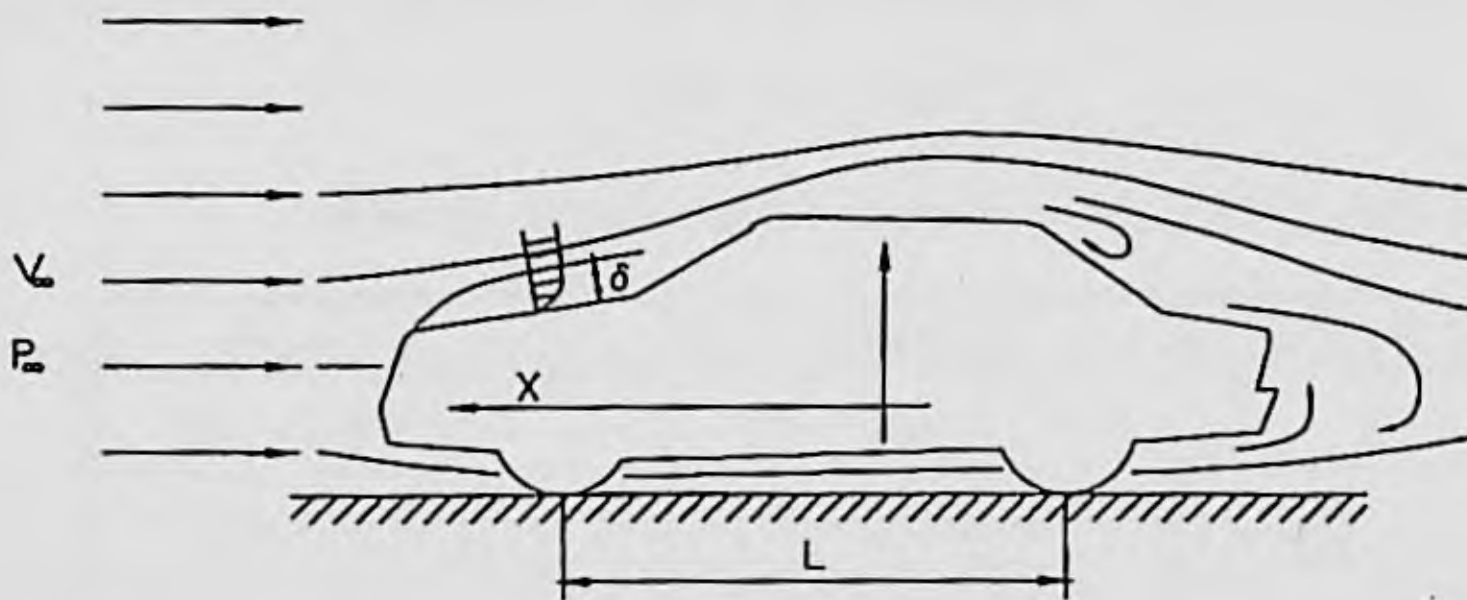


Figura 3.3. Flujo de aire alrededor de un vehículo automóvil (esquema bidimensional).

En las zonas en las que no se producen "separaciones" entre el fluido y la superficie del vehículo, se forma una capa límite de unos pocos milímetros de espesor gobernada por la viscosidad del aire.

Fuera de la capa límite, el fluido se comporta como no viscoso. Cuando el flujo se separa, por ejemplo en la parte posterior del vehículo, la capa límite es destruida y el flujo queda regido por los efectos de la viscosidad.

La presión sobre la capa límite está determinada por el flujo no viscoso que circula fuera de ella. Considerando una línea de corriente, aplicando la ecuación de Bernouilli a dos puntos de la misma y despreciando el término correspondiente a la energía potencial gravitatoria, se obtiene la expresión

$$P_T = P + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{Constante} \quad 3.4$$

P y V representan la presión y velocidad, respectivamente, a lo largo de la línea de corriente. P es la presión estática, $\frac{1}{2} \rho \cdot V^2$ corresponde a la presión dinámica y P_T es la presión total, cuyo valor puede obtenerse considerando la presión del aire y la velocidad del vehículo, cuyos valores corresponden a puntos suficientemente alejados, de su superficie.

$$P_T = P_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \quad 3.5$$

Una primera consecuencia que puede extraerse de la ecuación 3.5 es que en aquellos puntos en los que el fluido se "estanca", como es el caso de los puntos más adelantados del vehículo, $V = 0$ y $P = P_T$, siendo éste el máximo valor de la presión que actúa sobre la superficie del mismo. Cuando V alcanza su valor máximo la presión será mínima.

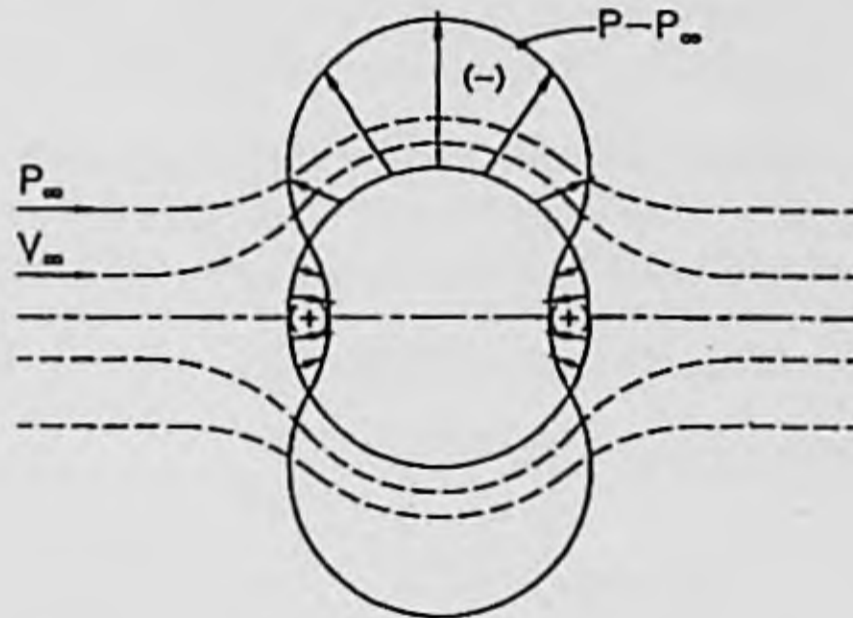


Figura 3.4. Líneas de corriente y distribución de un fluido en torno a un cilindro de longitud infinita, situado normalmente a la corriente de un fluido no viscoso.

Aplicando los conceptos anteriores al flujo que circula alrededor de una esfera o cilindro de gran longitud, se obtendría una variación de presiones como se ilustra en la figura 3.4. Al integrar todas las fuerzas de presión en dirección del movimiento, la resultante es nula, lo cual es conocido como la paradoja de D'Alembert, quien escribió en 1768: "No veo cómo, lo admito, se puede explicar la resistencia de los fluidos por medio de la teoría, en forma satisfactoria. Me parece, al contrario, que esta teoría, tratada y estudiada

con profunda atención predice, al menos en la mayoría de los casos, resistencia absolutamente nula". En otras palabras, un fluido ideal no viscoso no ofrece resistencia alguna al movimiento de los cuerpos, como consecuencia de la compensación de las fuerzas de presión que actúan sobre él. Esto queda ilustrado en la figura 3.4.

En la realidad, como ningún fluido real está exento de viscosidad, la paradoja de D'Alambert no es aplicable.

La viscosidad es, pues, responsable de la resistencia que ofrecen los fluidos al movimiento de los cuerpos y lo es por efectos distintos: el rozamiento y la modificación que produce, como consecuencia de las separaciones, sobre el campo de flujo, origina una resultante no nula de las presiones. Este segundo efecto es, en general, más importante que el primero.

3.1.3.1. Resistencia debida al rozamiento

Como se ha dicho, uno de los efectos de la viscosidad es el rozamiento entre fluido y superficie, el cual produce una tensión tangencial τ_s (figura 3.5) cuya acción sobre toda la superficie representa una primera componente, de los esfuerzos que ejerce el fluido sobre el cuerpo, en la dirección del movimiento relativo entre ambos:

$$R_{nr} = \int_s \tau_s \cos \varphi ds \quad 3.6$$

Si no existen separaciones, esta componente es la principal contribución a la resistencia aerodinámica total. Para cuantificar el efecto de esta acción sobre el cuerpo, se define un coeficiente adimensional que no depende de las condiciones del flujo libre debidas al movimiento, es decir, de la presión dinámica $\frac{1}{2} \rho \cdot V_\infty^2$. Este coeficiente, para la resistencia en la dirección del movimiento, X_r , es:

$$C_{xr} = \frac{R_{xr}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A} \quad 3.7$$

Siendo A una superficie característica del cuerpo. Cuando en la capa límite se produce un flujo turbulento, el efecto es un incremento de la viscosidad aparente y un aumento de C_{xr} . La transición entre los regímenes laminar y turbulento se ve favorecida por presiones bajas y números de Reynolds elevados. Por otra parte, las rugosidades superficiales aumentan la resistencia aerodinámica cuando se produce flujo turbulento.

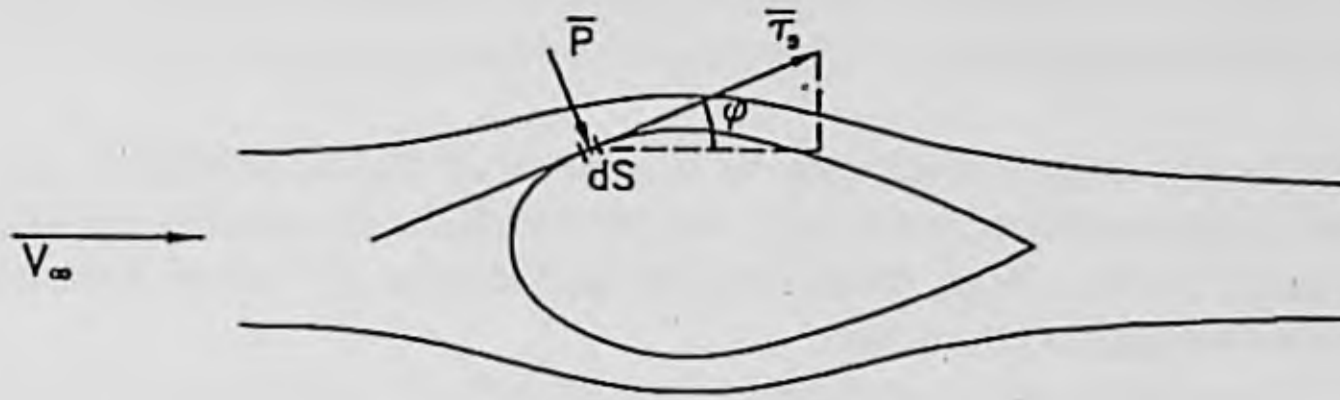


Figura 3.5. Tensión tangencial debida al rozamiento.

3.1.3.2. Resistencia de presión

Tanto el régimen laminar como el turbulento, en la capa límite, dependen de la distribución de presiones que, como se dijo, viene impuesta por el flujo exterior. Cuando aumenta la presión en la dirección del flujo, la fuerza de rozamiento entre la superficie y el fluido aumenta y se retrasa el flujo, más intensamente, cuanto mayor sea su proximidad a la superficie. En estas condiciones puede producirse, incluso, una inversión de flujo. A este fenómeno, que se ilustra en la figura 3.6, se denomina separación.

En la transición, entre el flujo normal de la capa límite y una zona de separación, se cumple que, en puntos suficientemente próximos a la superficie, como el punto A de la figura 3.6:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_s = 0 \quad 3.8$$

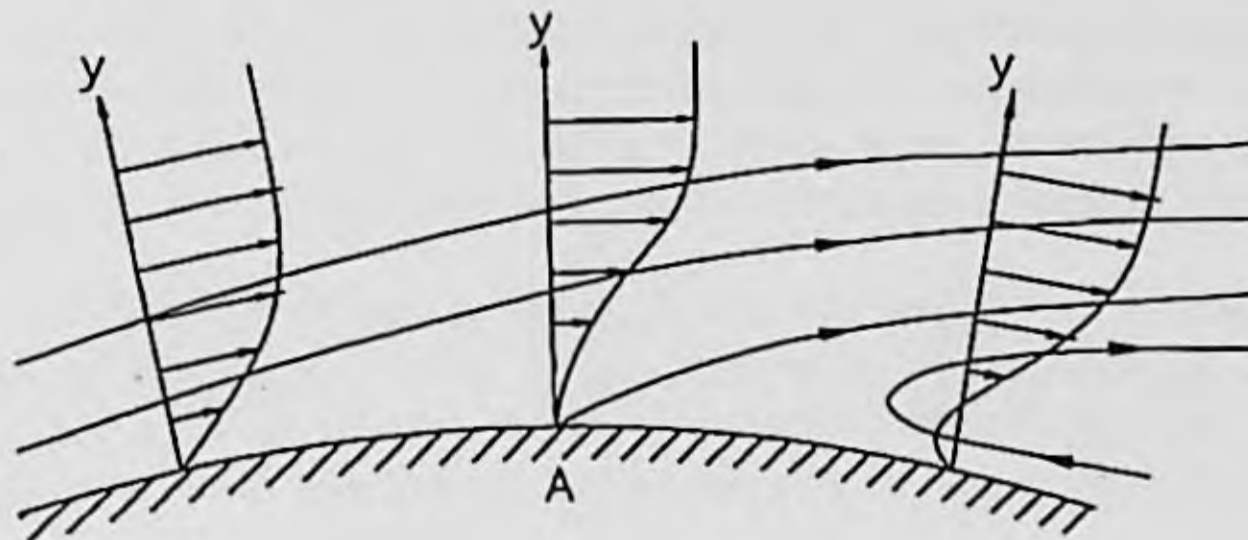


Figura 3.6. Esquema de una separación del flujo en la capa límite.

La tendencia a la separación es mayor en la medida en que se incrementa la presión en la dirección del flujo.

Cuando un cuerpo se encuentra en el seno de un fluido, existiendo movimiento relativo de uno respecto al otro, se produce, con frecuencia, un incremento de presión hacia la parte posterior de dicho cuerpo, procedente del flujo exterior no viscoso. Este incremento de presión puede producir separaciones.

Como puede observarse en la figura 3.7, el flujo se comporta en forma diferente, según las condiciones en que dichas separaciones se producen, respecto al caso ideal del flujo no viscoso (caso a). En dicha figura, la magnitud representada en ordenadas es el coeficiente de presión, definido como:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} \quad 3.9$$

P es la presión local sobre la superficie del cuerpo, para cada punto cuya situación en el plano viene definido por su coordenada angular; P_∞ y V_∞ son los valores de presión y velocidad en el flujo libre.

Como se ve en la figura, cuando el flujo es no viscoso (a), las presiones en los puntos más próximos y más alejados del origen, según el eje X , ($\varphi = 0^\circ$ y 180°) son idénticas, correspondiéndoles un valor $C_p = 1$, por lo cual no puede existir empuje (o resistencia) aerodinámica. Igual sucede en cualquier pareja de puntos, diametralmente opuestos (Paradoja de D'Alembert). En los otros dos casos, mientras que en el punto que primero recibe el flujo de corriente ($\varphi = 0^\circ$ ó 360°) la presión es positiva y $C_p = 1$, en el diametralmente opuesto ($\varphi = 180^\circ$) ésta es negativa, es decir, se produce una depresión. El resultado de ambas es un empuje en la dirección OX . En realidad, en la parte posterior, donde existe separación, se produce un efecto de "succión", que puede contribuir más, incluso, que el de presión en la parte anterior, a la resistencia aerodinámica de presión.

Por otra parte, puede observarse, que en el caso c), por formarse una capa límite turbulenta, las separaciones en la parte trasera se retrasan, quedando menos superficie expuesta a depresión y siendo inferior el valor de ésta. El paso del régimen subcrítico al supercrítico se produce para un valor del número de Reynolds de aproximadamente $5 \cdot 10^5$.

La resistencia de presión puede expresarse (figura 3.5) como:

$$R_{ap} = \int_s P \cdot \text{sen } \varphi \cdot ds \quad 3.10$$

Normalmente, la resistencia aerodinámica de presión es mayor que la de rozamiento. La suma de ambas constituye la resistencia aerodinámica total en una dirección (X):

$$R_{ax} = R_{ap} + R_{ar} \quad 3.11$$

y el coeficiente de resistencia aerodinámica en la dirección X, se define como:

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 A} \quad 3.12$$

Como valor de A suele adoptarse el área mayor de la sección transversal del cuerpo respecto a la dirección del fluido (Y), también denominada área frontal. Como se ha visto en la figura 3.7, el régimen laminar produce una mayor depresión en la parte posterior que en el régimen turbulento y, por tanto, una mayor resistencia (empuje), y como el tránsito de uno a otro depende del número de Reynolds, C_x se verá afectado por éste parámetro, lo cual puede apreciarse en la figura 3.8.

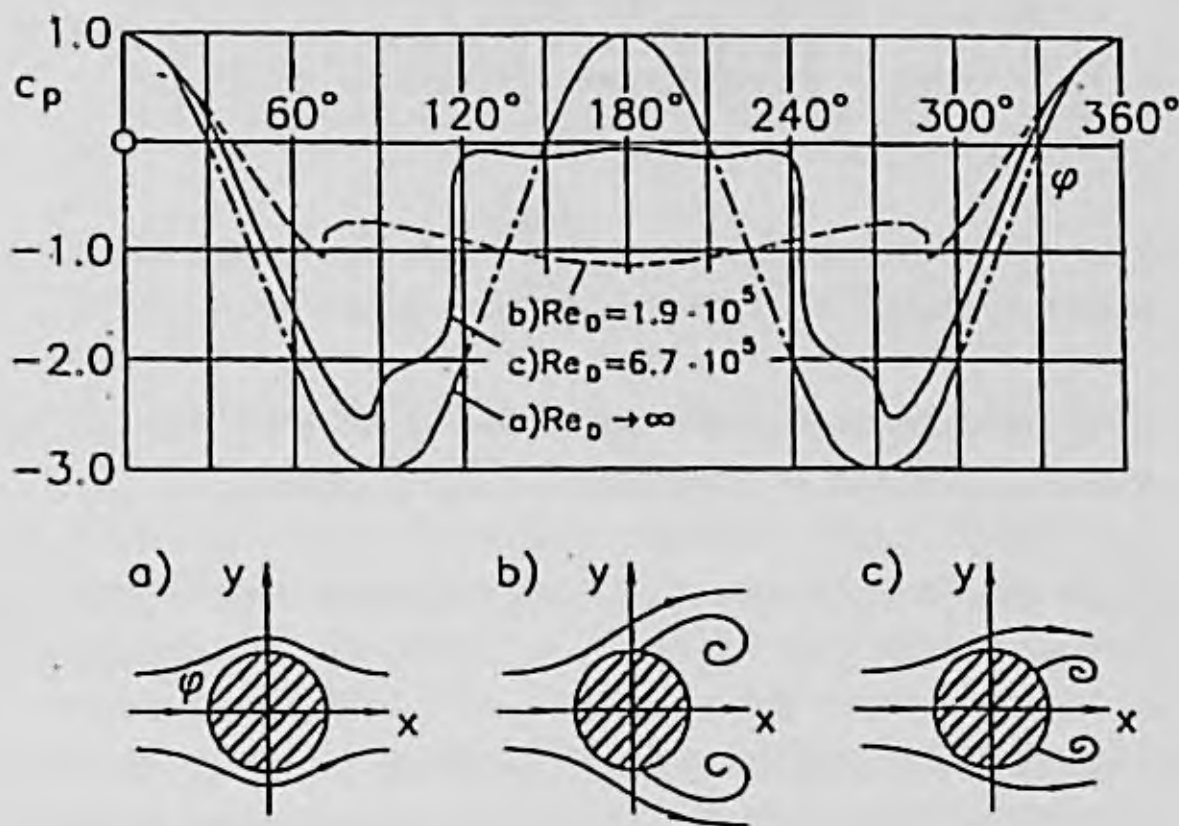


Figura 3.7. Distribución de presión y líneas de corriente para un cilindro, en función del número de Reynolds. a) flujo no viscoso; b) flujo sub-crítico, capa límite laminar; c) flujo supercrítico, capa límite turbulenta.

En el caso del cilindro, para valores pequeños de Re , el fluido en la capa límite es laminar, la separación se produce en puntos próximos a la zona de máximo espesor. La zona de bajas presiones en la parte posterior es mayor y C_x es, también, más elevado. A partir de un valor del nº de Reynolds del orden de $5 \cdot 10^5$ se produce una transición brusca al régimen turbulento con lo que la capa límite se separa más tarde de la superficie y la zona de bajas presiones se reduce, disminuyendo la "succión" y, por tanto, C_x .

En cuerpos de pequeño espesor, como es el caso de la placa, en la figura 3.8, la separación es independiente de Re y, por tanto, también lo es C_x .

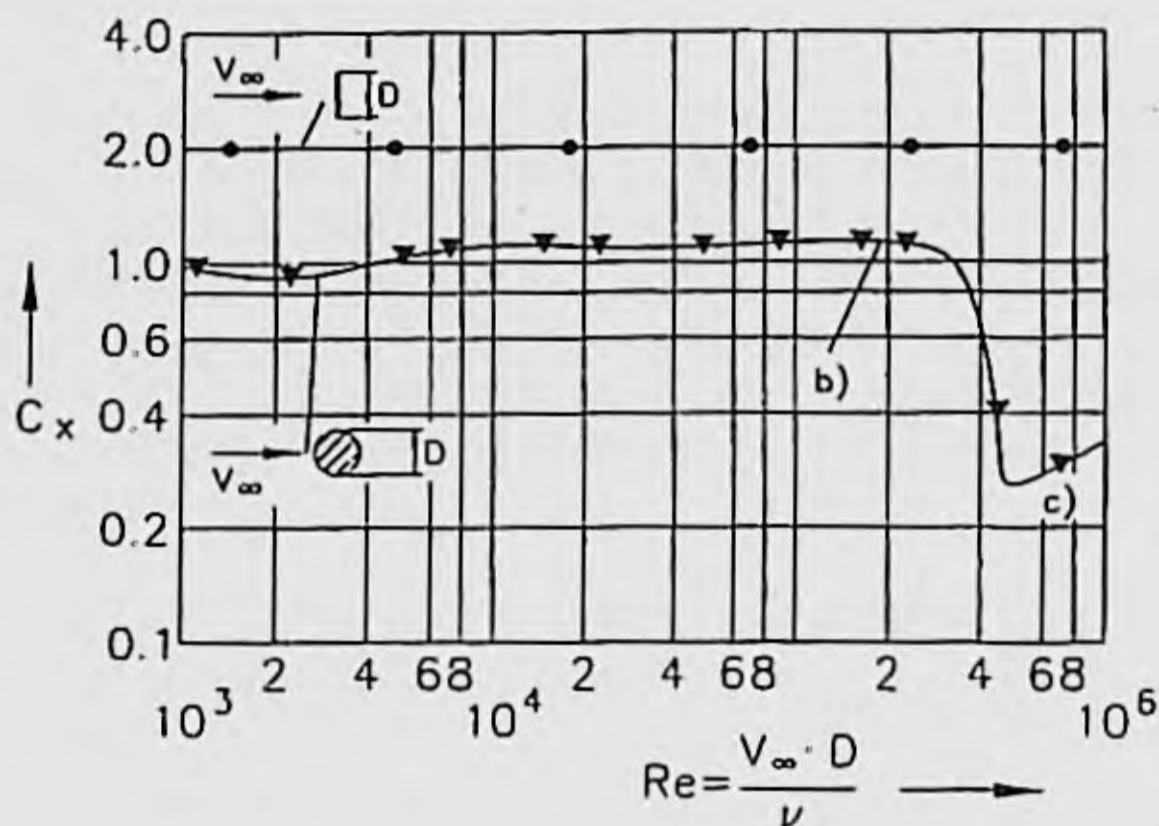


Figura 3.8. Coeficiente de resistencia aerodinámica de una placa y un cilindro en el seno de un fluido, en función del nº de Reynolds.

Un criterio de diseño en el caso de los vehículos automóviles es hacer C_x lo más independiente posible del número de Reynolds. La forma de conseguirlo es lograr que la separación del flujo se produzca en ciertos puntos, para cualquier condición, por ejemplo, en el borde posterior del techo. Por delante de estos puntos, la forma del vehículo se orienta a lograr que el flujo permanezca unido a la superficie, para lo cual la presión debe ser lo más alta posible para las diferentes condiciones del flujo libre.

Por último, señalar que, debido a la gran influencia de la resistencia de presión, la forma del cuerpo en la parte delantera tiene mucha menos influencia en la resistencia aerodinámica, que en la parte trasera. En la tabla 3.2 se ofrecen los valores del coeficiente de resistencia aerodinámica para diferentes cuerpos.

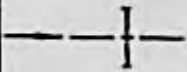

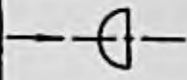
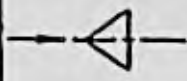
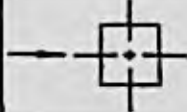
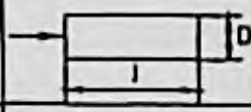
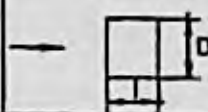
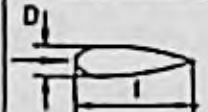
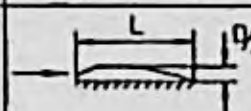
Cuerpo	Orientación del flujo	Cx
Placa circular		1.17
Esfera		0.47 *
Semiesfera		0.42 *
Cono (60°)		0.5
Cubo		1.05 *
Cilindro (l/D > 2)		0.82
Cilindro (l/D < 1)		1.15
Cuerpo currentilíneo l/D = 2.5		0.04
Medio cuerpo currentilíneo sobre el suelo		0.09

TABLA 3.2. *Coefficientes de resistencia aerodinámica para varios cuerpos. (Los números señalados con * corresponden a flujos subcríticos).*

3.1.3.3. Efecto del ángulo de incidencia sobre una placa plana.

Cuando el aire se mueve respecto a una placa plana (figura 3.9), en una dirección tal que forma un ángulo i con su superficie (ángulo de incidencia), se producen los efectos que pasamos a comentar.

El empuje F_a , resultante de la presión en la parte anterior (intradós) y de la succión producida en la parte posterior (extradós), tiene dos componentes F_{ax} y F_{ay} , la primera puede considerarse como resistencia aerodinámica y la segunda como fuerza sustentadora. Ambas fuerzas puede expresarse en función de sendos coeficientes aerodinámicos, de la presión dinámica en el flujo libre y de una superficie característica, es decir:

$$F_{ax} = C_x \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot A$$

$$F_{ay} = C_y \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot A$$
3.13

Estas fuerzas son originadas por las distribuciones de presión que se indican en la figura 3.9-b.

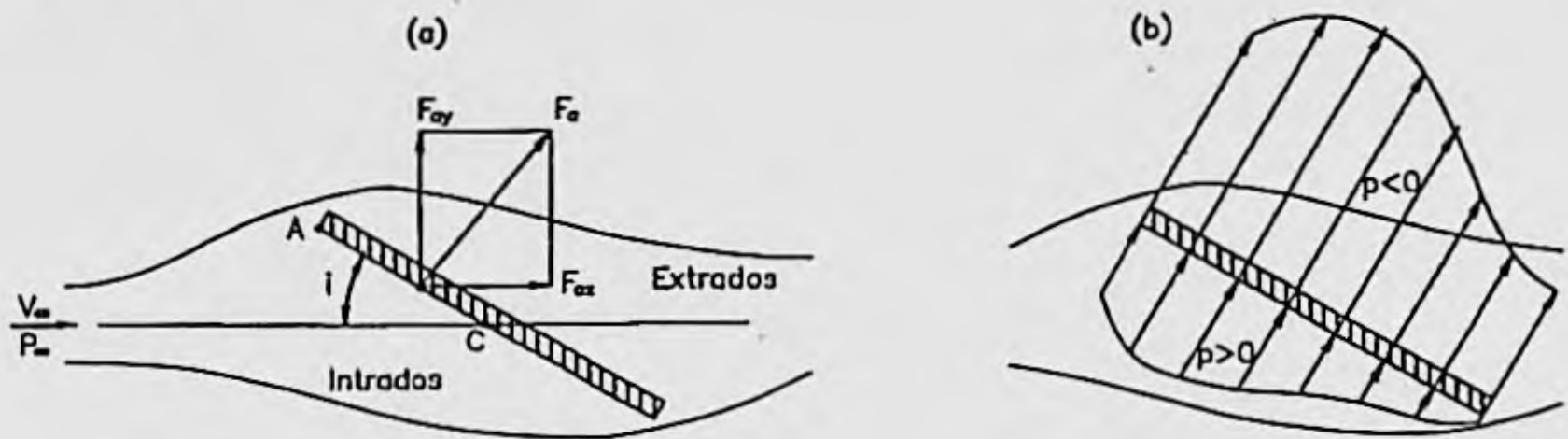


Figura 3.9. (a). Acciones sobre una placa plana de un fluido que se mueve respecto a ella con un ángulo de incidencia i . (b). Distribuciones de presión.

La fuerza F_x actúa en un punto comprendido entre el borde de ataque (A) y el centro de la superficie (C), este punto es el centro de presiones y su posición varía con el ángulo i en la forma que se ilustra en la figura 3.10.

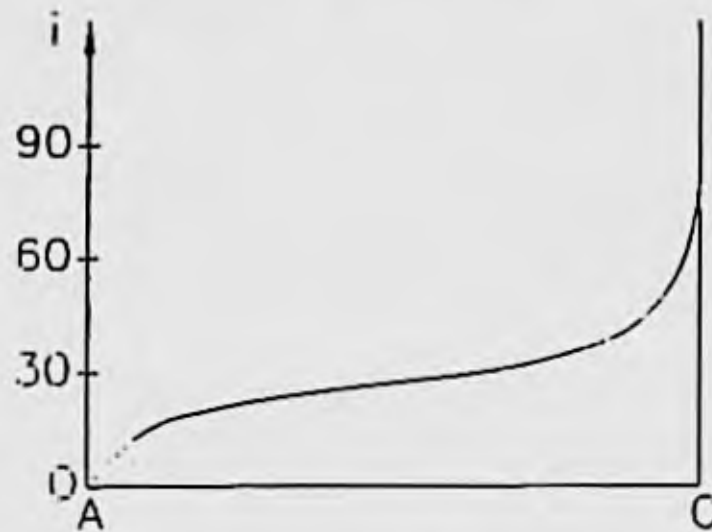


Figura 3.10. Variación de la posición del centro de presiones con el ángulo de incidencia del aire, en una placa plana.

3.1.3.4. Sólidos currentilíneos o aerodinámicos.

Para lograr un valor pequeño de la resistencia aerodinámica es necesario, como se indicó antes, que no se produzcan despegues de la capa límite en la parte posterior del cuerpo. Para lograr este objetivo se han diseñado cuerpos cuya superficie logra la adaptación a ella de las líneas de corriente.

Estos cuerpos, llamados currentilíneos o aerodinámicos, presentan valores mínimos de la resistencia aerodinámica al avance, como puede verse en la tabla 3.2 ($C_x \approx 0,04$ a $0,05$). La resistencia, en este caso, es prácticamente debida al rozamiento y, por tanto, dependiente del número de Reynolds.

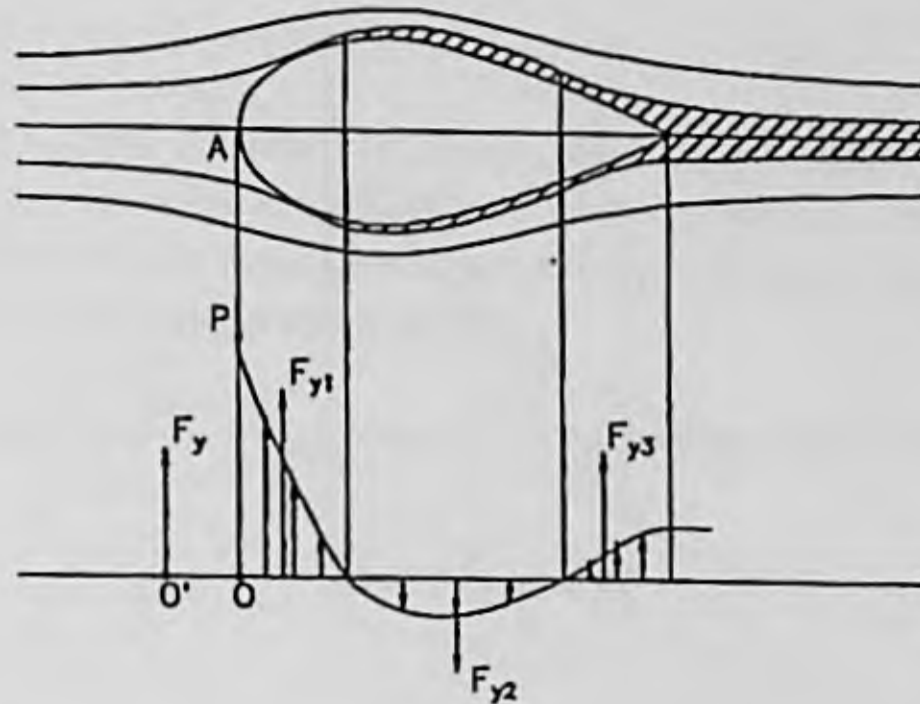


Figura. 3.11. Esfuerzos transversales sobre un cuerpo currentilíneo (ángulo de incidencia muy pequeño).

Pese a lo dicho anteriormente, a partir de la zona de máxima sección se producen despegues, especialmente para ángulos de incidencia no nulos, aunque su valor sea muy pequeño. Debido a ello se produce una distribución de presiones en dirección longitudinal, como la representada en la figura 3.11, la cual produce una fuerza resultante F_y , que origina un cierto empuje lateral y el momento correspondiente. Al variar el ángulo de incidencia del aire, el punto de aplicación de la componente lateral se desplaza hacia el centro de presiones de la sección lateral, el cual se alcanza cuando $i = 90^\circ$. En la figura 3.12 se representa la variación del punto de aplicación O de la fuerza lateral, en un gráfico denominado metacéntrico.

Su construcción permite determinar la posición de O' sobre el eje longitudinal, como punto de intersección de dicho eje con la tangente a la curva, cuya pendiente coincide con el ángulo de incidencia correspondiente; si el flujo incide, con un ángulo i_1 , la resultante del empuje lateral F_{y1} tiene su punto de aplicación en O'_1 .

Cuando $i = 0$, las presiones laterales se compensan, la resultante de las fuerzas aerodinámicas es la resistencia al avance en sentido longitudinal y ésta es mínima. Para valores de $i > 0^\circ$ e $i < 90^\circ$ la componente lateral no es nula, su punto de aplicación es anterior al centro de presiones de su sección longitudinal y ésta produce un momento de guiñada cuyo valor es $F_y \cdot a_1$.

Cuando $i = 90^\circ$ solo existe empuje lateral aplicado en el centro de presiones O'_2 .

Cuando un cuerpo currentilíneo se sitúa próximo a una superficie (suelo, por ejemplo), se produce una distorsión del campo de flujo que hace variar su resistencia aerodinámica al avance. En la figura 3.13 se representa este efecto, suponiendo que la superficie es plana e infinita y el flujo libre paralelo a ella.

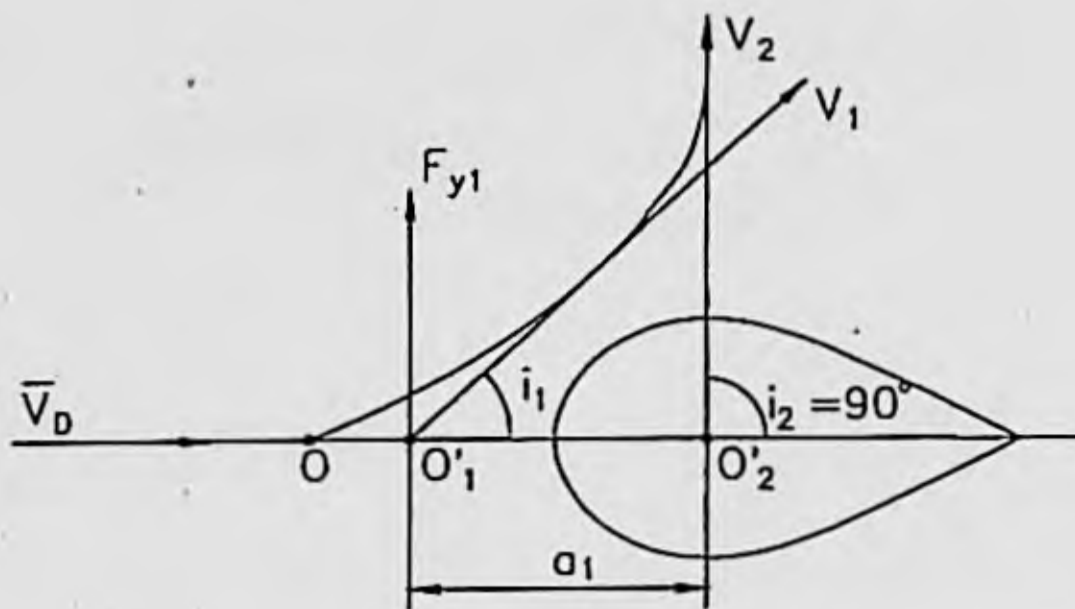


Figura 3.12. Gráfico metacéntrico

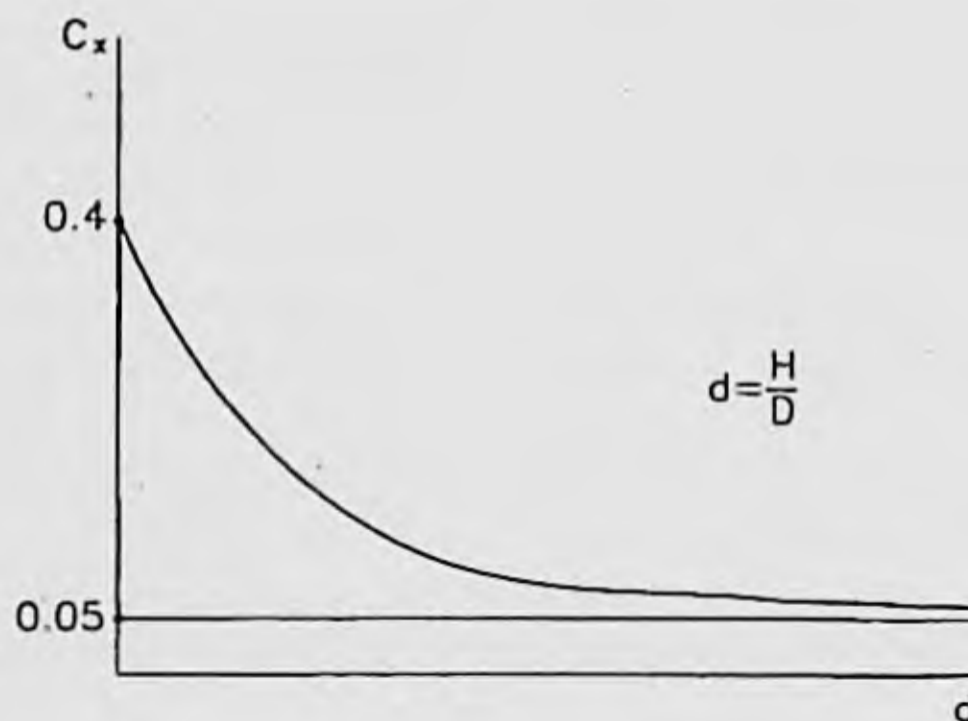
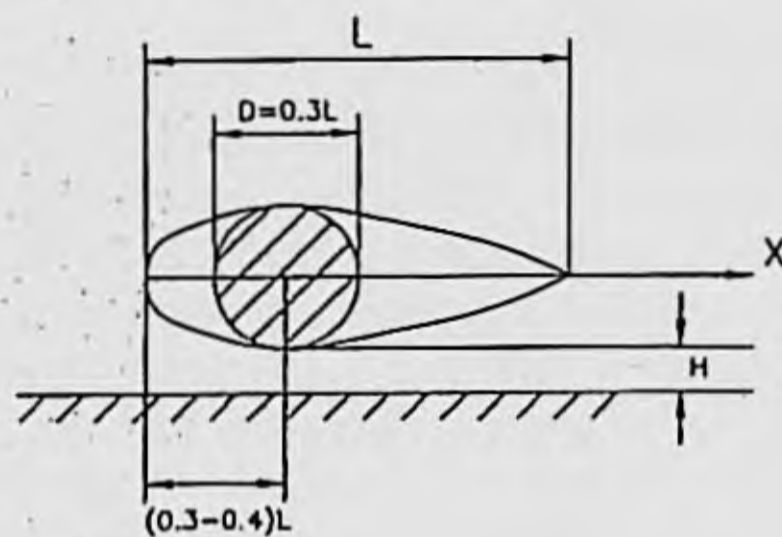


Figura 3.13. Influencia de la distancia al suelo de un cuerpo currentilíneo en el coeficiente de resistencia aerodinámica al avance.

3.1.3.5. Perfil de ala

Así como el cuerpo currentilíneo tiene como finalidad hacer mínima la resistencia al avance, el "perfil de ala" tiene como objetivo hacer máxima la fuerza sustentadora. Para comprender la influencia de los principales parámetros, realizamos un análisis elemental del fenómeno aerodinámico en este tipo de perfiles.

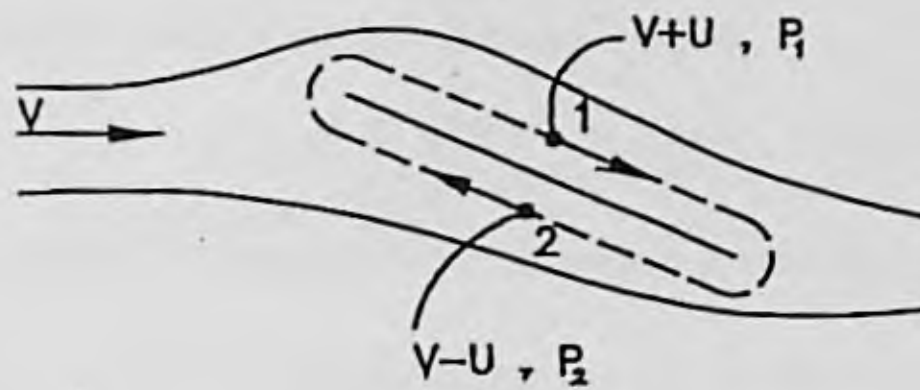


Figura 3.14. Flujo alrededor de una placa plana.

Consideremos de nuevo una superficie plana de longitud l y ancho a (perpendicular al dibujo, figura 3.14). Aplicando (3.4) a dos puntos 1 y 2 situados, respectivamente, en el intrados y extrados, se tiene:

$$P = \frac{\rho}{2} V_1^2 + P_1 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + P_2 \quad 3.14$$

Sustituyendo $V_1 = V + u$; $V_2 = V - u$

$$P_1 = P - \frac{\rho}{2} (V + u)^2 \quad 3.15$$

$$P_2 = P - \frac{\rho}{2} (V - u)^2$$

$$P_2 - P_1 = 2 \rho u V \quad 3.16$$

La fuerza F perpendicular a la placa será:

$$F = A (P_2 - P_1) = 2 \cdot a \cdot l \cdot \rho \cdot u \cdot V = \rho \cdot a \cdot V \cdot \Gamma \quad 3.17$$

Siendo Γ la circulación de velocidades:

$$\Gamma = 2 \cdot l \cdot u \quad 3.18$$

Para mejorar la capacidad sustentadora debe lograrse un aumento de Γ . Al mismo tiempo, debe obtenerse la menor resistencia al avance posible. Para obtener un buen compromiso entre ambos factores se redondea el borde de ataque, se curva ligeramente el cuerpo y se curva hacia arriba la salida. Así se obtiene el perfil de ala, (figura 3.15), aunque por razones constructivas y funcionales se producen perfiles algo diferentes al representado.

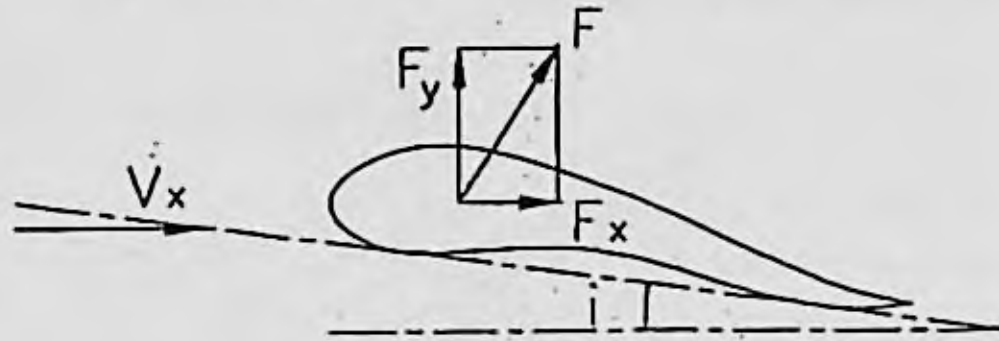


Figura 3.15. Perfil de ala.

Los perfiles de ala invertida tienen interés en vehículos automóviles, cuando se desea lograr sustentaciones negativas, con el objeto de incrementar los límites de los esfuerzos debidos a la adherencia, durante la tracción y frenando a alta velocidad.

3.1.4. Flujo interior

Como fue dicho en la introducción, el flujo interior lo constituye, fundamentalmente, el aire que circula por el compartimento motor, con objeto de refrigerar los órganos sometidos a fuentes de calor, especialmente el motor; así como el empleado en airear el habitáculo de los pasajeros, a través de los sistemas de ventilación, calefacción y aire acondicionado. Como también fue indicado, las exigencias impuestas a estos sistemas son cada vez más severas y la necesidad de optimización de los flujos no solo se refieren a obtener los más altos rendimientos en las funciones específicas que los originan, sino que es necesario reducir lo más posible su contribución a la resistencia aerodinámica al avance global.

En general el flujo interior no puede considerarse dividido en una zona no viscosa y otra viscosa. La proximidad de diferentes superficies hace que el flujo manifieste, prácticamente en su totalidad, un comportamiento viscoso, caracterizado por el número de Reynolds. Para el ejemplo simple de la figura 3.16:

$$R_e = \frac{V_m D}{\nu} \quad 3.19$$

donde V_m es la velocidad media del flujo y D , es el diámetro del conducto, la longitud característica adoptada; cuando varía R_e se producen diferentes tipos de flujo, desde

completamente laminares hasta grados diferentes de turbulencia.

La velocidad media puede expresarse como:

$$V_m = \frac{1}{S} \int_S V \, ds \quad 3.20$$

Y la condición de conservación de la masa impone:

$$\rho \int_S V \, ds = \rho V_m S = \text{cte} \quad 3.21$$

para $\rho = \text{cte}$, la velocidad se incrementa en zonas de menor sección y al contrario.

Suponiendo que $V(r)$ es independiente de X , es decir, no hay aceleración del fluido, las fuerzas de inercia son nulas. La presión es constante en los puntos de una sección transversal y varía de una sección a otra; la diferencia de presión es la encargada de vencer las resistencias debidas al rozamiento.

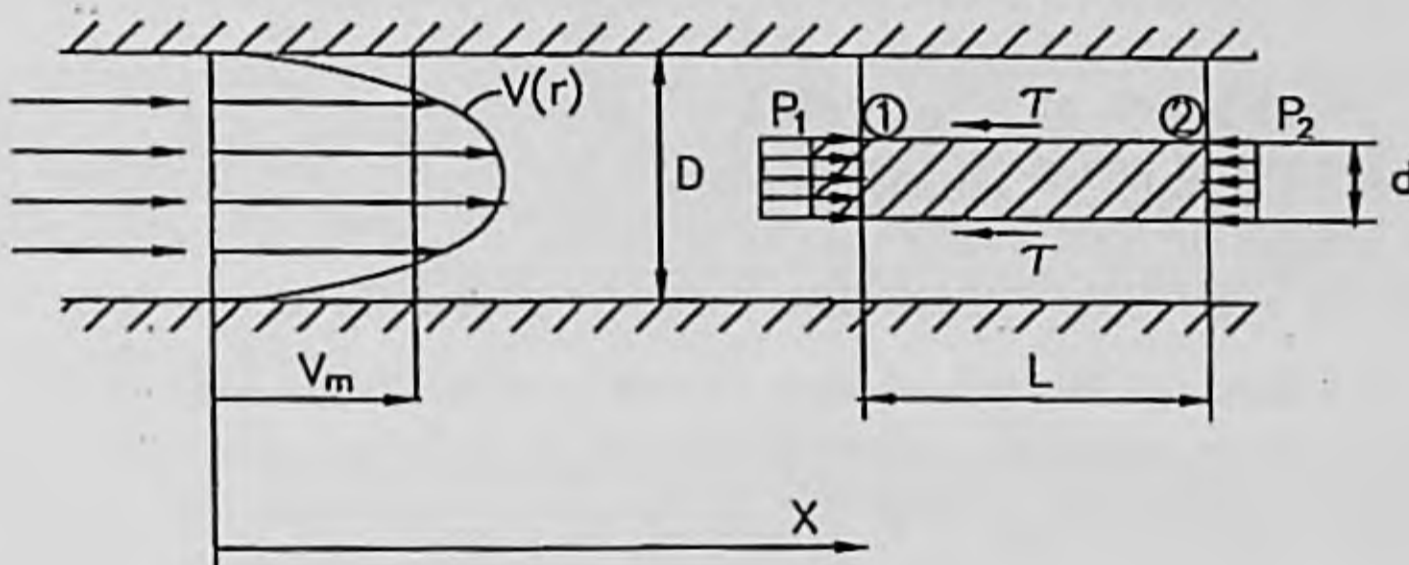


Figura 3.16. Flujo en el interior de un conducto.

Aplicando la ecuación de Bernouilli a dos secciones 1 y 2, (figura 3.16).

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_{m1}^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_{m2}^2 + \rho g h_2 + \Delta P \quad 3.22$$

siendo ΔP la pérdida de presión entre ambas secciones. En el caso que analizamos $h_1 = h_2$ y los términos hidrostáticos se anulan, en otros casos tiene valores tan próximos que pueden despreciarse.

Como se observa, a diferencia del flujo libre (ecuación 3.4) la suma de la presión

estática (P) y la dinámica $\frac{1}{2} \rho \cdot V_m^2$ no es constante. La presión total disminuye al avanzar la corriente en un valor ΔP . En general, la pérdida de presión suele relacionarse con la presión dinámica por medio de un coeficiente adimensional.

$$\zeta = \frac{\Delta P}{\frac{\rho}{2} v_m l^2} \quad 3.23$$

Este coeficiente varía para distintos tipos de flujos interiores, dependiendo del tipo de conductos y del número de Reynolds; éste será un parámetro importante en el estudio de dicho flujo.

Los flujos interior y exterior en un vehículo están íntimamente relacionados. Como idea general debe tenerse en cuenta que la diferencia de presiones exteriores, entre las zonas en las que se sitúan las entradas y salidas de aire del flujo interior, debe ser igual, al menos, a la suma de todas las pérdidas de presión en los distintos elementos interiores por las que circula el aire. Por tanto, la velocidad del flujo depende de la velocidad del vehículo.

Por otra parte, el flujo interno puede causar cambios en el flujo exterior. En la zona de admisión se produce una succión de flujo exterior y lo contrario sucede en la salida. Deberá, por tanto, tenerse en cuenta este aspecto para minimizar los efectos negativos que pudieran derivarse de él, incluso lograr que estos sean positivos.

La dependencia entre el flujo interior y la velocidad hace difícil un diseño adecuado a cada velocidad, especialmente por la reducción de flujo a velocidades reducidas, lo cual impone la instalación de elementos de bombeo, tanto en el sistema de refrigeración como de ventilación. Estos sistemas de bombeo deben ser lo más reducidos posible, tanto para minimizar la potencia necesaria, como para reducir las interferencias con el flujo exterior. Por ello es necesario realizar un buen diseño del sistema asociado al flujo interior.

3.1.5. Problemas especiales.

En este punto se comentan tres efectos aerodinámicos que están mereciendo atención especial en los diseños modernos. Se trata del ruido, los efectos aeroelásticos y el transporte de partículas.

3.1.5.1. Ruido

El flujo de aire alrededor del vehículo causa ruido de origen aerodinámico. Ciertos elementos de la carrocería como son espejos retrovisores, antenas de radio y otros que forman salientes o protuberancias, originan separaciones periódicas de flujo; con

frecuencia, tales separaciones forman una calle de vórtices, llamada de Karman, corriente abajo desde el elemento perturbador creando una zona inestable de flujo. La frecuencia de los vórtices se sitúa a menudo dentro del campo audible y ello hace que las fluctuaciones de presión dentro del campo de flujo inestable se manifieste en forma de ruido.

La reducción del ruido se logra de dos formas fundamentalmente: eliminando elementos que provoquen este tipo de separaciones o actuando sobre el flujo, es decir, eliminando el carácter periódico o modificando la frecuencia.

3.1.5.2. Efecto aeroelástico

La presión del aire, sobre los elementos elásticos del vehículo, produce deformaciones elásticas en éstos que influyen, a su vez, en las formas aerodinámicas.

Se plantean dos problemas, uno estático y otro dinámico. El primero supone la deformación de ciertos elementos hasta alcanzar una posición de equilibrio con las fuerzas de presión, a cada velocidad. Salvo en el caso de elementos muy especiales, como la antena de radio, este problema no reviste gran importancia.

El problema dinámico es algo más complejo. Diferentes elementos del vehículo pueden vibrar a ciertas frecuencias. Esta vibración induce una oscilación periódica aerodinámica, de análoga frecuencia, en el fluido circundante. En ciertas circunstancias pueden producirse fenómenos de auto-excitación; en estos casos el amortiguamiento interno del sistema elástico puede ser insuficiente para mantener la estabilidad y ello origina oscilaciones de gran amplitud.

Por otra parte, pueden producirse efectos análogos de inestabilidad por excitación de fuerzas aerodinámicas periódicas debido a separaciones de esta naturaleza producidas en la parte trasera del vehículo.

3.1.5.3. Transporte de partículas.

El último efecto que analizamos es el de arrastre de partículas líquidas o sólidas, incluso insectos, en el flujo exterior, y su trayectoria respecto al vehículo. Este efecto tiene influencia, tanto en el ensuciado del vehículo y de sus superficies acristaladas, con la consiguiente incidencia en la visibilidad y seguridad, como en la proyección de las partículas, sobre todo gotas de agua, hacia los vehículos que circulan detrás. Este último efecto está siendo estudiado actualmente en organismos internacionales de reglamentación, al objeto de reducir las proyecciones originadas por los vehículos industriales, sin que hasta el momento exista acuerdo respecto a las medidas a adoptar.

Como puede observarse en la figura 3.17, la trayectoria de las partículas y las líneas de corriente no coinciden. No existen por el momento modelos adecuados para

calcular las trayectorias de las partículas y se precisan investigaciones experimentales para definir las. De dichos estudios experimentales se deduce que la acumulación de suciedad en la superficie del vehículo se debe al hecho de que las partículas no pueden seguir las líneas de corriente, especialmente en las zonas en las que éstas tienen mayor curvatura. Las trayectorias de las partículas de agua o barro muestran una curvatura relativamente pequeña hasta su impacto sobre el vehículo. Estos efectos se manifiestan más intensamente en las zonas de cambio de inclinación, en que cambia la orientación del flujo, como es el caso de la delimitada por el capot y parabrisas. También en la parte trasera, debido al flujo en forma de vórtices.

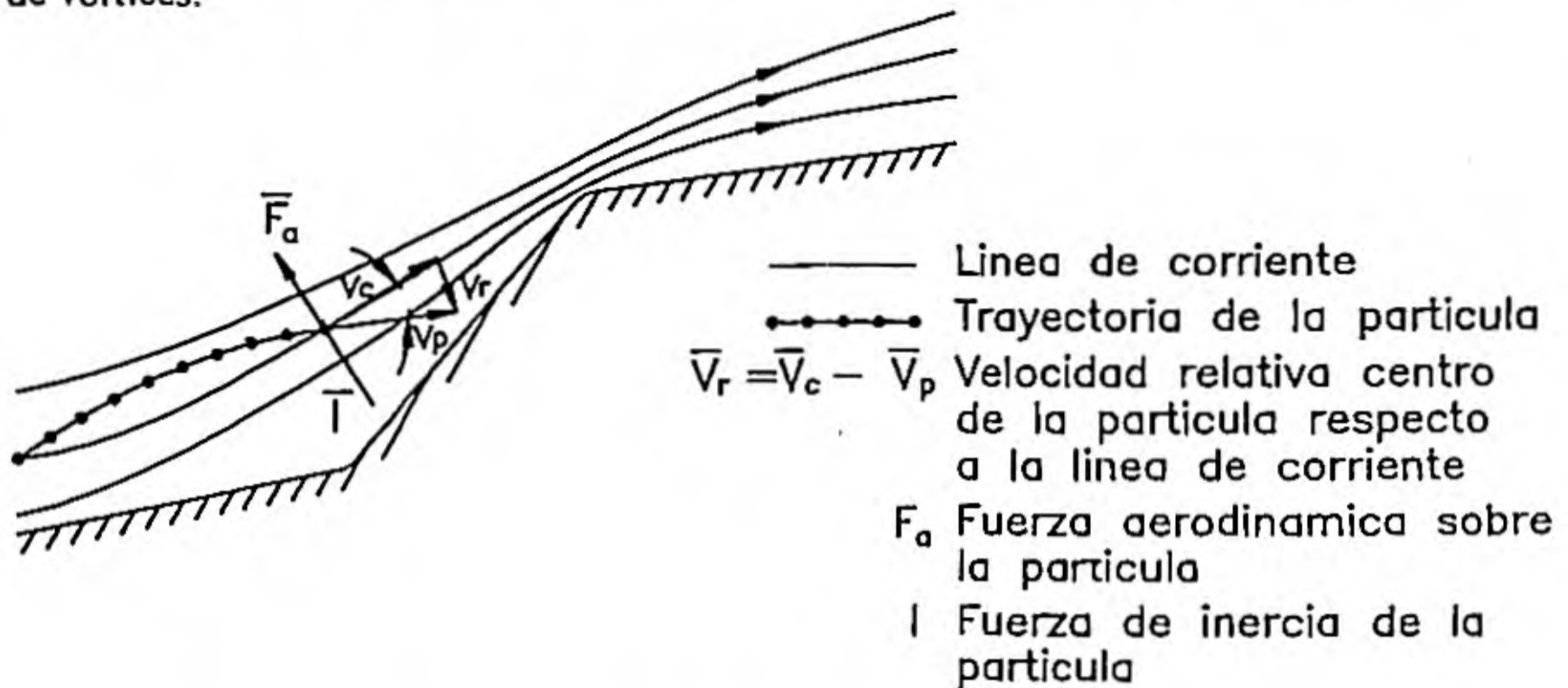


Figura 3.17. Movimiento de partículas en el campo de flujo exterior.

3.2. ACCIONES AERODINAMICAS SOBRE LOS VEHICULOS AUTOMOVILES.

3.2.1. Fuerzas y momentos sobre los vehículos.

Las acciones aerodinámicas que actúan sobre un vehículo automóvil, en el caso más general, pueden representarse por una resultante general de las fuerzas y un momento resultante, aplicados ambos al centro de gravedad del vehículo. Estos dos vectores pueden estudiarse a través de sus componentes en las direcciones longitudinal, transversal y vertical, como se representa en la figura 3.18.

Como se estudió antes (ec. 3.13) las fuerzas aerodinámicas pueden expresarse en función de la presión dinámica, $\frac{1}{2} \rho \cdot V^2$, y de una superficie característica, mediante un coeficiente adimensional de proporcionalidad, determinado experimentalmente, que se conserva prácticamente constante para valores del número de Reynolds suficientemente

altos; los cuales se presentan en condiciones operativas normales del vehículo. Así, las fuerzas de la figura 3.18, se denominan y formulan de la siguiente manera:

Resistencia aerodinámica al avance

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \rho C_x A_r V^2 \quad 3.24$$

Empuje lateral aerodinámico

$$F_{ya} = \frac{1}{2} \rho C_y A_r V^2 \quad 3.25$$

Sustentación aerodinámica

$$F_{za} = \frac{1}{2} \rho C_z A_r V^2 \quad 3.26$$

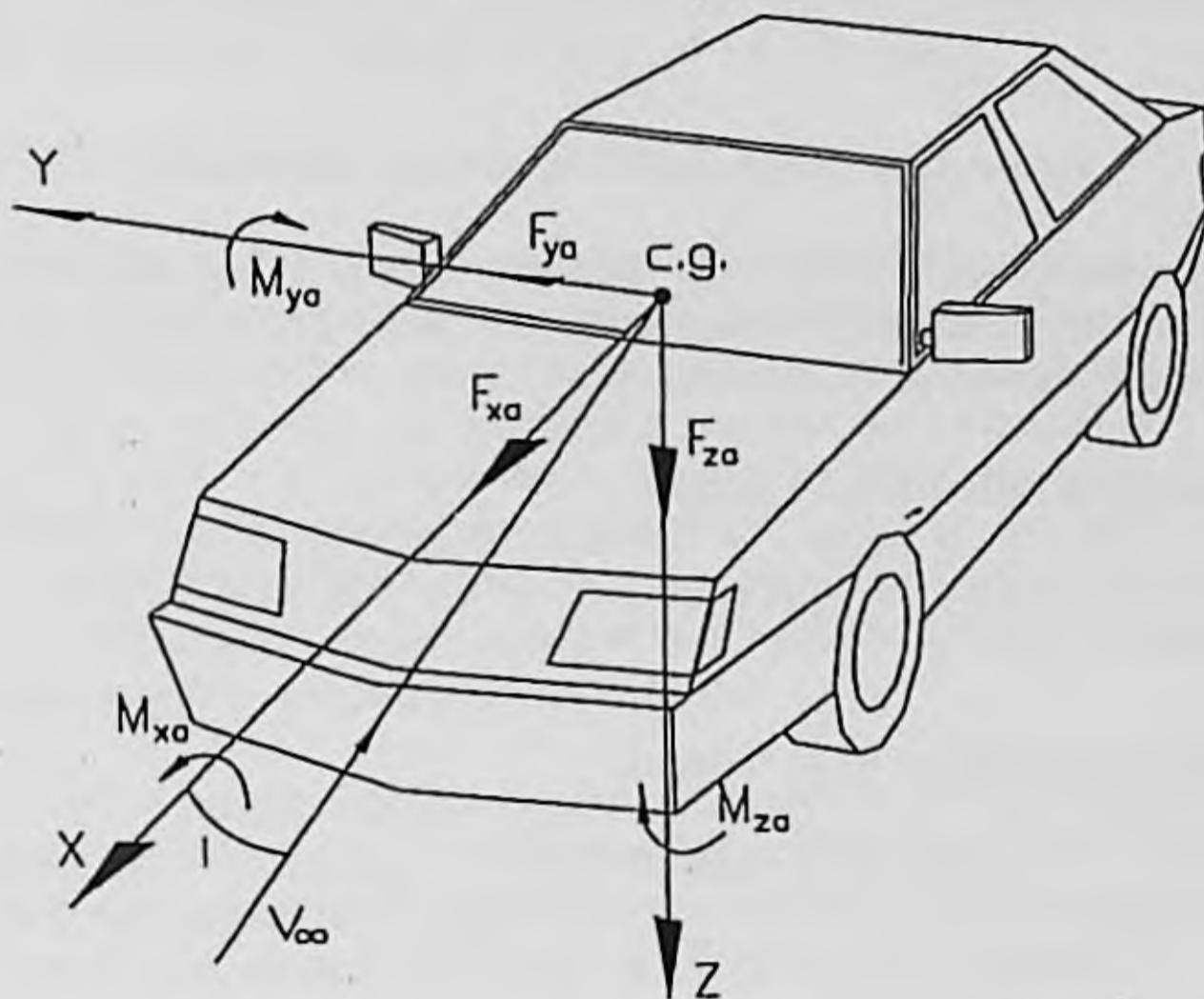


Figura 3.18. Fuerzas y momentos de naturaleza aerodinámica que actúan sobre un vehículo.

Como área característica se adopta la mayor sección transversal, que denominaremos área frontal. (Figura 3.19).

La fuerza de sustentación adquiere normalmente un valor negativo en relación con el sistema de referencia de la figura 3.18. En vehículos de competición se hace positiva mediante alerones con efecto de ala invertida.

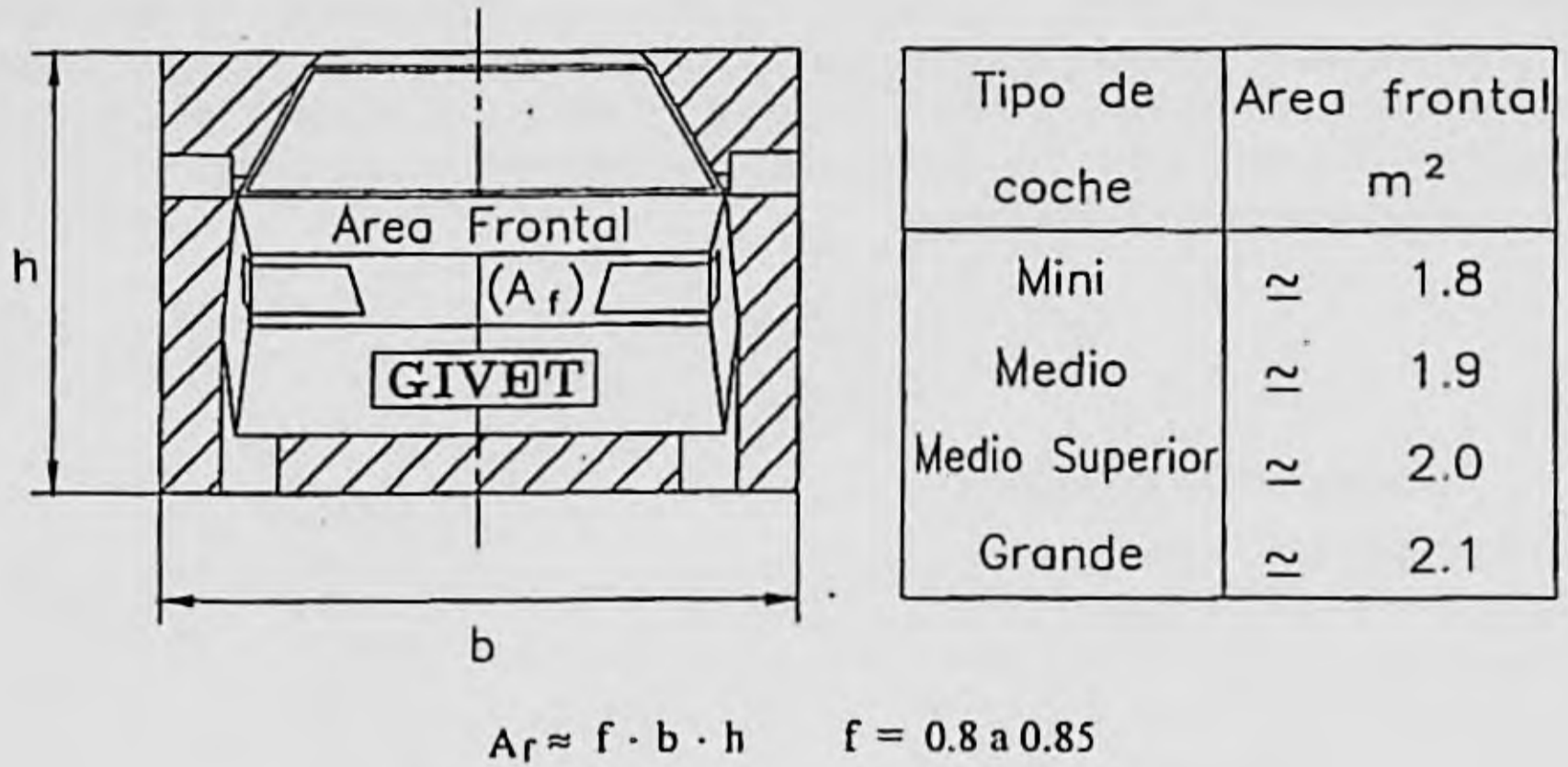


Figura 3.19. Area frontal de un vehículo automóvil.

Los momentos se expresan, por analogía, utilizando las mismas magnitudes anteriores. Se añade una longitud característica para hacer homogéneas las ecuaciones, conservando los coeficientes adimensionales, así:

Momento aerodinámico de vuelco:

$$M_{xz} = \frac{1}{2} \rho C_{Mx} A_f L V^2 \quad 3.27$$

Momento aerodinámico de cabeceo

$$M_{yz} = \frac{1}{2} \rho C_{My} A_f L V^2 \quad 3.28$$

Momento aerodinámico de guiñada

$$M_{zx} = \frac{1}{2} \rho C_{Mz} A_f L V^2 \quad 3.29$$

En la expresión de los momentos se utiliza, como puede observarse, la misma área característica, es decir, el área frontal del vehículo. Como longitud característica suele utilizarse la batalla o distancia entre ejes, L.

Cuando el ángulo de incidencia es nulo, únicamente serán no nulas las acciones: F_{xa} , F_{za} , y M_{ya} . Si i es no nulo, es decir, con flujo asimétrico, las seis componentes tendrán, en general, valores no nulos y los coeficientes aerodinámicos variarán en función del ángulo de incidencia. En estas condiciones pueden presentarse problemas de inestabilidad; el momento de guiñada M_{za} tiende a girar el vehículo respecto al eje vertical z ; si el aumento de este momento tiende a reducir el ángulo de incidencia, el vehículo es aerodinámicamente estable. Lo contrario producirá inestabilidad, es decir:

Vehículo aerodinámicamente estable:

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial i} < 0 \quad 3.30$$

Vehículo aerodinámicamente inestable:

$$\frac{\partial C_{mz}}{\partial i} > 0 \quad 3.31$$

En los puntos siguientes se analizan los principales factores que influyen en cada una de las seis acciones definidas.

3.2.2. Resistencia al avance.

El valor del coeficiente de resistencia al avance de C_x se ve afectado por un elevado número de factores de diseño: forma de la delantera, inclinación del parabrisas, techo, laterales, bajos, ruedas, spoiler delanteros y traseros, salientes, flujo interior, equipajes en techo, remolques, etc. Su análisis requiere una extensión que sobrepasa los límites de este trabajo. Aquí se analizarán algunos conceptos de relieve y se indicarán algunos resultados experimentales, pero aquellos interesados en profundizar en el diseño aerodinámico de vehículos deben recurrir a textos especializados, siendo muy recomendable el de Wolf-Heinrich Hucho "Aerodynamics of road vehicles" (1986). Lo anterior es válido para el resto de los puntos que se analizarán después.

Aunque se presentan valores con los que se pueden apreciar la influencia de ciertas partes y diseños del vehículo, en el coeficiente de resistencia al avance, deben tenerse en cuenta que tales influencias son interdependientes entre sí y que, por tanto, en el diseño de un vehículo han de contemplarse conjuntamente todas las partes y zonas.

Debemos insistir, en que no existen modelos teóricos precisos para predecir la resistencia aerodinámica, como tampoco las demás acciones de esta naturaleza, por lo que los resultados experimentales constituyen la fuente más importante de datos y conocimientos sobre la influencia de diferentes variables geométricas, o de otra naturaleza, sobre los distintos coeficientes aerodinámicos.

Como se indicó en el punto 3.1. anterior, la resistencia aerodinámica depende del flujo exterior del vehículo y de la circulación interior. En cuanto al primero, fueron descritas la resistencia debida al rozamiento y la resistencia de presión. La proporción en que cada una de estas resistencias influye en la global, depende de la forma del cuerpo y de la lisura de sus superficies. En un cuerpo currentilíneo con $C_x = 0.04 \div 0.05$, (ver Tabla 3.2) la resistencia aerodinámica es debida, principalmente, al rozamiento; en cambio, en una placa plana, con $C_x = 1.2$, la resistencia es casi puramente de presión. En formas como cilindros, o paralelepípedos con sus ejes longitudinales orientados en la dirección del flujo, la contribución de la resistencia de presión es algo menor que en la placa, pero es predominante. Esto sucede en los vehículos automóviles.

A las resistencias anteriores debe añadirse la que originan salientes de diferentes tipos, entre ellos los espejos retrovisores exteriores; a esta resistencia suele denominarse de densidad.

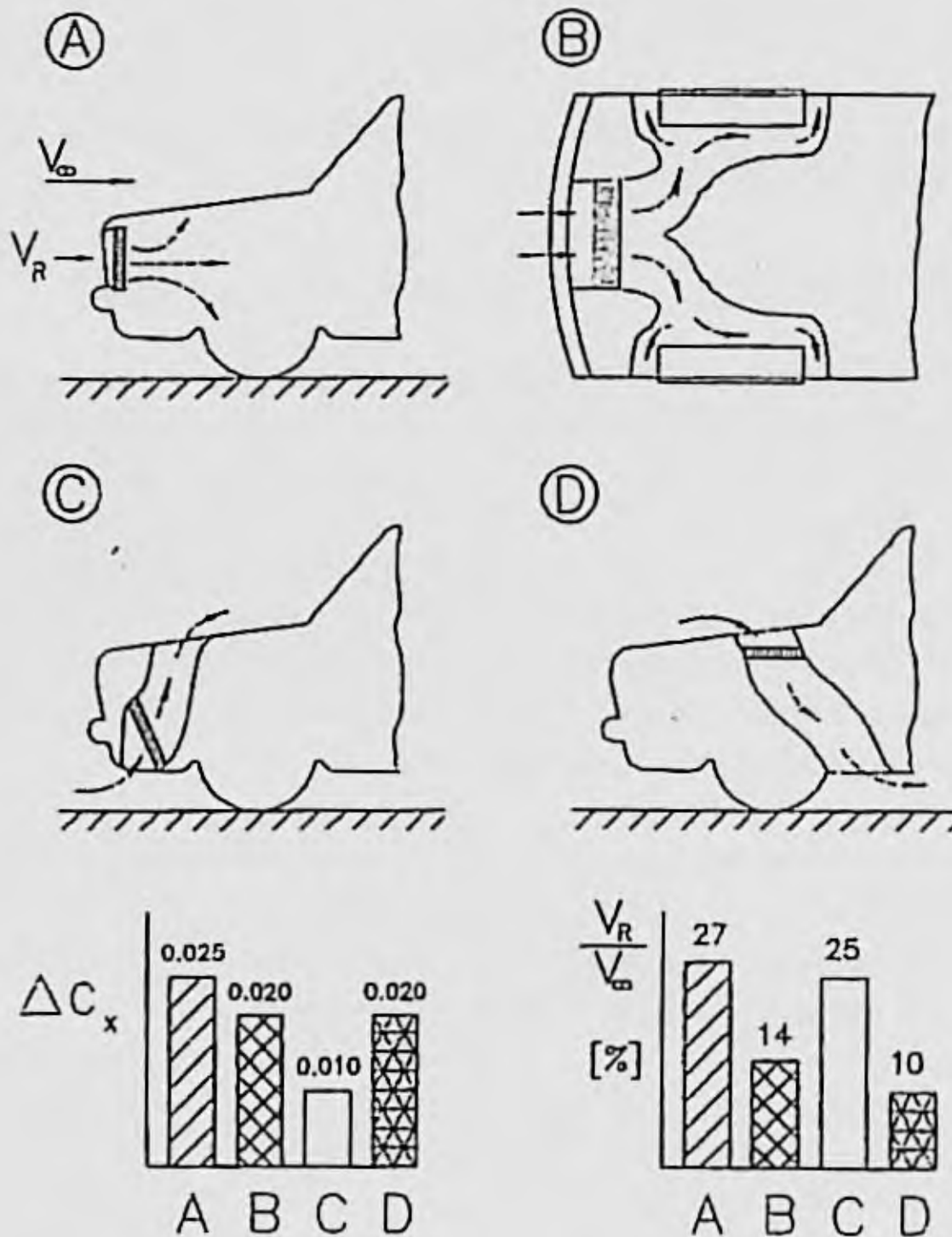


Figura 3.20. Disposiciones alternativas del radiador y su influencia en la resistencia aerodinámica.

Aunque la contribución de las diferentes resistencias a la total varía de unos vehículos a otros, podemos ofrecer los siguientes valores, que solo pueden ser considerados como orientativos:

Resistencia de presión (o de forma)	⇒	> 70 %
Resistencia de rozamiento (o viscosa)	⇒	< 10 %
Resistencia de densidad	⇒	> 10 %
Resistencia interna	⇒	≈ 10 %

Las resistencias de rozamiento y densidad se logran minimizar mediante el adecuado alisamiento de las superficies y la eliminación de protuberancias. La resistencia interna se reduce mediante la adecuada disposición de las superficies de entrada y salida de aire. En el caso del radiador, puede verse algunos resultados en la figura 3.20.

En cuanto a la resistencia de presión, al ser la componente que más contribuye a la resistencia total, es a la que más atención se ha prestado para intentar reducirla. A continuación analizaremos algunas influencias sobre ella.

3.2.2.1. Influencia de la parte delantera.

Las figuras 3.21 a 3.26 ilustran la influencia de diferentes formas de la parte delantera, en el coeficiente C_x de resistencia al avance. Pueden destacarse algunas influencias significativas:

- Existe una posición óptima del punto de estancamiento en el cual la velocidad del aire es nula. En general, disminuir la altura de este punto, es favorable.
- También se reduce C_x con formas suaves entre el punto de estancamiento y el capot.
- El ángulo de inclinación del capot también tiene influencia sobre C_x , aunque por encima de un cierto valor, a partir del cual se logra la adhesión del flujo de aire sobre él, dicha influencia es muy pequeña.
- La inclinación del parabrisas tiene una influencia moderada. La tendencia es a reducir C_x al aumentar el ángulo de inclinación. Este ángulo tiene un límite práctico; para más de 60° se produce la difusión de la luz con merma de las condiciones de visibilidad. Cuanto mayor es la inclinación más se incrementa el calentamiento del habitáculo por los rayos solares. La inclinación del parabrisas tiene también un efecto favorable sobre la influencia de la parte trasera en el

coeficiente C_x . Esto puede ilustrarse con ayuda de la figura 3.26, en la que se comparan los valores de la presión sobre la parte superior de los vehículos Audi 100 II y III. Como puede observarse, en el Audi III la depresión en la zona de transición entre el parabrisas y el techo es menor, como consecuencia, el gradiente de presión a lo largo del techo es menor, la pérdida de cantidad de movimiento, por tanto, menor y la presión sobre la parte trasera es mayor, lo cual reduce depresiones y mejora C_x . Puede considerarse, por tanto, que, aunque la inclinación del parabrisas tenga un efecto moderado en la reducción de C_x , al mejorar el flujo en la parte posterior mejora considerablemente el valor global de C_x .

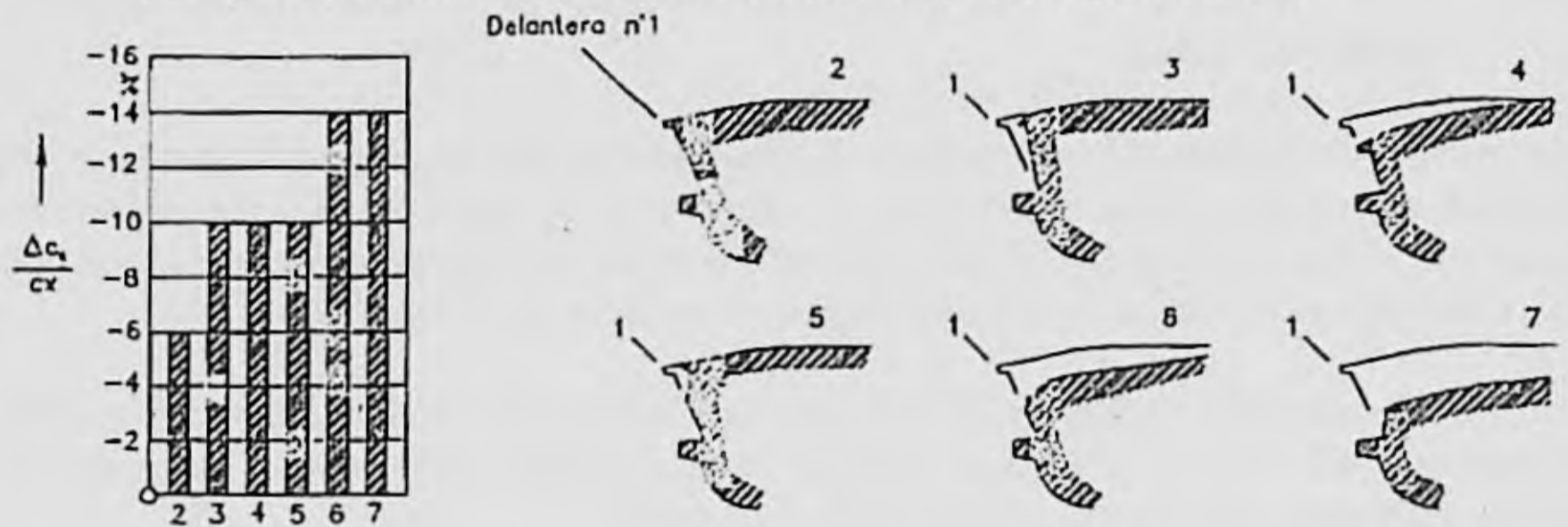


Figura 3.21. Influencia de algunas formas delanteras en C_x . (Hucho y Janssen, 1972).

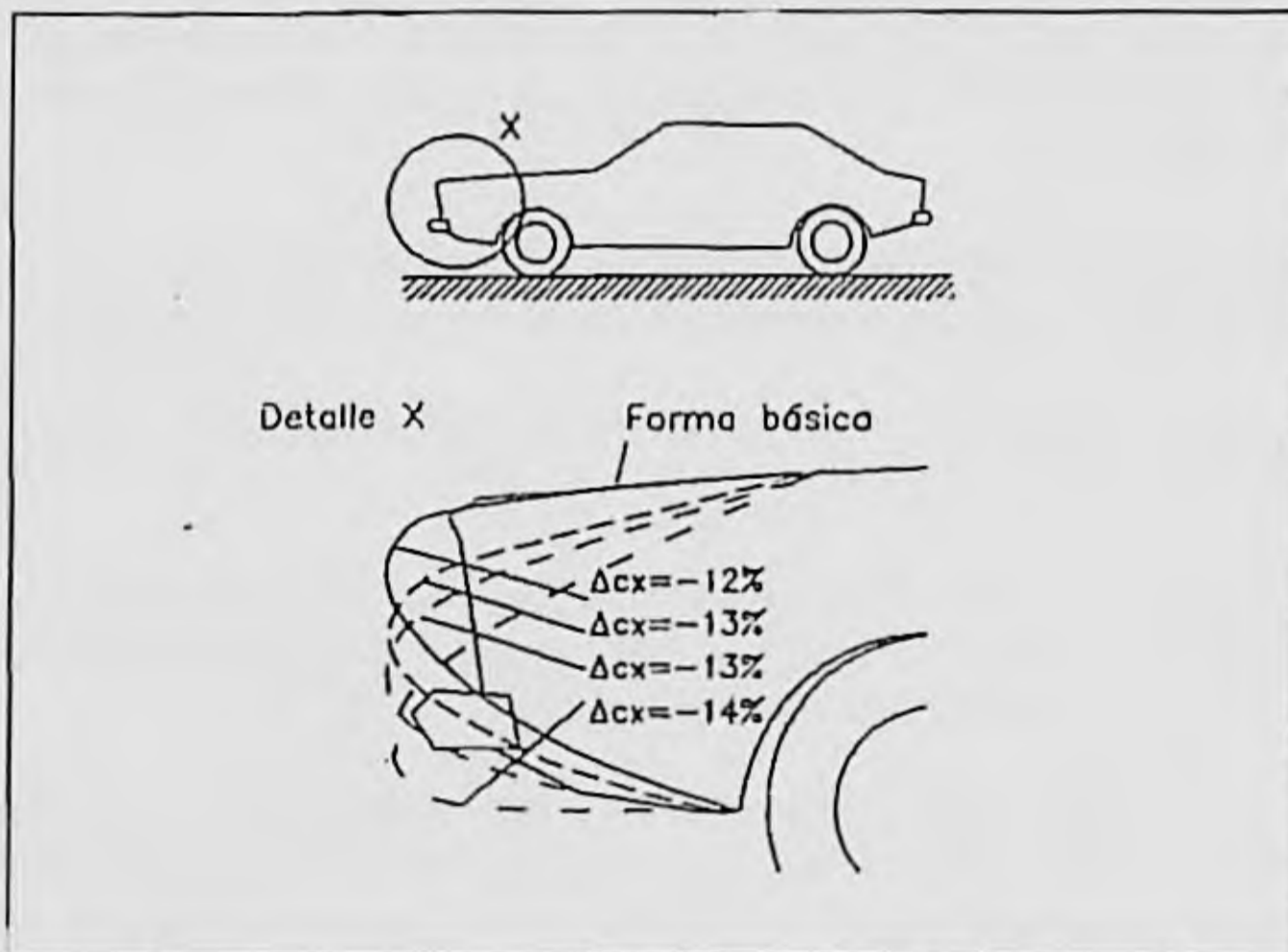


Figura 3.22. Formas delanteras e influencia sobre C_x . (Hucho y Janssen, 1976)

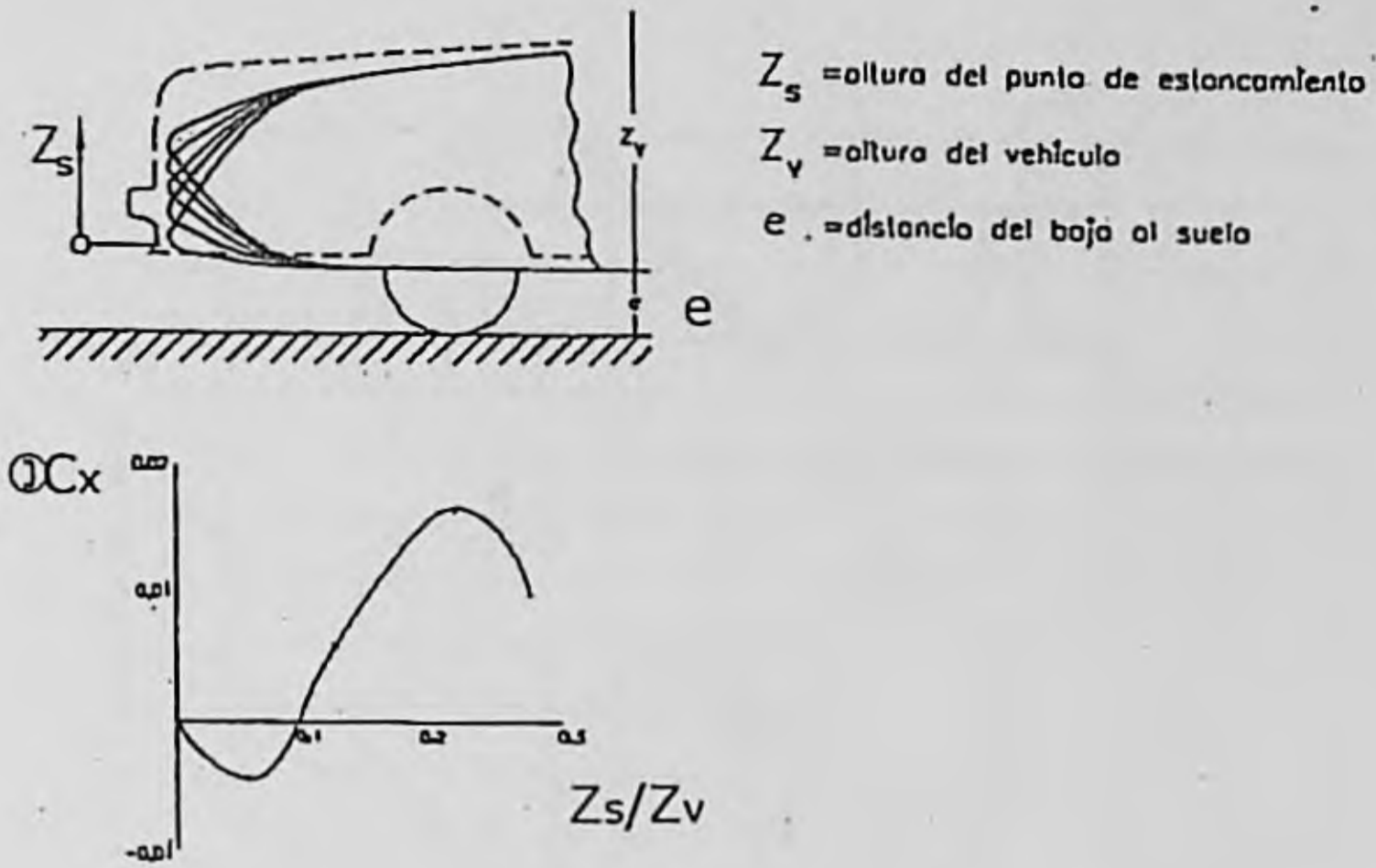


Figura 3.23. Efecto del punto de "estancamiento" sobre C_x (Buchheim, 1981)

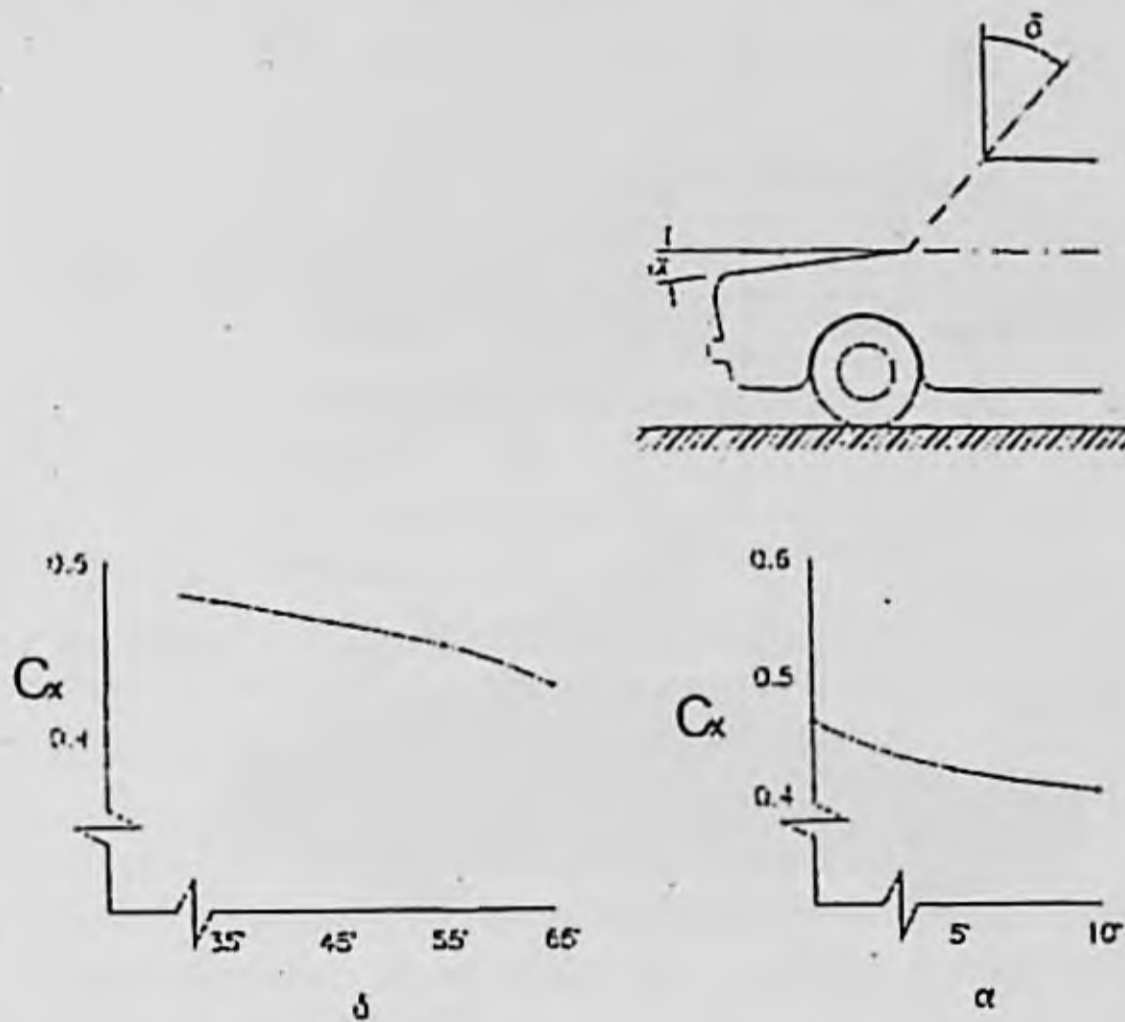


Figura 3.24. Efecto de las inclinaciones del capot y parabrisas sobre C_x . (Carr, 1986/9).

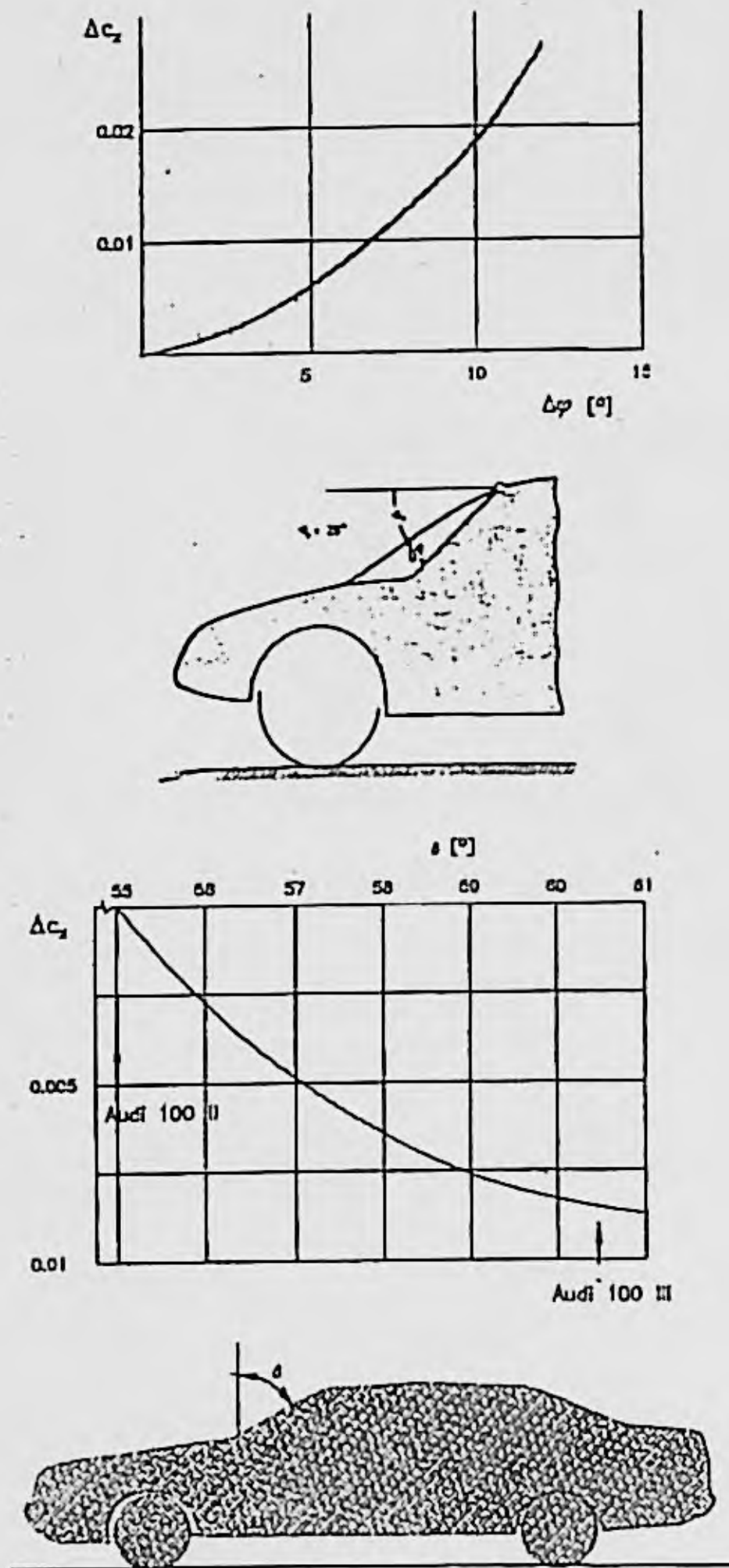


Figura 3.25. Efecto de la inclinación del parabrisas sobre C_x . (Buchheim 1979/82).

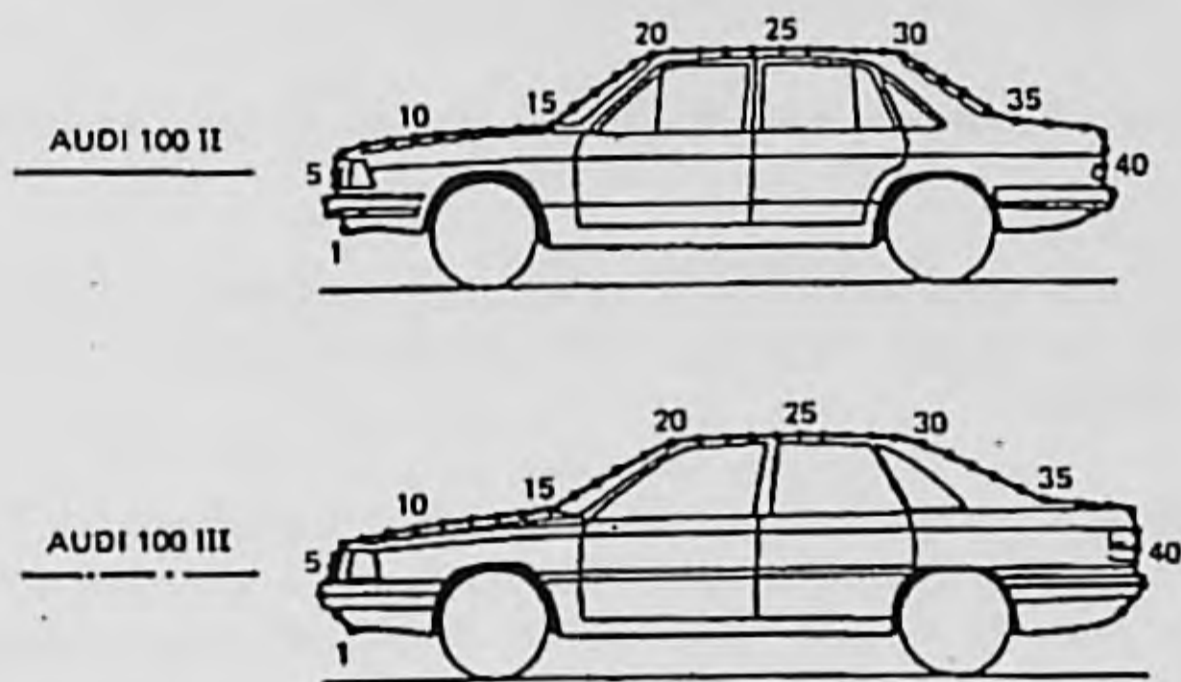
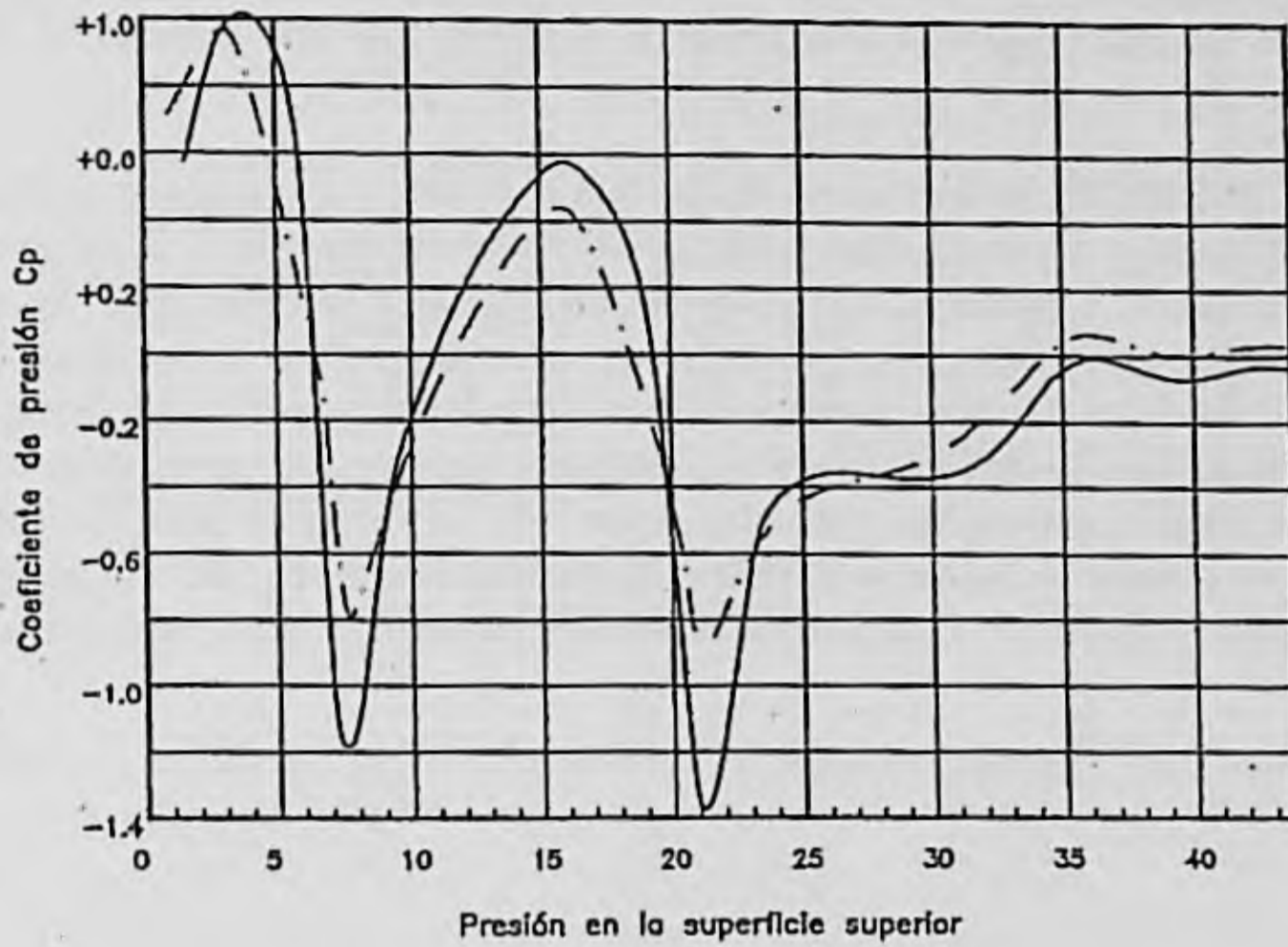


Figura 3.26. Distribución de presión a lo largo de la sección longitudinal media de los vehículos: Audi 100 II ($C_x = 0.42$) y Audi 100 III ($C_x = 0.30$). (Buchheim, 1979/82).

3.2.2.2. Influencia de la parte trasera

En la figura 3.27 se representan las tres formas más usuales del perfil longitudinal de la trasera del vehículo, cuya influencia en la resistencia aerodinámica al avance es significativa.

Las diferentes formas producen flujos de aire distintos, que afectan, lógicamente, a la presión en la parte trasera o a las pérdidas de origen viscoso. En el caso de la trasera cuadrada, típica de furgonetas, turismos de tipo familiar o similares, se producen separaciones formando vórtices en dirección perpendicular al flujo, es decir, en dirección transversal al vehículo. Este caso puede estudiarse considerando un flujo bidimensional. Se consideran dentro de este tipo de trasera inclinaciones relativamente acentuadas de la parte posterior, con ángulos que pueden estar lejos de los 90°. La trasera de tipo (b), inclinada, se caracteriza por generar un flujo con dos vórtices orientados en dirección longitudinal como se representa en la figura 3.1. El ángulo de inclinación respecto al techo suele ser pequeño.

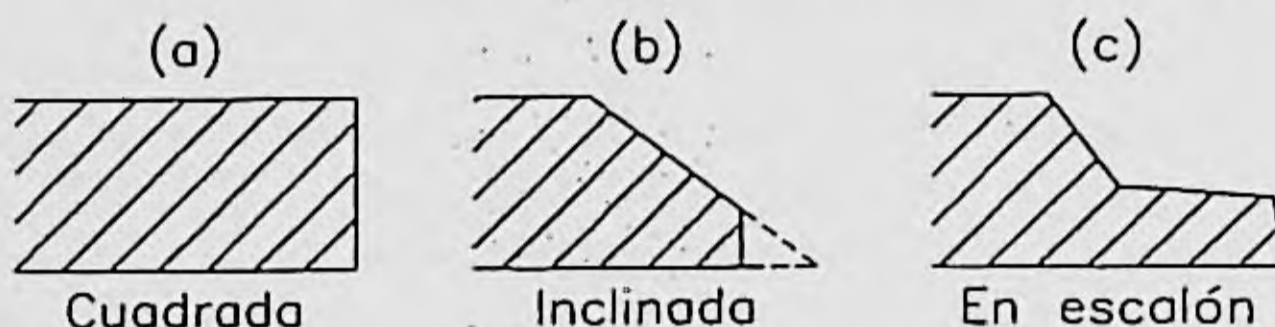


Figura 3.27. Formas usuales de la trasera de vehículos.

Por último, la trasera en escalón, tipo (c), produce un flujo mixto entre los casos anteriores.

Se ha prestado gran atención a las características geométricas de la parte trasera del vehículo. En las figuras 3.28 a y 3.29 se ofrecen algunos de los resultados experimentales obtenidos.

En la figura 3.28 se pone de manifiesto la influencia del ángulo de pendiente de la superficie trasera sobre el coeficiente aerodinámico C_x , y se establece un criterio para definir el límite entre las formas "cuadrada" e "inclinada" caracterizadas por flujos diferentes como antes se indicó. Este límite se encuentra para valores del ángulo φ comprendidos entre unos 28 y 32°. Para valores grandes de φ , el flujo se separa desde la línea de finalización del techo, y se obtiene, para el vehículo ensayado, un valor $C_x = 0.4$. Al reducir φ , se observa que, próximo a 30°, C_x se incrementa bruscamente, para después decrecer hasta alcanzar un valor mínimo cuando $\varphi = 10^\circ$. Si φ sigue descendiendo, se obtiene de nuevo un valor $C_x = 0.4$ coincidiendo con el de la trasera "cuadrada".

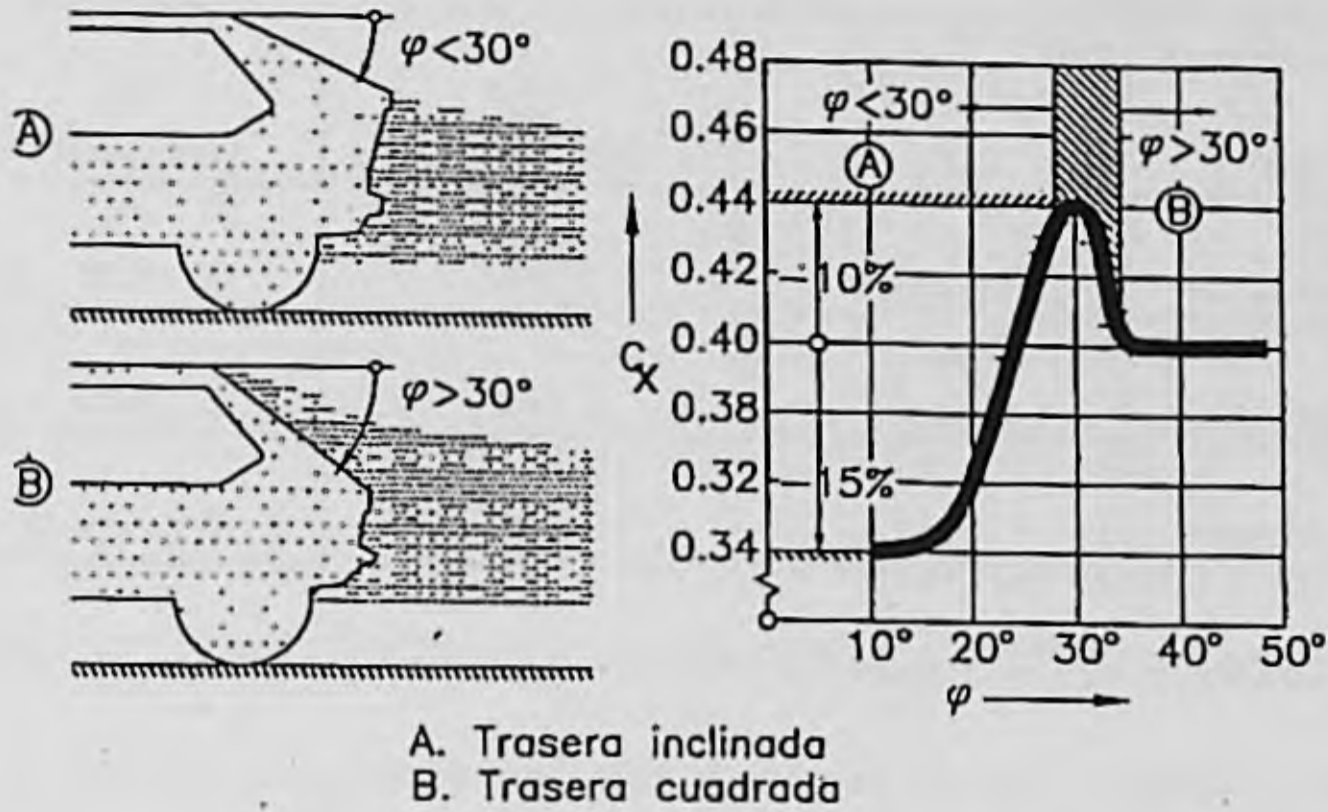


Figura 3.28. Influencia de la pendiente de la superficie trasera en el C_x . (Janssen y Hucho, 1975).

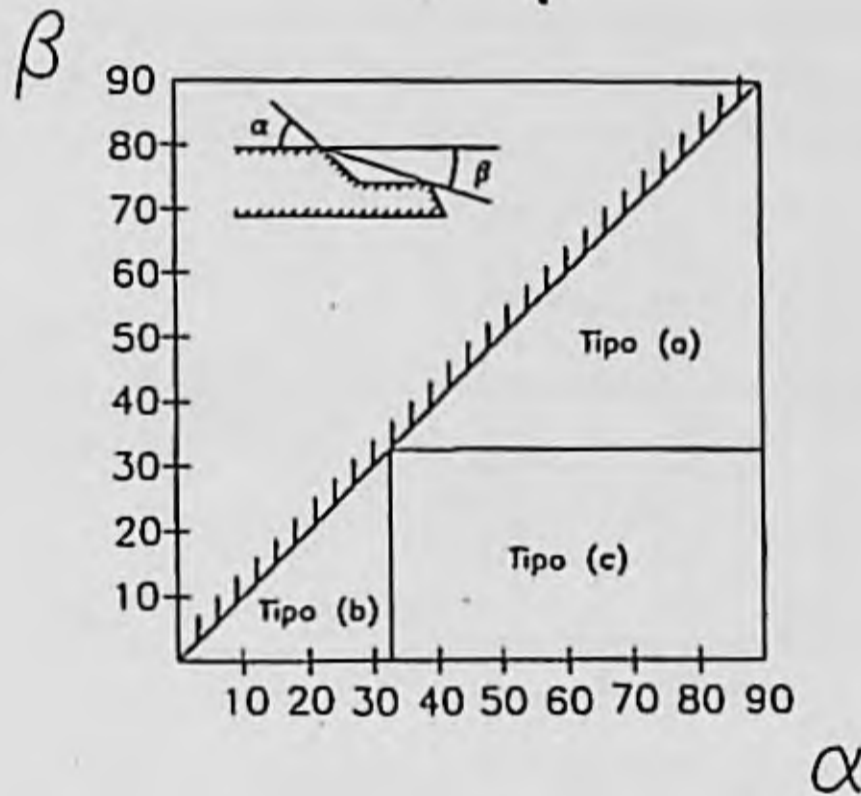


Figura 3.29. Influencia de los principales parámetros geométricos de la trasera de vehículos en las acciones aerodinámicas. (Carr, 1974).

En la figura 3.29 se indica la clasificación según tipos de traseras, en función de los valores angulares. Carr ha puesto de manifiesto, experimentalmente, para cada tipo de trasera, los efectos que se indican en la tabla 3.3.

Tipo	C_x	C_z (eje trasero)	C_v (eje trasero)
(a) Cuadrada	Moderada	Baja	Alta
(b) Inclínada	Baja	Baja	Alta
(c) En escalón	Alta	Alta	Moderada

TABLA 3.3. Influencia de los tipos de trasera sobre diferentes coeficientes aerodinámicos.

Como se observa, por los niveles de influencia de la tabla, la forma de la parte trasera, no sólo tiene influencia sobre C_x , sino que afecta a otras acciones aerodinámicas que luego veremos.

En las siguientes figuras se puede apreciar la influencia de otras variables geométricas: forma de la sección horizontal, (figura 3.30); el efecto de la geometría de la zona en forma de difusor bajo la parte trasera del vehículo, (figura 3.31); la influencia de la longitud de la superficie inclinada, y relación con el ángulo de inclinación, (figura 3.32); altura del maletero. (Figura 3.33).

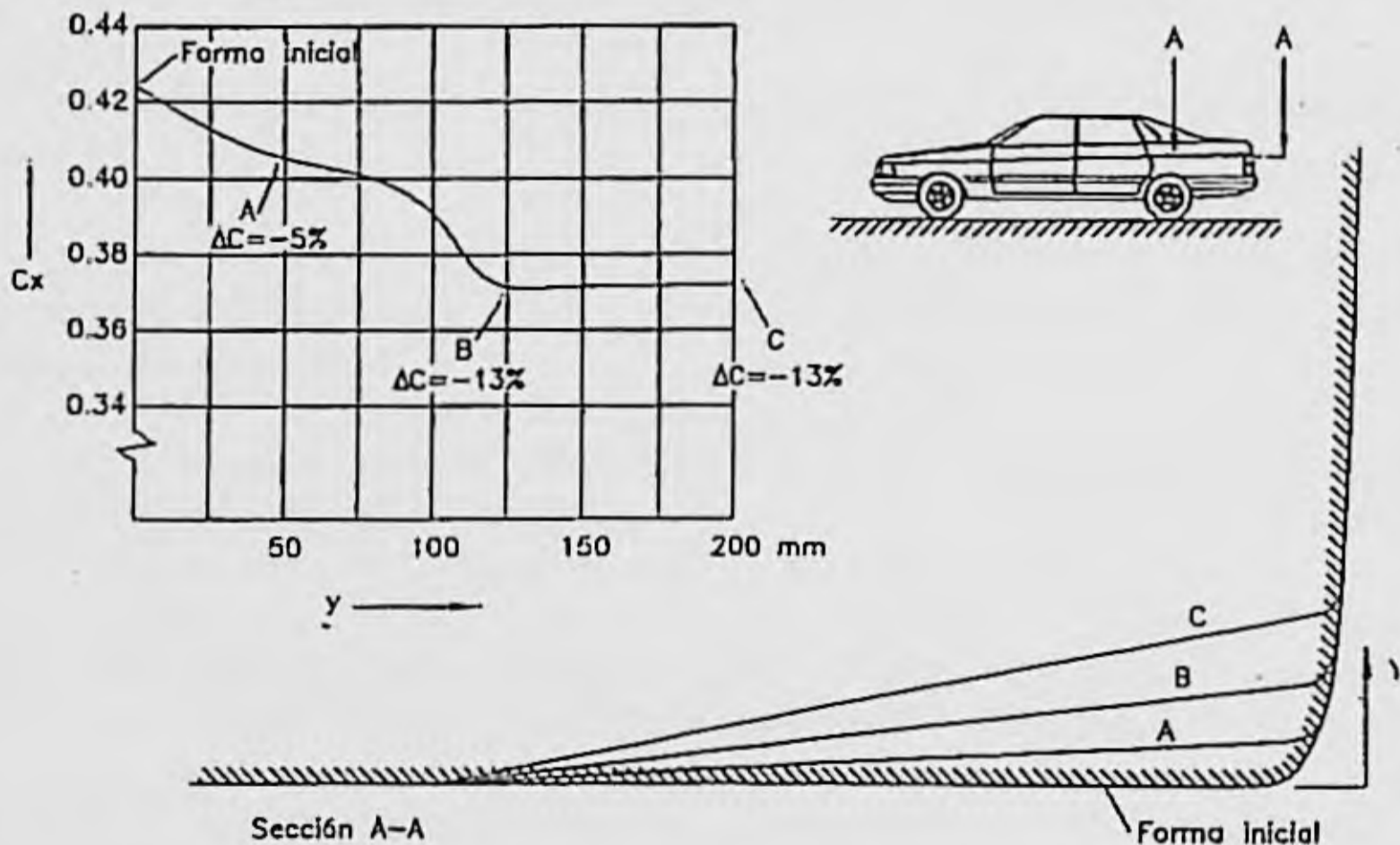


Figura 3.30. Influencia sobre C_x de la sección horizontal de un vehículo con la trasera en escalón. (Hucho y Janssen, 1976).

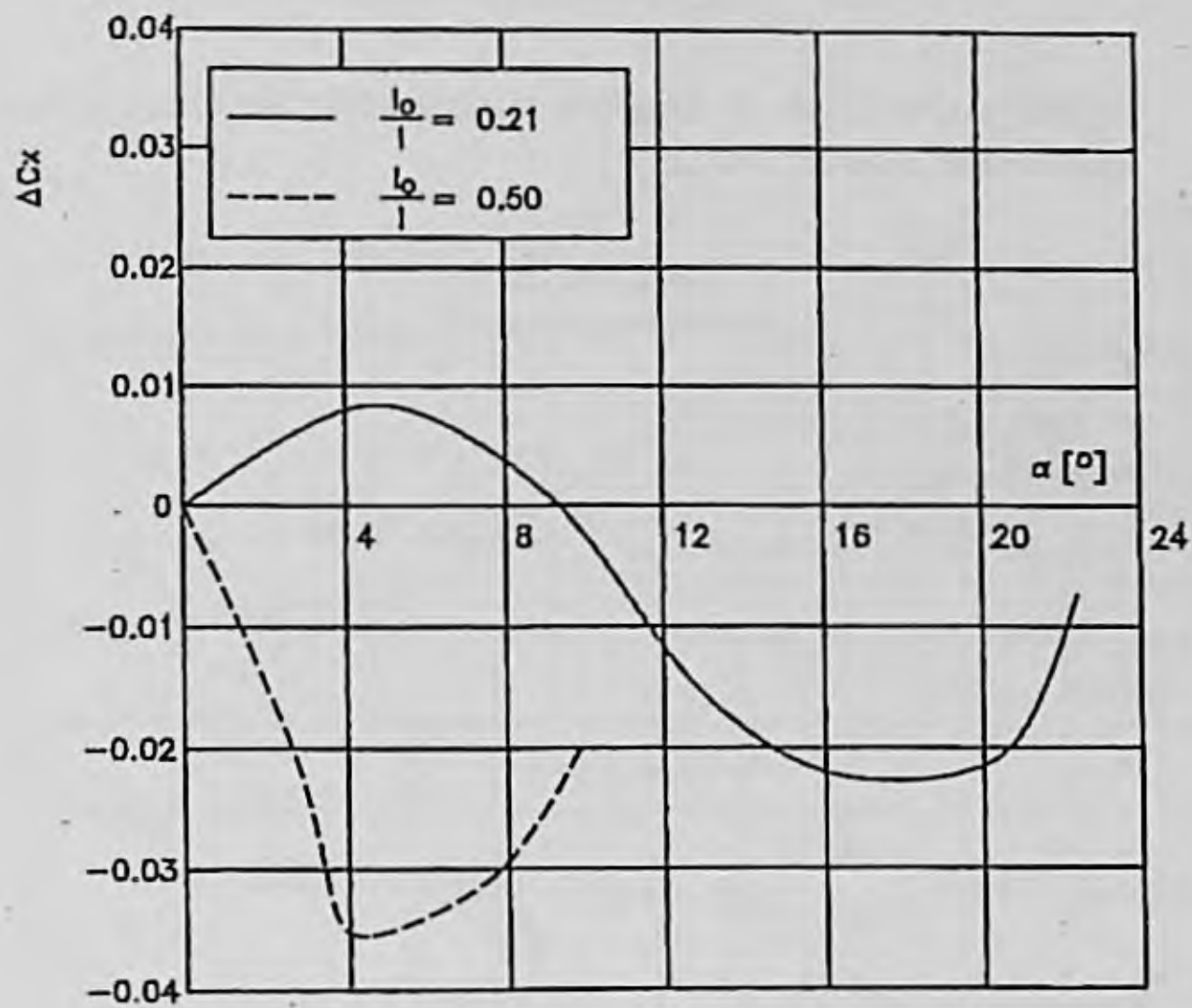
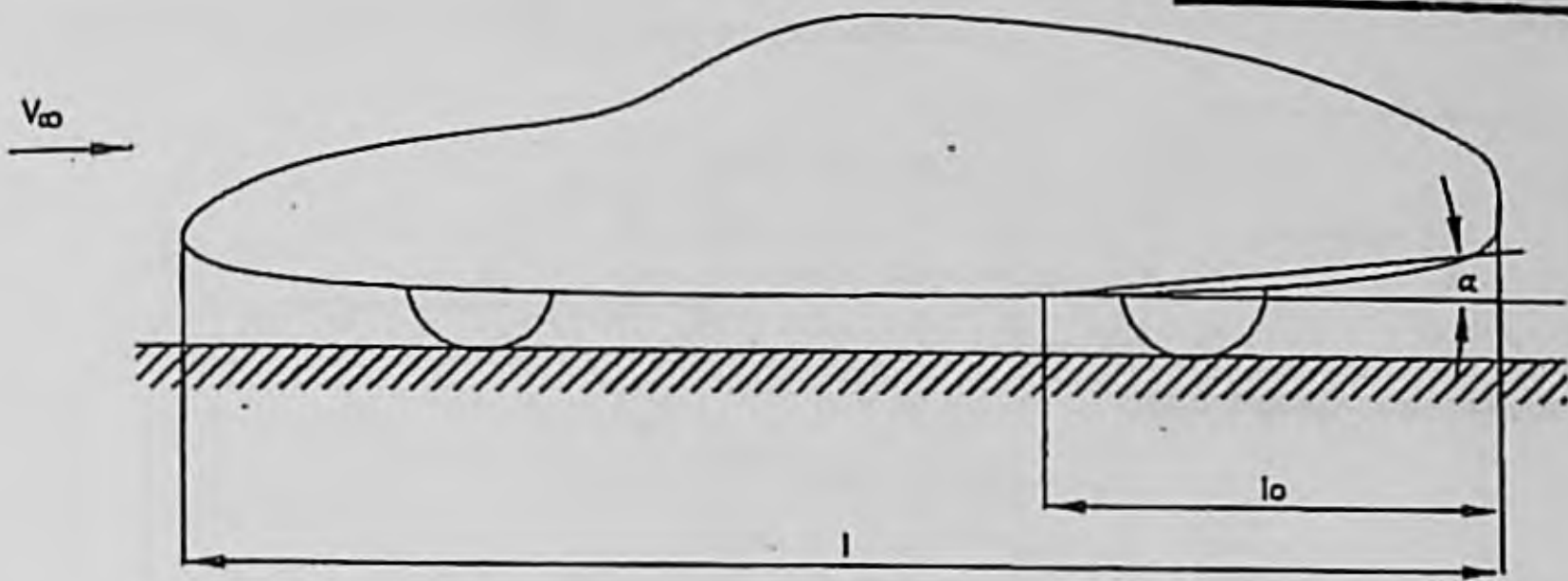
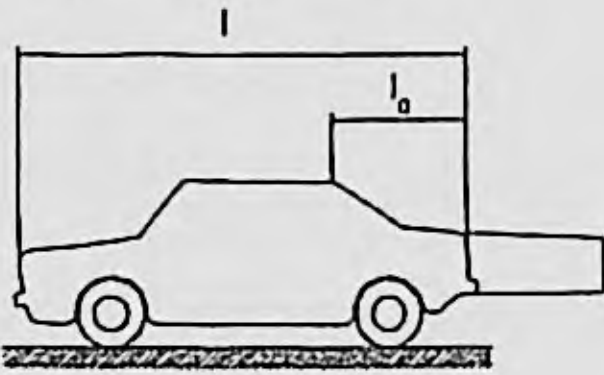


Figura 3.31. Efecto sobre C_x de la inclinación y longitud de la parte posterior inferior (difusor). (Buchheim y otros, 1981).

Tipo b



Tipo a

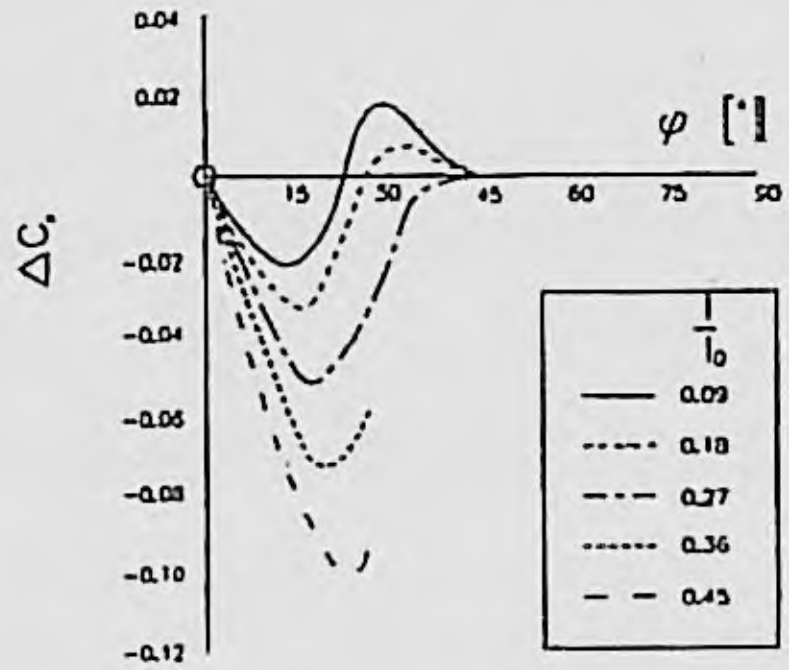
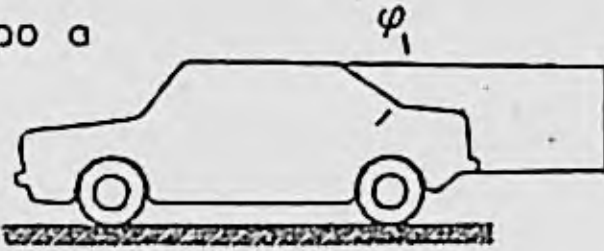


Figura 3.32. Efecto sobre C_x de la longitud e inclinación de la superficie posterior. (Buchheim y otros, 1981).

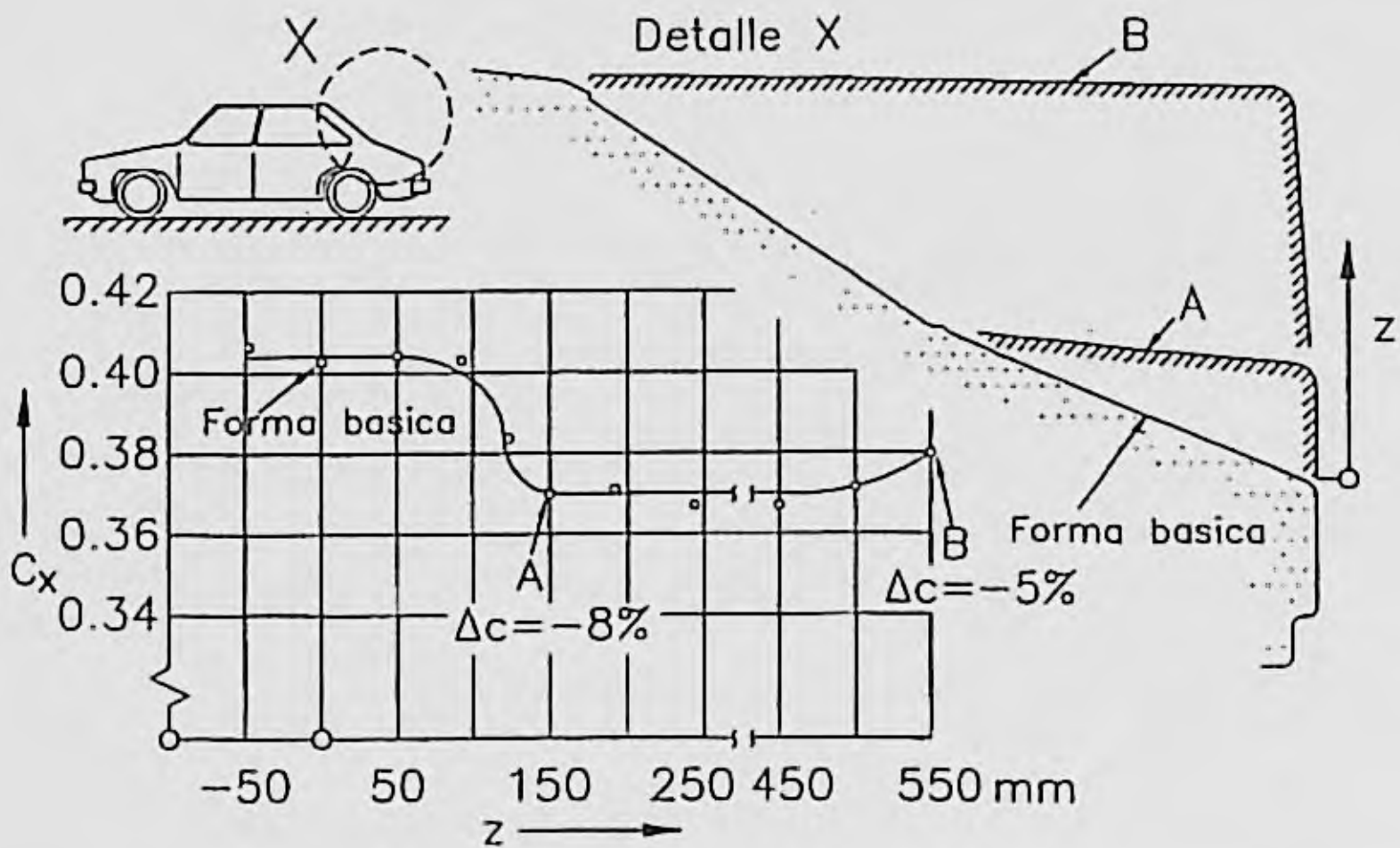


Figura 3.33. Efecto sobre C_x de la forma de la trasera (Hucho y Janssen, 1976).

Por último, en la figura 3.34 se incluyen algunas variables estudiadas por Buchheim y otros para optimizar la forma posterior del Audi 100.

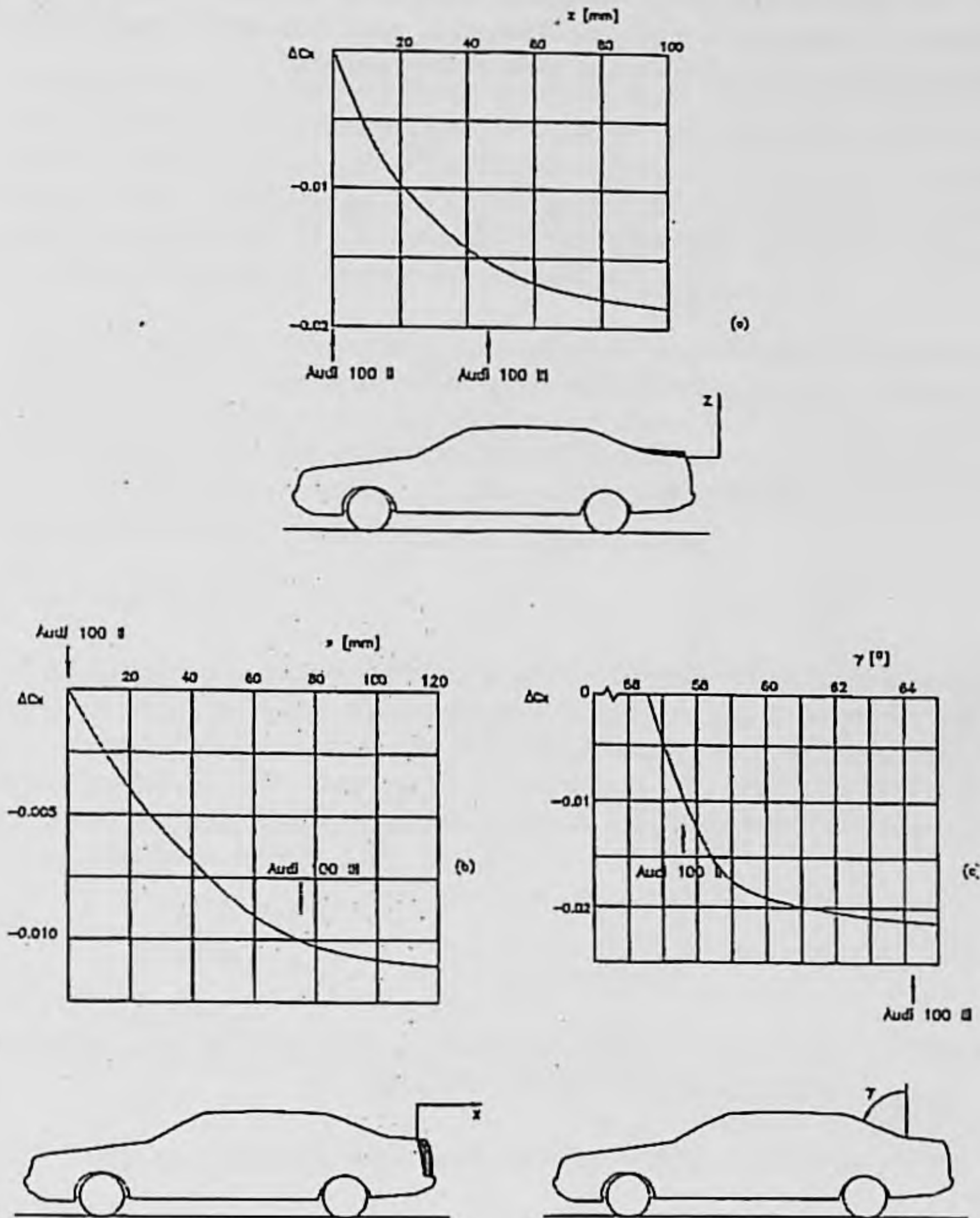


Figura 3.34. Influencias estudiadas, para la optimización del Audi 100, de la altura y longitud del maletero, y de la inclinación de la ventana trasera. (Buchheim y otros, 1982-1983).

3.2.2.3. Laterales.

Un ligero curvado de las superficies laterales, en su sección horizontal, reduce, normalmente, el coeficiente de resistencia al avance C_x , pero incrementa el área frontal A_f , por lo que el producto $C_x \cdot A_f$ puede presentar algún máximo o mínimo.

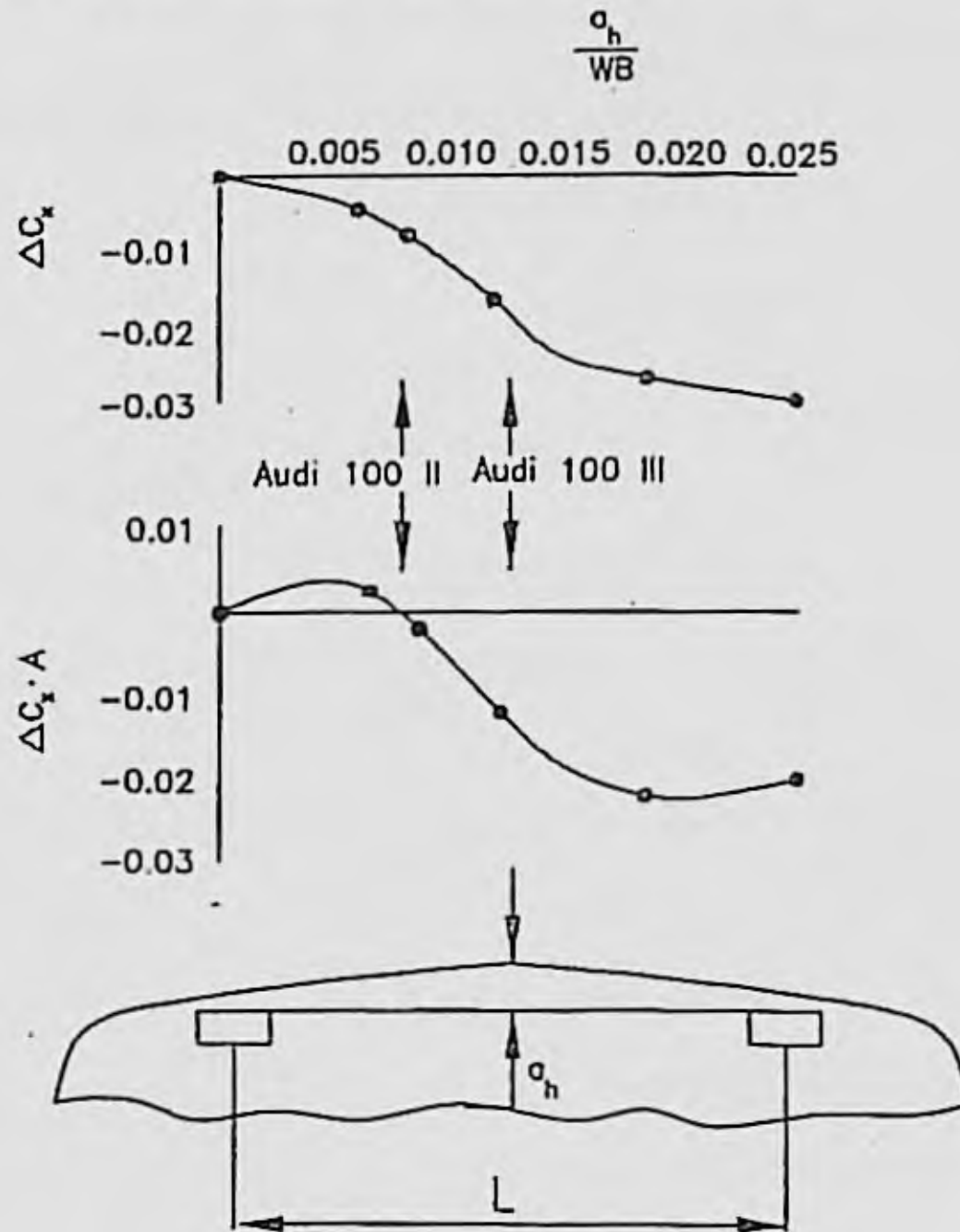


Figura 3.35. Efecto sobre C_x de la forma de la proyección horizontal del lateral del vehículo. (Buchheim y otros, 1982-1984).

En la figura 3.35 se producen estas variaciones para el caso del Audi 100.

3.2.2.4. Bajos del vehículo

Los bajos del vehículo son, normalmente, zonas con gran rugosidad y ciertas discontinuidades, lo cual los hace poco adecuados desde el punto de vista de la resistencia aerodinámica. El panelado de los bajos con superficies lisas puede producir una reducción de C_x del orden de 0.045 según Carr y otros autores. Cuando la parte trasera se diseña como difusor, el anterior valor puede llegar a 0.07.

Otra forma de mejorar el C_x , reduciendo los efectos de los bajos, es mediante un deflector situado en la parte delantera inferior, como se verá después.

3.2.2.5. Ruedas

El flujo de aire en el hueco de ruedas, con éstas girando, es muy complejo. Para una rueda aislada y girando, con flujo longitudinal ($i = 0$) se han encontrado valores de $0.5 < C_x < 0.6$. En muchos vehículos, las ruedas se encuentran alojadas en un hueco de la carrocería, presentando una área frontal que es una fracción de la total. En estos casos, el valor del coeficiente C_x no es muy diferente, considerando la fracción de área del neumático que no se encuentra protegida, como contribución al área frontal total.

Con frecuencia las ruedas están giradas respecto a la carrocería, lo cual hace que el aire se mueva respecto a ellas con un cierto ángulo de incidencia que hace aumentar C_x . La relación entre el volumen de la parte de rueda alojada en el hueco de la carrocería y el de dicho hueco, también influye en C_x aunque moderadamente. El panelado exterior de la rueda puede producir un incremento $\Delta C_x = -0.009 \pm 0.003$, según un estudio realizado por Colgotti sobre 14 vehículos turismo de serie.

3.2.2.6. Spoiler delantero

La instalación de un spoiler en la parte inferior delantera del vehículo tiene un doble efecto positivo: reduce la resistencia aerodinámica debida a la rugosidad de los bajos del vehículo y reduce la fuerza sustentadora en el eje delantero. Por otra parte, genera una resistencia de presión que hace aumentar C_x , la existencia de dos efectos de sentido opuesto hace que exista una situación óptima, que es función de la altura del spoiler y de la rugosidad media, como se ilustra en la figura 3.36.

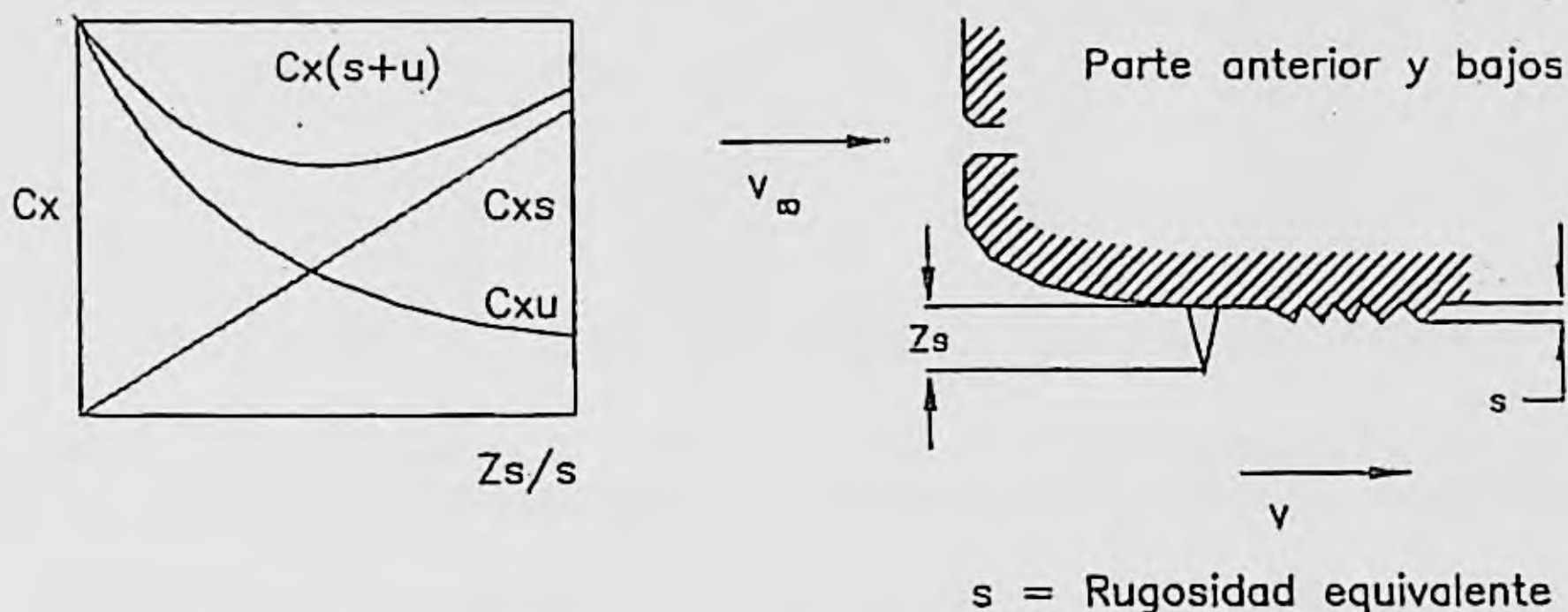


Figura 3.36. Efecto del spoiler delantero sobre C_x . (Hucho, 1986).

La altura del spoiler afecta tanto a la resistencia del avance como a las fuerzas de sustentación en cada eje. La figura 3.37 ilustra este efecto. Puede apreciarse en dicha figura que ΔC_x es máximo para una altura de 100 mm.

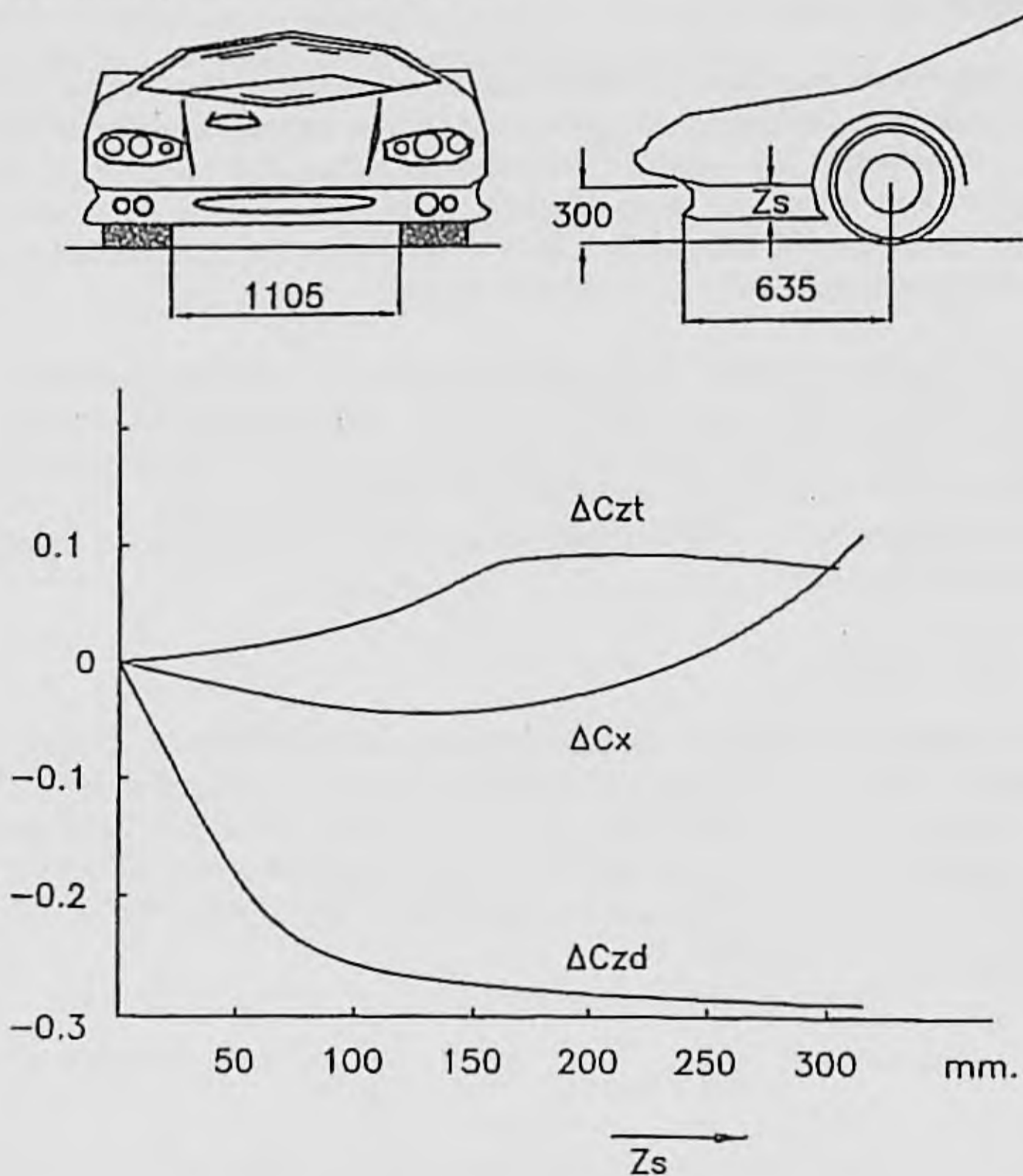


Figura 3.37. Efecto de la altura del spoiler delantero sobre C_x y C_z . (Schenkel, 1977).

Debe destacarse, así mismo, que el diseño de la parte delantera tiene un efecto combinado con el del spoiler, un ejemplo de ello se ilustra en la figura 3.38.

Por último, destacar que el spoiler está siendo integrado dentro del faldón delantero, obteniéndose buenos resultados como se pone de manifiesto en la figura 3.39.

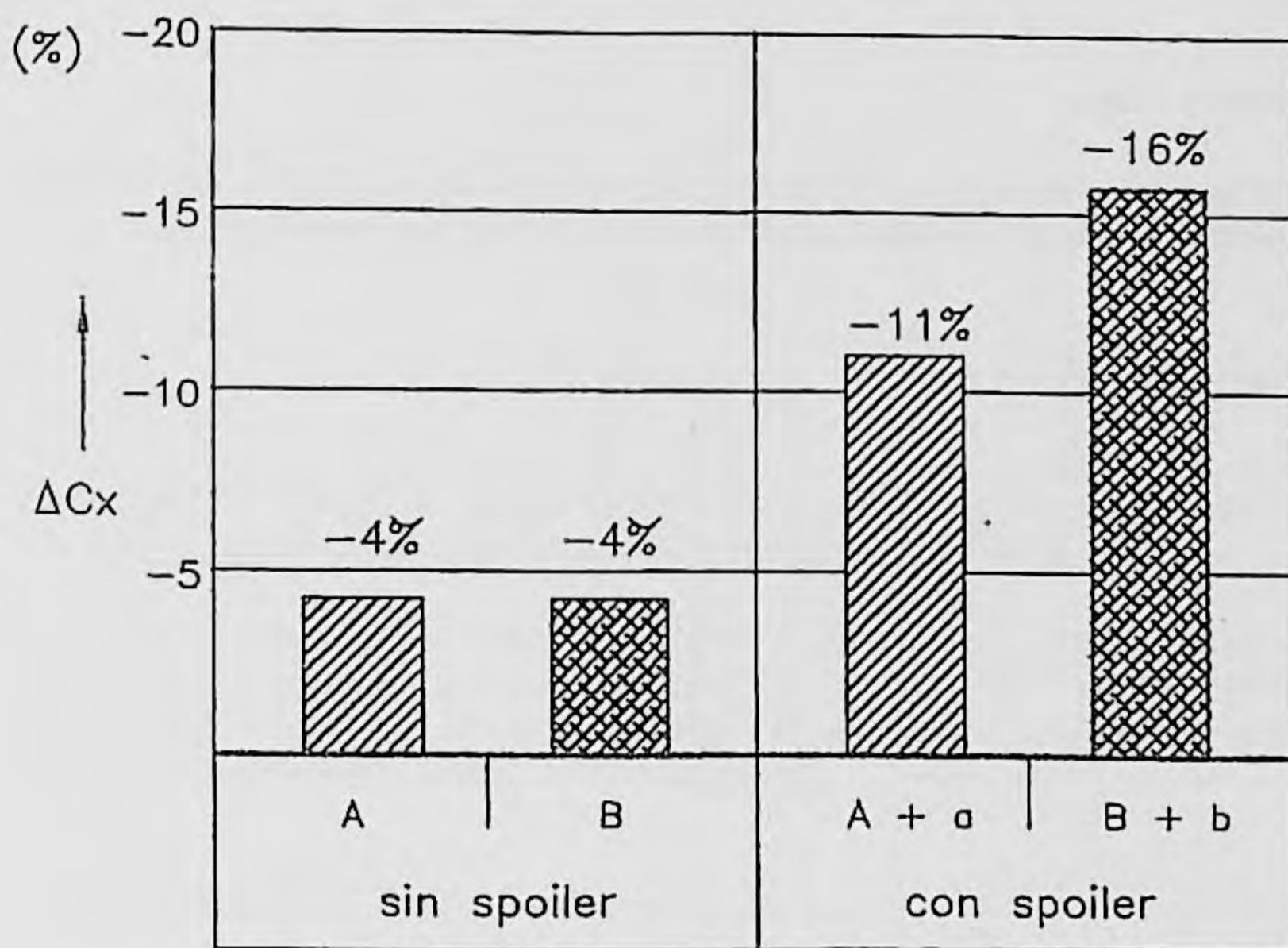
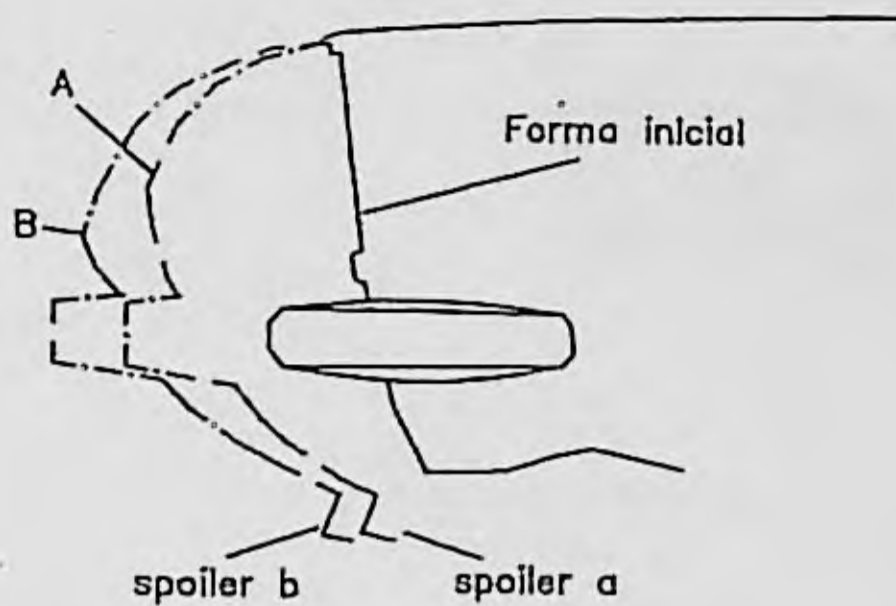


Figura 3.38. Influencia de la forma delantera y del spoiler, conjuntamente, sobre C_x . (Hucho y Janssen, 1976).

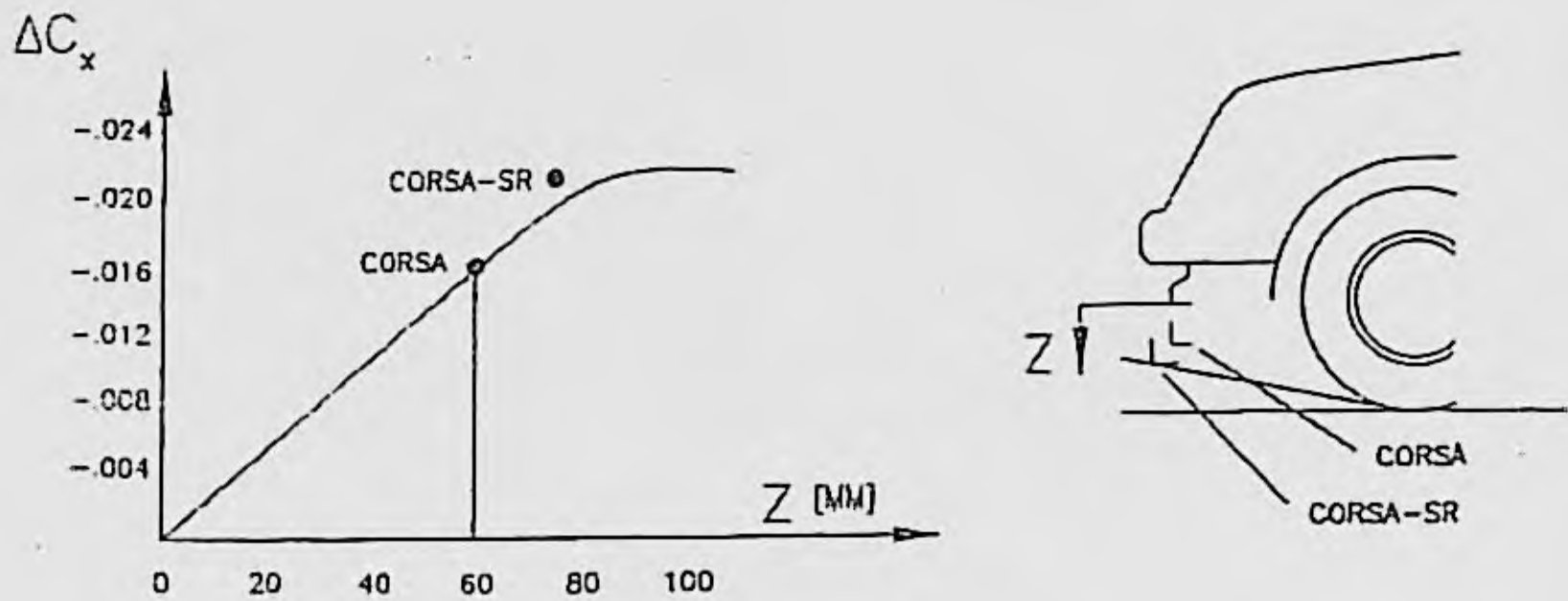


Figura 3.39. Influencia de la altura del spoiler delantero sobre C_x (desarrollo integrado de la delantera del Opel Corsa, Ohtani, 1972)

3.2.2.7. Spoiler trasero

El spoiler trasero tiene un efecto sobre la presión en la parte trasera del vehículo, mientras afecta poco a la presión sobre la parte delantera, esto se ilustra en la figura 3.40.

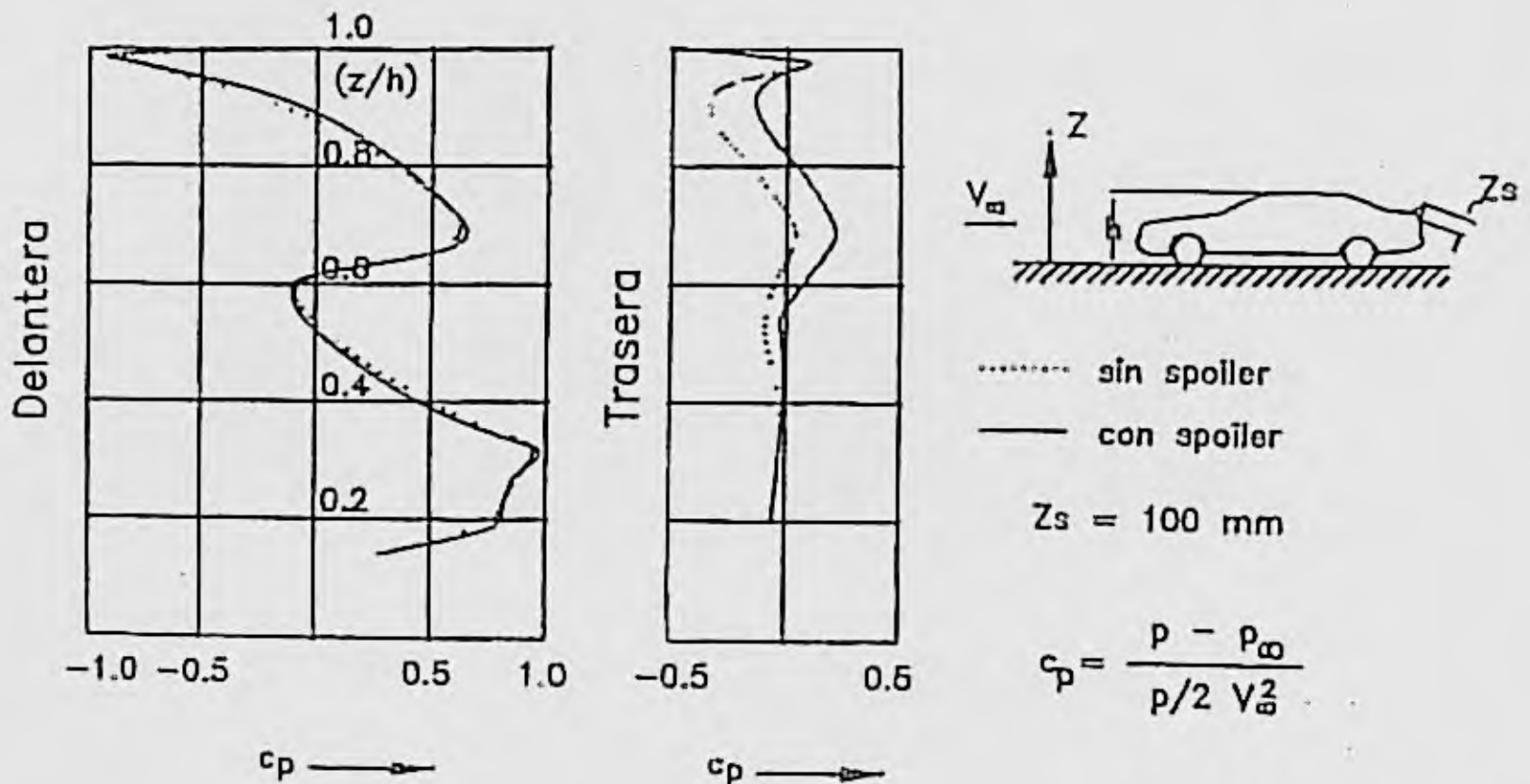


Figura 3.40. Efecto del spoiler trasero sobre la presión en la delantera y trasera del vehículo. (Ohtani, 1972).

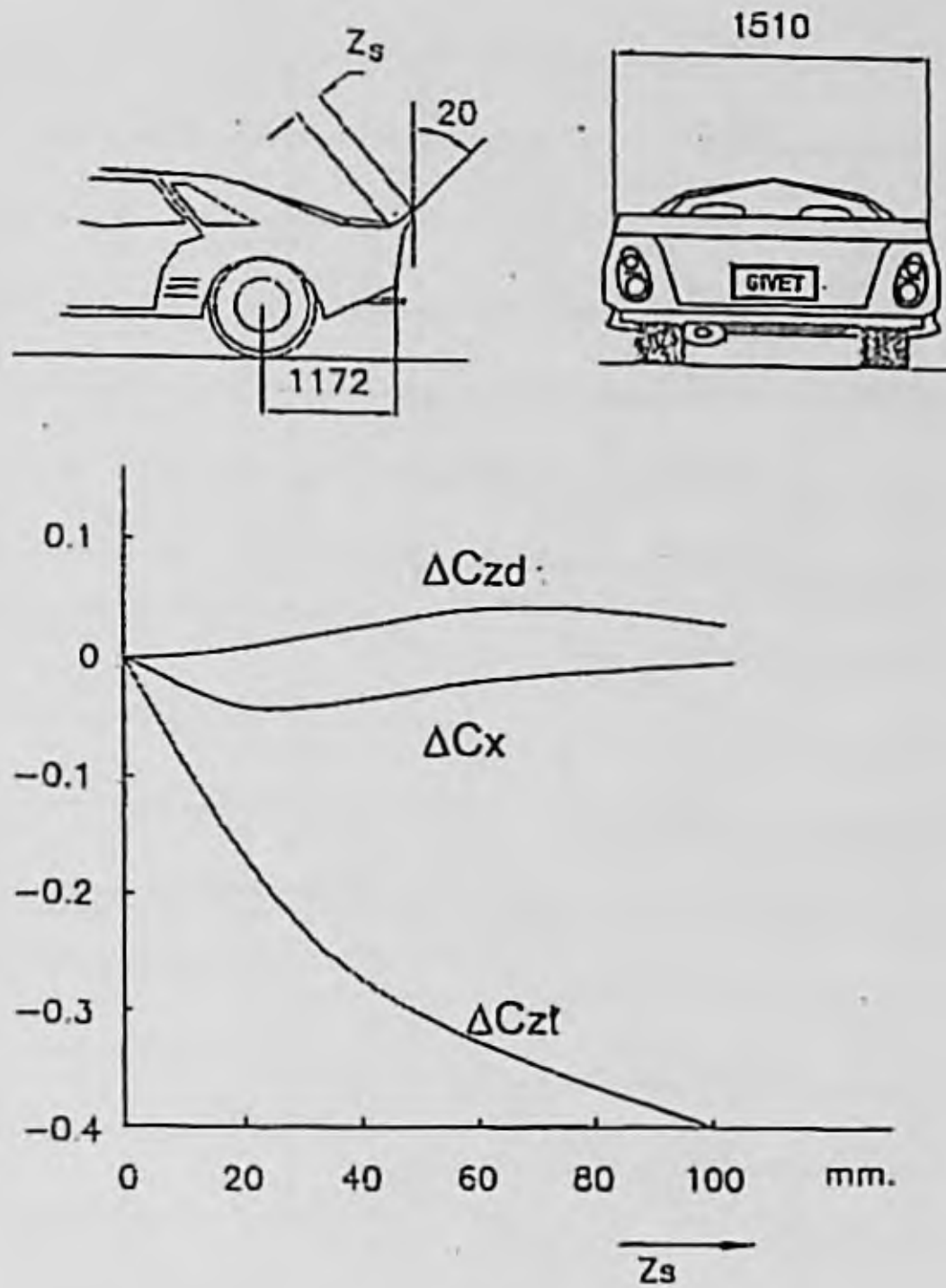


Figura 3.41. Efecto del spoiler trasero sobre los coeficientes aerodinámicos C_x y C_z , considerando éste último para ambos ejes. (Schenkel, 1974).

En la figura 3.41 se muestra el efecto del spoiler sobre C_x y sobre los coeficientes de esfuerzo sustentador en los dos ejes. Se observa que se produce un mínimo de ΔC_x para una altura de aproximadamente 20 mm, mientras que la fuerza de sustentación aerodinámica en el eje trasero decrece continuamente con dicha altura.

3.2.2.8. Influencia de otros factores sobre C_x .

Un factor que afecta a C_x y C_z es el ángulo de ataque (α), es decir, el ángulo que forma la superficie externa inferior del vehículo, con la superficie de rodadura. En general, tanto C_x como C_z aumentan cuando lo hace α (figura 3.42).

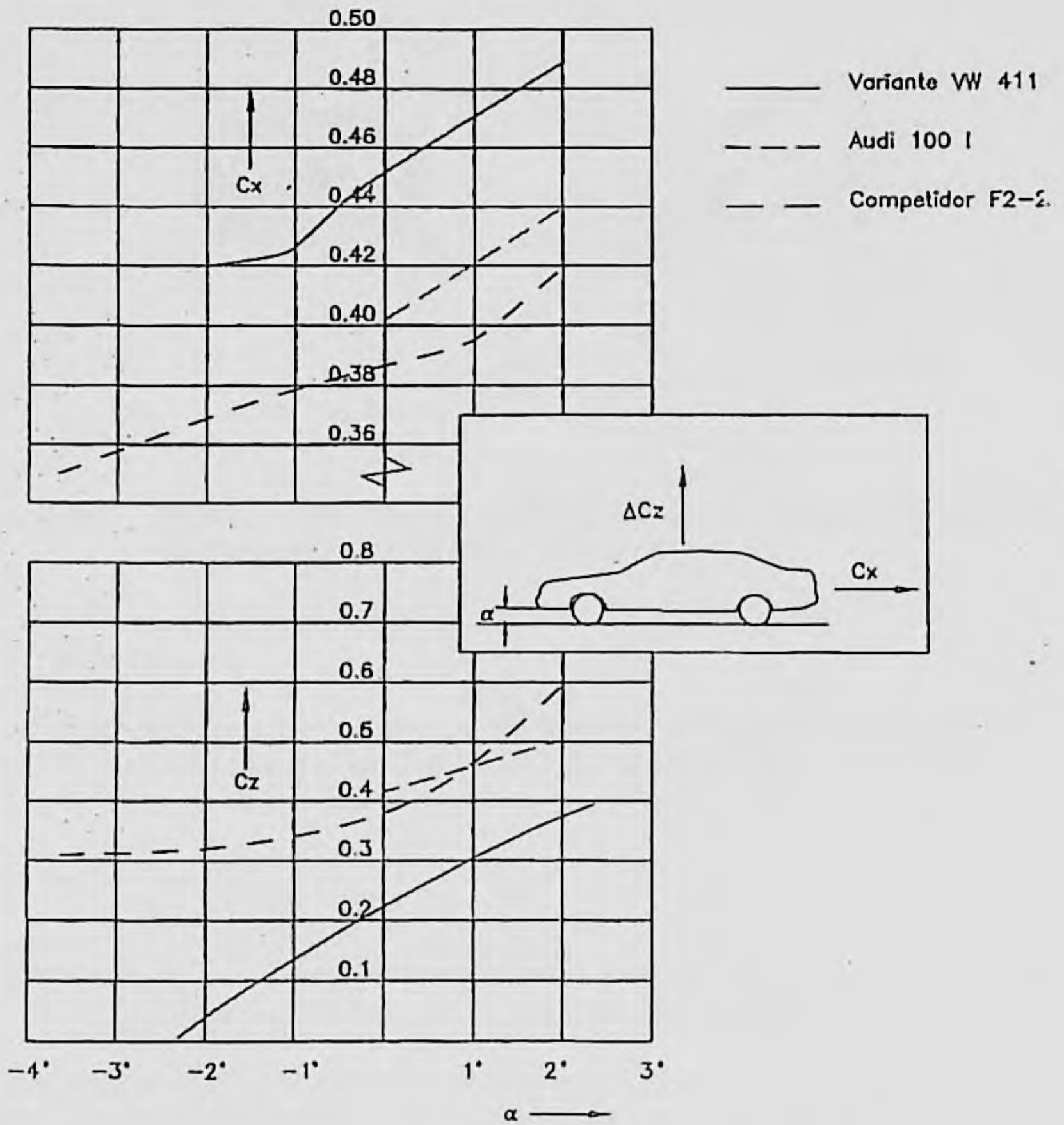


Figura 3.42. Efecto del ángulo de ataque α sobre C_x y C_z . (Janssen y Hucho, 1973).

La distancia al suelo afecta en forma diferente según el tipo de vehículo, esto se ilustra en la figura 3.43, por lo que no puede establecerse una tendencia general. En la práctica, el ángulo de ataque y la distancia al suelo varían simultáneamente y dependen de la carga del vehículo. Como regla general, en vehículos con maletero trasero C_x aumenta al hacerlo la carga del vehículo.

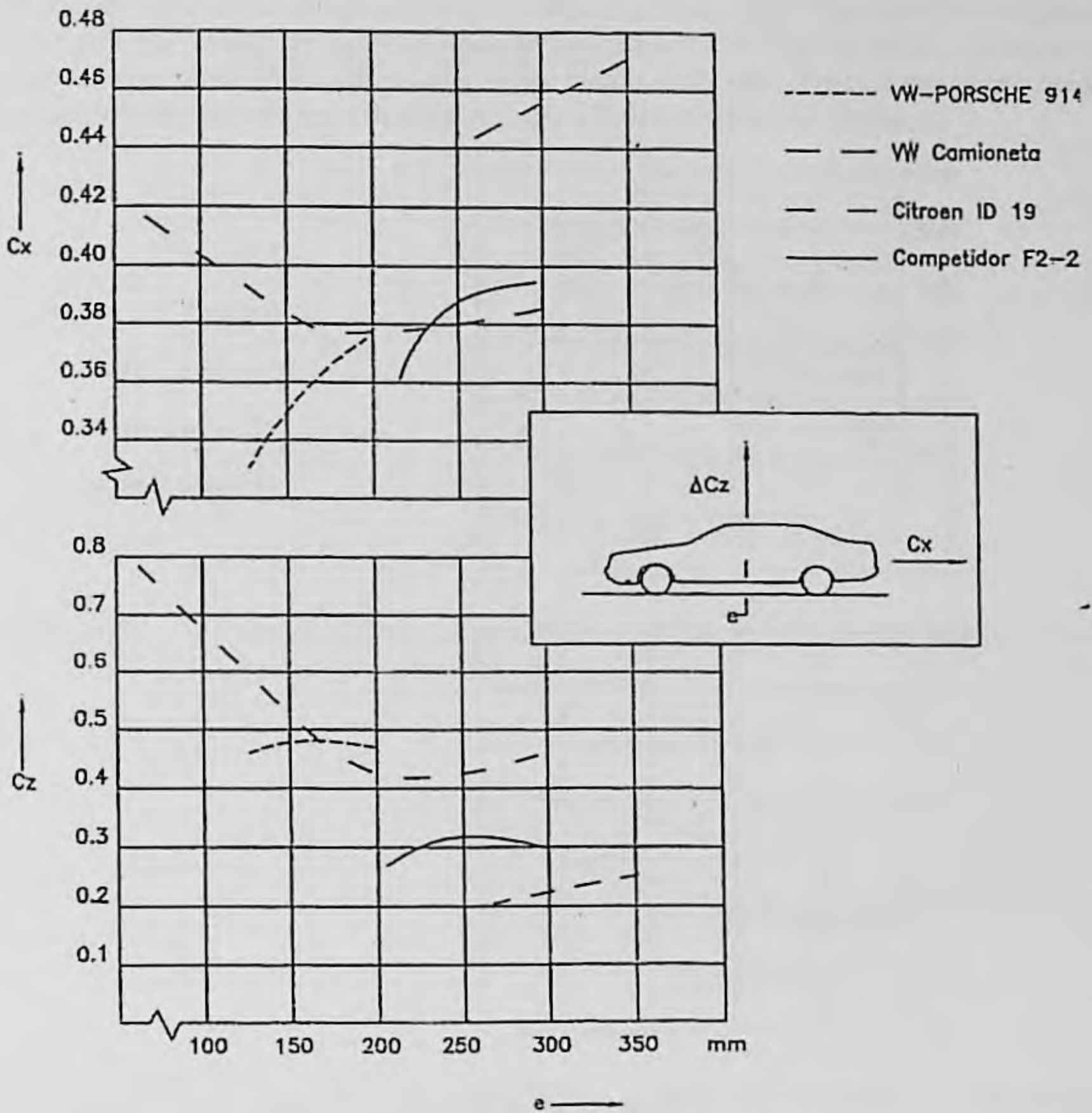


Figura 3.43. Efecto de la distancia al suelo de los bajos del vehículo sobre C_x y C_z (Janssen y Hucho, 1973).

Por último, en la figura 3.44, se muestra la influencia del ángulo de inclinación del aire sobre C_x . Se representa con C_T el valor de C_x para $i = 0$. Debe tenerse en cuenta que $i = 0$ se presenta excepcionalmente y que a $V = 80$ Km/h, el valor más probable de i se sitúa en unos 5° . La disminución de C_x para valores muy pequeños de i que se presenta en el caso del modelo VWP2, de un prototipo durante la fase de desarrollo, se debía a un flujo defectuoso para $i = 0$, que fue corregido.

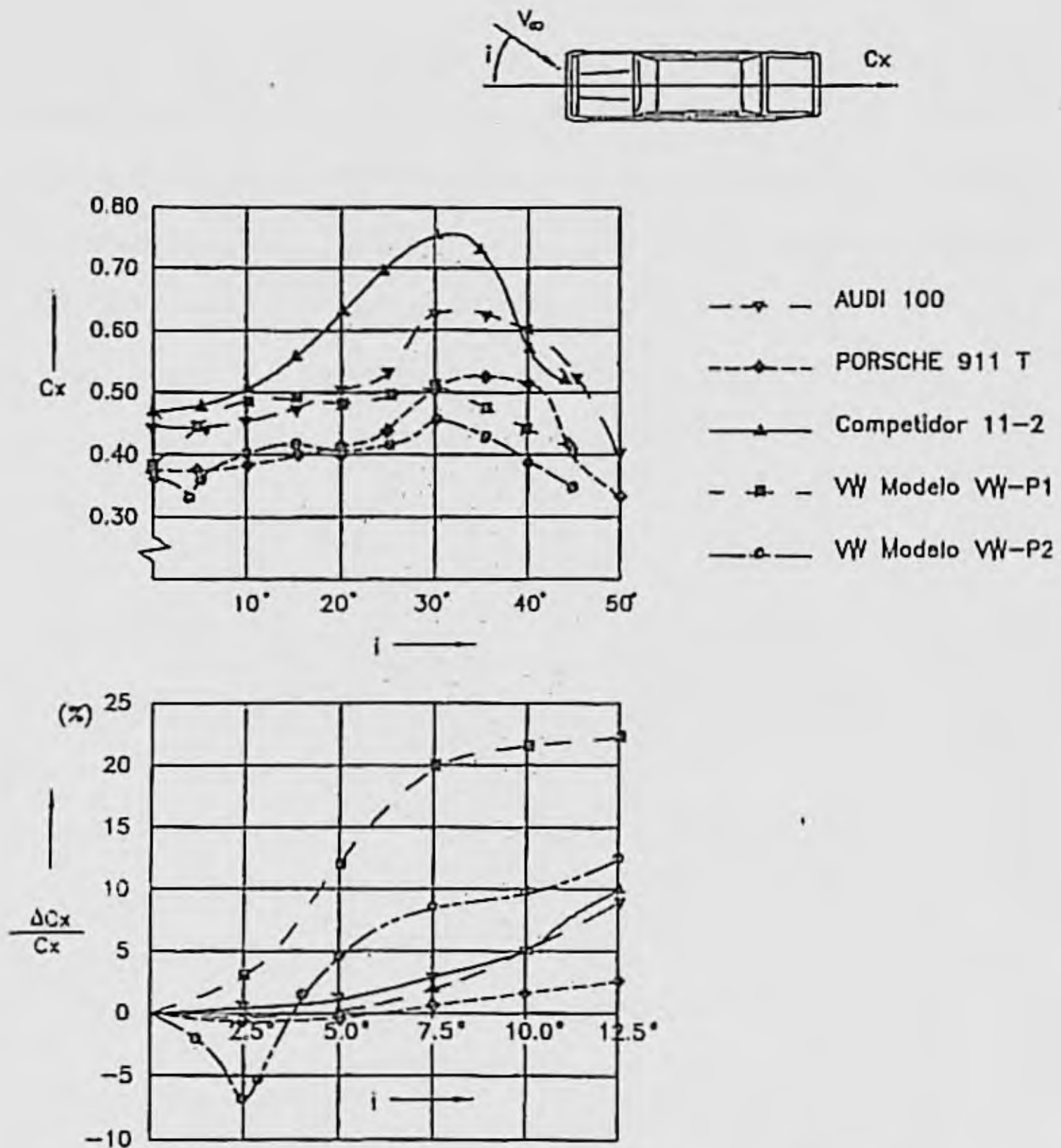


Figura 3.44. Variación del coeficiente de resistencia al avance con el ángulo de incidencia $C_x(i)$.

Otras condiciones como apertura de ventanas, coche descapotable, equipajes en el techo, remolques, afectan notablemente a C_x , incrementando su valor.

3.2.3. Optimización de la forma del vehículo.

Como se ha dicho antes, la resistencia de forma del vehículo es de la máxima importancia, de ahí que se preste una atención preferente a esta componente desde el inicio de la concepción del vehículo.

El proceso de diseño aerodinámico parte, generalmente, de la adopción de una forma básica derivada de un cuerpo de muy baja resistencia al avance. En la figura 3.45 se comparan cuatro de estos cuerpos. En dos de ellos, la relación entre la longitud total y la altura es excesivamente elevada y en una se incluyen los valores de C_x para el cuerpo con y sin ruedas, apreciándose la gran influencia de éstas, respecto a la forma básica del cuerpo.

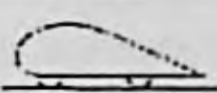
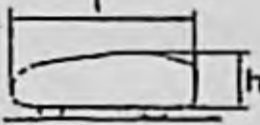
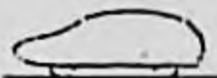
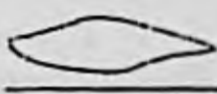
Cuerpo básico	C_x	l/h	Configuración
	0.15	4.0	Con ruedas modeladas
	0.16	3.0	Con ruedas modeladas
	0.07 0.18	3.1	Sin ruedas Con ruedas
	0.05	3.9	Sin ruedas

Figura 3.45. Comparación de diferentes formas básicas de vehículos de baja resistencia aerodinámica al avance.

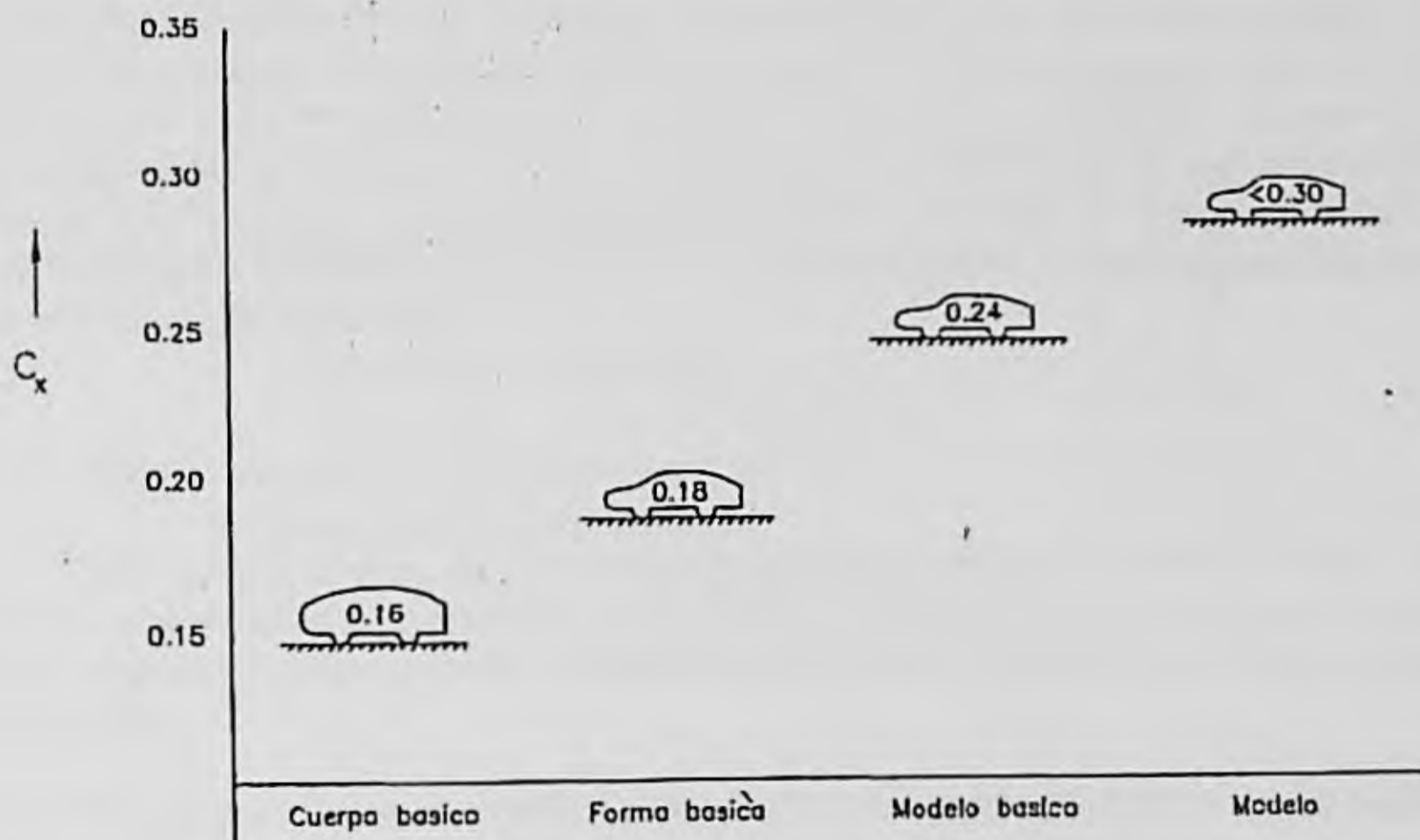


Figura 3.46. Ejemplo de optimización de forma de un coche con trasera inclinada. (Hucho, 1987).

La forma básica situada en segundo lugar en la figura 3.45 es la más utilizada para el desarrollo de los coches actuales. La evolución entre una forma de este tipo, hasta completar el modelo del vehículo, se ilustra en la Figura 3.46.

La forma básica se genera a partir de un cuerpo básico, teniendo en cuenta los principales parámetros geométricos del vehículo que se diseña. El valor de C_x de esta forma básica es solo algo superior al del cuerpo básico. El siguiente paso es el desarrollo de un modelo básico, que incorpora las características técnicas del vehículo: ruedas, radiador, escape, ventanas, juntas, etc. En el ejemplo, $C_x = 0.24$. Este modelo básico es el que los diseñadores de la forma entregan a los encargados de desarrollar al vehículo; estos producirán el modelo final después de un proceso de incorporación de las modificaciones que requieran el diseño de cada componente, tanto desde el punto de vista funcional como de fabricación.

3.2.4. Resistencia al avance de vehículos industriales, autobuses y autocares.

Los vehículos industriales presentan, en general, formas menos aerodinámicas y una gran superficie frontal y, en ocasiones, cargas que ofrecen discontinuidades entre ellas o con la cabina. Todo ello hace que la fuerza aerodinámica de resistencia al avance sea alta y que ésta tenga una gran influencia en el consumo de combustible, es decir, en los costos de explotación. (Figura 3.47).

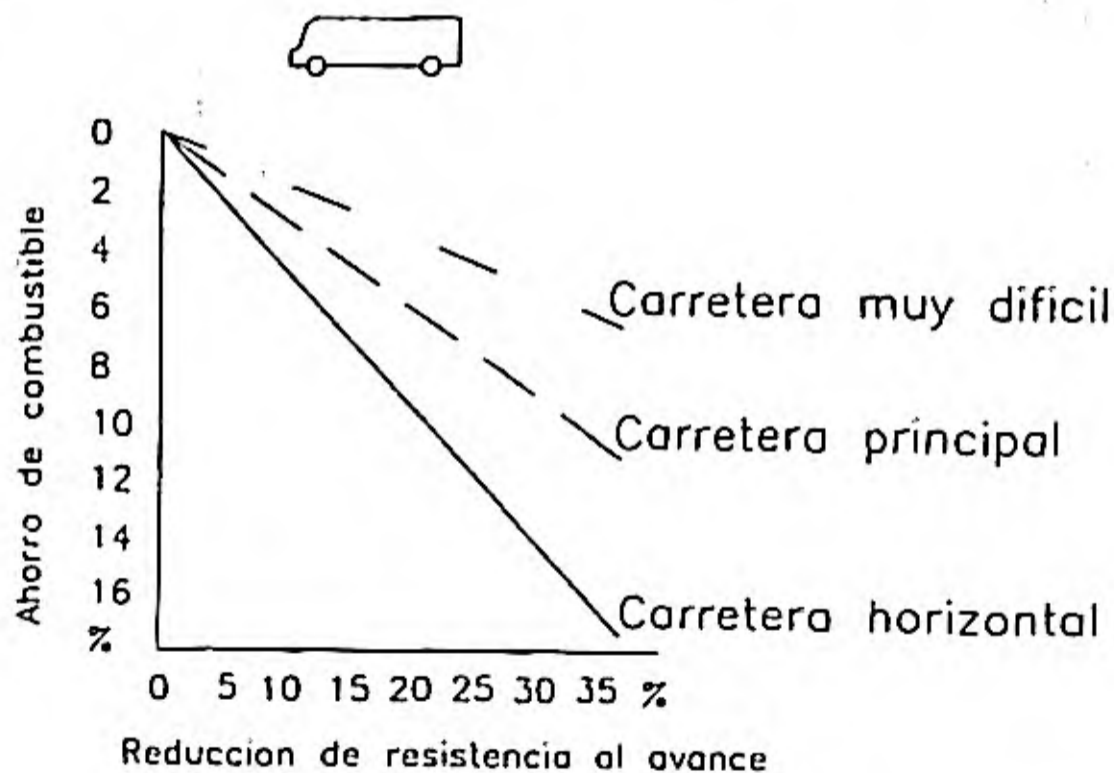


Figura 3.47. Influencia de la resistencia aerodinámica al avance en el ahorro de combustible para una furgoneta ligera. (Hucho, 1986).

En la figura 3.48, se comparan los valores más frecuentes de C_x para diferentes tipos de vehículos.

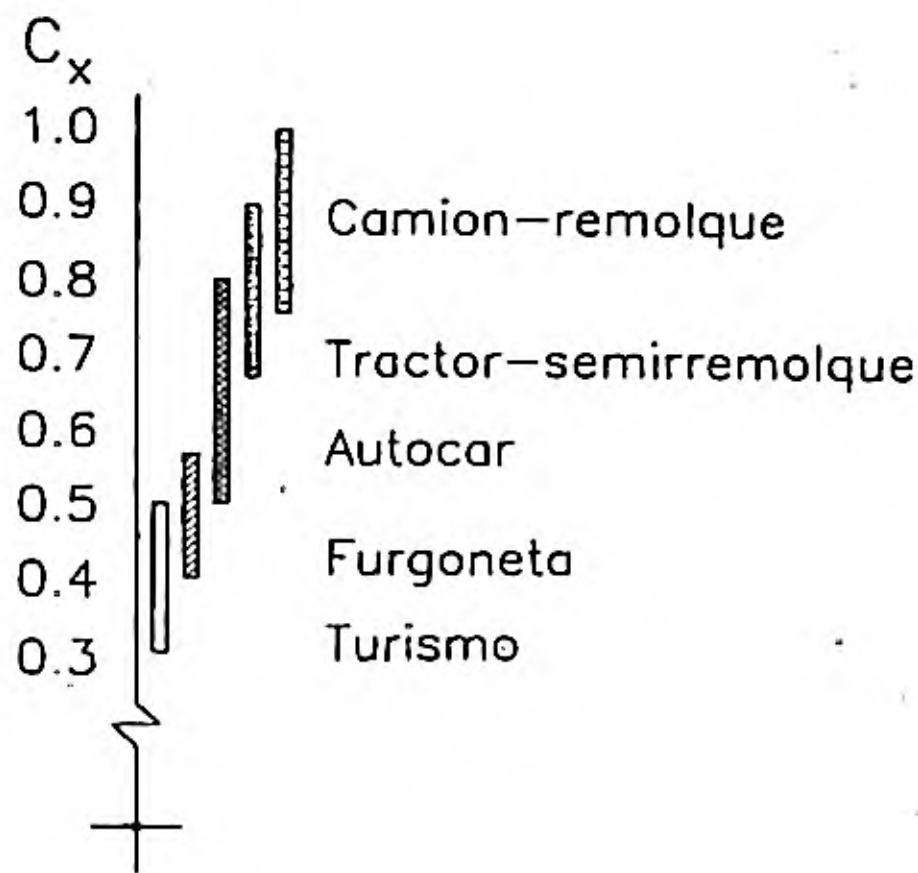


Figura 3.48. Coeficiente C_x para diferentes tipos de vehículos. (Hucho, 1986).

Los conceptos generales estudiados en el caso de los vehículos de turismo son, lógicamente, aplicables a los vehículos industriales pero las soluciones prácticas son diferentes. Si se deseara, por ejemplo, dar forma aerodinámica a la delantera y trasera de estos vehículos, con criterios análogos a los aplicados en turismos, la relación volumen de la carga/longitud del vehículo, se vería muy penalizada; la disminución de la capacidad de carga y, por tanto, de transporte, no compensaría la disminución de consumo. Este efecto adquiere mayor importancia si se tiene en cuenta que los vehículos industriales cuentan con velocidades inferiores a la de los turismos.

3.2.4.1. Combinaciones de vehículos.

Las combinaciones de vehículos: tractor-semirremolque, camión-remolque, etc. presentan características aerodinámicas especiales por la interacción entre los distintos cuerpos que las componen. La influencia de la separación entre ellos y del ángulo de incidencia del aire reviste interés.

En la figura 3.49 se presentan separadamente las contribuciones de la cabina, bastidor y caja del semirremolque, al coeficiente C_x . Puede observarse que, para un valor nulo del ángulo de incidencia, la variación de la resistencia aerodinámica al avance de los tres componentes del vehículo con la separación cabina-caja, es relativamente pequeña, siendo mayor para la caja.

Al aumentar el ángulo de incidencia, la variación del C_x de la cabina es pequeña, siendo, en cambio, grande la del bastidor e intermedia la correspondiente a la caja. Esto se debe a las separaciones de flujo en el lado de sotavento.

De manera análoga, en la figura 3.50 puede observarse el efecto de cada componente de las composiciones. En el caso del semirremolque, este es el responsable de la mayor parte del incremento de C_x al aumentar i . En el conjunto camión-remolque, ambos componentes contribuyen por igual a dicho incremento. La razón de esto último es que, para ambos cuerpos, las separaciones de flujo a sotavento son más parecidas, debido a la mayor separación entre ellos.

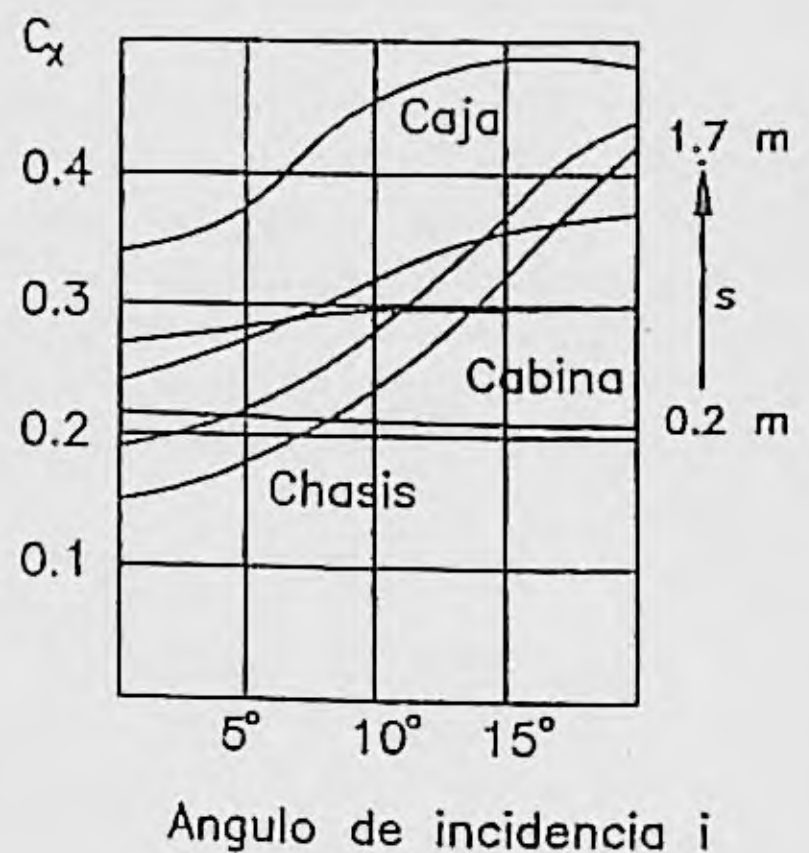
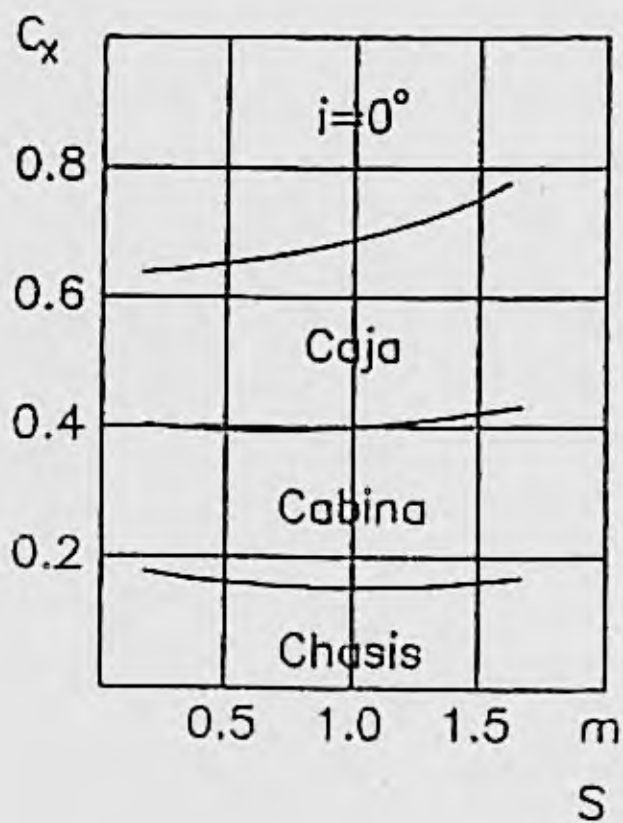
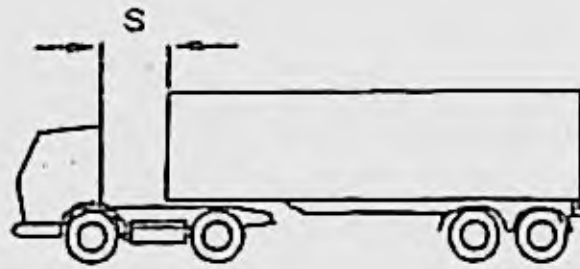


Figura 3.49. Componentes parciales de C_x en una composición tractor-semirremolque con caja de 8 pies. (Hucho, 1986).

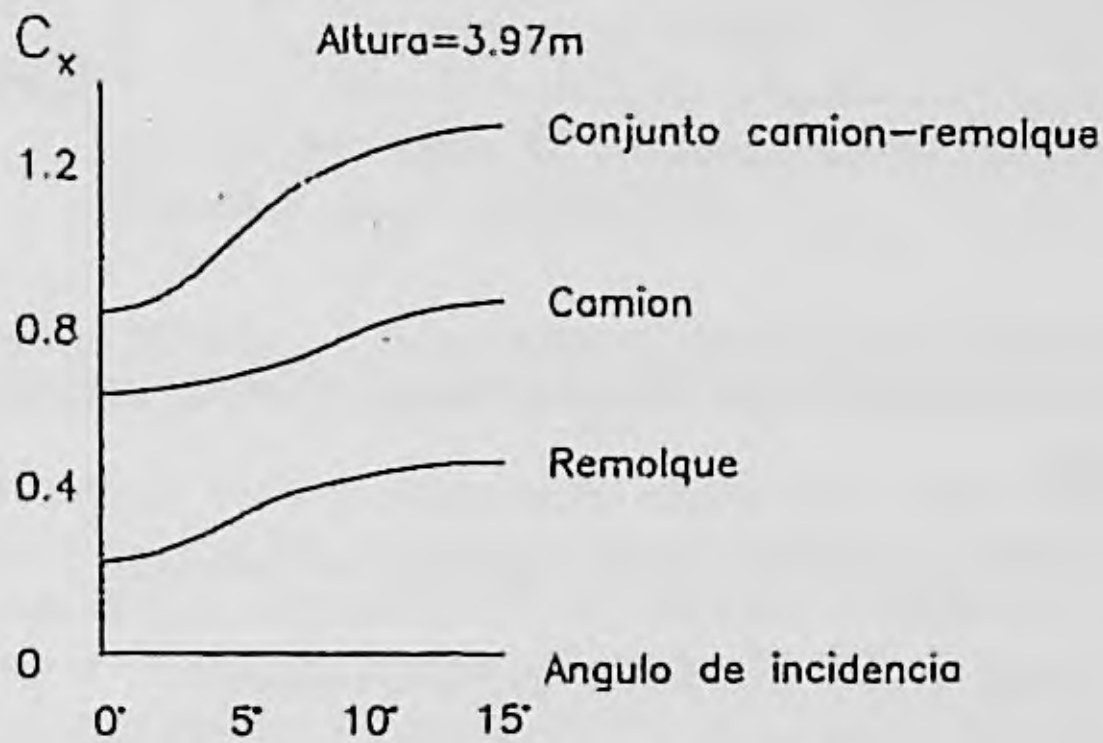
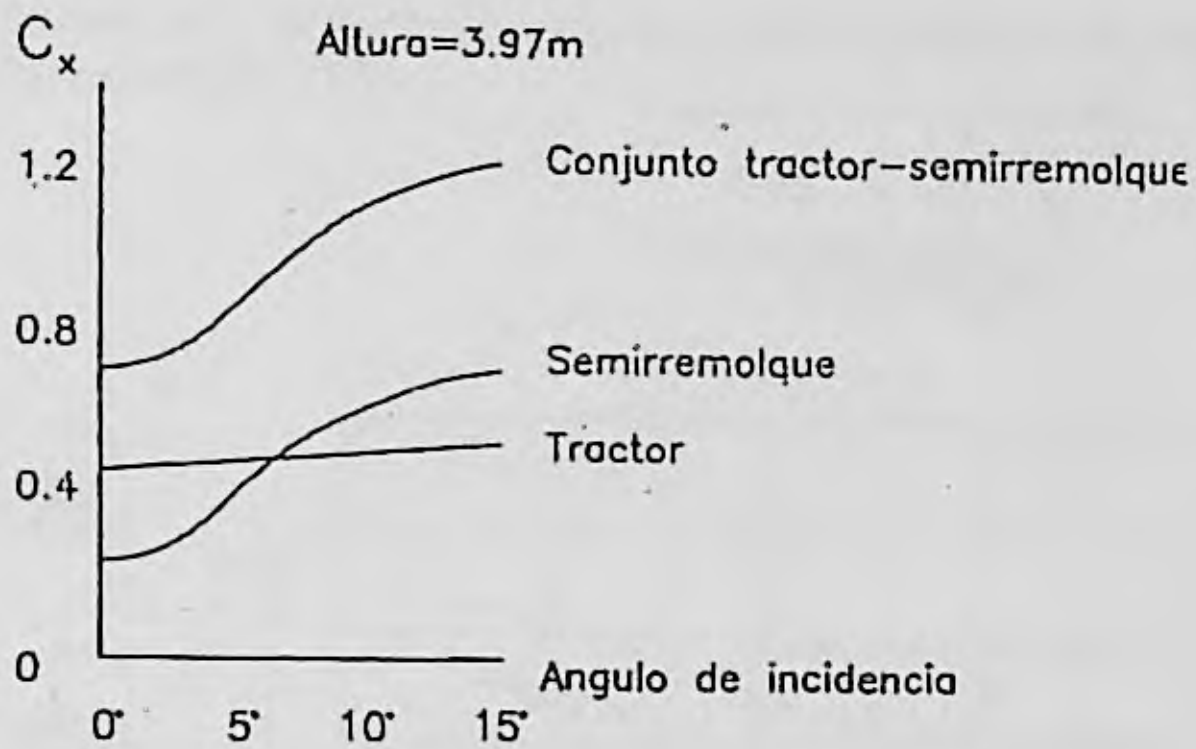


Figura 3.50. *Coeficientes parciales de resistencia aerodinámica al avance de las composiciones tractor-semirremolque y camión-remolque. Influencia del ángulo de incidencia. (Gilhaus y otros, 1979).*

3.2.4.2. Forma de la cabina.

Puesto que la forma y dimensiones de la caja vienen condicionadas por la exigencia de maximizar la capacidad de carga, se ha prestado gran atención a la influencia que ejerce la cabina considerando una caja de dimensiones fijas.

En la figura 3.51. se comparan tres cabinas: de un vehículo normal (A), con forma currentilínea (B) y con forma cuadrada (C).

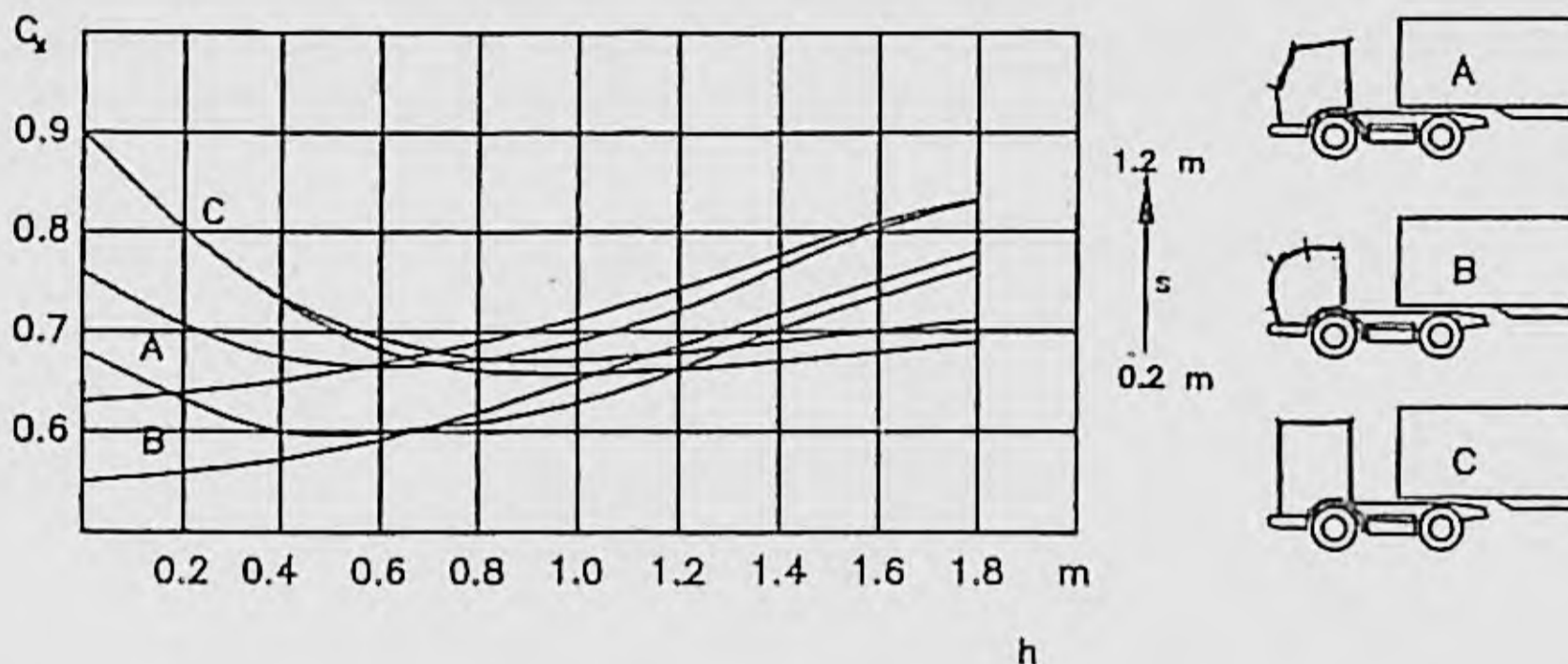
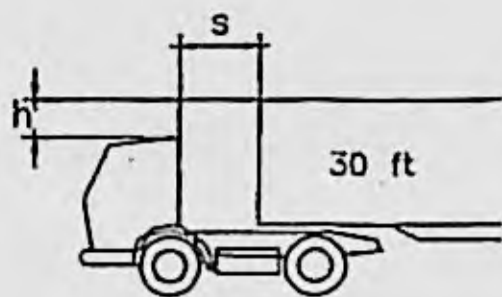


Figura 3.51. Influencia de la forma de la cabina sobre C_x , para diferentes valores de la separación cabina-caja y de la diferencia de alturas entre ambas. (Hucho, 1986).

La cabina cuadrada, tipo (C) presenta las siguientes características:

- La influencia de la separación cabina-caja es pequeña.
- C_x es mínimo para un valor $h = 1$ m, siendo h la altura de caja que sobrepasa a la proyección de la cabina en sentido longitudinal.
- Para valores de h mayores de un metro, C_x es inferior al caso de cabina currentilínea.

En el caso (B), cabina currentilínea:

- La influencia de la separación S es mayor que en el caso anterior y dicha influencia crece algo con h .
- Para valores de $h < 1$ m, C_x es inferior al caso C

En el caso de una cabina de producción bien diseñada, el valor de C_x es parecido al de cabinas currentilíneas para valores de $h > 0.6$. Los valores pequeños de h vienen requeridos en muchos casos por razones de habitabilidad de la cabina.

La influencia de la forma de la cabina en condiciones de flujo no simétrico ($i \neq 0$) es mayor y se ilustra en la figura 3.52.

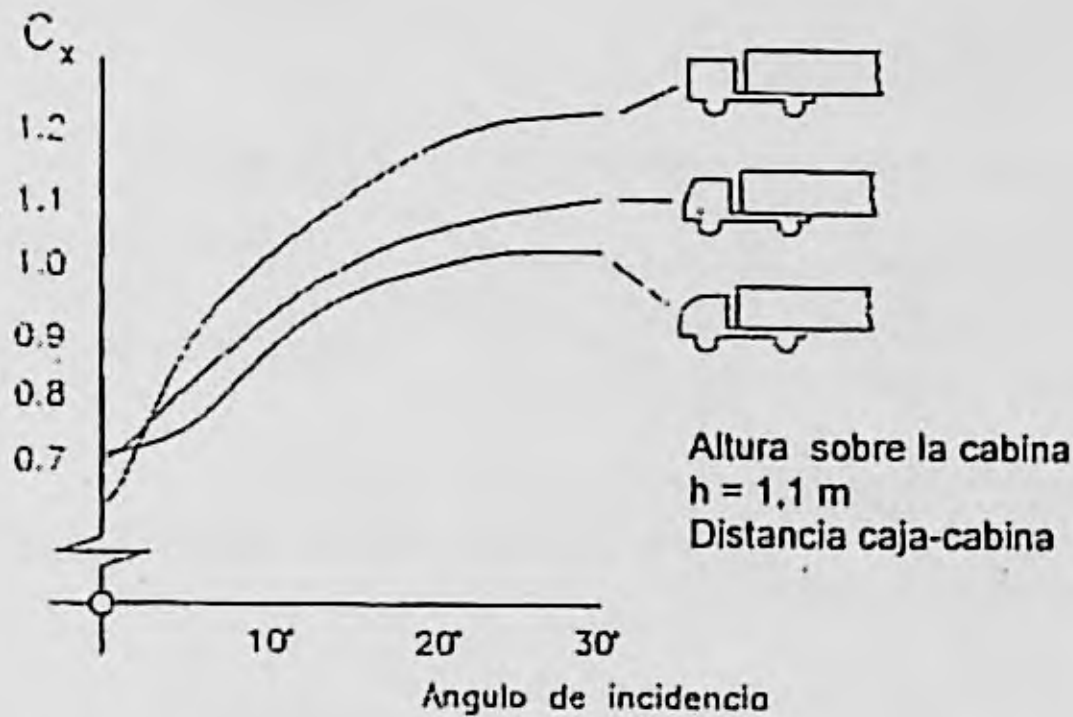


Figura 3.52. Influencia del ángulo de incidencia del aire sobre C_x para diferentes formas de la cabina. (Hucho, 1986).

3.2.4.3. Influencia de los deflectores aerodinámicos y otros dispositivos.

Conservado las formas y dimensiones constructivas que requieren la cabina y caja, por razones funcionales y de explotación, puede reducirse C_x apreciablemente mediante deflectores aerodinámicos sobre la cabina; abultamientos con formas redondeadas en la cara frontal de la caja y carenado de la parte delantera inferior de la cabina, del chasis y de las aletas laterales de la cabina, etc. En las figuras 3.53 y 3.54 se ilustran los efectos de algunos de estos elementos sobre C_x . Recientemente se construyen cabinas con deflectores superior y laterales integrados e, incluso, se utilizan los espacios interiores como literas o para otros fines. También se procede al achaflanado de los bordes delanteros de la caja.

Debe de tenerse en cuenta, no obstante, que si se montan deflectores rígidos, estos producirán unas condiciones óptimas para un tipo concreto de caja, pero no para todas en las que una cabeza tractora puede ser acoplada.

Las mejoras aerodinámicas enumeradas antes pueden reducir C_x en un 30% aproximadamente. En autocares, las mejoras también pueden ser importantes, siendo las principales líneas de atención: la forma de la parte frontal, redondeo de los bordes de la cara delantera, el carenado inferior y la lisura de sus superficies. En la figura 3.55 se aprecia la influencia de la parte delantera y en la 3.56 una imagen lateral de un vehículo de piso alto diseñado por la Fachhochschule de Hamburgo que consigue un $C_x = 0.6$, una reducción del 15% en el consumo a 80 Km/h y del 20% a 100 Km/h.

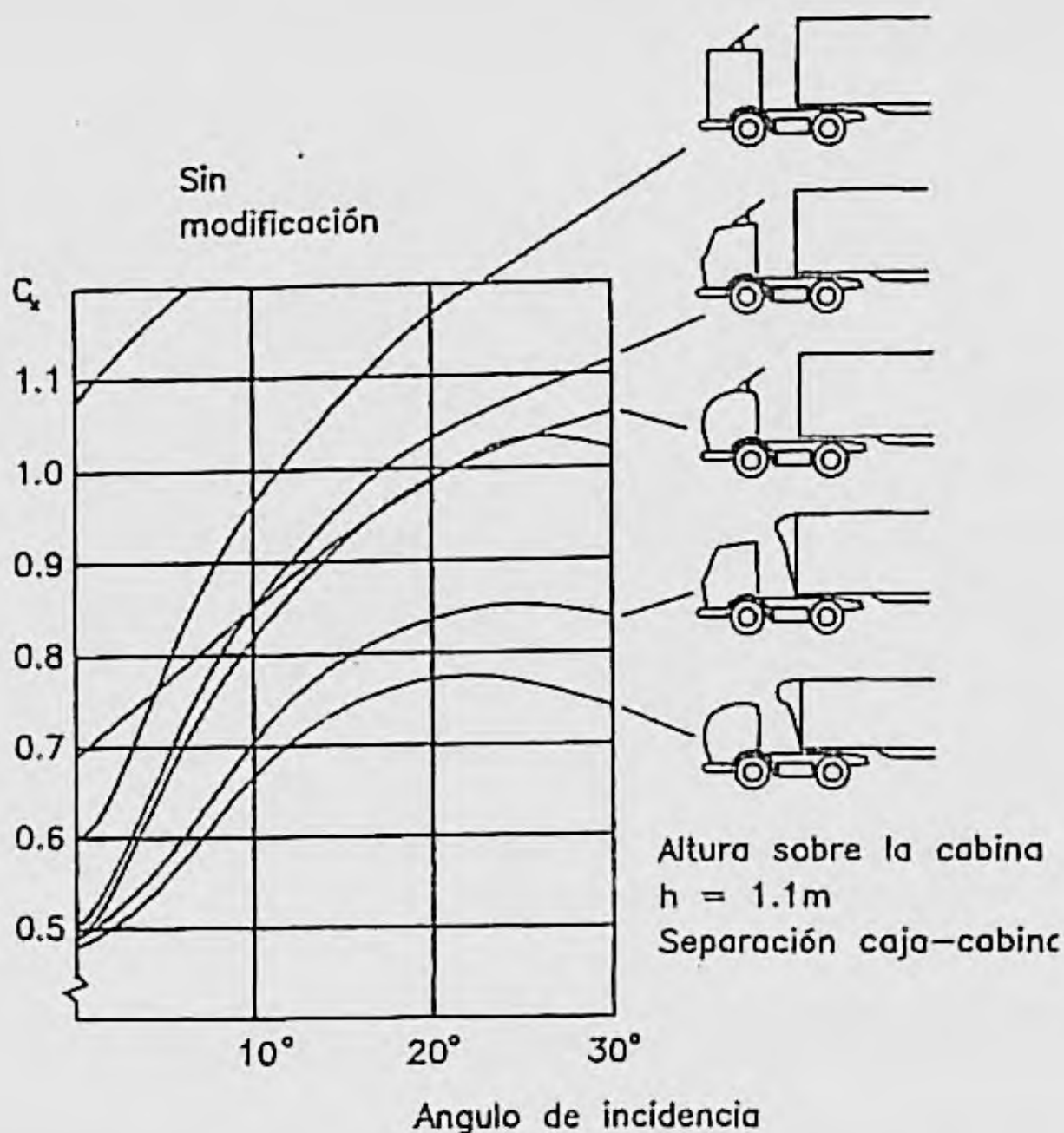


Figura 3.53. Influencia de diferentes dispositivos, acoplables a la cabina y cara anterior de la caja, sobre C_x , para diferentes ángulos de incidencia del aire. (Hucho, 1986).

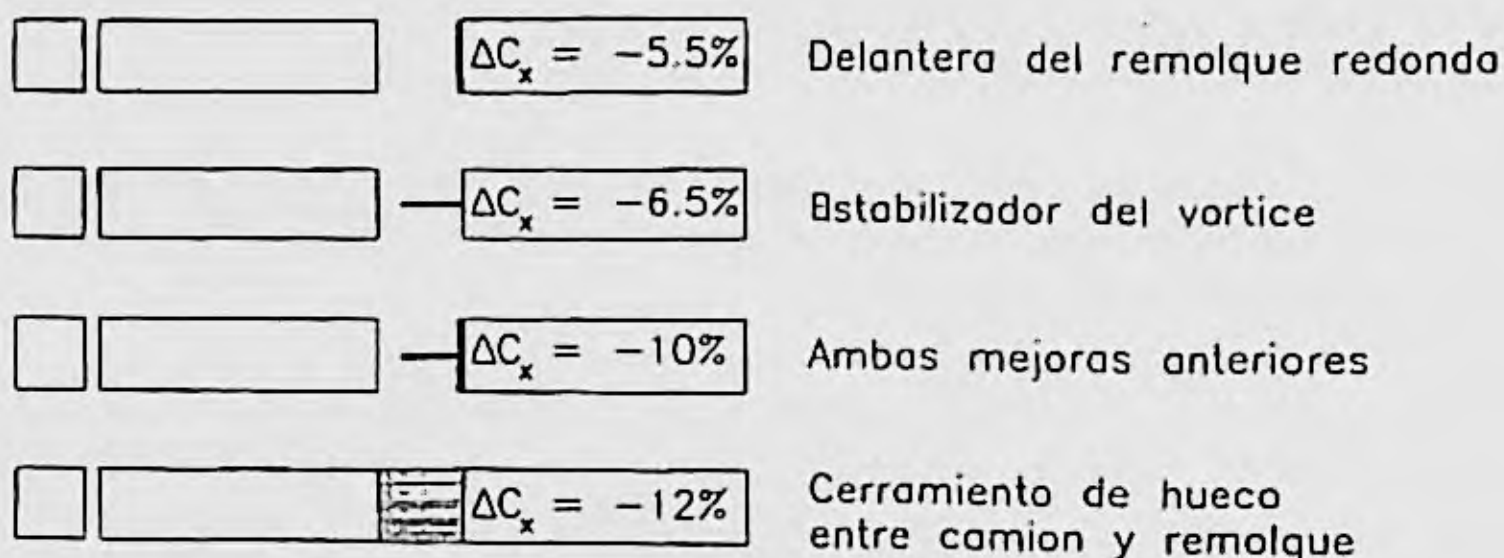
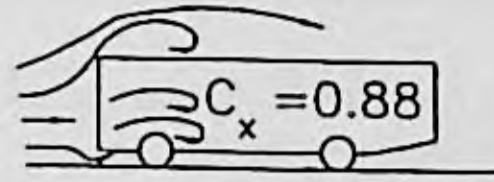
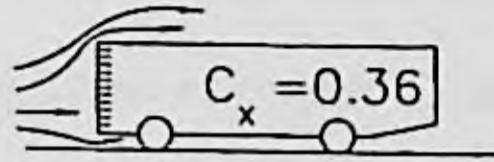


Figura 3.54. Reducción de C_x de un camión y remolque mediante mejoras sobre el remolque. (Gilhaus y otros, 1979).

1. Delantera con bordes angulosos



2. Delantera con bordes redondeados



3. Delantera aerodinámica

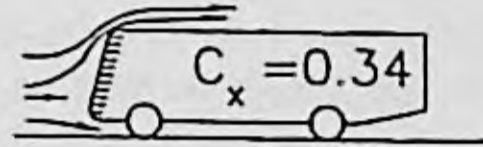


Figura 3.55. Influencia de la parte delantera de un autocar sobre C_x . (Gilhaus y otros 1981).

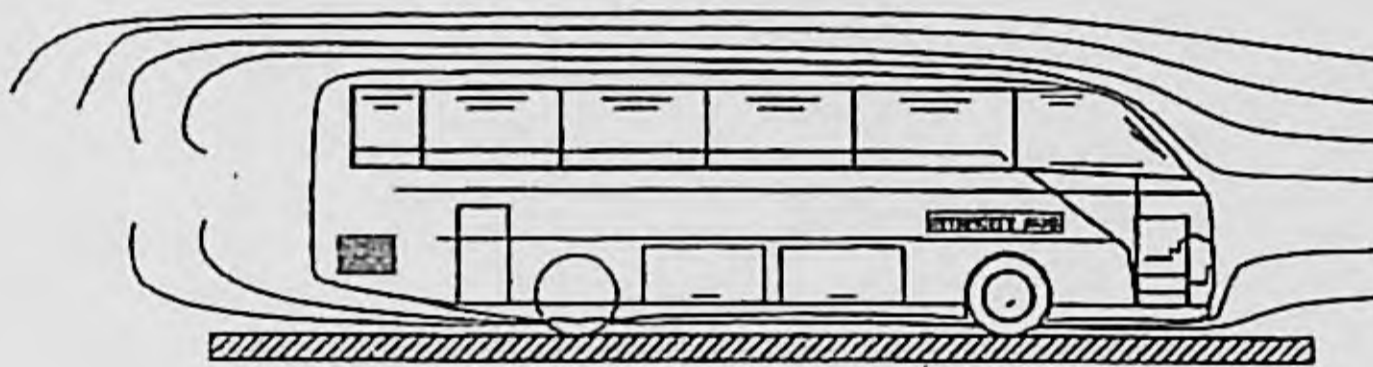


Figura 3.56. Autocar de piso alto diseñado por Fachhochschule Hamburgo.

3.2.5. Sustentación aerodinámica y momento de cabeceo.

La diferencia entre las presiones en la parte inferior y la superior del vehículo origina un empuje aerodinámico F_{za} cuyo valor fué expresado en la ecuación 3.26.

Normalmente F_{za} tiene un sentido tal que compensa parte del peso del vehículo, descargando los ejes. En consecuencia, reduce el peso adherente, lo cual puede tener alguna influencia negativa en la dinámica longitudinal y lateral del vehículo. Esta influencia es importante en vehículos de competición, con peso relativamente reducido y velocidades muy elevadas.

El valor del coeficiente de sustentación aerodinámica C_z suele variar, en turismos, entre 0.2 y 0.5. En vehículos de competición suele ser negativo y tomar un valor mucho mayor.

Existen tres formas fundamentales de reducir, o incluso hacer negativa, la fuerza de sustentación aerodinámica, estas son:

- Variando la configuración básica del vehículo.
- Instalando deflectores con "efecto de ala" negativo.
- Mediante dispositivos de efecto de suelo.

En relación con la configuración básica del vehículo, el valor C_z disminuye si se eliminan zonas de separación de flujo en la parte superior, las cuales originan disminución de presión. Los valores de C_z se reducen con una parte delantera baja (Figura 3.57), y si es posible cóncava, superficie lisa en el techo y parte posterior elevada (Figura 3.58). Pueden usarse spoiler u otras ayudas aerodinámicas para lograr efectos análogos (Figura 3.59). El ángulo de ataque del vehículo y la distancia al suelo de sus bajos afectan también a C_z en la forma que se indica en las figuras 3.42 y 3.43.

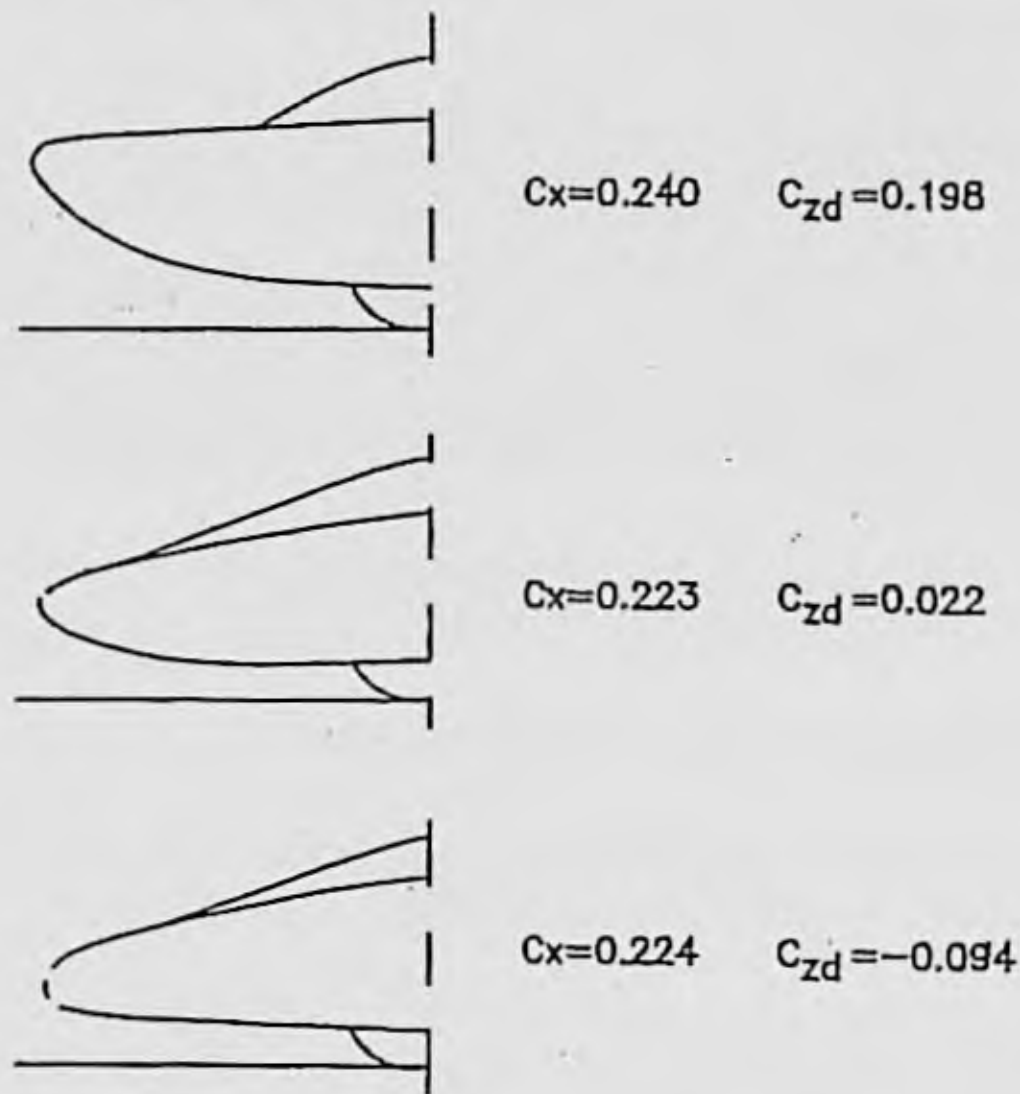


Figura 3.57. Coeficientes aerodinámicos para diferentes configuraciones de la delantera. (Hucho, 1986).

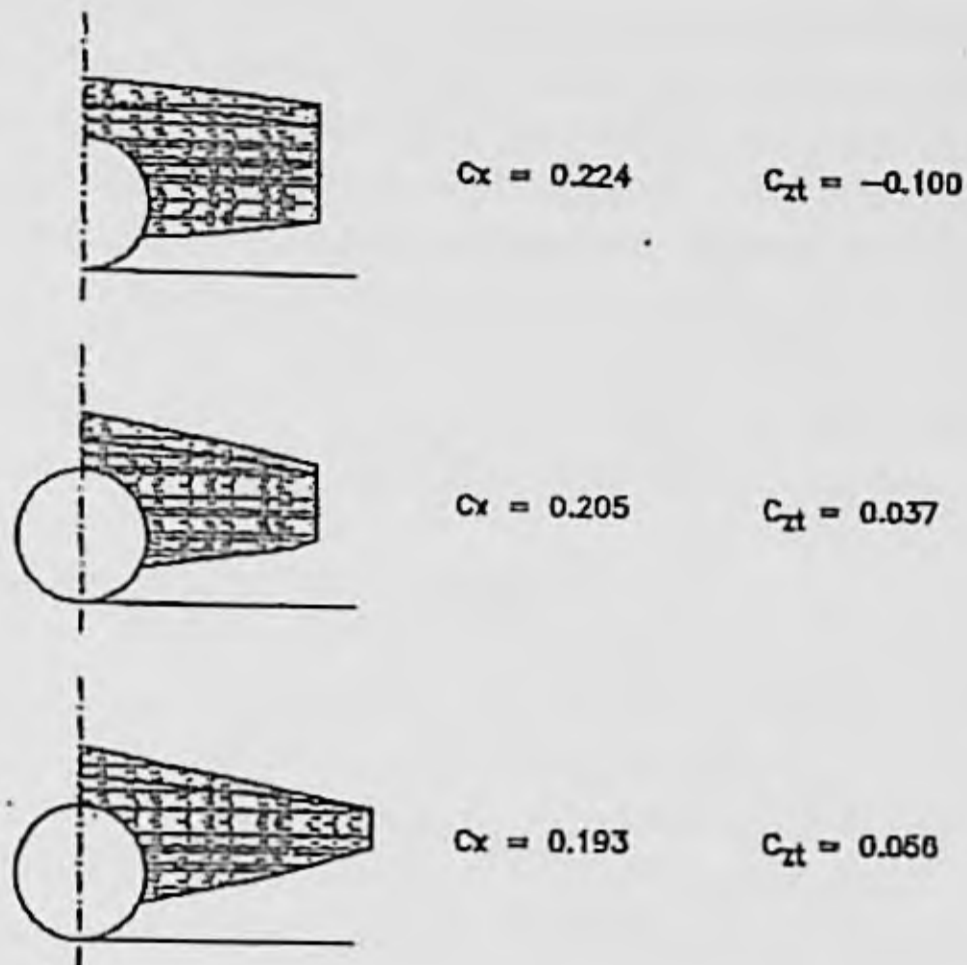


Figura 3.58. Coeficientes aerodinámicos para diferentes configuraciones de la parte posterior del vehículo. (Hucho, 1986)

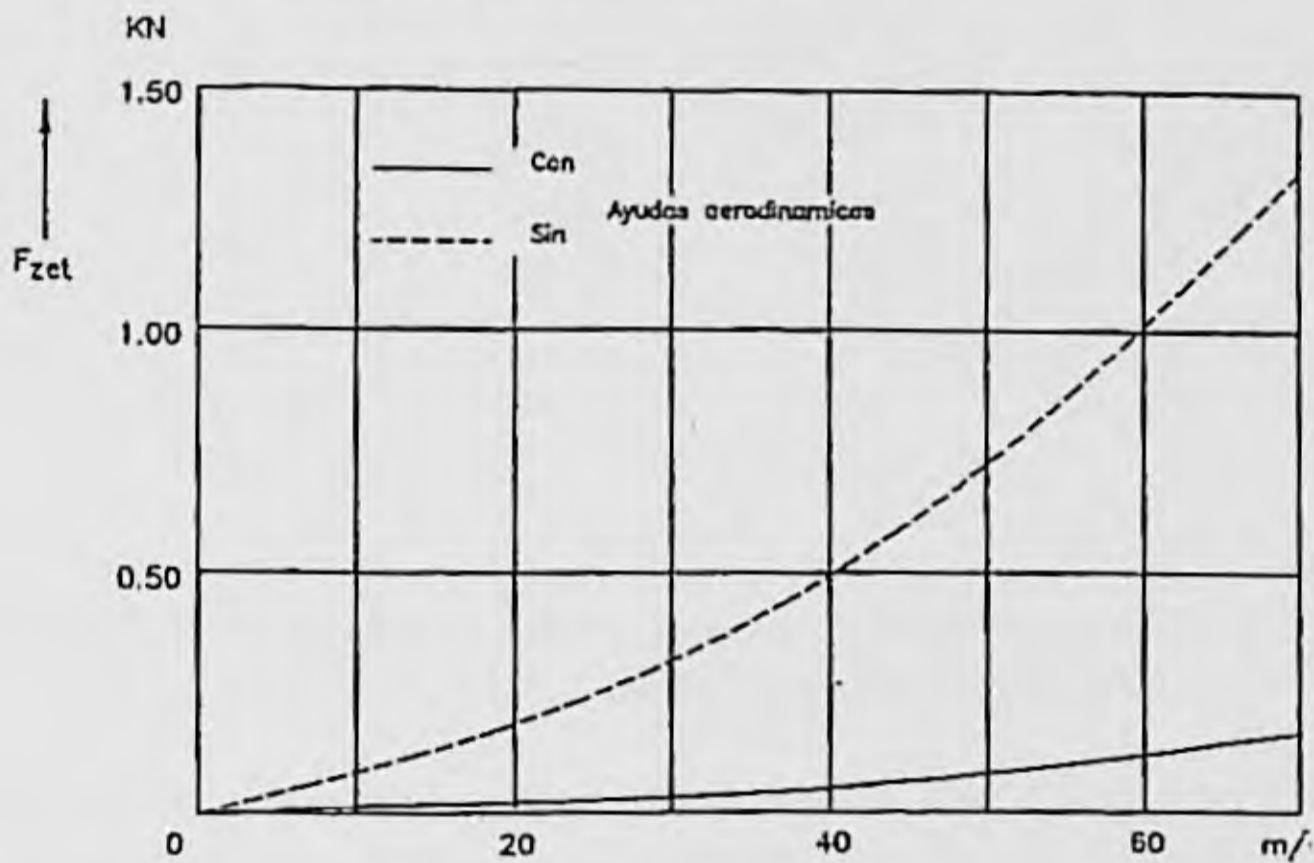


Figura 3.59. Variación de la sustentación aerodinámica con la velocidad y uso de ayudas aerodinámicas (faldón delantero y spoiler trasero) en el Porsche 911 carrera.

Para lograr sustentaciones negativas pueden instalarse "alas" invertidas; el efecto de éstas aumenta con su separación del suelo, así como retrasando el "ala" posterior cuanto sea posible por detrás del eje trasero y separando la delantera por delante del eje anterior. En la figura 3.60 se puede apreciar el efecto de un perfil de ala posterior sobre C_x y C_z (eje trasero) puede observarse que un incremento de la sustentación negativa hace aumentar la resistencia al avance.

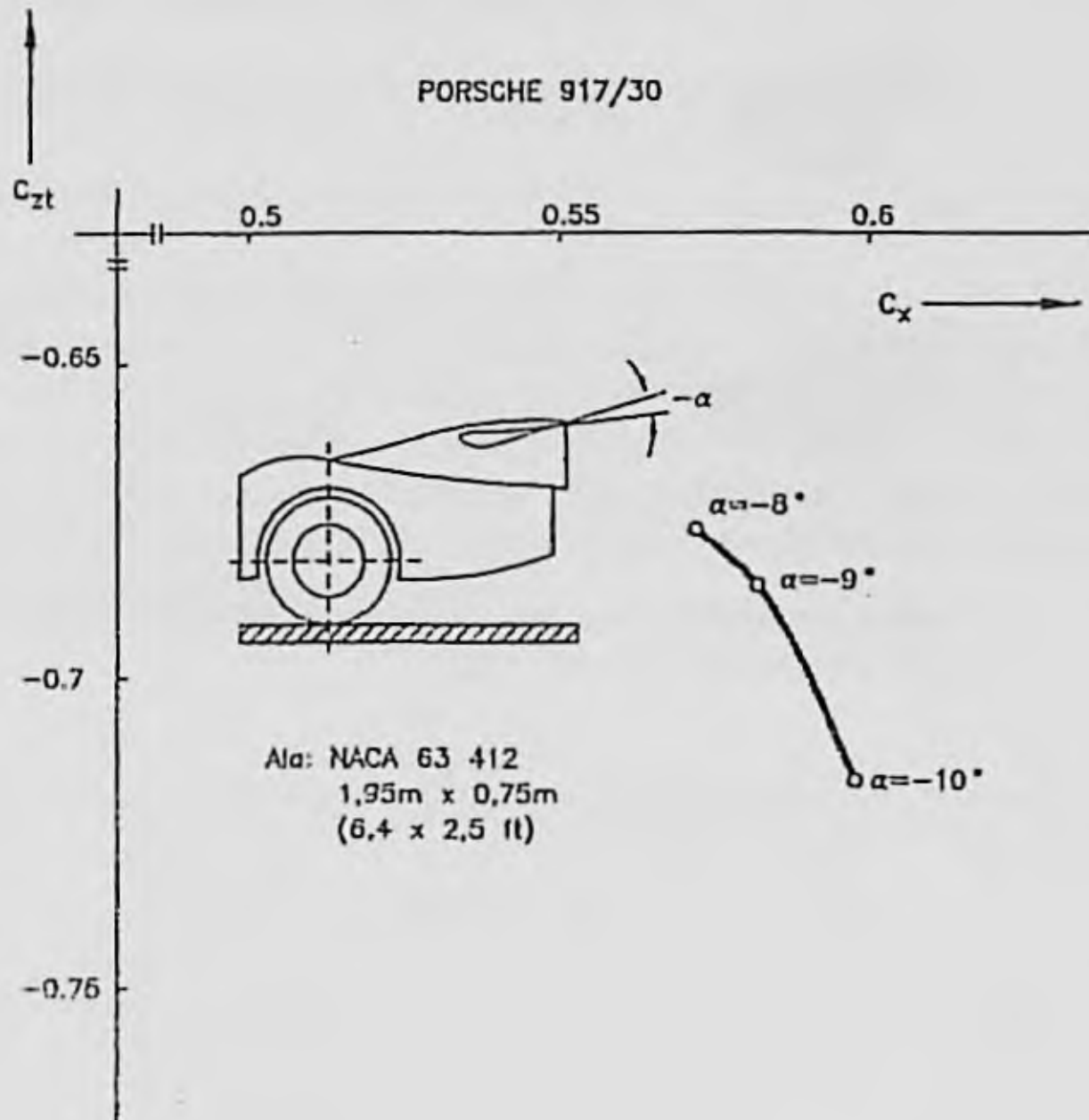


Figura 3.60. Variación de C_z/C_x de un Porsche 917/30 de competición equipado con ala invertida trasera. (Hucho, 1986).

Por último, el efecto de suelo, consiste en producir una zona de alta velocidad y baja presión (efecto Venturi) entre el bajo del vehículo y el suelo. Este efecto puede lograrse curvando hacia fuera una parte del bajo del vehículo y carenando los laterales para producir una especie de túnel en la que se logre el denominado efecto Venturi.

Con estas disposiciones pueden lograrse fuerzas sustentadoras negativas muy altas. Según Wright (1983) en un vehículo de Fórmula 1, C_z puede alcanzar el valor de -2.6, correspondiéndole una fuerza de 16 kN a 290 Km/h, siendo el peso de este vehículo de 6.5 kN.

De esta fuerza sustentadora el efecto de suelo supone un 80%. El efecto de suelo entraña altos riesgos en el caso de producirse el despegue del vehículo, por lo que ha sido descartado su uso, en vehículos de competición.

En cuanto al momento de cabeceo, se produce como consecuencia de que las fuerzas F_{xa} y F_{za} actúan a cierta distancia del centro de gravedad del vehículo. Su valor se expresa por la ecuación 3.28 y el coeficiente C_{my} puede variar entre 0.05 y 0.2. En general el momento de cabeceo tiende a transferir carga hacia el eje delantero por la mayor fuerza sustentadora en la parte trasera, aunque esto depende del diseño y ayudas aerodinámicas.

3.2.6. Fuerza lateral y momento de guiñada.

Cuando el aire se mueve respecto al vehículo asimétricamente respecto a su plano longitudinal, es decir, con un cierto ángulo de incidencia i , se produce un incremento de presión del lado de barlovento y depresión en el de sotavento, ello origina una fuerza lateral F_{ya} , aplicada en un punto adelantado respecto al centro de gravedad y, en consecuencia, un momento de guiñada M_{za} , que tiende a girar al vehículo hacia el lado de sotavento.

Los valores de F_{ya} y M_{za} se expresan mediante las ecuaciones 3.26 y 3.29.

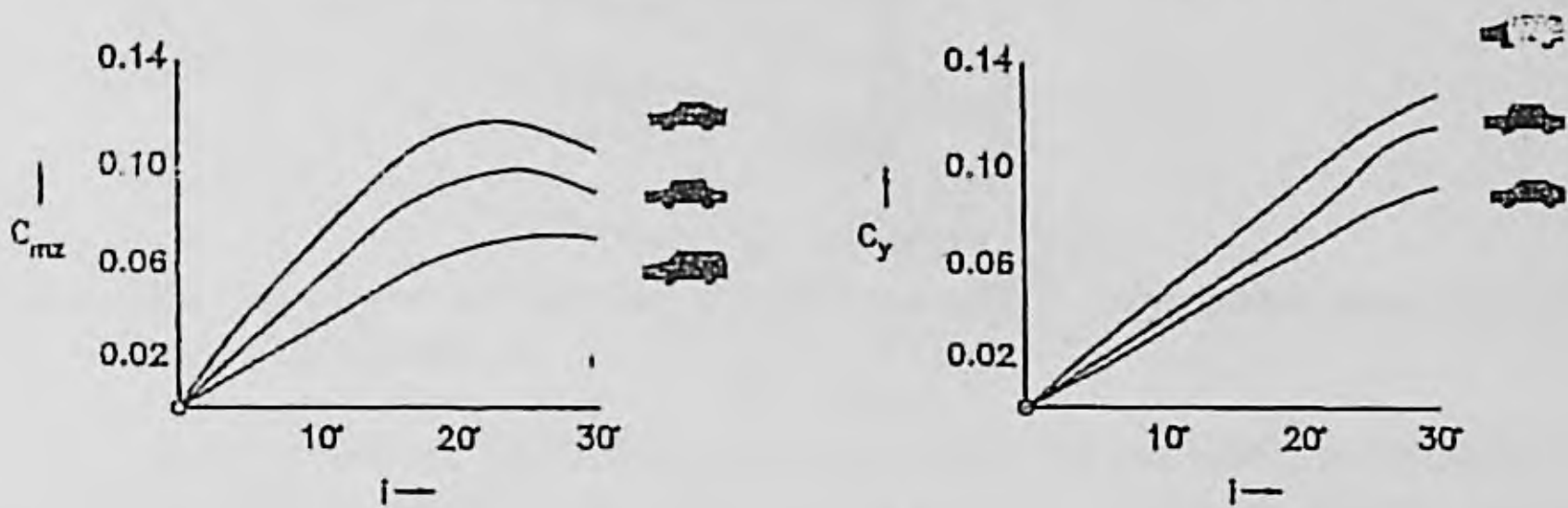


Figura 3.61. Influencia de la forma trasera del vehículo sobre los coeficientes aerodinámicos de forma lateral (C_y) y de guiñada (C_{mz}).

Las formas del vehículo influyen en los valores de estas dos acciones aerodinámicas. En general, superficies laterales planas y prolongadas hacia la parte trasera, como en vehículos tipo furgoneta o familiares (trasera cuadrada) aumentan F_{ya} y reducen M_{za} , con lo que el comportamiento general del vehículo mejora. Esto se ilustra en la figura 3.61. Las formas de tipo "fuselada" hacen que el vehículo sea más sensible al viento lateral, de ahí que, a estos efectos, se prefieran superficies laterales más o menos planas. Los valores de C_y varían normalmente entre 0.5 y 1,2 mientras que los de C_{mz} lo hacen inversamente entre 0.3 y 0.15.

3.2.7. Comportamiento dinámico bajo la acción de viento lateral. Límite de seguridad.

Cuando un vehículo circula bajo la acción de viento lateral se producen situaciones en las cuales dicha acción varía, bien por razones ambientales (viento racheado) o como consecuencia de barreras laterales (edificios, cruce con otros vehículos, etc), que provocan fenómenos transitorios que hacen variar F_{ya} y M_{za} . Cuando esto ocurre, se puede producir una cierta desviación lateral de la trayectoria del vehículo, que el conductor ha de corregir, pudiendo presentarse situaciones de peligro.

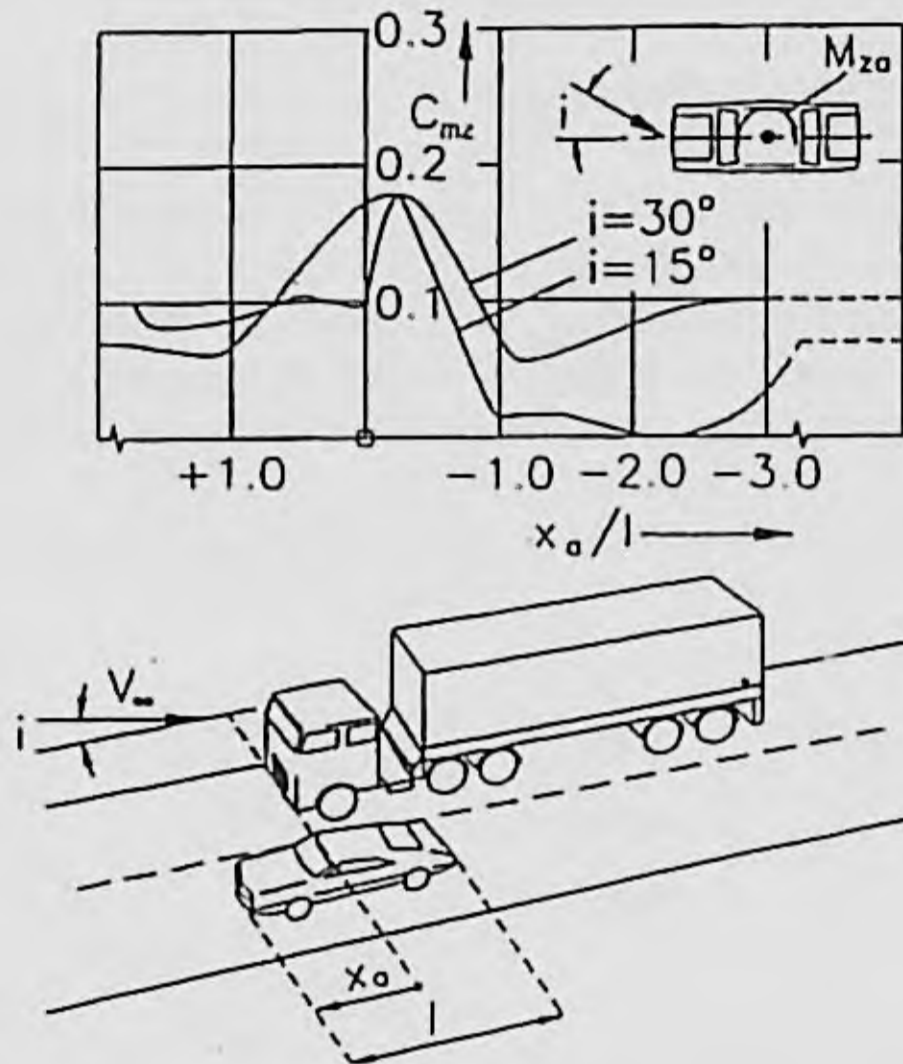


Figura 3.62. Variación de momento de guiñada durante el adelantamiento de un vehículo de grandes dimensiones por parte de un turismo. (Emmelmann, 1976).

En la figura 3.62, se representa la variación del momento de guiñada en un turismo que adelanta a un vehículo tractor-semirremolque. Puede observarse que dicho momento adquiere incrementos importantes, en puntos próximos al de posicionamiento de parte del turismo adelantado respecto al vehículo industrial.

El comportamiento dinámico del vehículo en condiciones de viento lateral variable no puede ser considerado sin analizar la reacción del conductor ante tal acción exterior. Para comprender la respuesta del sistema conductor-vehículo se han realizado estudios experimentales y simulaciones de ordenador. En la figura 3.63 se ofrecen resultados que

recogen la variación del ángulo de guiñada ψ y de la desviación lateral del centro de gravedad del vehículo Y_G , en función del tiempo y de la distancia recorrida, respectivamente, para cuatro formas diferentes de reacción del conductor.

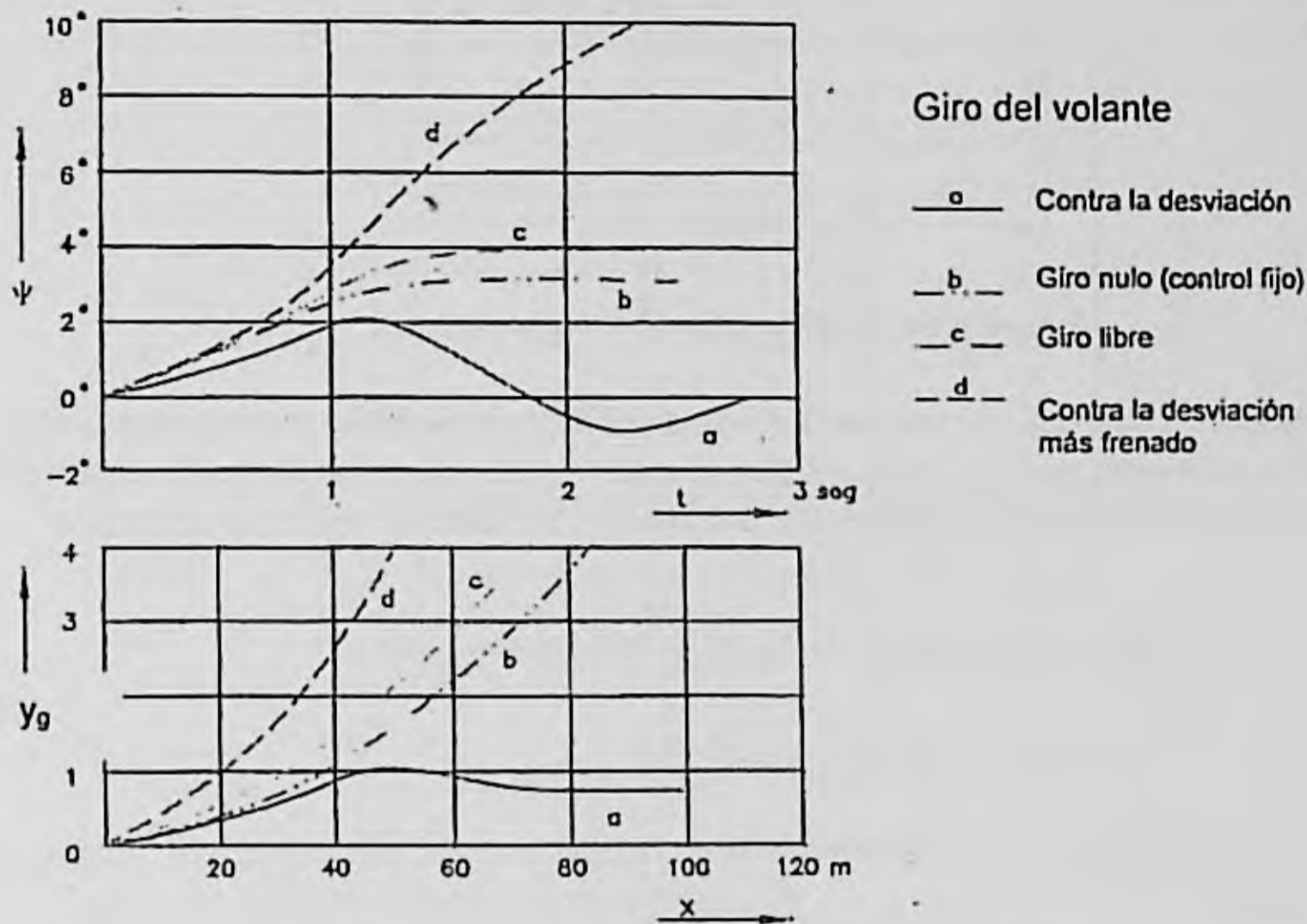


Figura 3.63. - Ángulo de guiñada y desviación lateral para varias reacciones del conductor.

Como hechos más destacables puede observarse los siguientes: la actuación del conductor se produce después de un tiempo de reacción de 0.2 segundos. Sumando a dicho tiempo el de reacción de los sistemas-vehículo: actuación de la dirección, holguras, elasticidad y la naturaleza variable de las fuerzas laterales, hasta 0.8s después de la perturbación no se percibe realmente la "reacción" del vehículo. Hasta este tiempo, la variación de ψ y Y_G es similar para los cuatro casos. Después, en el caso primero se logra estabilizar la trayectoria con un Y_G constante, una vez transcurrido 1.5s aproximadamente.

Para evaluar el efecto del viento lateral sobre diferentes vehículos es necesario definir un "perfil" de variación de dicho viento. En la figura 3.64 se representa un perfil obtenido en instalaciones de ensayo de la Firma Volkswagen. Con este perfil, para una velocidad del vehículo $V = 26.7$ m/s, se obtiene un ángulo de incidencia $i = 30^\circ$. Después de 0.8 s, el vehículo aún sigue expuesto a un viento lateral, constante, en toda su longitud.

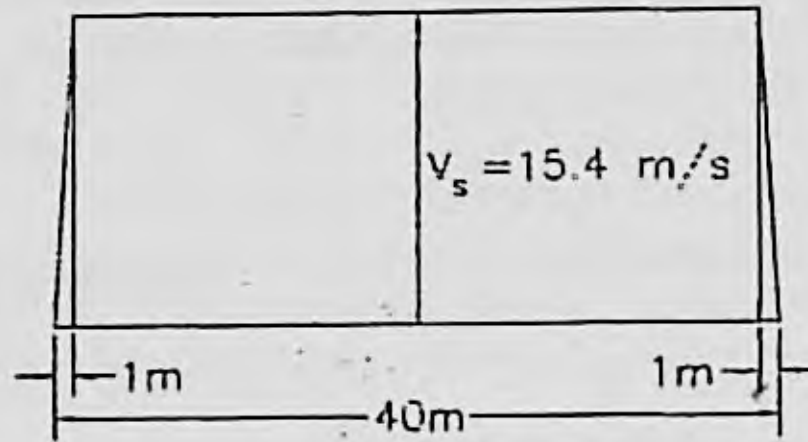


Figura 3.64. Perfil artificial de viento lateral.

Mediante un modelo de ordenador Sorgatz (1975) ha estudiado el comportamiento de dos vehículos diferentes para un ángulo de incidencia $i = 30^\circ$, encontrando que la desviación lateral Y_g puede calcularse para vehículos de producción, mediante la siguiente expresión:

$$Y_g = \left(\frac{1}{P} (K_1 + K_2 X_{pg}) + K_3 X_{pg} + K_4 \right) C_{y(30)} A_f + \frac{1}{P} (K_5 + K_6 X_{pg}) + K_7 X_{pg} + K_8 \quad 3.32$$

Siendo:

$P \Rightarrow$ Peso del vehículo en Kg.

$X_{pg} \Rightarrow$ Distancia del centro de presiones laterales al centro de gravedad (proyección sobre el plano XZ medida en m).

$C_{y(30)} \Rightarrow$ Coeficiente aerodinámico de fuerza lateral para $i = 30^\circ$.

$A \Rightarrow$ Area Frontal en m^2

$K_1 = 58.82$	$K_5 = 182.35$
$K_2 = 135.29$	$K_6 = -279.41$
$K_3 = 0.028$	$K_7 = 0.215$
$K_4 = 0.014$	$K_8 = -0.095$

Estos valores son válidos para $t > 0.8 \text{ s}$.

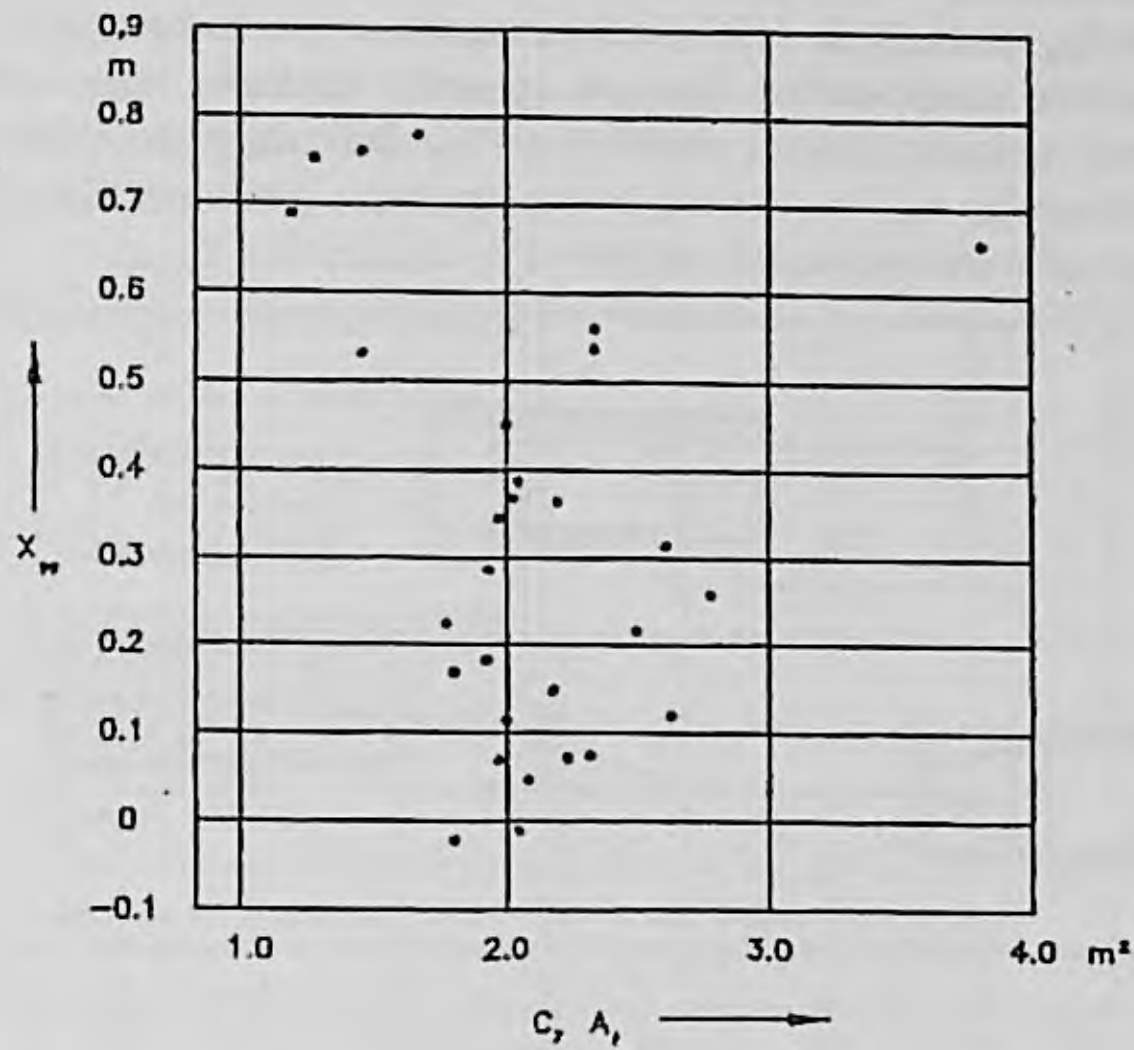


Figura 3.65. Distancia entre el centro de presiones de fuerzas lateral y el de gravedad para distintos valores de $C_{y(l)} \cdot A_f$

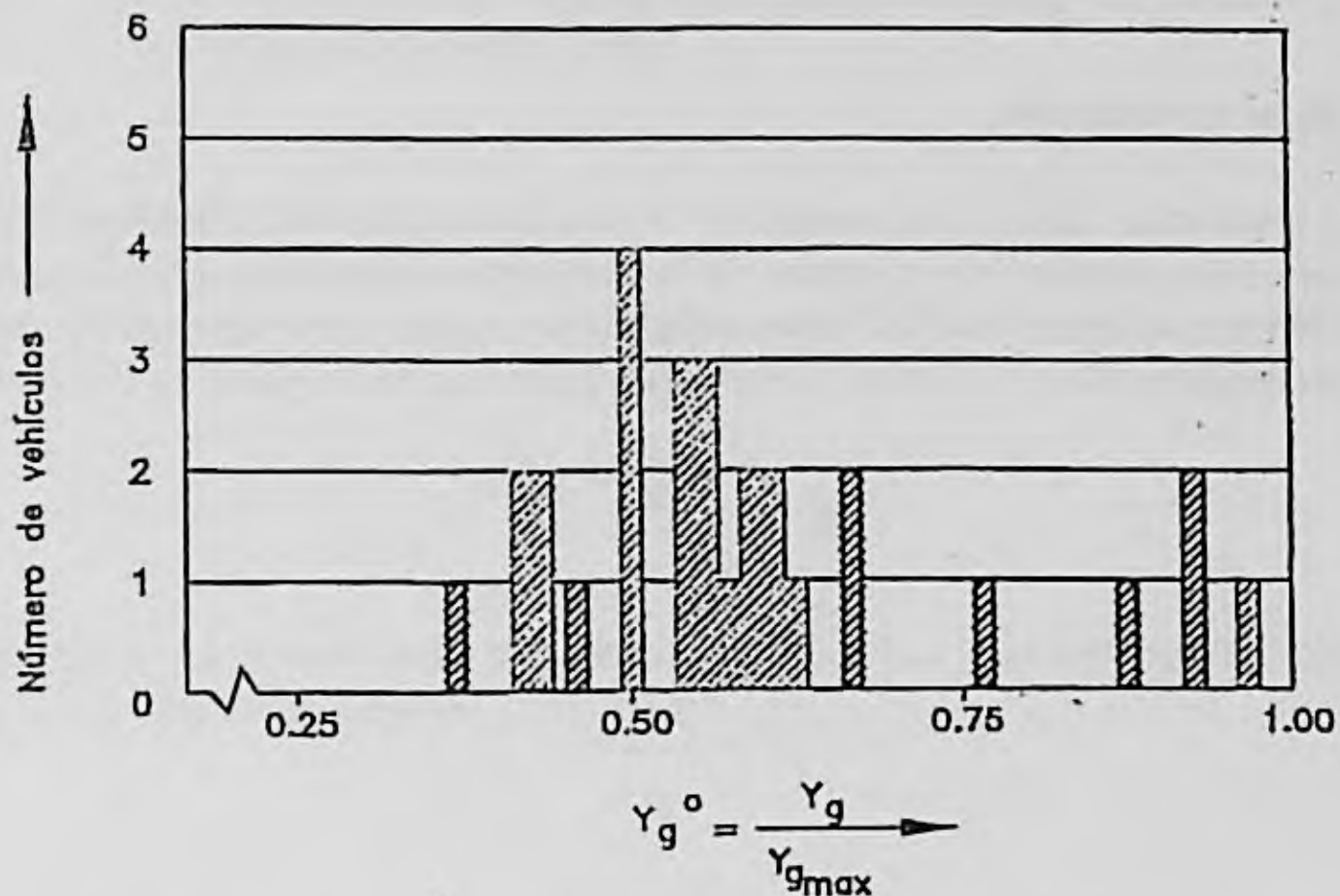


Figura 3.66. Distribución de frecuencias de la desviación lateral calculada según la ecuación 3.22 para 30 vehículos.

Se ha considerado en el modelo que el volante permanece fijo (control fijo). En cuanto al valor de X_{pg} , en la figura 3.65 se representan los valores obtenidos para diferentes valores de $C_{y(30)}$, A_r , observándose que, en general, vehículos con más baja fuerza aerodinámica lateral presentan valores mayores de X_{pg} . Por otra parte, en la figura 3.66 se representan las frecuencias con que los vehículos estudiados presentan diferentes valores de Y_g , valores normalizados en función del máximo valor encontrado ($Y_{g\max}$).

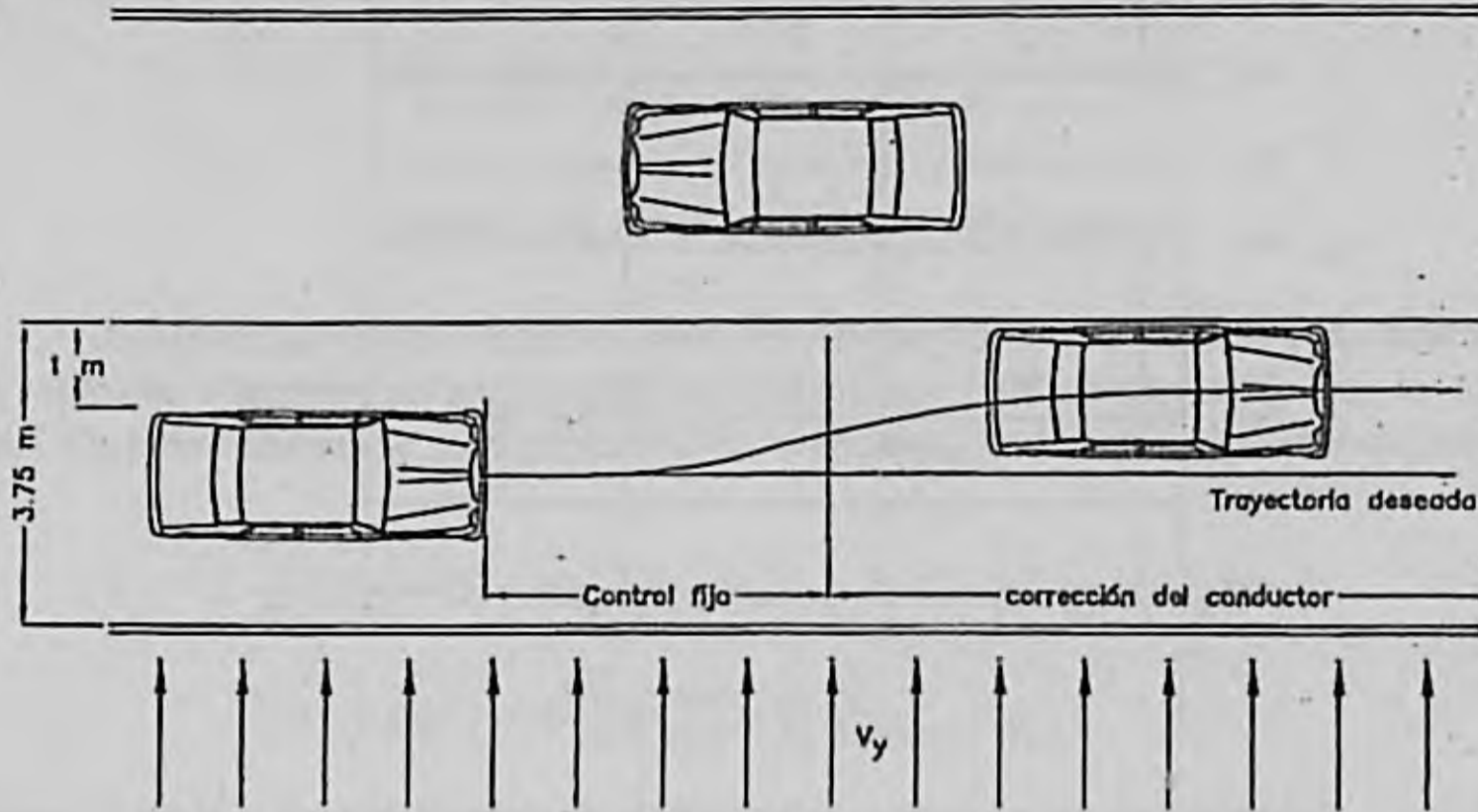


Figura 3.67. Trayectoria del vehículo como consecuencia del viento lateral.

3.2.7.1. Límite de seguridad

La desviación lateral que produce el viento puede provocar situaciones inseguras, especialmente si el vehículo llega a rebasar la línea de separación entre carriles en carreteras de doble dirección (Figura 3.67). Se ha definido un límite convencional de peligro f_g , mediante la expresión:

$$f_g = \sqrt{\frac{l}{l - Y}} - 1 \quad 3.33$$

$$Y = \frac{2 Y_g}{a_m X} \quad 3.34$$

Siendo $a_{m\max}$ la distancia entre el lateral del vehículo más próximo a la línea longitudinal no rebasable, (figura 3.68), y dicha línea, e Y_g la desviación bajo control fijo para un instante $t = 0.8$ s después de iniciarse el cambio en las condiciones de viento lateral.

Representado f_g en función de Y se obtiene la curva de la figura 3.68. De acuerdo con esta figura, el nivel de riesgo crece lentamente para valores bajos de Y y muy rápidamente para $Y > 0.9$. Si se considera $a_{m\acute{a}x} = 1$ m, valor normal en un carril de 3.75m y ancho del vehículo igual a 1.7 m., sería tolerable un valor máximo de $Y_g = 0.45$ m.

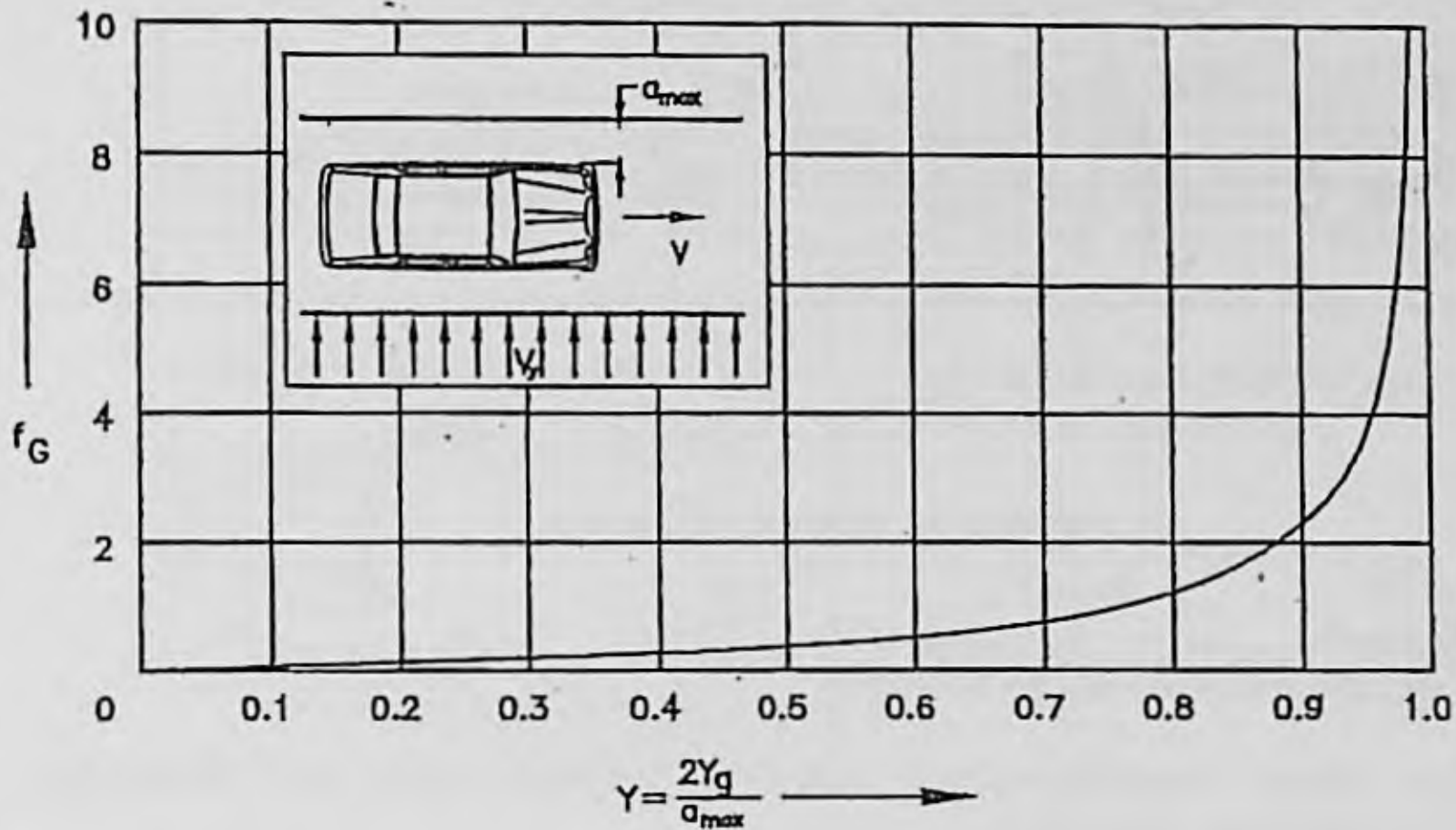


Figura 3.68. Variación del nivel de peligro con la aproximación del vehículo a una línea no rebasable. (Hucho, 1986).

3.2.8. Momento de vuelco.

El momento de vuelco M_{x2} , es el momento resultante de las fuerzas aerodinámicas F_{y2} y F_{z2} respecto a la proyección del eje longitudinal sobre el plano de rodadura (Figura 3.69).

$$M_{x2} = F_{y2} h + F_{z2} b \quad 3.35$$

Su valor queda expresado en la ecuación 3.27, C_{mx} adquiere valores comprendidos entre 0.1 y 0.3 en vehículos turismo.

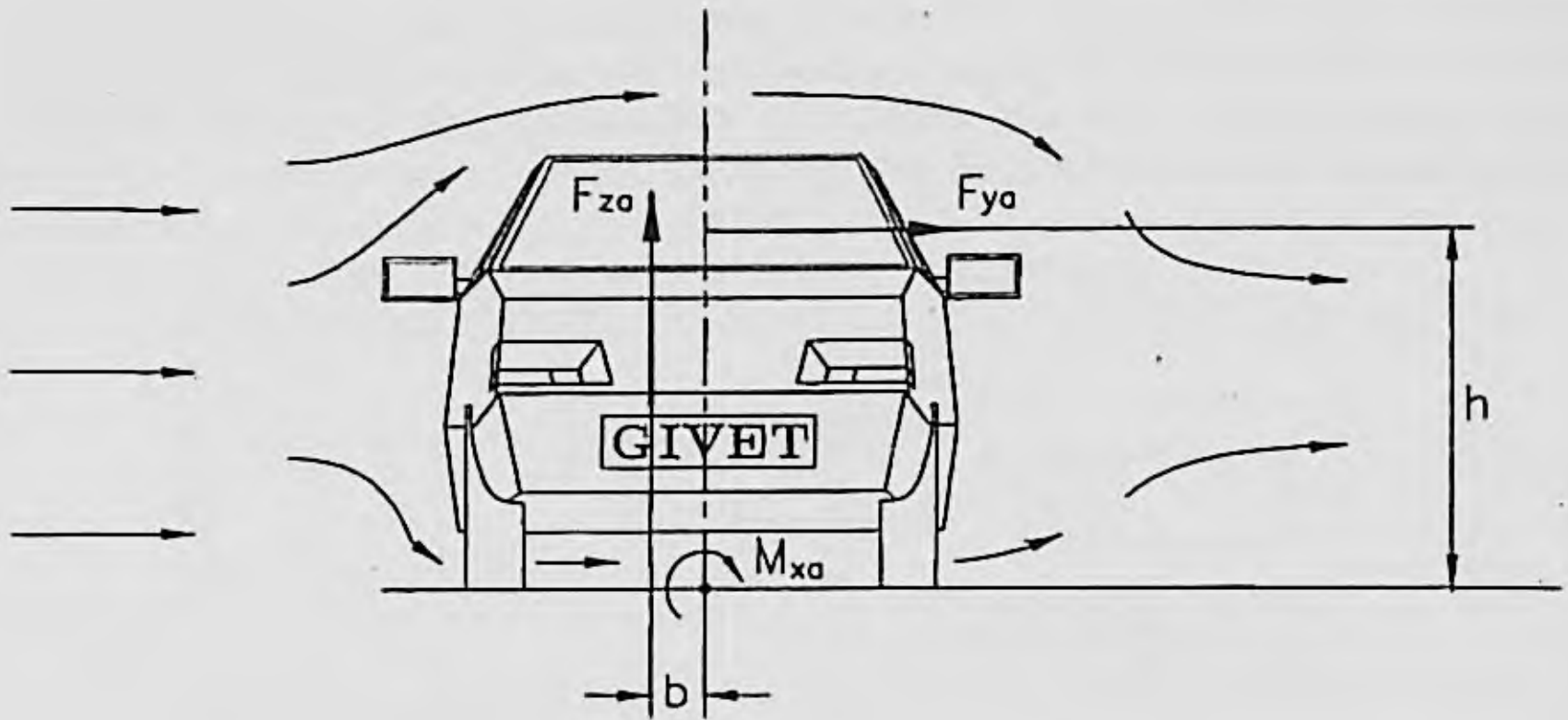


Figura 3.69. Momento de vuelco.

3.2.9. Ensayos aerodinámicos de vehículos.

Los ensayos aerodinámicos se realizan en carretera, pistas con instalaciones especiales y en túneles aerodinámicos.

La realidad presenta una variedad de condiciones que son difíciles de conseguir en condiciones de ensayo: el flujo de aire no es homogéneo, se ve alterado por variaciones propias del viento y por elementos de diferente naturaleza que se encuentran junto o en la carretera; la temperatura varía en diferentes puntos; la humedad, lluvia o nieve, crean condiciones particulares, etc. Todo ello obliga a definir condiciones de ensayo que se alejan más o menos de la realidad, cuando se usan instalaciones en pista o túneles aerodinámicos.

Por otra parte, los ensayos en carretera tienen el inconveniente de que las variables de ensayo son más difíciles de controlar y la repetibilidad es imposible, por la naturaleza aleatoria en la que se presentan los conjuntos de condiciones que se precisan en cada caso.

Los principales trabajos de desarrollo de vehículos, sistemas o componentes se realizan en túneles aerodinámicos, simulando, de la forma más exacta posible, las condiciones de la carretera. Los objetivos fundamentales de los estudios aerodinámicos se representan en la figura 3.70.

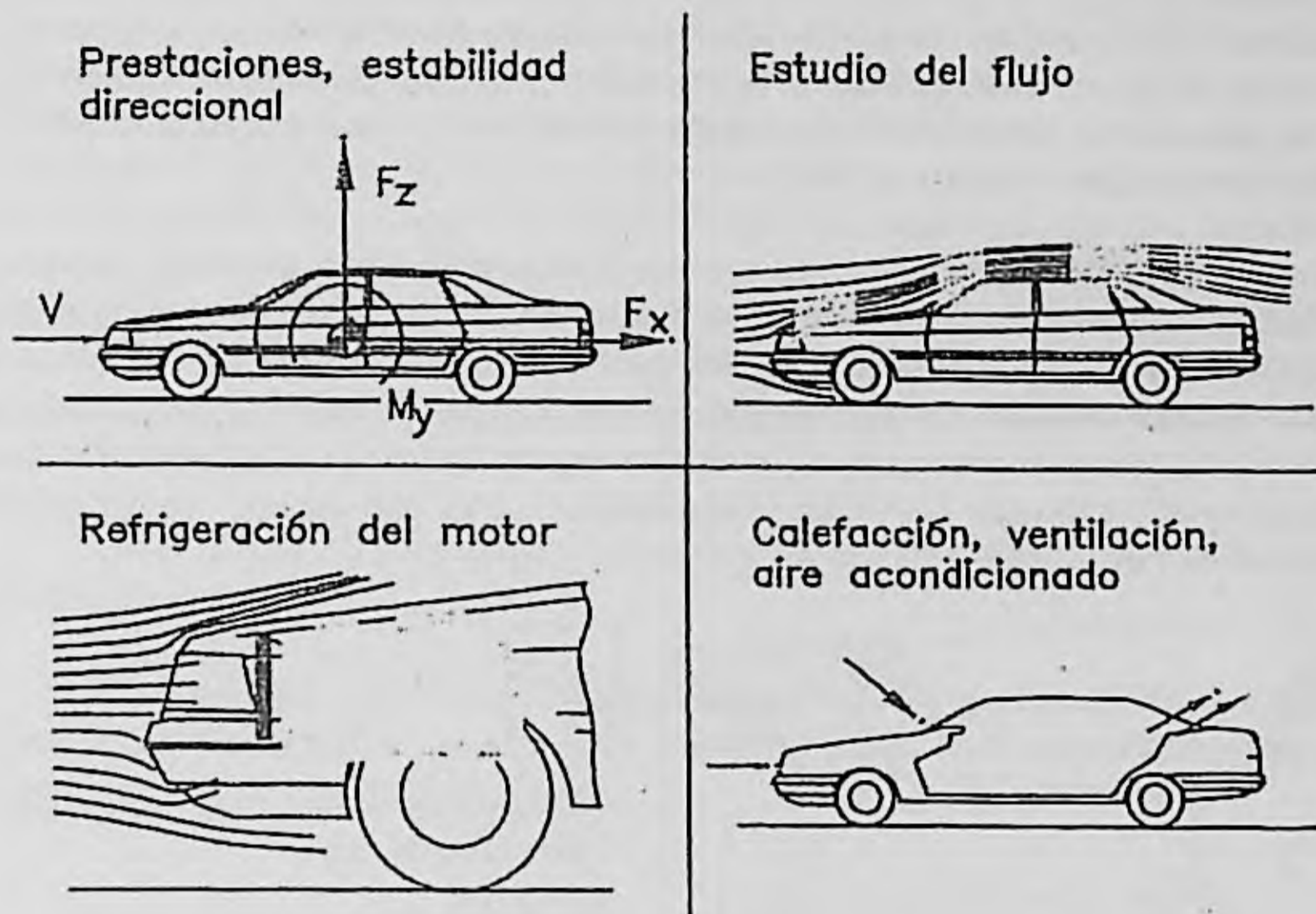


Figura 3.70. Objetivos fundamentales de los estudios aerodinámicos.

Para determinar las fuerzas y momentos, los cuales condicionan las prestaciones y estabilidad direccional de los vehículos, es necesario una correcta simulación del flujo alrededor del vehículo. Puesto que la presión dinámica del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, ésta es una variable que deberá ser controlada de forma muy rigurosa. Por otra parte, el flujo de aire que actúa sobre el vehículo debe ser homogéneo. Ambas condiciones pueden ser correctamente simuladas en los túneles actuales.

Unas condiciones difíciles de simular, son los movimientos relativos vehículo-aire-suelo. En la realidad, el aire está normalmente en calma, o se mueve con velocidad pequeña respecto al suelo y es el vehículo el que se desplaza respecto a ambos. En el túnel, vehículo y suelo se encuentran quietos y el aire se desplaza respecto a ambos. Esto crea unas condiciones de flujo significativamente diferentes. Por ejemplo, se produce una capa límite en el contacto con el suelo, que modifica las condiciones de flujo bajo el vehículo. Se han ideado procedimientos para eliminar o reducir su efecto, lo cual complica las condiciones de ensayo. Por otra parte, las ruedas no giran, a menos que se sitúen sobre una cinta móvil o rodillos, lo cual introduce nuevas complicaciones.

En los estudios de flujos locales y efectos derivados de los ruidos, aparecen requerimientos análogos a los indicados antes. Estudios, por ejemplo, de ruidos de origen aerodinámico, son difíciles de realizar por el alto nivel sonoro que se produce en el interior del túnel. Otros efectos, como es el caso de la proyección de partículas desde el vehículo solo puede ser simulado si existe movimiento relativo vehículo-suelo. Todo ello hace difícil este tipo de estudio mediante ensayos en túnel.

Los estudios relativos al sistema de refrigeración del motor no requieren condiciones muy especiales en cuanto a la calidad del viento y al control de su temperatura. Estos requerimientos son fácilmente simulables y controlables. La dificultad estriba en la necesidad de hacer funcionar el motor, disipando potencia, haciendo rodar las ruedas motrices sobre un rodillo, lo cual impone condiciones técnicas especiales que se dan en tipos de túneles que constituyen "cámaras de viento climatizadas" más que túneles aerodinámicos propiamente dichos.

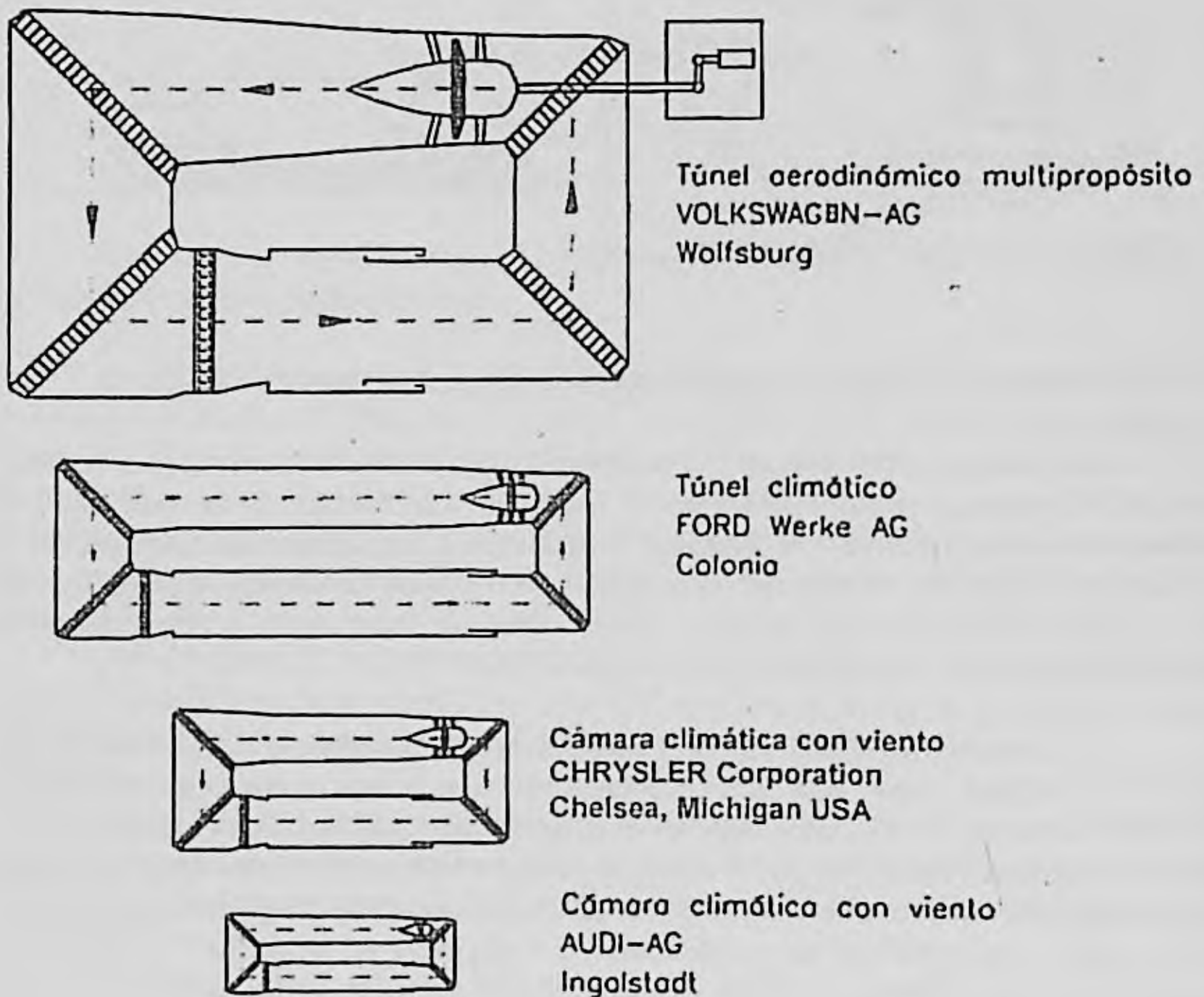


Figura 3.71. Comparación de tamaños entre diferentes túneles de viento y cámaras climáticas.

Por último, los ensayos relativos a calefacción, aireación y aire acondicionado presentan requisitos intermedios entre los ensayos puramente aerodinámicos y los correspondientes del sistema de refrigeración. Por una parte deben simularse bien las condiciones de temperatura, humedad y radiación solar, así como la influencia del motor. Por otra parte, el balance de calor del vehículo depende considerablemente del flujo de aire que circula alrededor del mismo. El flujo de calor convectivo es directamente proporcional a la cantidad de aire que fluye a través del compartimento de pasajeros y, por ello, éste debe ser simulado con precisión, no obstante, este flujo de calor es proporcional a $V^{0.5}$ a $V^{0.8}$, siendo V la velocidad del aire. Esto hace que los errores en la velocidad local del flujo tengan mucho menos importancia que en el caso de los ensayos puramente aerodinámicos. Esta es la razón por la cual pueden utilizarse para este tipo de ensayos túneles climatizados con menores dimensiones de tobera y cámara de ensayo.

En la figura 3.71 se ofrecen esquemas de algunos túneles y cámaras de los comentados más arriba.

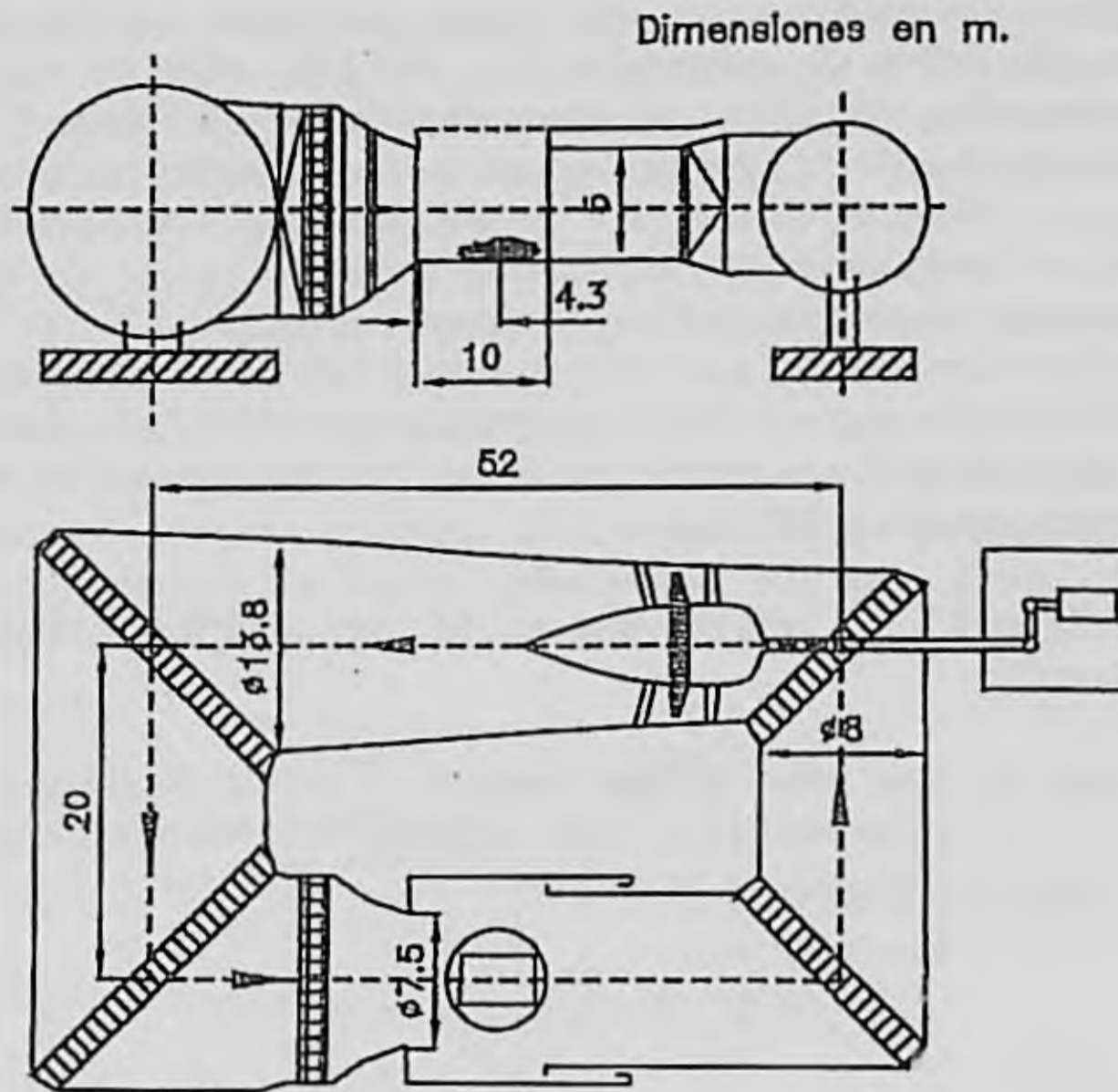
El tamaño del túnel tiene una gran influencia en los ensayos. Cuando éste es de pequeña sección y se utilizan modelos a escala reducida, la analogía mecánica impone la constancia del número de Reynolds, es decir:

$$R_e = \frac{V_1 l_1}{\nu_1} = \frac{V_2 l_2}{\nu_2} \quad 3.36$$

Suponiendo $\nu_1 = \nu_2$, debe cumplirse $V_1 l_1 = V_2 l_2$, lo cual significa que el ensayo de un modelo a escala 1/5, por ejemplo, requiere velocidades del aire cinco veces superiores que las reales.

La dimensión total del túnel viene condicionada por la sección de ensayo y el parámetro fundamental en la sección A_T de la tobera. La relación entre el área frontal del vehículo A_f y la sección transversal A_T del flujo de aire ($A_f/A_T = \varphi$) debe ser lo más pequeña posible. De hecho, en la realidad (carretera) $\varphi = 0$. Un valor de $\varphi \approx 0.05$ hará necesario un túnel de $A_T = 40 \text{ m}^2$ para ensayar turismos de $A_f = 2 \text{ m}^2$; únicamente el túnel de General Motors, con $A_T = 65.9 \text{ m}^2$ cumple sobradamente este requisito, de entre los existentes para automóviles.

El nivel de especialización de las tecnologías de ensayo utilizadas en los túneles aerodinámicos hacen inviable que intentemos adentrarnos, siquiera sea superficialmente, en ellas. A los lectores interesados en esta materia los remitimos a obras especializadas. En la ya referida de Hucho se puede encontrar un capítulo amplio sobre el tema.



Sección de tobera: 37.5 m^2
Máxima velocidad del viento: 175 Km/h
Potencia de la soplante: 2600 KW
Intervalo de temperaturas: -35°C a $+40^\circ\text{C}$

Figura 3.72. Túnel de viento climático (todo propósito) de Volkswagen A.G.

Por último, en la tabla 3.4 se ofrece una relación con los túneles aerodinámicos, túneles climáticos y columnas de aire climáticas existentes para vehículos y en la figura 3.72, un dibujo de las principales dimensiones del túnel de la Casa Volkswagen AG.

[Aerodinámica de los automóviles.]

¡Error! Marcador no definido.	A_T (m^2)	L_T (m)	V_{max} (Km/hr)	TS	K	L (m)	P (kW)	Reference
DNW	90.25	15.0	220	c	4.8	320	12700	11.21
	48.0	16.0	400	c	9.0			
General Motors	65.9	23	240	c	5	303	2950	11.21
Volkswagen	37.5	10.00	180	o	4.0	114.0	2600	11.41
Lockheed-Georgia	35.1	13.10	406	c	7.02	238.0	6700	11.51
MIRA	35.0	15.24	133	c	1.45	50.5	970	11.52
Daimler-Benz	32.6	10.00	270	o	3.53	125.0	4000	11.40
Fiat	30.0	10.50	200	o	4.0	144.0	1865	11.27
Volvo	27.06	15.8	200	sw	6.0	165.3	2300	11.71
Ford (Cologne)	24.0/8.6	10.0	182/298	o	4.0	124.0	1650/1960	11.62
Mazda	24	12.0	230	c/o	6	?	1600	11.63
Mitsubishi	24	12.0	216	c/o	?	?	2350	11.63
Ford (Dearborn)	23.2	9.15	201	c	3.80	?	1865	11.53
FKFS	22.5	9.5	220	o	4.41	150	2550	11.67
Porsche	22.3	12.0	230	sw	6.06	149.9	2200	11.68
Nissan	21.0	10.00	119	c	2.86	?	?	11.25
BMW	20.0	12.5	160	sw	3.66	45	1676	11.61
Toyota	17.5	8.00	200	c	3.66	95.0	1500	11.54
Nippon Soken	17.5/12	12.5/8.5	120/200	c	3.66	104	1450	11.63
Inst. Aérotechnique St. Cyr	15.0	10.00	144	sw	5.0	39.2	516	11.12
Fiat (2 x Climate)	12.0	11.60	160	o	4.0	99.0	560	11.27
JARI	12.0	10.00	205	c	4.06	83.3	1200	11.55
Piinfarina	11.75	9.5	150	u	6.2	27.3	625	11.42
Ford (Cologne Climate)	11.0	9.00	160	c	6.0	113.4	1120	11.56
Sofira	11.0/4.3	16.5/14.0	80/170	c	?	?	380	11.45
FKFS	6.0	15.8	200	o	4.16	84	1000	11.69
Volkswagen II	6.0	7.2/6.0	170/180	o	6.0	73.4	460	11.70
Chrysler	4.74	8.6	190	o	5.56	58.8	560	11.57
Volvo	4.32	8.6	190	o	6.60	93.2	500	11.58
Behr	5.24	14.00	120	o	6.0	48.0	147	11.60
Opel	4.30	-	120	c	?	?	460	11.59
Audi	1.5	11.0	95	o	4.3	21.0	60	
Porsche	1.5	7.5	168	o	5.0	30	160	11.68

A_T	Sección Tobera	TS	Tipo de sección de ensayo	K	Relación de contracción
L_T	Longitud de la sección de ensayo		o = abierta c = cerrada sw = Pared ranurada	L	Longitud del eje del túnel
V_{max}	Velocidad máxima del aire				

TABLA 3.4. Túneles aerodinámicos, túneles climáticos y cámaras de vientos climáticas

Ejercicio 3.1

Un vehículo automóvil presenta las siguientes características:

- Peso en orden de marcha; 14 kN
- Area frontal: 2m²

Con dicho vehículo se realizan dos ensayos de deceleración sin accionamiento de frenos, con la palanca de velocidades en punto muerto y rodando sobre una pista lisa horizontal con velocidad del viento prácticamente nula. Se obtienen los siguientes resultados:

	Ensayo 1	Ensayo 2
Velocidad inicial	90 km/h	20 km/h
Velocidad final	80 km/h	10 km/h
Tiempo transcurrido	8 s	15 s

Calcular los valores aproximados de los coeficientes de resistencia aerodinámica al avance y de resistencia a la rodadura suponiendo que este último es constante. En las condiciones de los ensayos el factor de masas giratorias puede estimarse en un 6%.

SOLUCION:

En las condiciones de los ensayos, la fuerza de deceleración es igual a la resistencia al movimiento.

Fuerzas retardadoras = Resistencia a la rodadura + R. aerodinámica al avance.

$$R = P \cdot f_r + \frac{\rho}{2} C_x \cdot A \cdot V^2 = \gamma_m \cdot m \cdot a \quad 3.37$$

$f_r \Rightarrow$ coeficiente de resistencia a la rodadura

$\gamma_m \Rightarrow$ factor de mayoración de la masa para tener en cuenta la inercia de las masas con movimiento de rotación (ver punto 4.7.3.)

Suponiendo que durante el tiempo de cada ensayo la aceleración permanece constante.

$$a_1 = \frac{V_{i1} - V_{r1}}{t_1} \quad a_2 = \frac{V_{i2} - V_{r2}}{t_2} \quad 3.38$$

Suponiendo, para el efecto de la resistencia aerodinámica, una velocidad media:

$$V_1 = \frac{V_{i1} + V_{r1}}{2} \quad V_2 = \frac{V_{i2} + V_{r2}}{2} \quad 3.39$$

Sustituyendo 3.38 y 3.39 en 3.37:

$$P \cdot f_r + \frac{\rho}{2} C_x \cdot A \cdot V_1^2 = \gamma_m \cdot m \cdot a_1$$

$$P \cdot f_r + \frac{\rho}{2} C_x \cdot A \cdot V_2^2 = \gamma_m \cdot m \cdot a_2$$

Despejando se obtiene el coeficiente de resistencia aerodinámica

$$C_x = \frac{\gamma_m \cdot m \cdot (a_1 - a_2)}{\frac{\rho}{2} \cdot A \cdot (V_1^2 - V_2^2)}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$m \cdot g \cdot f_r + \frac{\rho}{2} \frac{\gamma_m \cdot m \cdot (a_1 - a_2)}{\frac{\rho}{2} \cdot A \cdot (V_1^2 - V_2^2)} A \cdot V_1^2 = \gamma_m \cdot m \cdot a_1$$

$$f_r = \frac{\gamma_m}{g} \left(-\frac{a_1 V_1^2 - a_2 V_1^2}{V_1^2 - V_2^2} + \frac{a_1 V_1^2 - a_1 V_2^2}{V_1^2 - V_2^2} \right)$$

El coeficiente de resistencia a la rodadura puede expresarse:

$$f_r = \frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{a_2 V_1^2 - a_1 V_2^2}{V_1^2 - V_2^2} \right)$$

Datos numéricos:

Densidad del aire $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$

$$\begin{aligned}V_{i1} &= 25 \text{ m/s} & V_1 &= \frac{V_{i1} + V_{r1}}{2} = 23,61 \text{ m/s} \\V_{r1} &= 22,22 \text{ m/s} \\V_{i2} &= 5,56 \text{ m/s} & V_2 &= \frac{V_{r2} + V_{r2}}{2} = 4,17 \text{ m/s} \\V_{r2} &= 2,78 \text{ m/s} \\a_1 &= \frac{2,78}{8} = 0,347 \text{ m/s}^2 & a_2 &= \frac{2,78}{15} = 0,19 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

sustituyendo se llega a:

$$C_x = \frac{1,06 \cdot 1400 \cdot (0,347 - 0,19)}{\left(\frac{1,225}{2}\right) \cdot 2 \cdot (557,43 - 17,39)} \approx 0,36$$
$$f_r = \frac{1,06}{9,81} \left(\frac{0,19 \cdot 557,43 - 0,347 \cdot 17,39}{557,43 - 17,39} \right) \approx 0,02$$

* **BIBLIOGRAFIA**

Referencias: [2], [10], [18], [19], [20], [24], [37], [42], [51] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

4.

DINÁMICA LONGITUDINAL. PRESTACIONES

4.1. INTRODUCCION

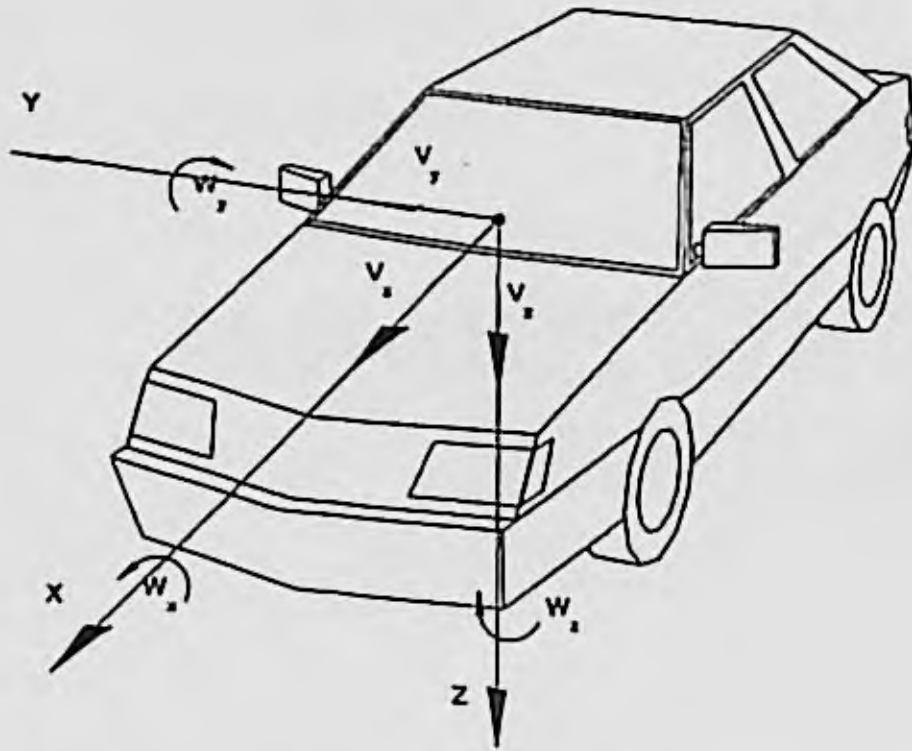
Con este tema se inicia el estudio de la dinámica longitudinal. Abarca el análisis del comportamiento del vehículo cuando circula en línea recta o curva de gran radio, de modo que la aceleración lateral a la que está sometido alcanza un valor muy pequeño. Se ignora dicha acción y todas aquellas que ocasionen asimetrías respecto al plano longitudinal del vehículo. La dinámica longitudinal incluye el estudio de los procesos de aceleración, circulación sobre rampas o pendientes y frenado. Es fundamental, por tanto, para el análisis y determinación de las prestaciones del vehículo.

En el presente tema, se va a establecer la ecuación fundamental del movimiento longitudinal del vehículo, es decir, el que se produce siguiendo el eje OX de la figura 4.1., con las hipótesis formuladas anteriormente. Para ello será preciso evaluar las resistencias que se oponen al movimiento del vehículo, aspecto que ocupará la primera parte del tema.

Para vencer los esfuerzos resistentes se precisan esfuerzos tractores, generados en la interfase neumático-calzada, los cuales actúan, a su vez, como reacción a los esfuerzos transmitidos a las ruedas, desde el motor, por intermedio del sistema de transmisión. Las fuerzas de tracción estarán limitados, por tanto, por las características de los órganos propulsores citados y por el valor máximo que impone, en cada caso, el rozamiento entre el neumático y calzada. Este segundo límite será analizado en el punto 4.4, estudiándose los esfuerzos motrices y el efecto de la transmisión, en los siguientes apartados.

Las prestaciones del vehículo vendrán definidas por el valor inferior de los dos límites indicados de los esfuerzos tractores:

- Esfuerzos motrices disponibles en las ruedas
- Esfuerzos máximos de adherencia neumático-calzada



- | | |
|-------|---------------------------------|
| V_x | – Velocidad longitudinal |
| V_y | – Velocidad lateral |
| V_z | – Velocidad vertical |
| W_x | – Velocidad angular de balanceo |
| W_y | – Velocidad angular de cabeceo |
| W_z | – Velocidad angular de guiñada |

Figura 4.1. Ejes de referencia con origen en el c.d.g. del vehículo.

4.2. RESISTENCIA AL MOVIMIENTO

Un vehículo, circulando a velocidad constante sobre una superficie no horizontal, está sometido a los siguientes esfuerzos resistentes (figura 4.2).

- Resistencia aerodinámica al avance: F_{xa}
- Resistencia a la rodadura: $R_r = R_{rd} + R_{rt}$
- Resistencia gravitatoria: R_g .

Por lo que la resistencia total será:

$$R_T = R_r + F_{xa} + R_g \quad 4.1$$

Los dos primeros sumandos representan la resistencia al movimiento en línea recta y sobre superficie horizontal.

La resistencia aerodinámica al avance fue estudiada en el capítulo 3. Su valor, en función de la velocidad es:

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \rho C_x A_r V^2 \quad 4.2$$

La resistencia a la rodadura, como fue indicado en el capítulo 2, puede expresarse, en función de la velocidad, mediante una relación de la forma.

$$R_r = (f_o + f_v V^n) P = f_r P \quad 4.3$$

siendo P el peso del vehículo.

El exponente n puede tomar valores comprendidos entre 2 y 2,5 o próximos a ellos.

El valor de la resistencia total del vehículo sobre superficie de rodadura horizontal, es:

$$R_{th} = (f_o + f_v V^2) mg + \frac{1}{2} \rho C_x A_f V^2 \quad 4.4$$

siendo m la masa del vehículo.

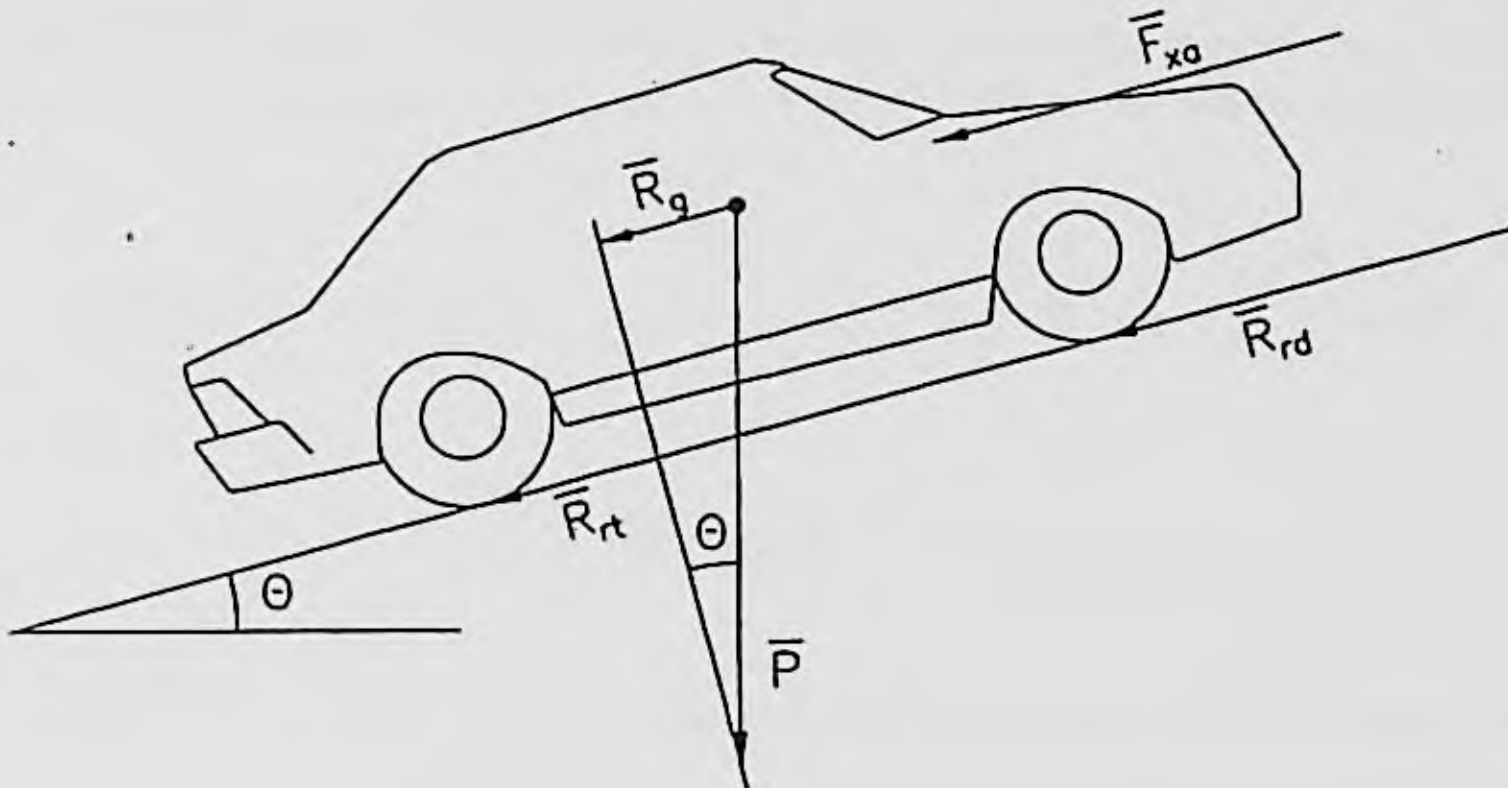


Figura 4.2. Esfuerzos resistentes

La potencia necesaria para el movimiento, en las condiciones descritas será:

$$H_h = \left[(f_o + f_v V^2) mg + \frac{1}{2} \rho C_x A_f V^2 \right] V \quad 4.5$$

Puede observarse, en la expresión, que la resistencia a la rodadura es el sumando predominante a baja velocidad, y la aerodinámica lo es a velocidad elevada.

Por otra parte, cuando aumenta el tamaño del vehículo y, por tanto, su masa, la resistencia a la rodadura crece más que la aerodinámica, ya que, en general, m aumenta más rápidamente al hacerlo las dimensiones del vehículo, que el producto $C_x A_f$. El resto de los valores varían poco o son constantes.

Por último, debe señalarse que la expresión 4.3 sólo es válida a velocidades inferiores a la crítica del neumático, ya que por encima de ella R_f crece bruscamente. En general la velocidad máxima de los vehículos comerciales se encuentra suficientemente alejada de la crítica. La resistencia gravitatoria, R_g , es la componente del peso en dirección paralela a la superficie de rodadura y, por tanto:

$$R_g = P \text{ Sen } \Theta \quad 4.6$$

El ángulo Θ toma valores positivos en el caso de rampas, y R_g se opone al movimiento. En el caso de descensos (pendientes) Θ es negativo y R_g también, es decir, en lugar de oponerse al movimiento (resistencia) es una fuerza propulsora.

Si se considera el esfuerzo aerodinámico de sustentación (capítulo 3), la expresión de la potencia total necesaria para el movimiento del vehículo es, tomando para n un valor igual a dos:

$$H = \left[\left(mg \cos \theta - \frac{1}{2} \rho C_x A_f V^2 \right) (f_0 + f_v V^2) + \frac{1}{2} \rho C_z A_f V^2 + mg \text{ sen } \theta \right] V \quad 4.7$$

siendo C_z el coeficiente de sustentación aerodinámica.

Para valores pequeños del ángulo Θ , inferiores a 10° , puede suponerse:

$$\text{Sen } \Theta \approx \tan \theta \approx j \quad 4.8$$

$$\text{Cos } \Theta \approx 1$$

Siendo j la pendiente, expresada en tanto por uno. El valor de j deberá ser considerado con signo negativo en descensos.

Sustituyendo en 4.7 y suponiendo despreciable frente al peso el término correspondiente a la sustentación aerodinámica:

$$H = mg (f_0 + j) V + \left(mg f_v + \frac{1}{2} \rho C_x A_r \right) V^3 \quad 4.9$$

Que puede ser expresada en la forma:

Siendo:

$$H = A_j V + B_j V^3 \quad 4.10$$

$$A_j = mg(f_0 + j) \quad 4.11$$

$$B_j = mg f_v + \frac{1}{2} \rho C_x A_r$$

El valor de la velocidad para el cual se igualan los dos sumandos de la ecuación 4.10, se considera un valor característico del vehículo:

$$V_{car} = \sqrt{\frac{A_j}{B_j}} \quad 4.12$$

Y sustituyendo en 4.10:

$$H_{car} = A_j \sqrt{\frac{A_j}{B_j}} + B_j \frac{A_j}{B_j} \sqrt{\frac{A_j}{B_j}} = 2 A_j \sqrt{\frac{A_j}{B_j}} \quad 4.13$$

Por tanto:

$$V_{car} = \sqrt{\frac{mg (f_0 + j)}{mg f_v + \frac{1}{2} \rho C_x A_r}} = \sqrt{\frac{f_0 + j}{f_v + \frac{1}{2} \frac{\rho}{g} \lambda_c}} \quad 4.14$$

$$H_{car} = 2 mg (f_0 + j) V_{car} \quad 4.15$$

Siendo λ_c una constante característica del vehículo:

$$\lambda_c = \frac{C_x A_r}{m} \quad 4.16$$

que informa acerca de su comportamiento aerodinámico en avance, referido a la masa del vehículo, parámetro este último relacionado con su tamaño.

Los esfuerzos resistentes y la potencia necesaria para vencerlos se representan en gráficas como las contenidas en las figuras 4.3 y 4.4 aplicando las ecuaciones 4.1 y 4.7. En ambas figuras se han representado dos familias de curvas, correspondientes a $f_v = 0$ y $f_v \neq 0$ para apreciar la influencia de la variación de la resistencia a la rodadura con la velocidad.

Ambas familias de curvas se han calculado para un vehículo de las siguientes características:

m	=	1.200 Kg	$f_0 = 0,014$	$j = 0 \text{) } 0,6$	
C_x	=	0,35	$f_v = 0$	y	$f_v = 6 \cong 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$
A_f	=	1,8 m ²			
ρ	=	1,225 Kg/m ³			

Para estos valores, considerando $j = 0$ y $f_v = 0$

$\lambda_c = 5,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{kg}$
 $V_{cr} = 20,66 \text{ m/s}$
 $H_{cr} = 6,811 \text{ kw.}$

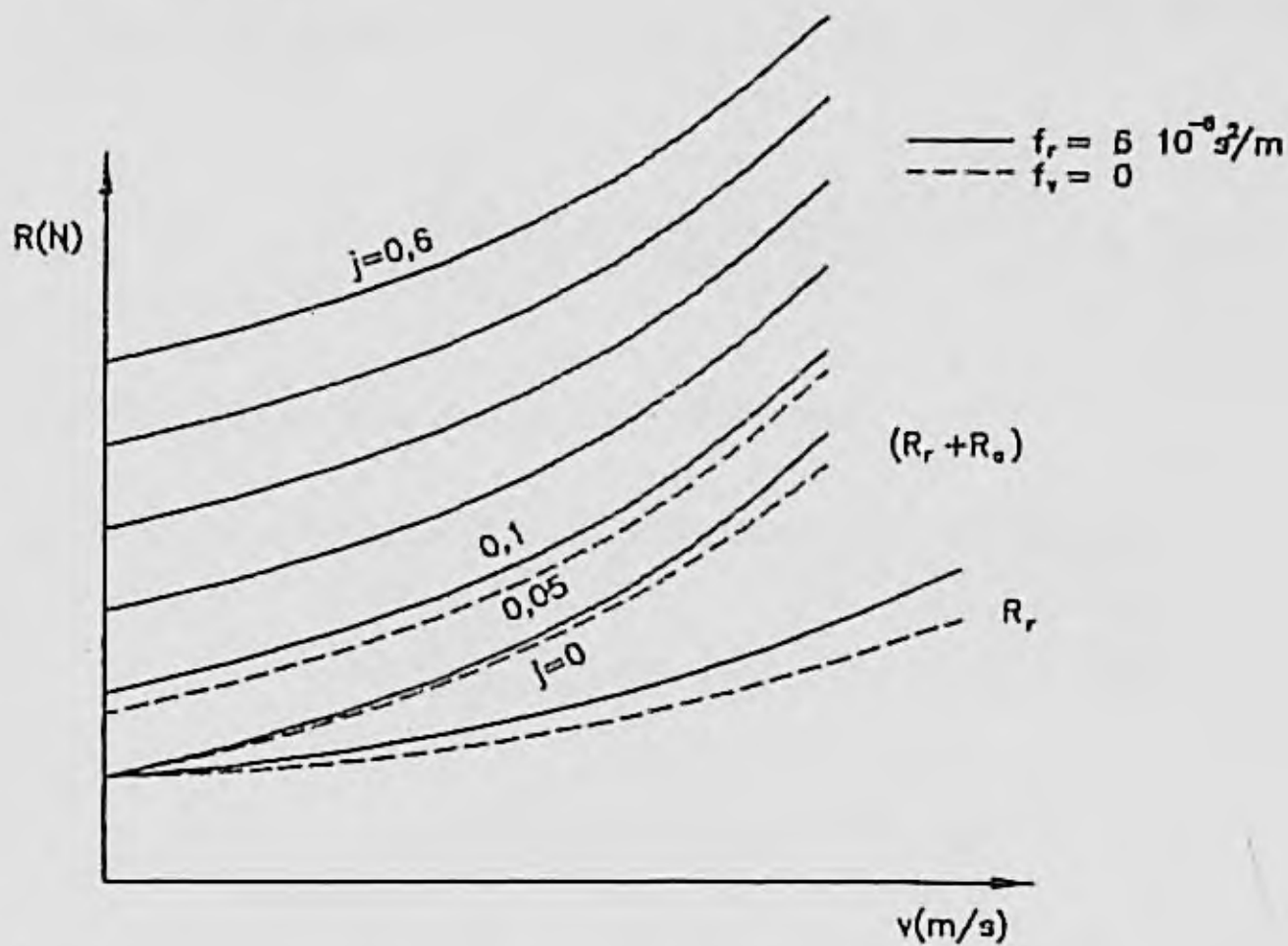


Figura 4.3. Resistencia al movimiento de un vehículo, sobre rampas de diferentes valores (j), en función de la velocidad.

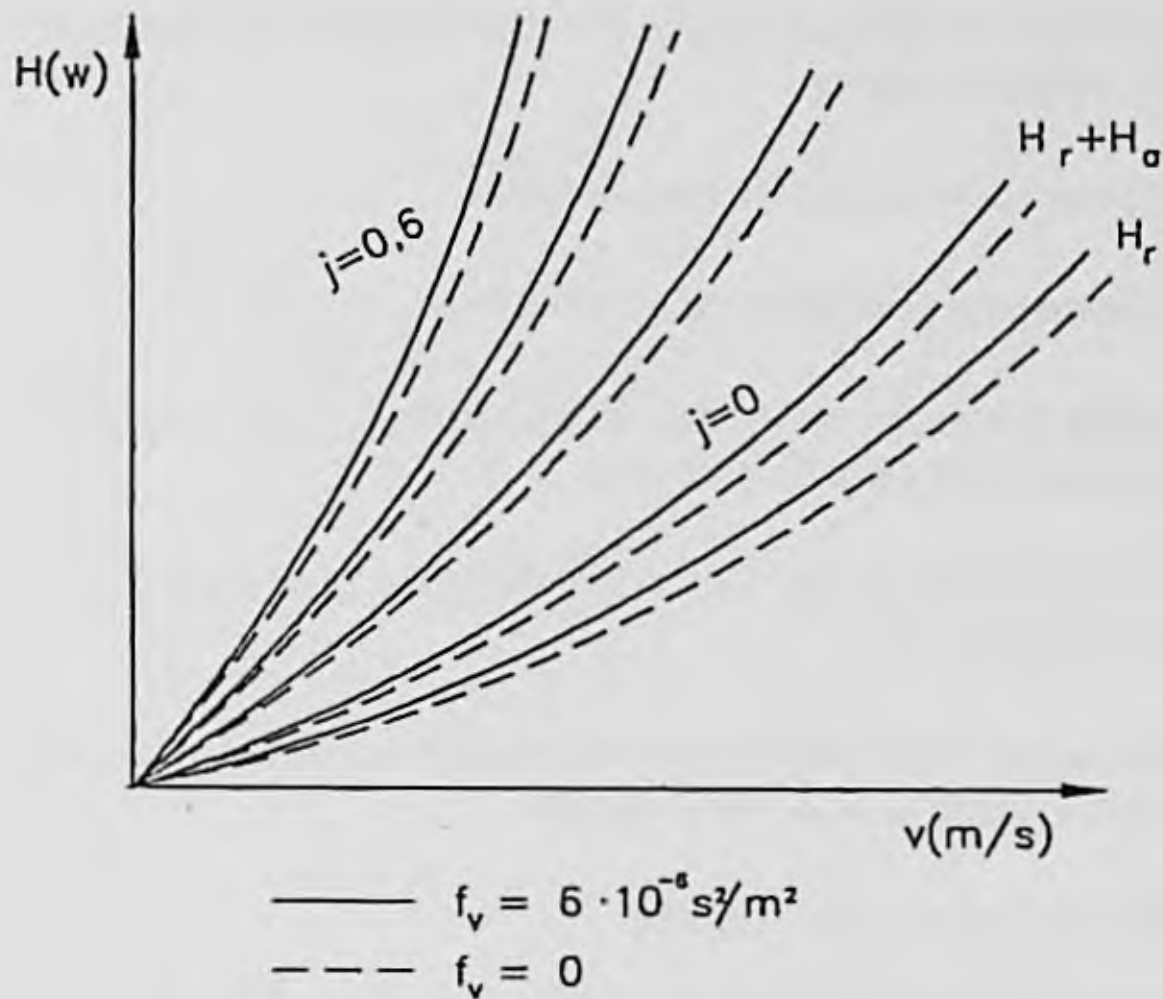


Figura 4.4. Potencia necesaria para el movimiento de un vehículo sobre rampas de diferentes valores (j), en función de la velocidad.

4.3. ECUACION FUNDAMENTAL DEL MOVIMIENTO LONGITUDINAL

Para el estudio de los esfuerzos longitudinales puede utilizarse un modelo plano como el de la figura 4.5, en el cual se ignorarán, además, los movimientos verticales y de cabeceo de la masa suspendida. Aplicando la segunda Ley de Newton y la ecuación de Euler se obtiene:

$$m a_x = F_d + F_t - F_{ra} - P \sin \Theta \quad 4.17$$

$$0 = F_{rd} + F_{rd} + F_{ra} - P \cos \Theta \quad 4.18$$

$$I_d \dot{\Omega}_d + I_t \dot{\Omega}_t = F_{rd} (l_2 - d_t) - F_{ra} (l_1 + d_d) - (F_d + F_t) h + M_{ya} \quad 4.19$$

En las anteriores ecuaciones:

F_d y F_t representan los esfuerzos de tracción en los ejes delantero y trasero, respectivamente.

F_{zd} y F_{zt} son las reacciones normales a la superficie de rodadura, en los ejes delantero y trasero, respectivamente.

F_{za} es la fuerza de sustentación aerodinámica.

M_{ya} es el momento aerodinámico de cabeceo.

I_d , I_t son los momentos de inercia de las ruedas y masas que giran unidas a ellas, respecto a sus respectivos ejes de giro.

d_d y d_t son los avances de neumático. Originan sendos pares de resistencia a la rodadura en ambos ejes.

l_1 y l_2 representan las distancias entre el centro de gravedad y cada uno de los ejes, en su proyección sobre el plano de rodadura.

L es la distancia entre ejes o batalla.

h es la altura del centro de gravedad del vehículo.

V_x , a_x , velocidad y aceleración longitudinales del centro de gravedad.

Ω_d , Ω_t , velocidades de giro de las ruedas, delanteras y traseras respectivamente.

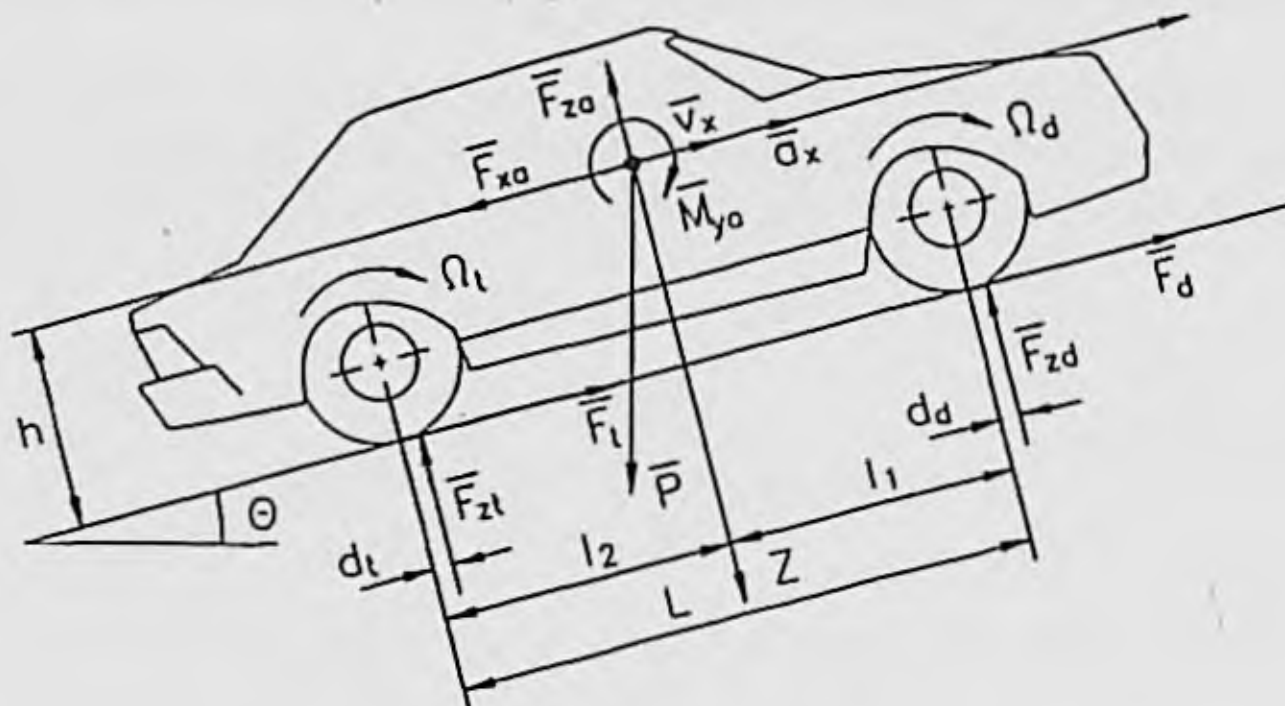


Figura 4.5. Modelo de vehículo para el estudio de la dinámica longitudinal.

Considerando el equilibrio de una rueda (Figura 4.6)

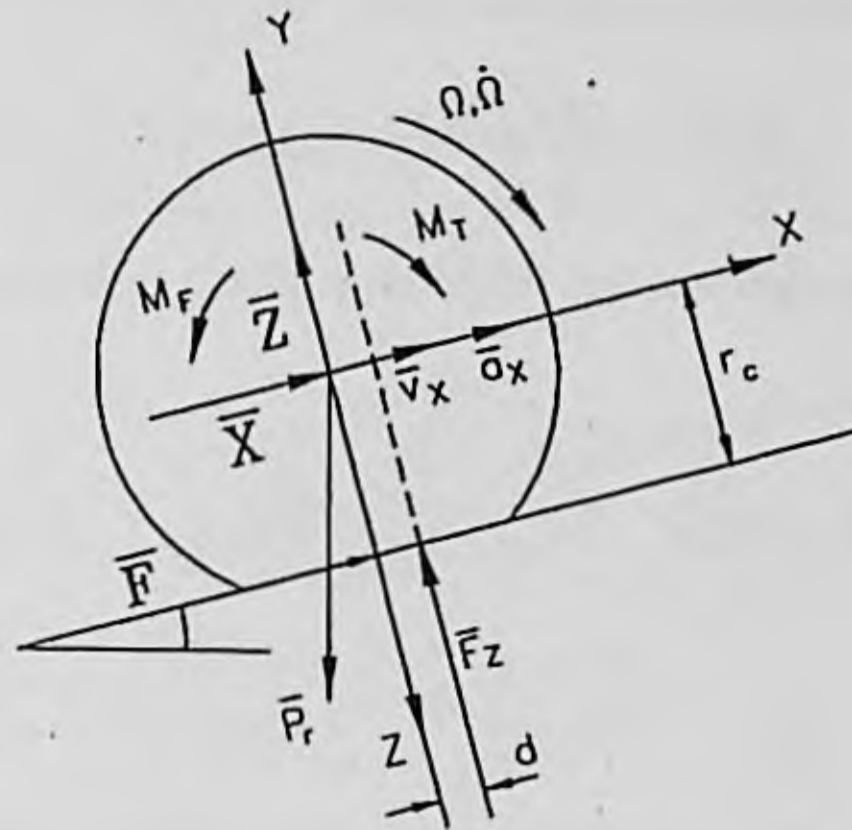


Figura 4.6. Fuerzas y momentos sobre una rueda.

$$m_r a_x = X + F - P_r \text{ sen } \Theta \quad 4.20$$

$$0 = Z + F_z - P_r \text{ cos } \Theta \quad 4.21$$

$$I_r \dot{\Omega} = M_T - M_F - r_c F - F_z d = M_T - M_F - r_c (F + F_z f_r) \quad 4.22$$

Siendo:

X y Z componentes de la acción del vehículo sobre el eje de la rueda.

P_r , peso de la rueda.

r_c , radio bajo carga de la rueda.

M_T , M_F Momento de tracción y frenado, respectivamente, aplicados a la rueda. Se contempla la posibilidad de que ambos puedan ser aplicados simultáneamente.

Debe observarse que en (4.22) se ha hecho $F_z d = R_r \cdot r_c = F_z \cdot f_r \cdot r_c$, es decir, se ha sustituido el momento de resistencia a la rodadura $F_z \cdot d$, por otro igual que produce una fuerza R_r aplicada en el contacto rueda-calzada. Esta R_r fue expresada en (4.3).

Los esfuerzos normales sobre las ruedas F_{zd} y F_{zd} pueden calcularse de 4.18 y 4.19, y las fuerzas sobre los ejes X y Z, a través de 4.20 y 4.21, cuando el movimiento es conocido. En cuanto a la ecuación fundamental del movimiento longitudinal, puede deducirse obteniendo el

valor de la fuerza de tracción F de la expresión 4.22

$$F = -\frac{I_r \dot{\Omega}}{r_c} + \frac{M_T - M_F}{r_c} - F_z f_r \quad 4.23$$

particularizando este valor para los ejes delantero y trasero, y sustituyendo F_d y F_t en la ecuación 4.17,

$$m a_x + \frac{I_d \dot{\Omega}_d + I_t \dot{\Omega}_t}{r_c} = \frac{M_{Td} - M_{Fd}}{r_c} + \frac{M_{Tt} - M_{Ft}}{r_c} - F_{xa} - P \operatorname{sen} \theta - f_r (F_{xd} + F_{xt}) \quad 4.24$$

Como puede observarse, los sumandos del primer miembro representan las fuerzas de inercia del vehículo, tanto las debidas al movimiento de traslación del conjunto, como de rotación de las masas ligadas a las ruedas. En el segundo miembro aparecen las resistencias a la rodadura, aerodinámica y gravitatoria, ya analizadas antes, así como las diferencias entre los esfuerzos tractores y de frenado, aplicados en ambos ejes y referidos a la superficie de contacto rueda-calzada.

4.4. ESFUERZO TRACTOR MAXIMO LIMITADO POR LA ADHERENCIA EN VEHICULOS DE DOS EJES

Durante los procesos de aceleración (tracción), M_{Fd} y M_{Ft} en la ecuación 4.24 serán nulos, o representarán las pequeñas resistencias al giro de las ruedas respecto a su propio eje, en todo caso, las diferencias $M_T - M_F$ serán positivas. Por otra parte, si la tracción se produce únicamente en el eje delantero, $M_{Tt} = 0$ y si es solo en el eje trasero $M_{Td} = 0$.

Considerando ahora el modelo de la figura 4.7, en el cual se ha incluido la resistencia R_b debida al arrastre de un remolque, se pretende determinar el valor máximo que pueden alcanzar los esfuerzos tractores F_t y F_d , como consecuencia del límite que impone el rozamiento entre el neumático y la calzada, cuyo valor es representado por el coeficiente de máxima adherencia μ . Calculando los momentos de las fuerzas respecto al punto A se obtiene:

$$\left(\frac{P}{g} a + F_{xa} + P \operatorname{sen} \theta \right) h + R_b h_b - (P \cos \theta - F_{za}) l_2 + F_{zd} L - M_{ya} = 0 \quad 4.25$$

De donde puede obtenerse F_{zd} .

$$F_{zd} = \frac{P \cos \theta l_2 - \left(\frac{P}{g} a + F_{xa} + P \operatorname{sen} \theta \right) h + R_b h_b - F_{za} l_2 + M_{ya}}{L} \quad 4.26$$

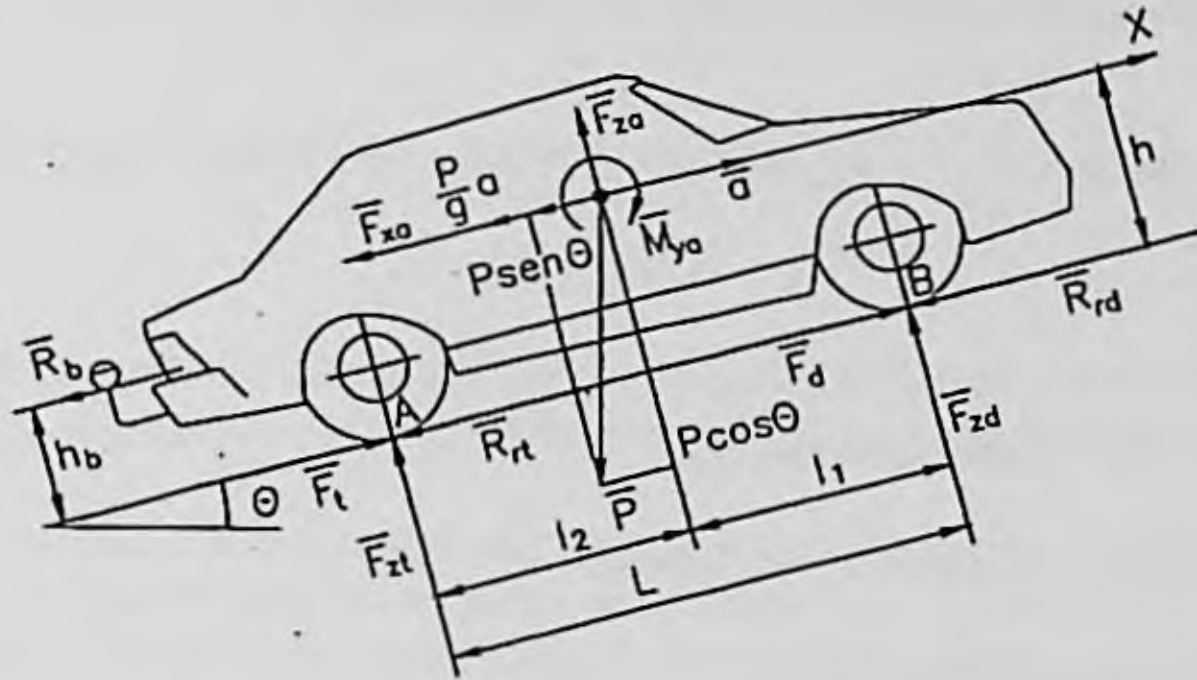


Figura 4.7. Modelo para el cálculo de esfuerzos tractores máximos limitados por la adherencia en vehículos de dos ejes.

Análogamente, tomando momentos respecto al punto B.

$$F_{za} = \frac{P \cos \theta l_1 + \left(\frac{P}{g} a + F_{xa} + P \operatorname{sen} \theta \right) h + R_b h_b - F_{za} l_1 - M_{ya}}{L} \quad 4.27$$

Suponiendo que el ángulo θ es pequeño, que $h_b \cdot h$, y que las acciones aerodinámicas de sustentación y cabeceo son pequeñas frente al resto de los esfuerzos, las anteriores ecuaciones, pueden simplificarse, resultando:

$$F_{zd} = \frac{l_2}{L} P - \frac{h}{L} \left(\frac{P}{g} a + P \operatorname{sen} \theta + F_{xa} + R_b \right) \quad 4.28$$

$$F_{za} = \frac{l_1}{L} P + \frac{h}{L} \left(\frac{P}{g} a + P \operatorname{sen} \theta + F_{xa} + R_b \right) \quad 4.29$$

Los sumandos $\frac{l_2}{L} P$ y $\frac{l_1}{L} P$ representan las cargas estáticas sobre las ruedas de los ejes delantero y trasero, respectivamente, cuando el vehículo se encuentra sobre una superficie horizontal.

El valor $\Delta F_z = \frac{h}{L} \left(\frac{P}{g} a + P \text{ sen } \theta + F_{za} + R_b \right)$ representa la transferencia de carga entre el eje delantero y el trasero, debido al conjunto de las resistencias y a la inercia del vehículo.

Considerando el equilibrio en dirección longitudinal:

$$\frac{P}{g} a + P \text{ sen } \theta + F_{za} + R_b = F_d + F_i - R_{rd} - R_{rt} = F_T - R_r \quad 4.30$$

Siendo:

$$F_T = F_d + F_i \quad \text{Esfuerzo tractor total}$$

$$R_r = R_{rd} + R_{rt} \quad \text{Resistencia a la rodadura total}$$

Y sustituyendo 4.30 en 4.28 y 4.29.

$$F_{zd} = \frac{l_2}{L} P - \frac{h}{L} (F_T - R_r) \quad 4.31$$

$$F_{zt} = \frac{l_1}{L} P + \frac{h}{L} (F_T - R_r)$$

Con estos valores puede ser calculado el límite impuesto por el rozamiento a la tracción del vehículo, en los tres casos posibles:

a) Vehículo con tracción delantera ($F_T = F_{Td}$):

$$F_{Tdm} x = \mu F_{zd} = \mu \left[\frac{l_2}{L} P - \frac{h}{L} (F_{Tdm} x - R_r) \right] \quad 4.32$$

Teniendo en cuenta 4.3 y despejando $F_{Tdm\text{máx}}$:

$$F_{Tdm} x = \frac{\mu P (l_2 + h f_r)}{L + \mu h} \quad 4.33$$

b) Vehículos con tracción trasera. ($F_T = F_{Td}$)

$$F_{T_{\max}} x = \mu F_{z1} = \mu \left[\frac{l_1}{L} P + \frac{h}{L} (F_{T_{\max}} x - R_r) \right] \quad 4.34$$

$$F_{T_{\max}} x = \frac{\mu P (l_1 - hf_r)}{L - \mu h}$$

c) Vehículos con tracción a las cuatro ruedas.

$$F_{T_{\max}} x = \mu P \cos \Theta \approx \mu P \quad 4.35$$

Este valor máximo solo puede alcanzarse si la distribución de esfuerzo de tracción entre ambos ejes coincide con la fuerza adherente (μF_z) disponible en cada uno de ellos.

El límite impuesto por rozamiento a la tracción, afecta en condiciones de aceleración elevada, las cuales se producen únicamente a velocidades bajas, especialmente, en el arranque. En estos casos, las hipótesis simplificativas que hicimos antes, despreciando efectos aerodinámicos, son pertinentes. Por otra parte, f_r puede considerarse constante, e igual a f_0 y también μ . En estas condiciones, normalmente, $F_{T_{\max}} > F_{Td_{\max}}$ a igualdad del resto de los valores.

4.5. ESFUERZO TRACTOR MAXIMO LIMITADO POR LA ADHERENCIA EN VEHICULOS COMPUESTOS TRACTOR-SEMIREMOLQUE

En general, los vehículos articulados formados por una cabeza tractora que arrastra a un semirremolque, tienen como eje motriz al eje trasero del tractor. En consecuencia, bastará calcular la carga dinámica sobre este eje, para determinar el límite que impone el rozamiento rueda-superficie de rodadura.

El modelo plano representado en la figura 4.8 será utilizado para determinar la fuerza F_{z1} . En este modelo se representan, junto a las cargas y valores geométricos correspondientes a cada una de las partes articuladas que componen el conjunto, las fuerzas de reacción entre ellas F_{xh} y F_{zh} , aplicadas en la quinta rueda (sistema de articulación entre el tractor y el semirremolque, y apoyo del segundo sobre el primero). En la figura se ha representado, con los sentidos que se indican, la acción del semirremolque sobre el tractor, en procesos de tracción. En general se utilizan los subíndices 1 y 2 para denotar magnitudes asociadas al tractor y al semirremolque, respectivamente. Se han considerado separadas las acciones aerodinámicas, limitando éstas a la resistencia al avance, sobre cada elemento de la composición y se ha denotado con h_{a1} y h_{a2} la distancia de los respectivos centros de presiones, a la superficie de rodadura.

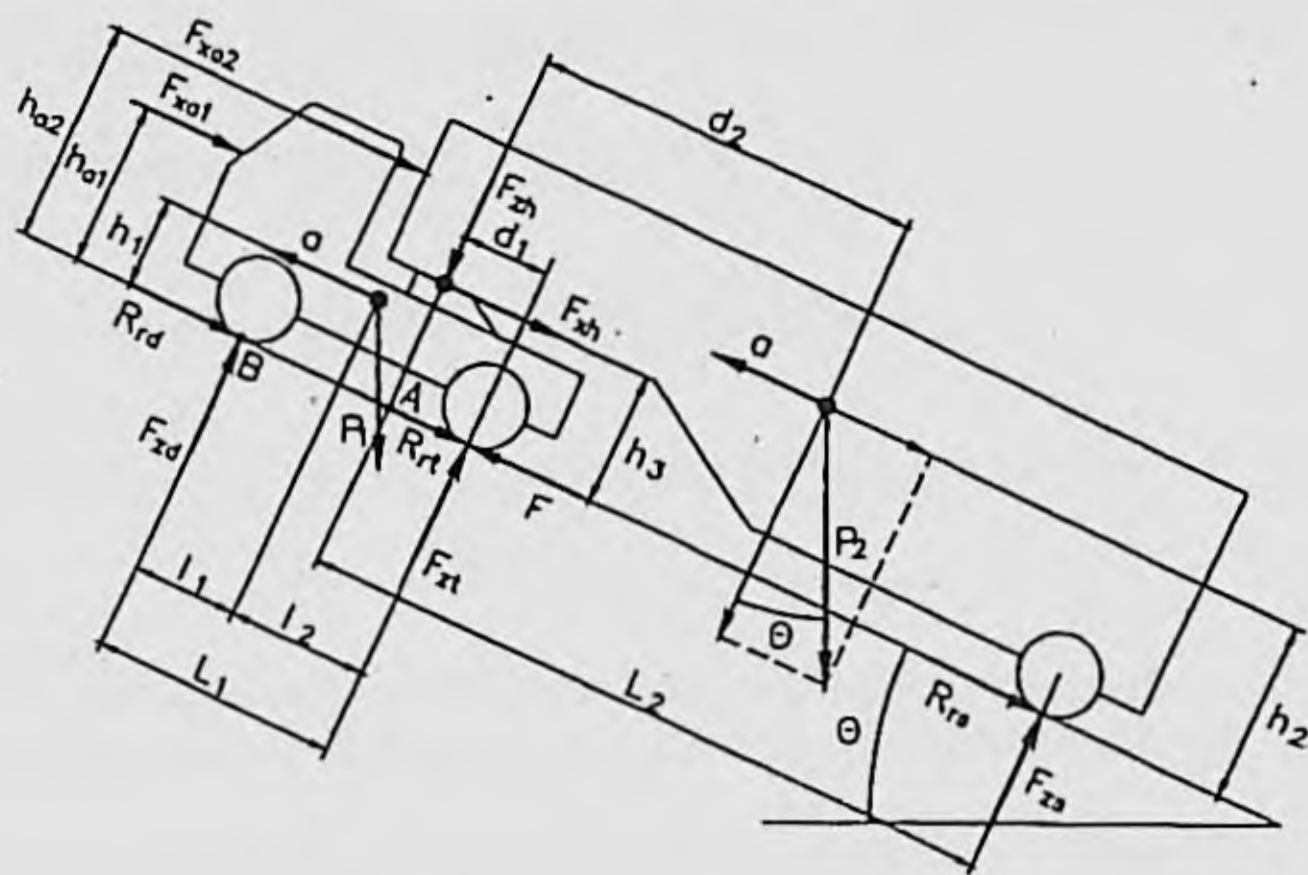


Figura 4.8 Modelo para el cálculo de esfuerzo tractor máximo limitado por la adherencia, en composiciones tractor-semirremolque.

Considerando al semirremolque como cuerpo libre y tomando momentos respecto al punto A, proyección del eje de la quinta rueda sobre la superficie de rodadura, se obtiene:

$$F_{xt} = \frac{P_2 d_2 + \left(\frac{P_2}{g} a + P_2 \text{sen } \theta \right) h_2 - F_{xh} \cdot h_3 + F_{xo2} \cdot 2 h_2}{L_2} \quad 4.36$$

En esta expresión se ha supuesto que θ es pequeño ($\cos \theta = 1$) y F_{xt} con sentido opuesto al representado en la figura, es decir, como acción del tractor sobre el semirremolque.

Estableciendo, ahora, como hipótesis simplificativa que:

$$h_{o2} = h_3 = h_2 \quad 4.37$$

Se obtiene:

$$F_{xt} = \frac{d_2}{L_2} P_2 + \frac{h_2}{L_2} \left(P_2 \text{sen } \theta + F_{xo2} \cdot 2 + \frac{P_2}{g} a - F_{xh} \right) \quad 4.38$$

El primer sumando de 4.38 representa la carga estática, sobre superficie horizontal, que gravita sobre el eje del semirremolque y el segundo la transferencia de carga en las condiciones de la figura 4.8.

La condición de equilibrio en dirección longitudinal se expresa como:

$$F_{zh} = P_2 \operatorname{sen} \theta + F_{za} + \frac{P_2}{g} a + F_{zs} f_r \quad 4.39$$

Y sustituyendo en 4.38.

$$F_{zs} = \frac{d_2}{L_2} P_2 - \frac{h_2}{L_2} F_{zs} f_r \quad 4.40$$

$$F_{zs} = \frac{P_2 d_2}{L_2 + f_r h_2}$$

$$F_{zh} = P_2 \cos \theta - F_{zs} - P_2 - F_{zs} \quad 4.41$$

$$F_{zh} = P_2 \left(1 - \frac{d_2}{L_2 + f_r h_2} \right) = C_s P_2$$

Siendo C_s un coeficiente característico del semirremolque para un valor determinado de f_r .

Considerando, ahora, el equilibrio del tractor como cuerpo libre y tomando momentos respecto al punto B:

$$F_{za} = \frac{P_1 l_1 + \left(\frac{P_1}{g} a + P_1 \operatorname{sen} \theta \right) h_1 + F_{za} l h_2 + F_{zh} (L_1 - d_1) + F_{zh} h_3}{L_1} \quad 4.42$$

La condición de equilibrio en dirección longitudinal es:

$$F = \frac{P_1}{g} a + P_1 \operatorname{sen} \theta + F_{za} l + F_{zh} + f_r (P_1 + F_{zh}) \quad 4.43$$

Sustituyendo 4.43 en 4.42 y suponiendo que $h_1 = h_{a1} = h_3$:

$$F_{za} = \frac{P_1 l_1 + F_{zh} (L_1 - d_1) + F h_1 - f_r (P_1 + F_{zh}) h_1}{L_1} \quad 4.44$$

La fuerza de rozamiento máxima entre rueda y calzada, en el eje trasero del tractor, que es el límite que impone la adherencia a la tracción, en este tipo de vehículos, será:

$$F_{Tm} x = \mu F_{za} = \frac{\mu [P_1 l_1 + F_{zh} (L_1 - d_1) + F_{Tm} x h_1 - f_r (P_1 + F_{zh}) h_1]}{L_1} \quad 4.45$$

Sustituyendo 4.41 en 4.45, y despejando F_{Tmax} :

$$F_{Tmax} = \frac{\mu [P_1 l_1 + C_s P_2 (L_1 - d_1) - h_1 f_r (C_s P_2 + P_1)]}{L_1 - \mu h_1} \quad 4.46$$

Como se dijo antes, el valor F_{Tmax} impone un límite a las prestaciones del vehículo y concretamente a la capacidad de aceleración, subida por rampas y capacidad de remolque.

4.6. CARACTERISTICAS DEL MOTOR Y TRANSMISION.

4.6.1. Introducción.

En el punto 4.1. se ha estudiado el límite que impone la adherencia neumático-calzada a la tracción de los vehículos. El segundo límite viene impuesto por el máximo par de tracción que el motor puede transmitir a las ruedas tractoras, a través de la transmisión.

El menor de estos dos límites condiciona, en cada caso, las prestaciones del vehículo. A bajas velocidades del vehículo y pares máximos del motor, la capacidad tractora, de la que dependerá la máxima aceleración y la máxima rampa por la que el vehículo puede circular, vendrá limitada por la interacción neumático - calzada. Para altas velocidades, es el motor y transmisión quien impone su límite.

En este tema se estudiarán las características de los motores más comúnmente utilizados en vehículos automóviles, es decir, los de combustión interna, y las transmisiones más frecuentes: mecánica e hidrodinámica. Conociendo sus características será posible estudiar las prestaciones del vehículo, cuyo análisis se completará en el punto 4.3.

4.6.2. Características de los motores.

Puesto que las condiciones operativas de los vehículos reclaman pares tractores elevados a bajas velocidades y reducidos a velocidades altas, la curva ideal par - velocidad es una hipérbola como la representada en la figura 4.9, la cual puede obtenerse con un motor que funcione a potencia constante ($H = M \cdot \omega = cte.$) en todo el intervalo de velocidades requerido.

Este tipo de respuesta se obtiene en algunos motores, como es el caso de la máquina de vapor y del motor eléctrico con devanado en serie, utilizados ambos en tracción ferroviaria y hoy superados por otros motores eléctricos de mejor rendimiento, gracias a las técnicas actuales de control.

En vehículos automóviles, estos motores no han sido prácticamente utilizados y, por el contrario, se utilizan casi exclusivamente los motores de combustión interna, de encendido por compresión o por chispa, cuyas características, (figuras 4.10 y 4.11), difieren ampliamente de las ideales ya mencionadas.

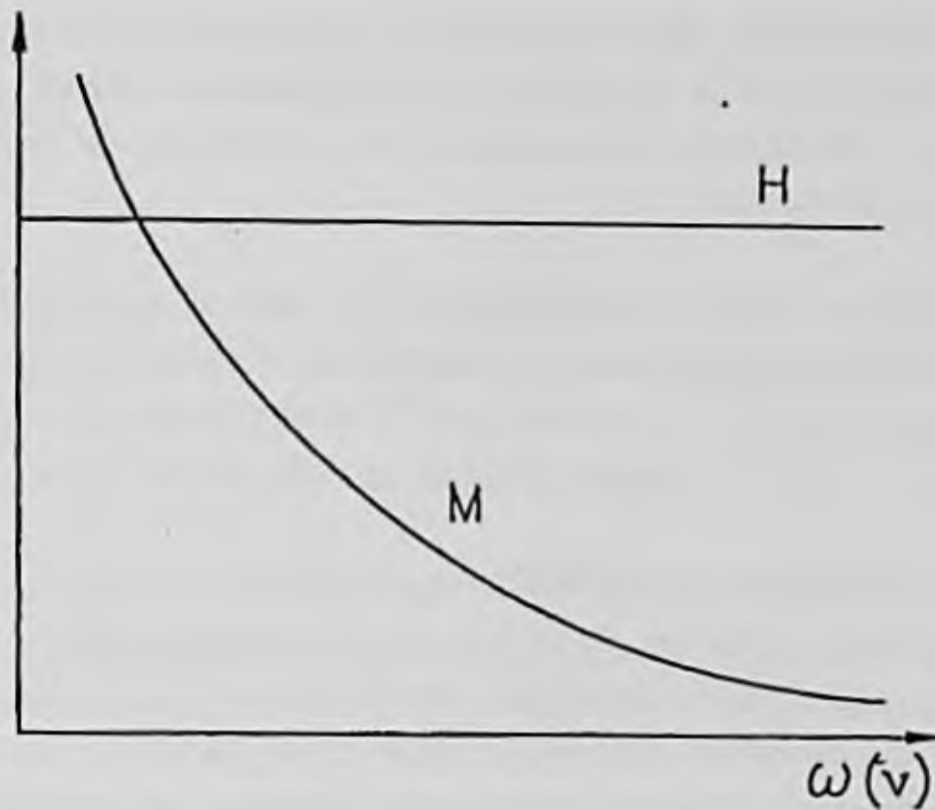


Figura 4.9. Características ideales de un motor de tracción vehicular.

Las razones para un uso tan ampliamente generalizado de este tipo de motores pueden resumirse en las siguientes:

- Buena relación potencia/peso.
- Consumo de combustible aceptable.
- Bajo precio.
- Combustible económico y relativamente abundante (al menos hasta el presente).
- Amplia autonomía con volumen no muy elevado de los depósitos.
- Posibilidad de controlar el régimen de operación de forma sencilla (actuación del pie sobre una palanca).
- Mantenimiento reducido.

En contra de estas ventajas hay que considerar el impacto ambiental negativo que produce el uso generalizado de automóviles equipados con este tipo de motores: ruido, vibraciones y, sobre todo, contaminación del aire con emisiones gaseosas: NO_x , CO, CO_2 etc., y partículas sólidas en motores diesel.

Por otra parte, las denominadas crisis del petróleo han hecho sonar señales de alarma en contra de unos motores esencialmente dependientes de los combustibles fósiles.

Todos estos inconvenientes han desencadenado una intensa actividad investigadora con dos orientaciones fundamentales: mejorar los motores de combustión interna, reduciendo los efectos negativos señalados y continuar los procesos de desarrollo de otras tecnologías aplicables a motores para vehículos.

Como consecuencia de tales investigaciones se han desarrollado motores de combustión interna de más elevado rendimiento y emisiones más reducidas, logrando una mejor combustión y eliminando gases nocivos o partículas sólidas mediante técnicas catalíticas o filtrando en el tubo de escape. Todo ello asegura una larga vida a este tipo de motores.

En cuanto a otras tecnologías, cabe destacar el uso de nuevos combustibles: alcohol, gas natural, hidrógeno; y de otros motores: eléctricos, célula de combustible, turbina de gas, motores de combustión externa de ciclo de Rankine, o ciclo - Stirling. También se desarrollan vehículos híbridos eléctrico - combustión interna. Estos sistemas, algunos ya comercializados para usos específicos, como ciertos vehículos eléctricos o híbridos, no son aún competitivos frente a los actuales motores.

Volviendo a los motores de combustión interna (figuras 4.10 y 4.11), estos motores empiezan a transmitir potencia a la cadena cinemática de la transmisión a partir de una cierta velocidad, cuando la potencia desarrollada supera a las resistencias internas y las que ofrecen los equipos que arrastra el propio motor para su funcionamiento o el de otros sistemas auxiliares. Después, el par crece suavemente con la velocidad, hasta alcanzar un valor máximo, a partir del cual se produce una disminución como consecuencia del incremento de las pérdidas en el colector de admisión. La potencia presenta una variación análoga, aunque el máximo valor se alcanza a una velocidad más alta, próxima a la máxima permitida para el motor.

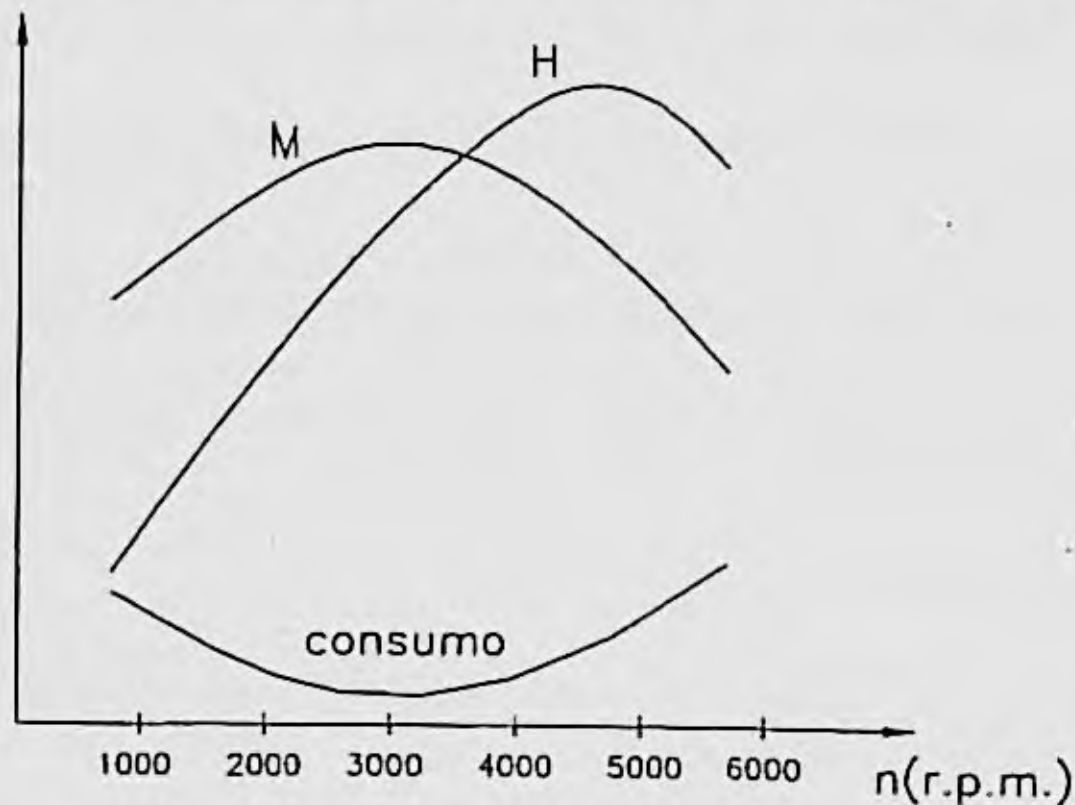


Figura 4.10. Características de funcionamiento de un motor de gasolina.

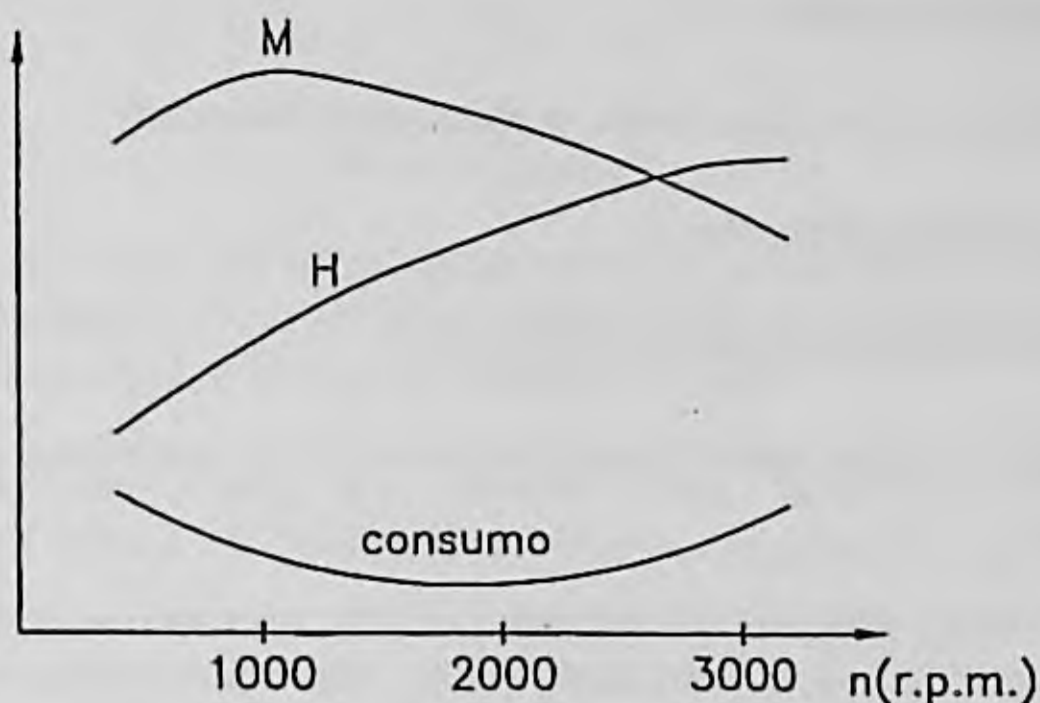


Figura 4.11: Características de funcionamiento de un motor diesel.

Las curvas características suministradas por los fabricantes suelen ofrecer valores de par y potencia superiores a los efectivos, puesto que son determinadas eliminando, normalmente, elementos arrastrados por el motor que no son esenciales para su funcionamiento. Para valorar exactamente los datos suministrados conviene saber la norma utilizada para la determinación de las curvas, la cual indica las condiciones de ensayo.

Por otra parte, la presión, temperatura y humedad influyen en el rendimiento del motor y, por tanto, en los valores de su respuesta en un régimen dado. Lo más usual es que las curvas características sean determinadas en condiciones normalizadas con los siguientes valores:

$$T_0 = 288,5^\circ \text{K} \quad (15,5^\circ \text{C})$$

$$P_0 = 101,32 \text{ kPa} \quad (76 \text{ cm Hg})$$

Cuando el motor opera en otras condiciones pueden utilizarse las siguientes expresiones de conversión para calcular el valor de la potencia en función de las mismas:

$$\text{Gasolina: } H = H_0 \cdot \frac{(P_a - P_v)}{P_0} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T_a}}$$

$$\text{Diesel: } H = H_0 \cdot \frac{P_a - P_v}{P_0} \cdot \frac{T_0}{T_a}$$

En estas expresiones:

P_a = Presión atmosférica

P_v = Presión de vapor (representa el efecto de la humedad)

T_a = Temperatura ambiente

H_0 = Potencia en condiciones normalizadas

La presión de vapor puede despreciarse salvo en condiciones muy extremas de humedad.

Cuando el motor funciona con admisión cerrada, operando en contra presión, ofrece un par resistente variable con la velocidad, que ha sido representado en la figura 4.12 y designado por M_c .

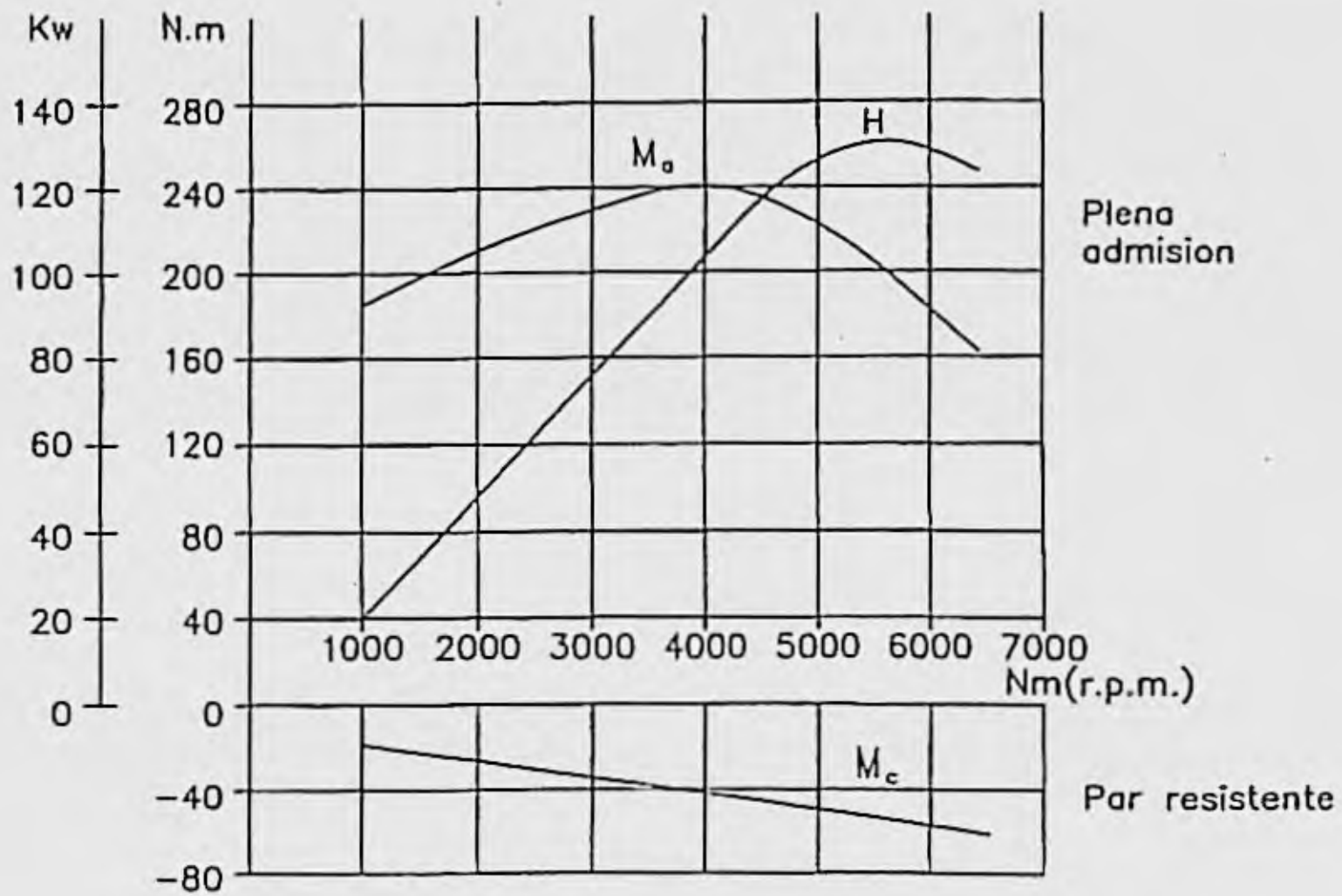


Figura 4.12. Curvas características de un motor de gasolina funcionando a plena admisión y a contrapresión.

El momento M_c y el de plena admisión M_a pueden ser expresados analíticamente mediante una ecuación lineal, el primero, y un polinomio de cuarto grado el segundo, en función de la velocidad angular del motor como se indica en las siguientes ecuaciones:

$$M_a = M_{a0} + \sum_{i=1}^4 K_i \cdot \omega_m^i \quad 4.47$$

$$M_c = M_{c0} - K_5 \omega_m \quad 4.48$$

Por otra parte, el par real de salida del motor M_m varía entre los valores de M_a y M_c , dependiendo de la apertura de la admisión, la cual depende, a su vez, del recorrido del pedal del acelerador, (u), para cada velocidad de rotación del motor.

Suponiendo que existe una relación lineal entre M_m y el recorrido u , correspondiéndose el valor $u = 0$ (a ralentí) con M_c y $u = u_{\max}$ con M_a , se obtiene:

$$M_m = \frac{u}{u_{\max}} \cdot M_a - \left(1 - \frac{u}{u_{\max}}\right) M_c \quad 4.49$$

En consecuencia:

$$M_m = M_m(\omega_m, u)$$

$$H_m = M_m \cdot \omega_m = H_m(\omega_m, u)$$

4.6.3. Transmisión. Funciones y características generales.

La transmisión está constituida por el conjunto de órganos que conectan la salida del motor con las ruedas tractoras. Su principal función es la transmisión del movimiento, pares y potencia con el objeto de lograr en las ruedas los esfuerzos de propulsión necesarios para vencer las resistencias al movimiento, incluidas las de inercia durante procesos de aceleración.

Para cumplir la función principal enunciada, en forma adecuada a los requerimientos de los vehículos automóviles, es necesario que el conjunto de la transmisión posea las características que se expresan a continuación.

1. Debe permitir la interrupción de la cadena cinemática, en forma sencilla, de modo que el motor pueda funcionar (velocidad no nula) cuando el vehículo está parado (velocidad nula de las ruedas) o durante los cambios de la relación de transmisión, cuando éstos se efectúan manualmente.

Esta función la cumple el embrague, que se sitúa a la salida del motor.

2. Debe de transformar los valores de los pares y velocidades, de manera que la curva de par del motor de combustión, (figuras 4.10 y 4.11), que no se adapta a los requerimientos de propulsión de los vehículos, como se indicó en el punto 4.2, transforme sus valores en las ruedas cumpliendo lo mejor posible con tales

requerimientos, que en síntesis son: pares elevados a bajas velocidades y más pequeños a velocidades altas. (Figura 4.9).

Los variadores continuos de velocidad permiten una transmisión a las ruedas más próxima a la curva ideal de tracción, pero por razones técnicas y económicas, su uso actual es muy restringido.

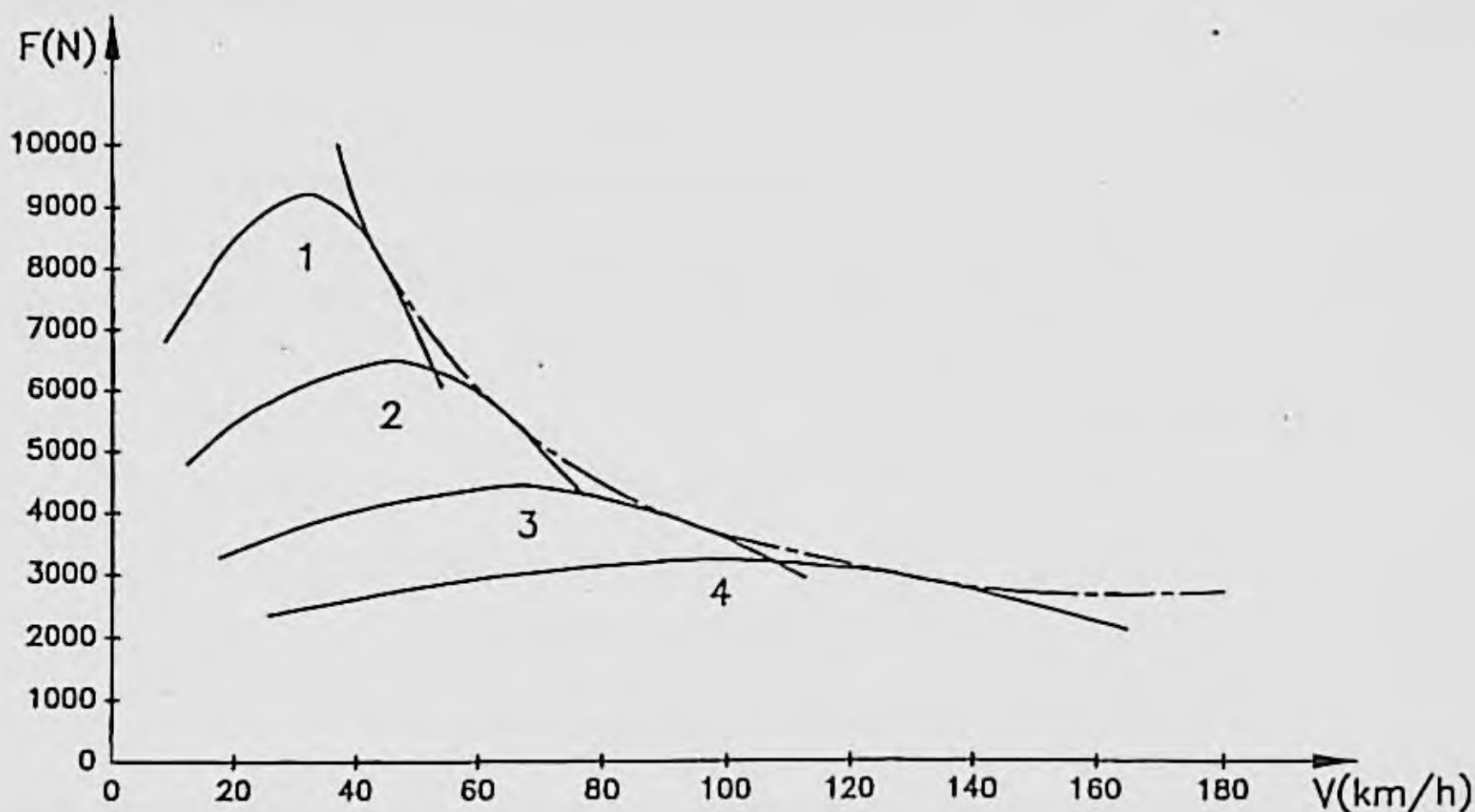


Figura 4.13. Curvas de esfuerzo tractor en llanta-velocidad para diferentes relaciones de la transmisión (caja de engranajes de 4 relaciones).

Esta función la cumple la caja de velocidades, que en realidad es un reductor de engranajes con varios escalonamientos. Con estos escalonamientos se logra que las curvas de par-velocidad en llanta de las ruedas tractoras cubran diferentes rangos de esfuerzos tractores, en función de la velocidad del vehículo, aproximando su respuesta conjunta lo mejor posible a la ideal representada en la figura 4.9. (Ver figura 4.13).

Los vehículos equipados con caja automática, que necesitan intercalar un fluido en la cadena cinemática para eliminar la necesidad de desembragar y muchos vehículos industriales que requieren pares muy elevados a bajas velocidades incorporan convertidores de par, que influyen en la relación de transmisión como se verá más tarde.

3. Al hacer tractoras las ruedas de un mismo eje, ha de extenderse la transmisión a cada una de ellas, pero ha de permitirse la posibilidad de que giren a diferente velocidad, ya que en toda trayectoria curva la rueda interior recorre un camino de menor longitud que la exterior, en igual tiempo. Esta función de la transmisión la realiza el grupo diferencial, que no estudiaremos aquí.

4. Por último, la transmisión conecta el motor, que forma parte de la masa suspendida (apoyada en los elementos de la suspensión) con las ruedas (masas semisuspendidas). Los desplazamientos entre ambas partes del vehículo deben ser convenientemente absorbidos por juntas que permitan desplazamientos lineales o angulares entre diferentes partes de la transmisión. Cuando las ruedas tractoras son las delanteras, han de permitirse, además, los giros de éstas para el guiado del vehículo, lo cual hace más exigente el papel que han de cumplir las referidas juntas (homocinéticas en este caso).

Naturalmente, la continuidad de la transmisión exige la inclusión de ejes o árboles cuyas características dependen de la disposición del motor (delantero, trasero,...) y situación de las ruedas tractoras.

Con el objeto de reducir lo más posible el valor de las relaciones proporcionadas por la caja de cambios, lo cual ofrece ventajas constructivas y de tamaño de la propia caja y árboles de transmisión, suele introducirse una reducción constante, mediante un piñón y corona (grupo cónico) junto al grupo diferencial. En algunos vehículos industriales se incluye, incluso, una última reducción en los cubos de las ruedas tractoras.

En cuanto a los tipos de transmisión utilizados en vehículos automóviles, pueden clasificarse en:

- **Mecánica** (caja de cambios de engranajes operadas manualmente).
- **Hidrodinámica** (incluye un convertidor de par).

Las transmisiones hidrostáticas son utilizadas casi exclusivamente en vehículos especiales, normalmente extraviarios, y máquinas de obras públicas.

Los vehículos eléctricos disponen de transmisión eléctrica a las ruedas, pero quedan fuera del alcance de este texto.

4.6.4. Determinación de relaciones de transmisión

Consideraremos que se trata de una transmisión mecánica, en la cual existe una relación de transmisión fija proporcionada por el grupo cónico, que denominaremos ξ_c y una caja de engranajes capaz de proporcionar q relaciones (ξ'_1, \dots, ξ'_q).

Las relaciones de transmisión total entre motor y ruedas son:

$$\xi_j = \xi_c \cdot \xi'_j$$

La relación que produce la menor reducción, ξ'_q , permitirá lograr la velocidad máxima del vehículo, y con este criterio ha de ser calculada. En cuanto a la máxima reducción ξ'_1 , ha de

definirse teniendo en cuenta el par máximo necesario para subir rampas.

Los valores $\xi_1 \dots \xi_q$ suelen ser términos de una progresión geométrica de razón K , en vehículos industriales con elevado número de escalonamientos, o próximos a ellos, en vehículos de un número bajo de relaciones, por las razones que más tarde se indicarán.

Lo anterior se justifica de la siguiente forma:

Para lograr las mejores prestaciones del motor: mínimo consumo, par y potencia máximas, y puesto que es imposible hacer que éste funcione a un régimen constante, porque ello exigiría un variador continuo de velocidad, que solo es posible instalar en vehículos muy ligeros, se hace necesario definir un intervalo de velocidades ($n_{m1} - n_{m2}$) de tal forma que las relaciones de transmisión permitan lograr las prestaciones previstas para el vehículo, manteniendo al motor trabajando dentro de dicho intervalo el mayor tiempo posible.

Entre la velocidad del motor y la de giro de las ruedas existe una relación lineal, excepto en el breve período transitorio del embragado. Igualmente puede admitirse una relación de estas características entre dicha velocidad de rotación y la de traslación del vehículo, en consecuencia, puede construirse un gráfico como el de la figura 4.14, en el que las funciones $n_m = f(n_r, \xi_j)$ ó $n_m = f(V, \xi_j)$ son líneas rectas que pasan por el origen, correspondiendo cada una de ellas a una relación de transmisión ξ_j y siendo: n_m , velocidad de rotación del motor; n_r , velocidad de giro de las ruedas tractoras y V , velocidad longitudinal del vehículo. En la figura, n_{m3} es la velocidad de ralenti. El arranque del vehículo deberá producirse desde una velocidad del motor superior a n_{m3} y el embrague absorberá el deslizamiento.

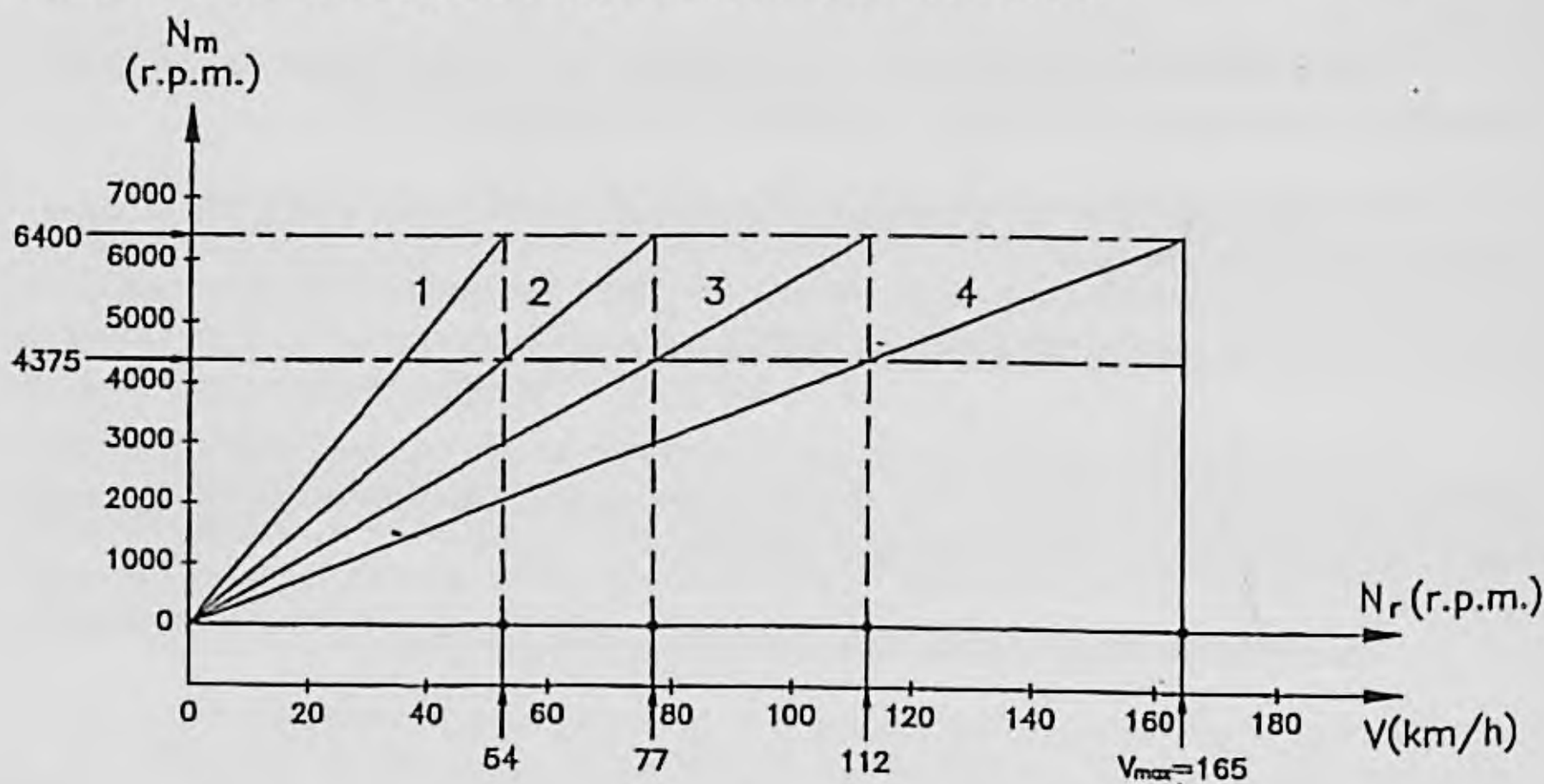


Figura 4.14. Determinación de las relaciones de transmisión siguiendo una progresión geométrica, (n_m , n_r).

En el caso de la figura se han considerado cuatro relaciones de transmisión, haciendo corresponder la velocidad máxima prevista para el vehículo (un giro de n_q r.p.m en las ruedas) a la velocidad máxima (n_{m1}) del intervalo de funcionamiento elegido para el motor. Ello ha permitido trazar la línea 4, correspondiente a la relación ξ_q (ξ_4 en este caso).

Cuando dicha línea corta a la de $n_{m2} = \text{cte}$, ha de contarse con una relación ξ_{q-1} más corta, para que pueda reducirse la velocidad de las ruedas por debajo de n_{q-1} sin que el motor reduzca su velocidad por debajo de n_{m2} ; con este criterio puede trazarse la línea 3 y las siguientes hasta completar el número de relaciones previstas.

Como puede comprobarse se cumple, en general:

$$\xi_q = \frac{n_{m1}}{n_q} = \frac{n_{m2}}{n_{q-1}}$$

$$\xi_{q-1} = \frac{n_{m1}}{n_{q-1}} = \frac{n_{m2}}{n_{q-2}}$$

·
·
·

$$\xi_1 = \frac{n_{m1}}{n_1}$$

Dividiendo dos a dos las anteriores, se tiene:

$$\frac{\xi_q}{\xi_{q-1}} = \frac{\xi_{q-1}}{\xi_{q-2}} = \dots = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{n_{m2}}{n_{m1}} = K \quad 4.52$$

de donde resulta:

$$\frac{\xi_q}{\xi_{q-1}} \cdot \frac{\xi_{q-1}}{\xi_{q-2}} \dots \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\xi_q}{\xi_1} = K^{q-1} \quad 4.53$$

$$K = \left(\frac{\xi_q}{\xi_1} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad 4.54$$

Para determinar el valor K es necesario definir ξ_q y ξ_1 en función de las prestaciones del vehículo: velocidad máxima y rampa máxima respectivamente, y fijar el número q de relaciones deseadas. Conocido K :

$$\xi_j = K \xi_{j-1} \quad 4.55$$

$$\xi_{j'} = \frac{\xi_j}{\xi_c} \quad 4.56$$

Para determinar ξ_q deberemos fijar la velocidad máxima del vehículo y tener en cuenta las siguientes relaciones:

$$\omega_m = \xi_j \omega_r$$

$$V = \omega_r r_e = \frac{\omega_m}{\xi_j} r_e$$

siendo r_e el radio efectivo y ω_r la velocidad angular de la rueda,

$$r_e = r(1 - i)$$

donde r es el radio nominal e i el deslizamiento longitudinal (ver capítulo 2). Sustituyendo y expresando la velocidad de rotación en r.p.m.

$$V = \frac{\pi n_m \cdot r}{30 \xi_j} (1 - i) \quad 4.57$$

Haciendo $V = V_{\max}$; $n_m = n_{ml}$; $\xi_j = \xi_q$ y despejando,

$$\xi_q = \frac{\pi n_{ml} r}{30V} (1 - i) \quad 4.58$$

En cuanto a la determinación de ξ_1 , el criterio a utilizar es la máxima rampa que el vehículo ha de poder ascender. Caben, a su vez, dos criterios alternativos según se prevea que el vehículo puede arrancar si se detiene en dicha rampa máxima o no. En el primer caso la resistencia total que deberá vencer, considerando la de inercia será:

$$R_{\tau 1} = P \operatorname{sen} \theta_1 + f, P \cos \theta_1 + \frac{P}{g} a \quad 4.59$$

y el segundo:

$$R_{T2} = P \operatorname{sen} \theta_2 + f_r P \cos \theta_2 \quad 4.60$$

puede considerarse a $\approx 0.5 \text{ m/s}^2$. Por otra parte, es evidente que $\theta_1 < \theta_2$.

Denominando F al esfuerzo tractor en llanta, M_m al par neto a la salida del motor, r_c el radio bajo carga de la rueda y η al rendimiento de la transmisión:

$$F r_c = M_m \eta \xi_j \quad 4.61$$

Haciendo en 4.61: $F = R_{T1}$ ó R_{T2} , $M_m = M_{m \max}$; $\xi_j = \xi_1$ y despejando este último valor:

$$\xi_1 = \frac{R_T r_c}{M_{m \max} \eta} \quad 4.62$$

En cuanto al rendimiento, pueden considerarse los siguientes valores orientativos:

Relación de transmisión en directa ($\xi'_1 = 1$) : $\mu = 0.9$

Otras relaciones: $\eta \approx 0.85$

Relaciones de muy alta reducción: $\eta \approx 0.75$ a 0.80

En la figura 4.13 se representan las curvas de esfuerzos en llanta en función de la velocidad, para un vehículo cuyo motor proporciona una curva de par como la que se representa en la figura 4.12 y con las siguientes relaciones de transmisión: $\xi_1=13.81$; $\xi_2=8.05$; $\xi_3=5.07$; $\xi_4=3.61$. Se han obtenido aplicando las ecuaciones 4.57 y 4.61.

4.6.5. Diagrama de tracción de un vehículo

Si superponemos en un mismo diagrama las curvas de resistencia al movimiento, (figura 4.3), de esfuerzo tractor en llanta, (figura 4.13), y representamos los esfuerzos límites impuestos por la adherencia, (ecuaciones 4.33, 4.34, 4.35 ó 4.46, según el vehículo de que se trate), obtenemos una representación como la de la figura 4.15 que corresponde a un turismo de gama media, tracción delantera y cuatro relaciones de transmisión. De este diagrama puede deducirse la velocidad máxima a que puede circular el vehículo en cada relación y sobre cada rampa, así como los valores máximos de las rampas que puede ascender en cada relación y velocidad.

Se han representado los límites que impone la adherencia, considerando dos valores: $\mu=0.8$ y 0.4 . Como puede observarse, a velocidades medias o altas estos límites son siempre muy superiores a los esfuerzos de tracción, por lo que no constituyen nunca un problema. No sucede igual a baja velocidad, especialmente en condiciones de baja adherencia.

Pueden construirse, también, curvas análogas con los valores de la potencia en llanta en ordenadas, pero su utilidad es análoga a la de la figura 4.15.

La figura 4.15 se ha construido con unas relaciones de transmisión de valores 12.84, 8.78, 6.00, 4.1, que corresponde a una progresión geométrica de razón $K=0.6835$. A la vista de los resultados obtenidos el ingeniero de diseño podría decidir recubrir mejor la zona de bajas velocidades, acercando los valores de la 2ª y la 3ª relación hacia el de la primera, si el vehículo estuviese destinado a zonas montañosas, o lo contrario si se destinase, fundamentalmente, a moverse por zonas llanas. En ese caso los valores se alejarían ligeramente de los anteriores y no coincidirían con términos de una progresión. En cualquier caso, al materializar las relaciones ξ_j con los números de dientes de parejas de ruedas dentadas, se producirán, también, desviaciones respecto a los valores teóricos.

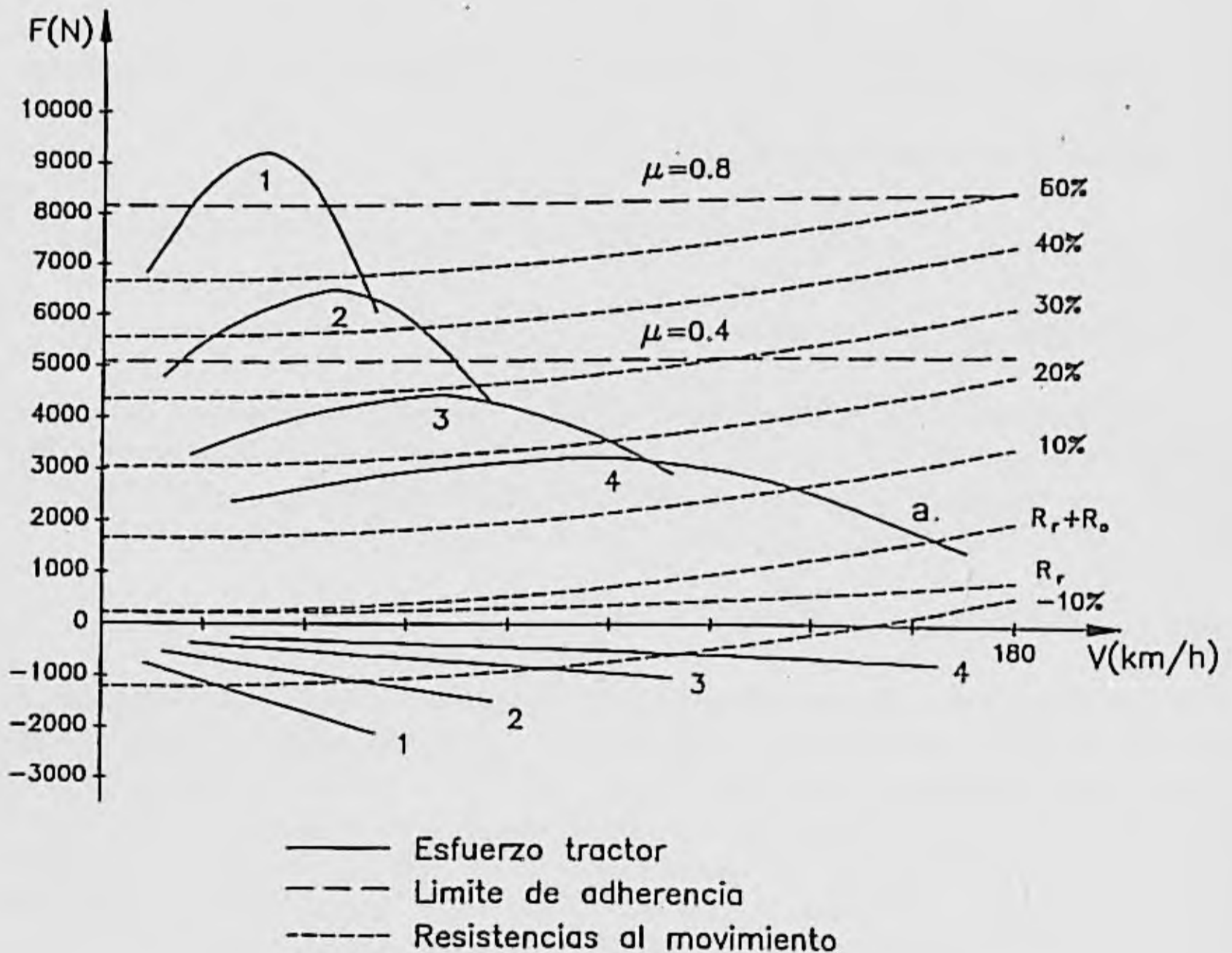


Figura 4.15. Diagrama de características de tracción. Curvas de esfuerzo en llanta-velocidad, resistencia-velocidad y límite por rozamiento.

4.6.6. Transmisión hidrodinámica.

4.6.6.1. Introducción.

En gran número de vehículos industriales, de obras públicas, ferroviarios y turismos con cambio automático de las relaciones de transmisión, se incorporan elementos que utilizan un fluido para transmitir la potencia desde un primario, conectado al motor, directa o indirectamente, y un secundario que transmite dicha potencia al resto de la cadena cinemática conectada a las ruedas tractoras. Dicha transmisión puede hacerse hidrostática o hidrodinámicamente.

En la transmisión hidrostática el fluido es sometido a alta presión en el primario, disminuyendo en el secundario. La transmisión se realiza con una pequeña circulación del fluido.

En la transmisión hidrodinámica el fluido es acelerado a gran velocidad en el primario y parte de su energía cinética es absorbida por el secundario. En vehículos automóviles es éste el tipo de transmisión normalmente utilizada y al que nos referimos a continuación.

Los elementos fundamentales que permiten transmitir potencia hidrodinámicamente son el embrague hidrodinámico y el convertidor de par, que serán descritos someramente en los párrafos siguientes.

En ambos casos, la cadena cinemática que transmite el movimiento entre el motor y las ruedas queda físicamente interrumpida entre la parte primaria y la secundaria del elemento hidrodinámico, siendo el fluido su único enlace, lo cual confiere a este tipo de transmisión algunas ventajas sobre la mecánica convencional; estas son:

- Transmisión suave y sin choques de los esfuerzos de tracción.
- Aislamiento o amortiguamiento de vibraciones entre ambas partes de la cadena cinemática de la transmisión.
- Protección contra sobrecargas en las resistencias que encuentra el vehículo, por la posibilidad de deslizamiento entre primario y secundario.
- Funcionamiento prácticamente exento de desgaste.
- Buena relación peso/potencia y volumen/potencia.
- En el caso del convertidor de par, una elevada relación de transmisión a velocidades bajas y capacidad de adaptación a los requerimientos de esfuerzos tractores de los vehículos. Se consigue una mejor aproximación a la curva ideal de tracción.

Como inconvenientes fundamentales deben destacarse:

- Un mayor coste que las transmisiones convencionales.
- Mantenimiento más costoso.
- Menor rendimiento mecánico en la transmisión cuando se produce conversión de par de forma significativa.

4.6.6.2. Embrague hidrodinámico

Un embrague hidrodinámico consiste, fundamentalmente, en dos cuerpos de forma semitórica, con álabes situados más o menos radialmente en el interior de ambos elementos. El conjunto se encuentra encerrado en una carcasa que contiene al fluido (aceite).

Ambos cuerpos: primario o bomba y secundario o turbina, se encuentran enfrentados entre sí (figura 4.16).

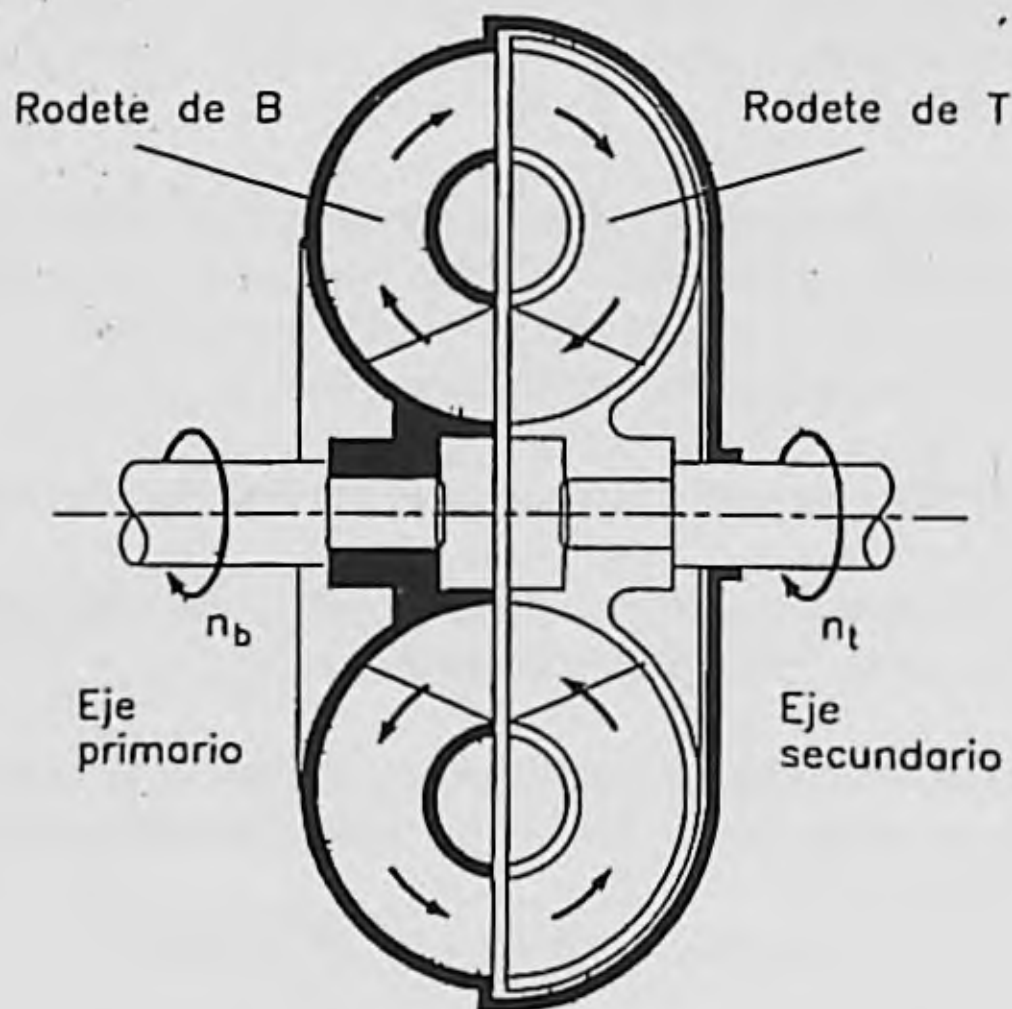


Figura 4.16. Esquema de la sección axial de un embrague hidrodinámico.

El eje de la bomba está conectado al elemento propulsor y el de la turbina al órgano o sistema arrastrado. Cuando gira la bomba, el fluido es impulsado hacia la zona de radios mayores y acelerado, abandonando sus álabes con una cierta velocidad axial, que le impulsa a

penetrar en la turbina, y una componente circunferencial que le hará impulsar los álabes de esta última, haciendo que el conjunto de la turbina gire, transmitiendo par siempre que la velocidad de rotación de ésta sea inferior a la de la bomba (deslizamiento no nulo). Si ambas velocidades se igualan (deslizamiento nulo) el aceite pasa de un rodete al otro sin producir empuje circunferencial en la turbina y, por tanto, no se produce transmisión de par.

Para evaluar el comportamiento del embrague y del convertidor de par, que será descrito después, se utilizan los siguientes valores:

Relación de velocidades:

$$C_v = \frac{n_t}{n_b} = \frac{\omega_t}{\omega_b} \quad 4.63$$

Relación de par:

$$C_p = \frac{M_t}{M_b} \quad 4.64$$

Rendimiento:

$$\eta = \frac{M_t \omega_t}{M_b \omega_b} = C_p C_v \quad 4.65$$

En las anteriores expresiones:

n_b, n_t , son las velocidades de rotación de bomba y turbina, respectivamente, expresadas en r.p.m.

ω_b, ω_t , ídem, expresadas en rad/s.

M_b, M_t , los pares en la bomba y en la turbina respectivamente.

Puesto que la salida del fluido de la bomba coincide con la entrada en la turbina (igual velocidad del fluido e iguales radios) y la salida de ésta, con la entrada de aquella, la variación de cantidad de movimiento en ambos rodetes será igual y de sentido contrario; lo mismo sucede con el momento cinemático, por lo cual $M_t = M_b$, en consecuencia:

$$C_p = 1 \quad 4.66$$

$$\eta = C_v$$

Las curvas características experimentales de un embrague hidrodinámico se representan en la figura 4.17.

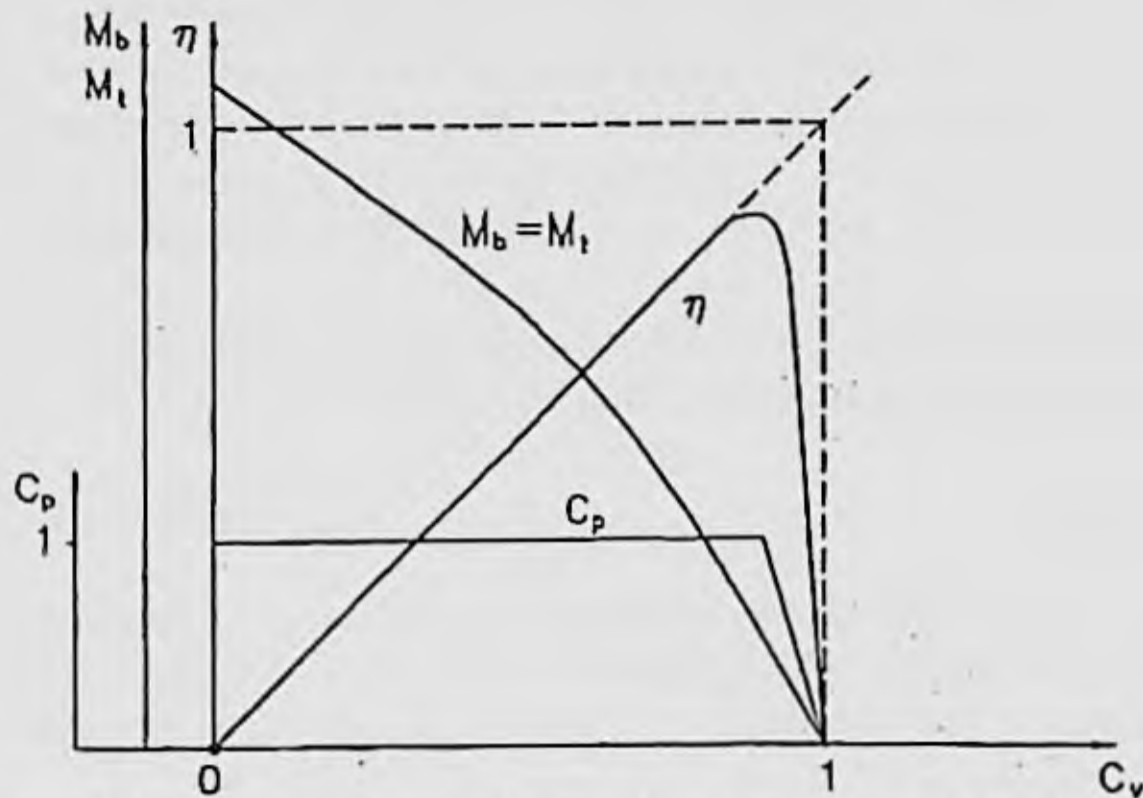


Figura 4.17. Curvas características de un embrague hidrodinámico.

Debe tenerse en cuenta que existe una variación inversa entre los valores de C_v y el deslizamiento relativo entre primario y secundario. Cuando $C_v = 0$, $\omega_t = 0$, $\omega_b \neq 0$ y el deslizamiento es máximo considerando una velocidad constante de la bomba. Por el contrario cuando $C_v = 1$, $\omega_t = \omega_b$, el deslizamiento es nulo.

Tomando en consideración lo anterior puede observarse que el par transmitido ($M_t = M_b$) es máximo cuando $C_v = 0$ y nulo para $C_v = 1$. El rendimiento es igual a C_v hasta un cierto valor, próximo a la unidad, desde el cual desciende bruscamente ya que el par transmitido a partir de ese valor solo permite vencer las resistencias mecánicas del propio embrague. Este hecho afecta también al valor C_p , que no se mantiene constante, e igual a uno, para valores de C_v próximos a la unidad.

El funcionamiento óptimo del embrague, o de máximo rendimiento, se obtiene para un deslizamiento del orden del 3% ($C_v \approx 0,97$).

4.6.6.3. Convertidor de par

El convertidor de par, (figura 4.18), incorpora un tercer rodete provisto de álabes, que denominaremos corona directriz. Aunque con diferente disposición, se conserva la bomba, o primario, y la turbina, o secundario, con idénticas funciones que en el caso del embrague. La diferencia fundamental es que el fluido recorre la corona directriz, en su camino entre la salida de la turbina y la entrada en la bomba. Dicha corona, también denominada elemento de reacción, solidaria al bastidor u órgano estático que proporcione un par de reacción, modifica la velocidad del fluido, especialmente su dirección, produciendo una variación importante de la cantidad de movimiento del aceite y, como consecuencia de ello, una diferencia de par entre la entrada y la salida del convertidor. En este caso:

$$C_p > 1$$

4.67

$$\eta = C_p \cdot C_v$$

Las curvas características del convertidor se han representado en las figuras 4.19 y 4.20, en las que se han señalado los puntos y zonas de funcionamiento que se indican a continuación:

A : Arranque $\omega_t = 0$, $\omega_b \neq 0$, $C_v = 0$, $\eta = 0$

C : Punto de funcionamiento óptimo: $\eta = \eta_{\max}$

D : Punto de acoplamiento: $M_t = M_b$; $C_p = 1$

F : Punto de sincronismo: $n_t = n_b$; $C_v = 1$

G : Punto de embalamiento: $M_t = 0$

AG : Zona principal de servicio. Flujo de potencia: bomba-turbina.

AB : Zona de arranque: Alta conversión de par, bajo rendimiento.

BE : Zona de funcionamiento continuo como convertidor.

DF : Zona de acoplamiento. Se libera el elemento de reacción del cárter de la transmisión.

A la izquierda de A, la turbina recibe un par desde el exterior en contra de su sentido de giro en funcionamiento normal (contrafrenado).

A la derecha de G, la turbina recibe un par desde el exterior con el sentido de funcionamiento (frenado).

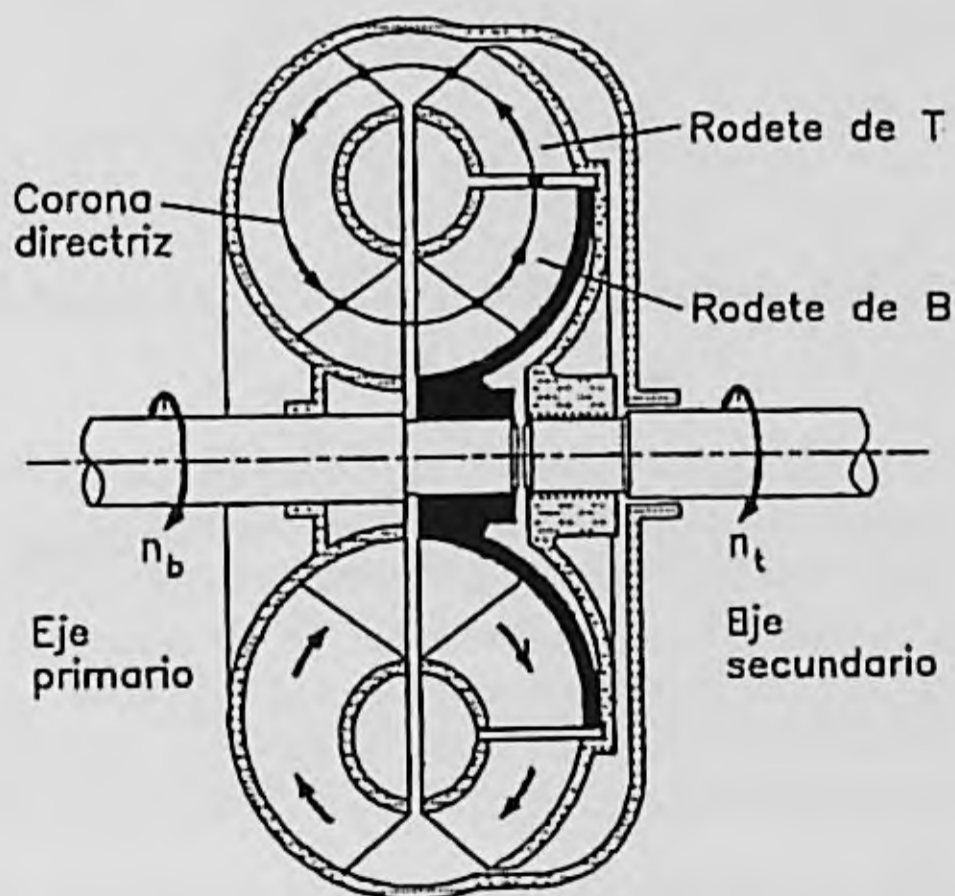


Figura 4.18. Esquema de la sección axial de un convertidor hidrodinámico de par.

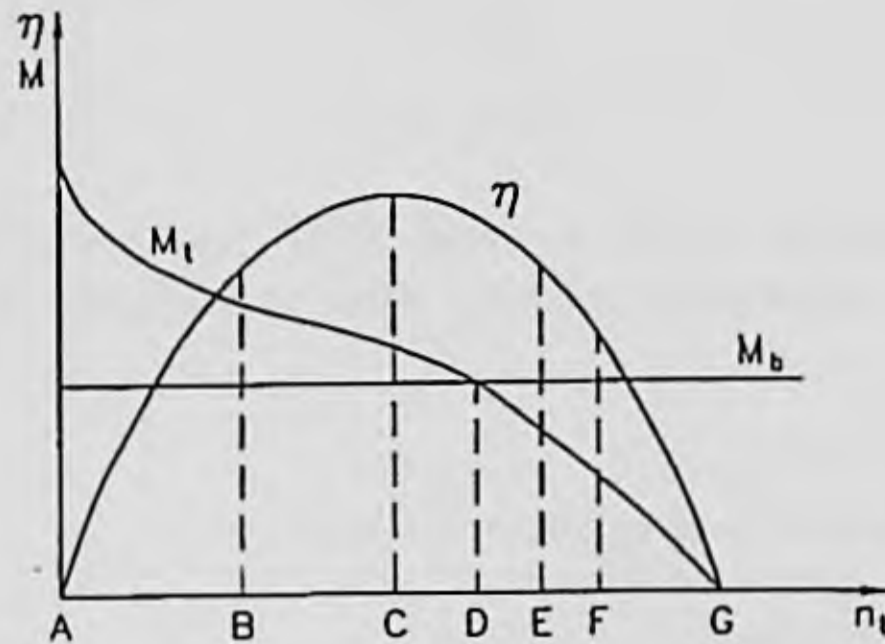


Figura 4.19. Curvas características dimensionales de un convertidor hidrodinámico de par (M_t, n) para $M_b = cte$.

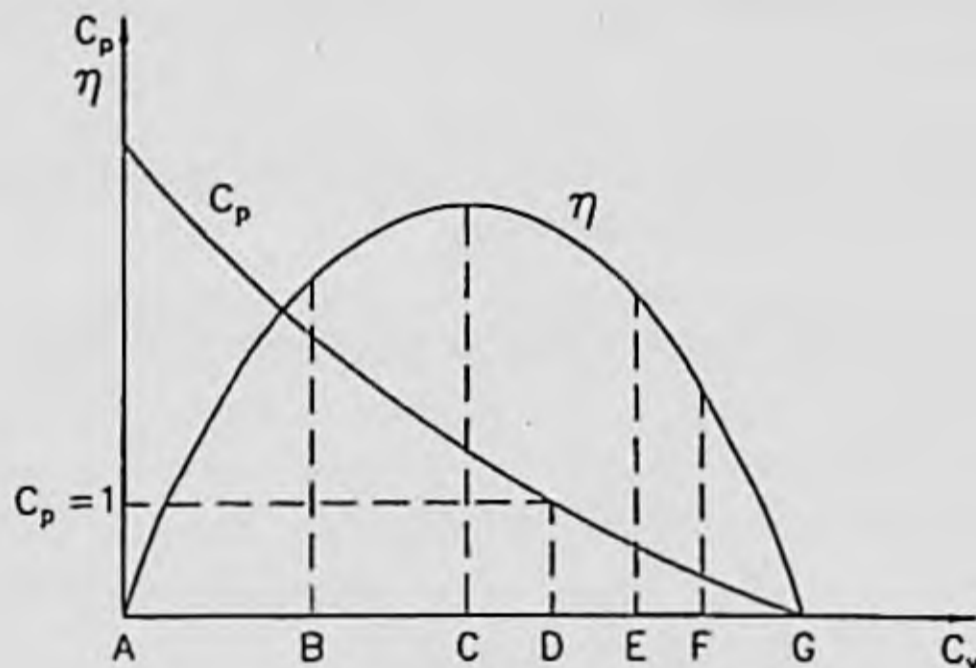


Figura 4.20. Curvas características adimensionales de un convertidor hidrodinámico de par (C_p, η).

Como se observa en la figura 4.19 y 4.20 el rendimiento del convertidor es sumamente bajo en la zona de arranque, en la cual se aprovecha su capacidad de multiplicar el par. También es muy bajo en la zona EG, llegando a anularse, y en cambio, no se obtiene, en esta zona, el anterior efecto favorable de conversión de par. En consecuencia, a partir de D puede producirse la liberación de la corona de reacción, que se deja girar sin ofrecer resistencia alguna, con lo que el convertidor funcionará como un embrague, el cual, precisamente para valores altos de C_v , presenta rendimientos de valores próximos a la unidad (figura 4.21).

Por otra parte, se define otro valor característico que es fundamental para determinar el acoplamiento entre convertidor y órgano propulsor del primario (motor del vehículo). Este

valor es el factor de capacidad K_b :

$$K_b = \frac{n_b}{\sqrt{M_b}}$$

4.68

La variación de K_b , con C_v , se presentan en la figura (4.21).

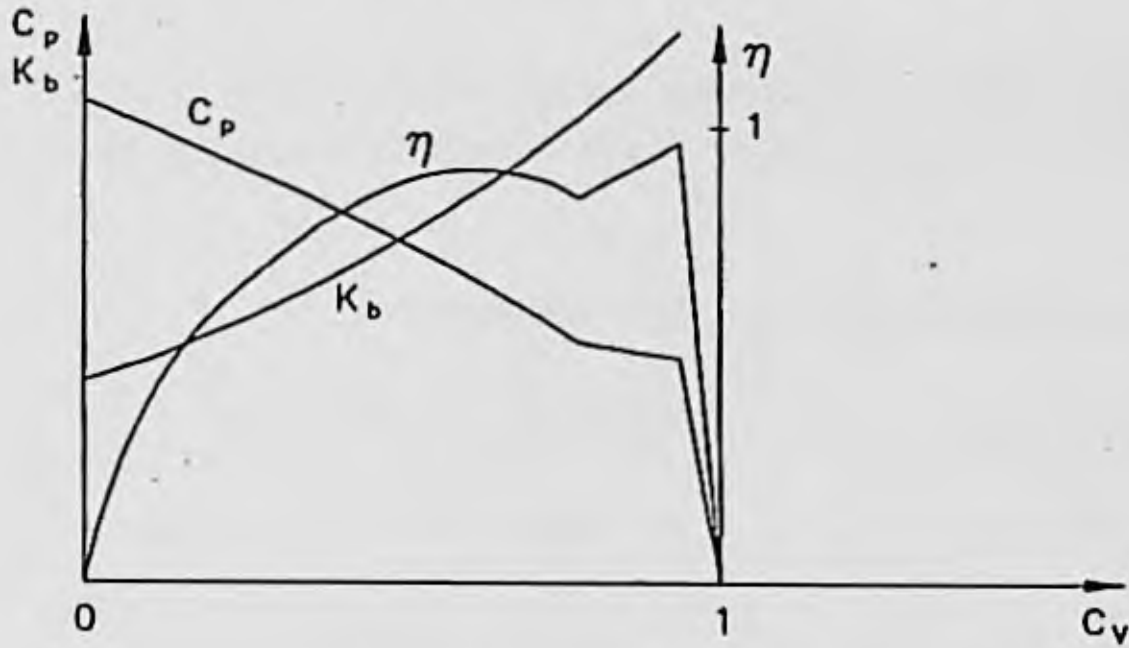


Figura 4.21. Curvas características de un convertidor hidrodinámico de par (C_p , η , K_b en función de C_v)

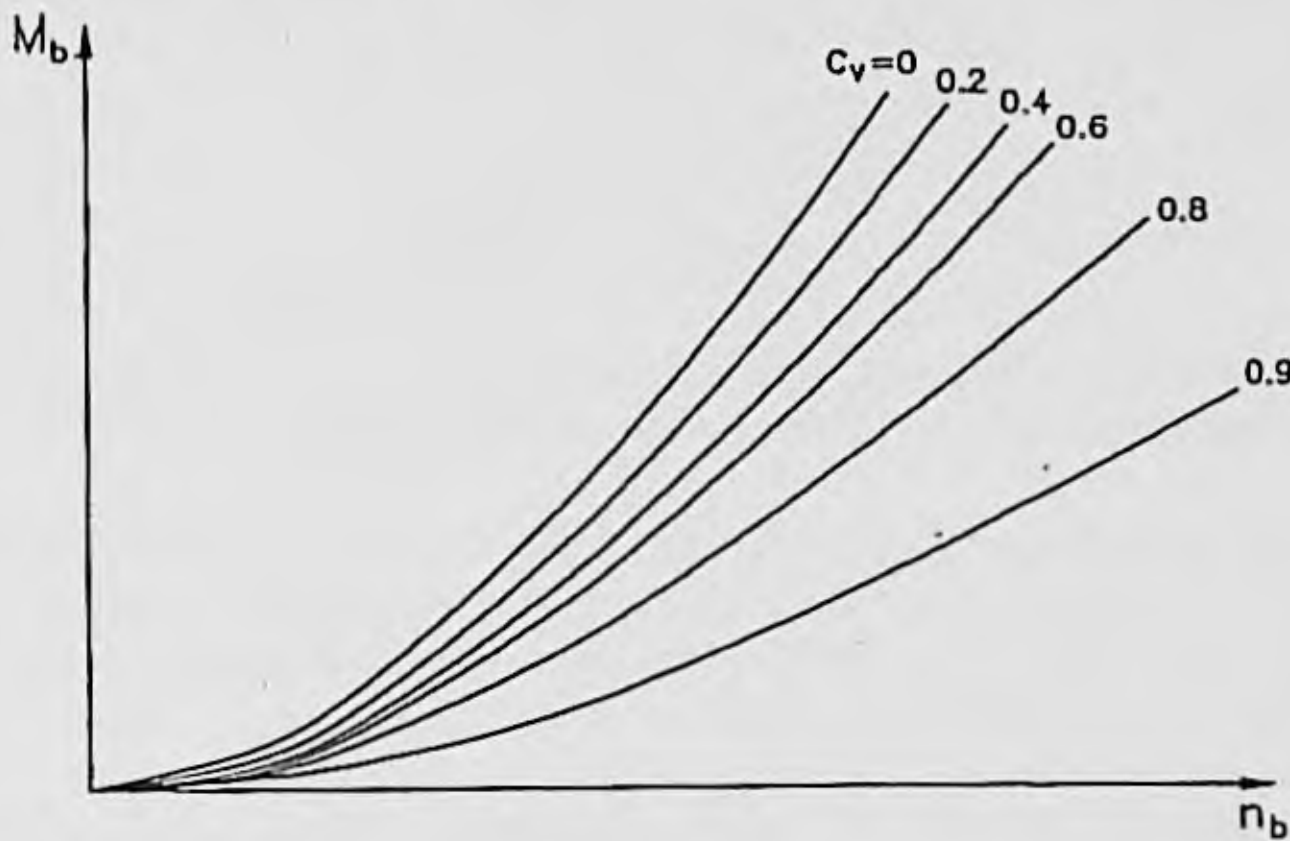


Figura 4.22. Curvas características de funcionamiento del primario de un convertidor hidrodinámico de par.

El factor de capacidad a la entrada del convertidor, K_b , define las condiciones de funcionamiento y es un factor clave para elegir el convertidor que debe utilizarse considerando un motor concreto. Algunos fabricantes presentan esta característica del convertidor mediante

una familia de curvas $M_b = f(n_b, C_v)$ para valores constantes de C_v .

Para ello, de (4.68):

$$M_b = \frac{1}{K_b^2(C_v)} n_b^2 \quad 4.69$$

La ecuación 4.69 representa la familia de parábolas de la figura 4.22 para diferentes valores de C_v , quedando definido el campo característico de funcionamiento del convertidor en su primario.

4.6.6.4. Trabajo conjunto del motor y convertidor

Al acoplar un motor y un convertidor debe cumplirse que:

$$K_m = K_b \quad 4.70$$

siendo:

$$K_m = \frac{n_m}{\sqrt{M_m}} \quad 4.71$$

n_m y M_m son, respectivamente, las revoluciones por minuto y el par a la salida del motor, que coinciden, con los de la bomba del convertidor. En consecuencia, dada una pareja de valores $n_m = n_b$ y $M_m = M_b$, se calculan fácilmente los valores correspondientes a la salida del convertidor:

$$n_i = C_v n_b = C_v n_m \quad 4.72$$

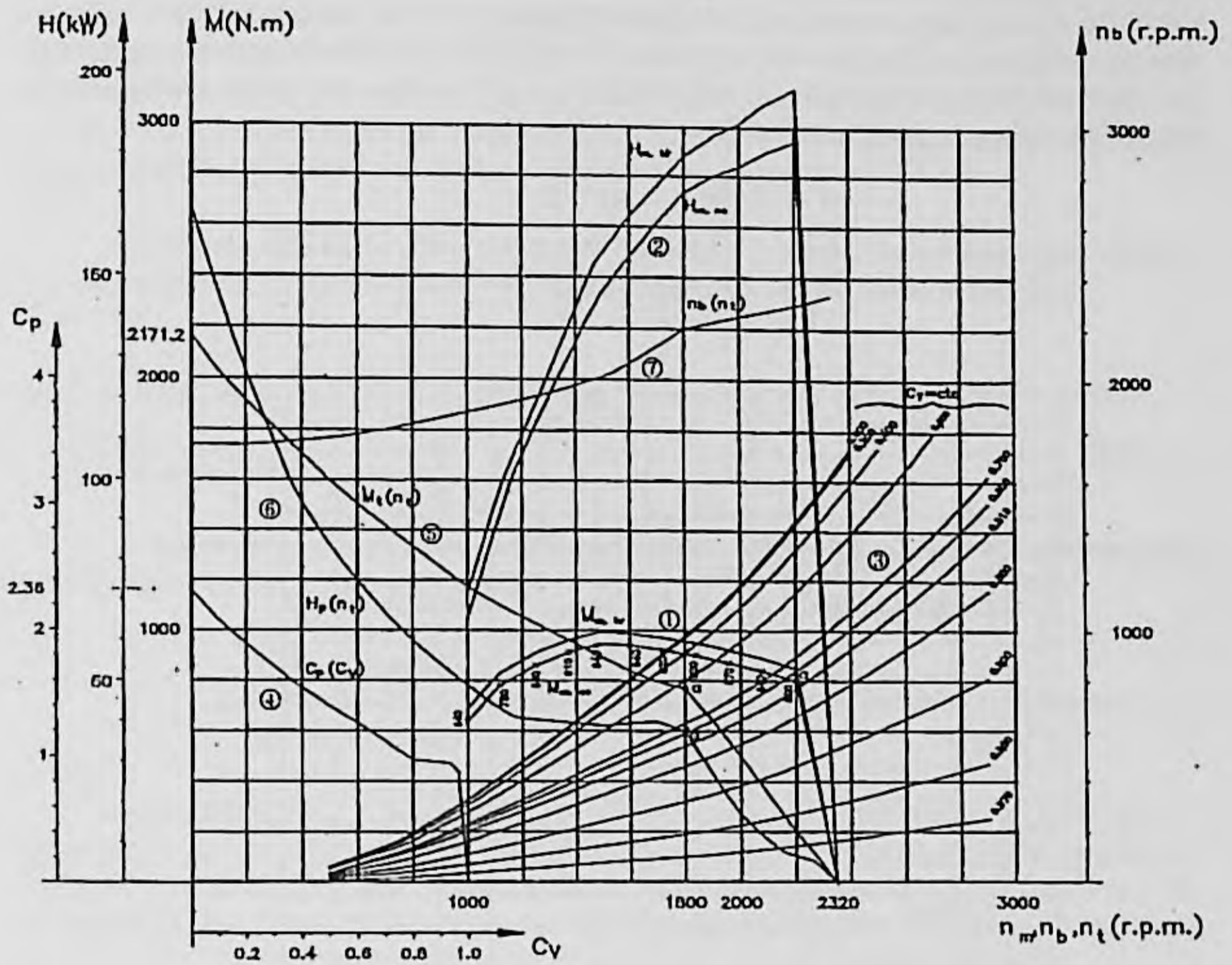
$$M_i = C_p M_b = C_p M_m \quad 4.73$$

Estos valores serán los que accionan el reductor de engranajes colocado a la salida del convertidor, transmitiendo el movimiento al resto de la transmisión.

Utilizando las curvas de $M_b = f(n_b, C_v)$; $C_p = f_2(C_v)$ y teniendo en cuenta que $\eta = C_p \cdot C_v$ se puede construir un diagrama de trabajo conjunto motor-convertidor, en función de las curvas de par y potencia netos del motor, representado, en el mismo diagrama las curvas $M_i = f_3(n_i)$ y potencia perdida en el convertidor $H_p = f_4(n_i)$.

En la figura 4.23 se representa un diagrama como el indicado, para el funcionamiento conjunto de un convertidor y un motor de unos 200 KW de potencia máxima total. En el eje de abscisas se han representado superpuestas $n_m = n_b$ y n_i . Se ha representado, también, una curva $n_b = f_3(n_i)$.

Una observación destacable que se deriva del diagrama de la figura 4.23 es que, en el arranque del vehículo, el par se multiplica por 2.36, obteniéndose un valor de aproximadamente 2171 N.m, y la pérdida de potencia alcanza un valor de 175 KW.



- ① Curvas de par total y neto del motor-entrada al convertidor
- ② Curvas de potencia total y neta del motor-entrada del convertidor
- ③ Curvas de capacidad del convertidor $M_b = f(\eta_b)$ para $C_v = cte$.
- ④ Relación de par, $C_p = f(C_v)$, del convertidor
- ⑤ Par a la salida del convertidor $M_t = f(n_t)$
- ⑥ Potencia perdida en el convertidor
- ⑦ Revoluciones de la bomba $n_b = f(n_t)$

Figura 4.23. Diagrama de funcionamiento conjunto de un motor y convertidor hidrodinámico de par.

4.6.6.5. Esfuerzo tractor en llanta y velocidad de desplazamiento del vehículo en función del régimen del motor.

Conocidos los valores del par y velocidad a la salida del convertidor, el cálculo de la velocidad de desplazamiento del vehículo y del esfuerzo tractor en llanta se realizará como se hizo en el punto 4.6.4. Sustituyendo en las ecuaciones 4.57 y 4.61 los valores de n_n y M_m por los correspondientes a la salida del convertidor, $C_v n_m$ y $C_p M_m$, que ahora constituyen la entrada a la caja de velocidades, resulta:

$$V = \frac{\pi n_m C_v r (1 - i)}{30 \xi_j} \quad 4.74$$

$$F = \frac{M_m C_p \xi_j \eta_l}{r_c} \quad 4.75$$

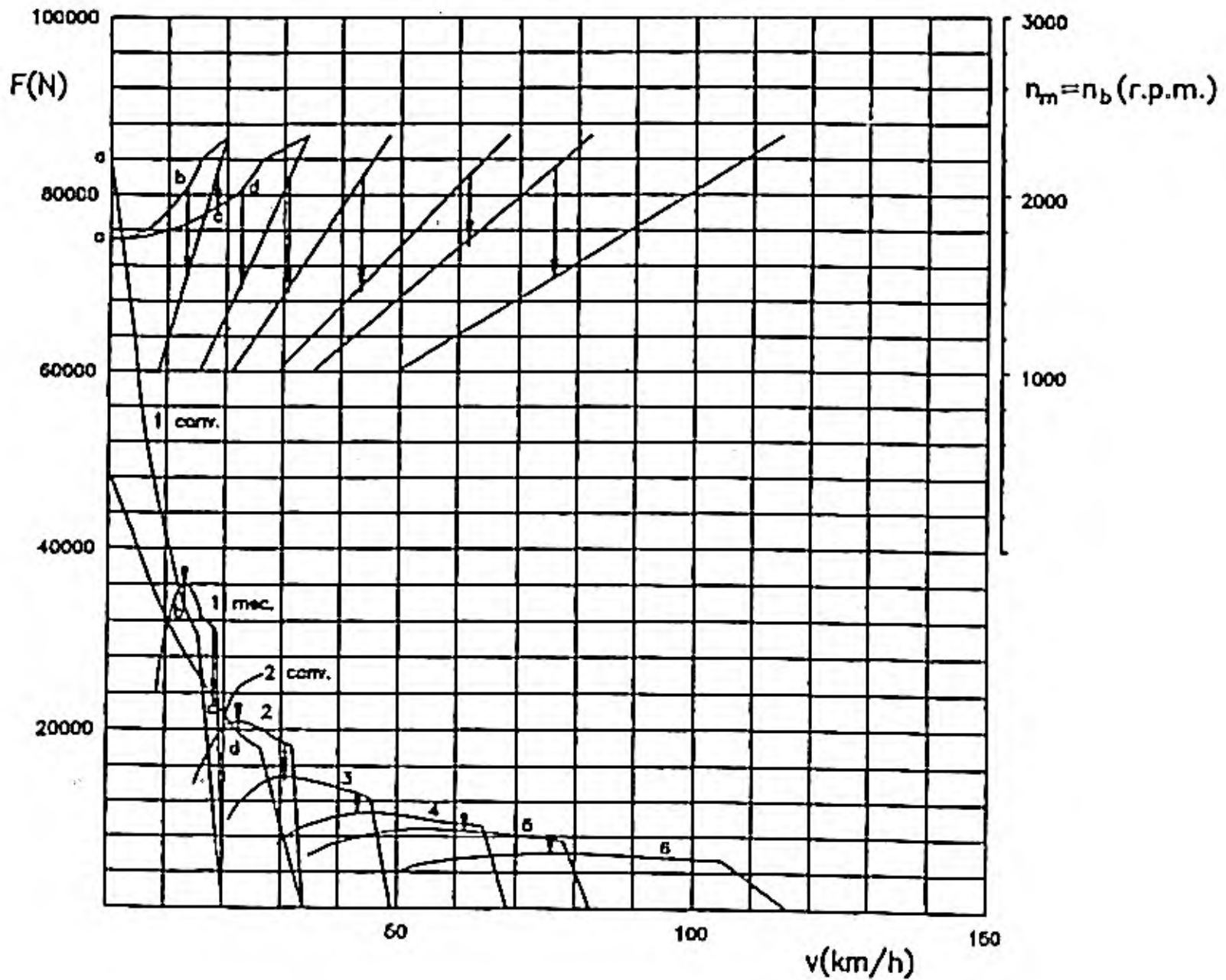


Figura 4.24. Diagramas de revoluciones del motor-velocidad del vehículo y esfuerzo tractor en llanta-velocidad.

Considerando que el vehículo, cuyo motor y convertidor proporcionan el diagrama de la 4.23, equipa un reductor de engranajes de relaciones de transmisión; 3,43; 2,01; 1,42; 1,00; 0,83 y 0,59, un grupo cónico de reducción igual a 7,42 y un radio efectivo de rodadura de los neumáticos igual a 0,589 m, pueden obtenerse las curvas de revoluciones del motor y esfuerzo tractor en llanta en función de la velocidad del vehículo, que se representan en la figura 4.24. En ésta puede observarse que el convertidor actúa únicamente como tal en los tramos ab y cd, ya que fuera de estos intervalos el par transmitido por la transmisión mecánica, anulando la acción del convertidor, es mayor. Para relaciones de transmisión superiores no se precisa más par y, por tanto, no es conveniente hacer intervenir al convertidor.

Como se dijo antes, estas curvas, en su conjunto, proporcionan una respuesta más parecida a la ideal de tracción (4.9) que las obtenidas con una transmisión mecánica.

4.7. PREDICCIÓN DE LAS PRESTACIONES DE UN VEHICULO.

4.7.1. Introducción.

Consideraremos en este apartado los siguientes valores relacionados con la respuesta del vehículo en movimiento longitudinal:

- Velocidad máxima.
- Tiempo y espacio necesario para acelerar entre dos velocidades conocidas.
- Subida por rampas.

Para estimar los valores anteriores tendremos en cuenta los límites impuesto por la adherencia y por los esfuerzos tractores que proporciona el motor y la transmisión, así como el conjunto de resistencias que ha de vencer el vehículo para moverse, en cada caso. Se considerarán, así mismo, las relaciones de la transmisión estudiadas en los apartados anteriores.

4.7.2. Velocidad máxima.

El valor de la velocidad máxima, que se tiene en cuenta como dato característico del vehículo, suele referirse al movimiento de éste sobre una superficie horizontal.

Utilizando la figura 4.15 se puede estimar, gráficamente, la velocidad máxima, que es la que corresponde al punto de intersección entre la curva de esfuerzo tractor máximo en la relación de transmisión más larga (4ª en la figura) y la de resistencia al movimiento sobre superficie horizontal, que incluye la resistencia a la rodadura y la aerodinámica (punto a).

Por otra parte, considerando que la velocidad máxima se obtiene para potencia máxima del motor, siendo η el rendimiento y ξ_q la relación de mínima reducción de la transmisión, e igualando la potencia máxima disponible en las ruedas ($H_{max} \cdot \eta$) a la máxima potencia resistente, (ecuaciones 4.10 y 4.11), obtenemos:

$$H_{d \max} = H_m x \cdot \eta_1 = AV_m x + BV_m x^3 \quad 4.76$$

La ecuación (4.76) puede ser resuelta utilizando la fórmula de Cardano, obteniéndose la solución:

$$V_{m x} = A_1 \left(\sqrt[3]{B_1 + 1} - \sqrt[3]{B_1 - 1} \right) \quad 4.77$$

siendo:

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{H_{d \max}}{2B}}$$

$$B_1 = \sqrt[3]{1 + \frac{4A^3}{27BH_{d \max}^2}} = \quad 4.78$$

$$= \sqrt[3]{1 + \frac{4m^2 g^2 f_0^3}{27H_{d \max}^2 \left(f_v + \frac{1}{2} \frac{\rho A_r C_x}{m \cdot g} \right)}}$$

Cuando crece la relación entre la potencia máxima y el peso del vehículo, el valor de B_1 tiende a la unidad y el de la velocidad máxima a $1.26 A_1$.

Para poder obtener la velocidad máxima calculada por (4.77) es necesario que la relación de transmisión más larga se haya determinado, de tal manera que, a dicha velocidad del vehículo, el motor gire con la velocidad de potencia máxima $n_{m1} (H_{\max})$. Por tanto, de 4.58:

$$\xi_q = \frac{\pi \cdot n_m (H_{\max}) r}{30 \cdot V_{\max}} (1 - i) \quad 4.79$$

4.7.3. Aceleración.

Considerando las curvas de esfuerzo tractor y de resistencia al movimiento de la figura 4.15, para cada velocidad, curva de resistencia y relación de transmisión, se podrá determinar el esfuerzo tractor disponible para acelerar el vehículo (F_{da}), como diferencia del esfuerzo tractor en llanta y el esfuerzo resistente. Si el límite que impone la adherencia no es superado por el de tracción a plena admisión del motor, dicho esfuerzo tractor disponible a una velocidad V es, como máximo, el que se representa en la figura 4.25.

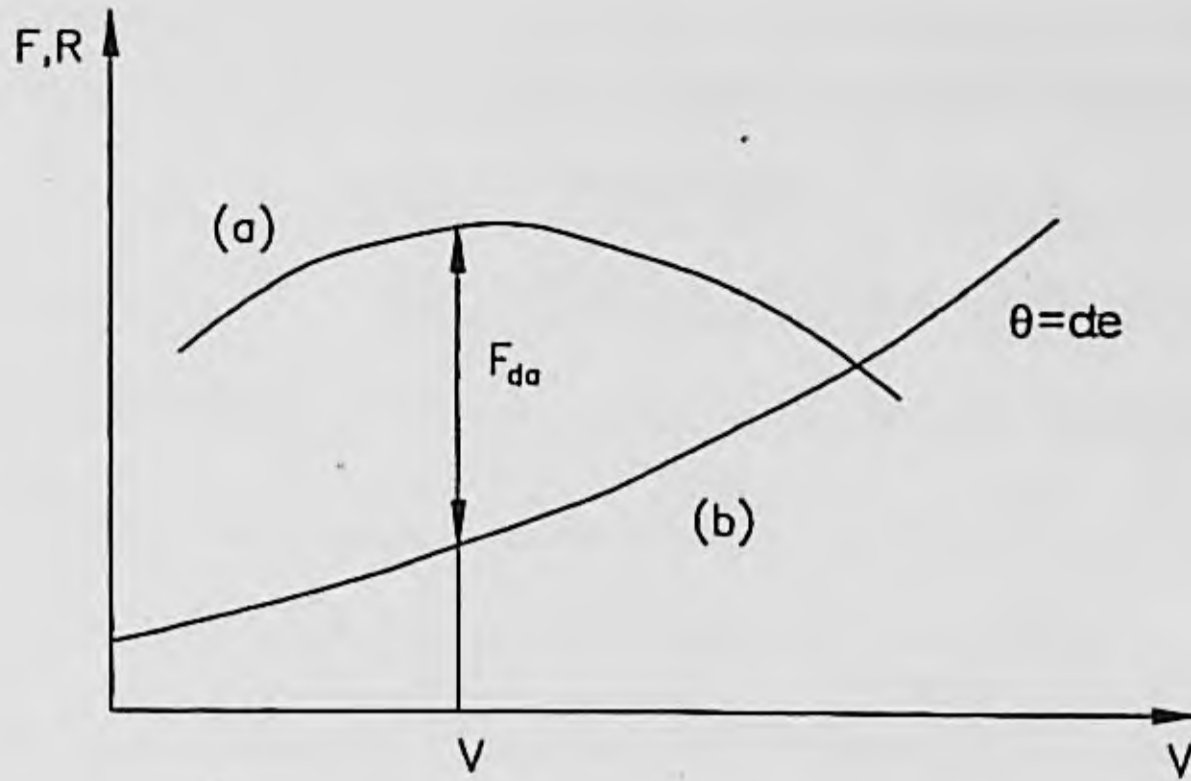


Figura 4.25. Esfuerzo tractor máximo disponible para acelerar. (a) Curva de esfuerzo tractor en llanta para una relación de transmisión ξ_j y motor a plena admisión. (b) Curva de resistencias totales sobre una rampa determinada, θ .

Se deduce que:

$$F_{da} = F(V, \xi_j) - R(V, \theta) \quad 4.80$$

La aceleración del vehículo afecta al incremento de velocidad de traslación del conjunto de sus masas (m) y al aumento de las velocidades de rotación de las masas giratorias.

Considerando que las masas que giran con las ruedas y a su velocidad, tienen momentos de inercia respecto a sus ejes de giro I_r , y su aceleración angular es α_r , y que las demás masas de los elementos de la transmisión presentan momentos de inercia I_i , aceleración α_i y la relación de transmisión respecto a las ruedas es ξ_i , el momento tractor, referido a la rueda, que es necesario para acelerarlas será:

$$M' = \sum I_r \alpha_r + \sum I_i \alpha_i \xi_i =$$

$$= \sum I_r \alpha_r + \sum I_i \alpha_r \xi_i^2 =$$

$$= \sum I_r \frac{a}{r_c} + \sum I_i \frac{a}{r_c} \xi_i^2 \quad 4.81$$

Siendo r_e el radio efectivo de la rueda y, a , la aceleración del vehículo. Por otra parte, denominando M_{da} el momento tractor en llanta, disponible para acelerar.

$$M_{da} - M' = m \cdot a \cdot r_e \quad 4.82$$

Sustituyendo la expresión (4.81) en la (4.82),

$$M_{da} = F_{da} \cdot r_e = m \cdot a \cdot r_e + \sum I_r \frac{a}{r_e} + \sum I_i \frac{a}{r_e} \xi_i^2 \quad 4.83$$

de donde,

$$F_{da} = m \cdot a \left(1 + \sum \frac{I_r}{m \cdot r_e \cdot r_e} + \sum \frac{I_i \xi_i^2}{m \cdot r_e \cdot r_e} \right) \quad 4.84$$

Suponiendo que el radio cinemático equivalente, r_e , coincide con el radio del neumático bajo carga, r_c , se define el factor de masa equivalente γ_m :

$$\gamma_m = 1 + \sum \frac{I_r}{m \cdot r^2} + \sum \frac{I_i \xi_i^2}{m \cdot r^2} \quad 4.85$$

que sustituido en (4.84) resulta:

$$F_{da} = \gamma_m \cdot m \cdot a \quad 4.86$$

y la aceleración máxima del vehículo a una velocidad V , sobre una rampa o pendiente de valor θ y con la transmisión en una relación ξ_j , será:

$$a(V, \xi_j, \theta) = \frac{F_{da}(V, \xi_j, \theta)}{\gamma_m \cdot m} \quad 4.87$$

El factor de masa equivalente, que es un coeficiente de mayoración de la masa, para tener en cuenta la aceleración de las masas rotativas, puede ser calculado utilizando relaciones empíricas. Para turismos puede considerarse, en forma aproximada:

$$\gamma_m = 1,04 + 0,0025 \xi_j^2 \quad 4.88$$

El primer sumando del segundo miembro representa la contribución o la masa equivalente de traslación, de la rotación de las ruedas y, el segundo, la contribución de la inercia de las masas que giran a la velocidad del motor o referidas a ella, con una relación de transmisión total ξ_j con respecto a las ruedas. En la tabla 4 se indican algunos valores medios orientativos para diferentes tipos de vehículo.

TIPO DE VEHICULO	RELACIONES DE TRANSMISION			
	ALTAS	SEGUNDA	PRIMERA	BAJAS
TURISMO (grande)	1.09	1.14	1.30	—
TURISMO (pequeño)	1.11	1.20	1.50	2.40
CAMION	1.09	1.20	1.60	2.50

TABLA 4.1. Valores medios del factor de masas γ_m

Considerando la ecuación (4.87) y una relación de transmisión concreta, una rampa o pendiente constante y teniendo en cuenta que:

$$dt = \frac{dV}{a} = \gamma_m \cdot m \frac{dV}{F_{da}(V)} \quad 4.89$$

el tiempo necesario para acelerar entre dos velocidades, V_1 y V_2 sin modificar la relación de transmisión será:

$$t_{1,2} = \gamma_m \cdot m \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{F_{da}(V)} \quad 4.90$$

De la misma forma, y puesto que:

$$dS = Vdt = \gamma_m \cdot m \frac{VdV}{F_{da}(V)} \quad 4.91$$

el espacio recorrido para acelerar entre dos velocidades V_1 y V_2 , sin modificar la relación de transmisión será:

$$S_{1,2} = \gamma_m \cdot m \int_{V_1}^{V_2} \frac{VdV}{F_{da}(V)} \quad 4.92$$

Cuando el proceso de aceleración calculado requiere modificar una o más veces la relación de transmisión, deberá tenerse en cuenta que durante el tiempo en que se efectúa el cambio (1 a 2 s con cambio manual y 0.5 a 1 s con cambio automático), el vehículo sufre una deceleración que puede ser estimada considerando el valor de la resistencia total al movimiento, a la velocidad en que se efectúa el cambio.

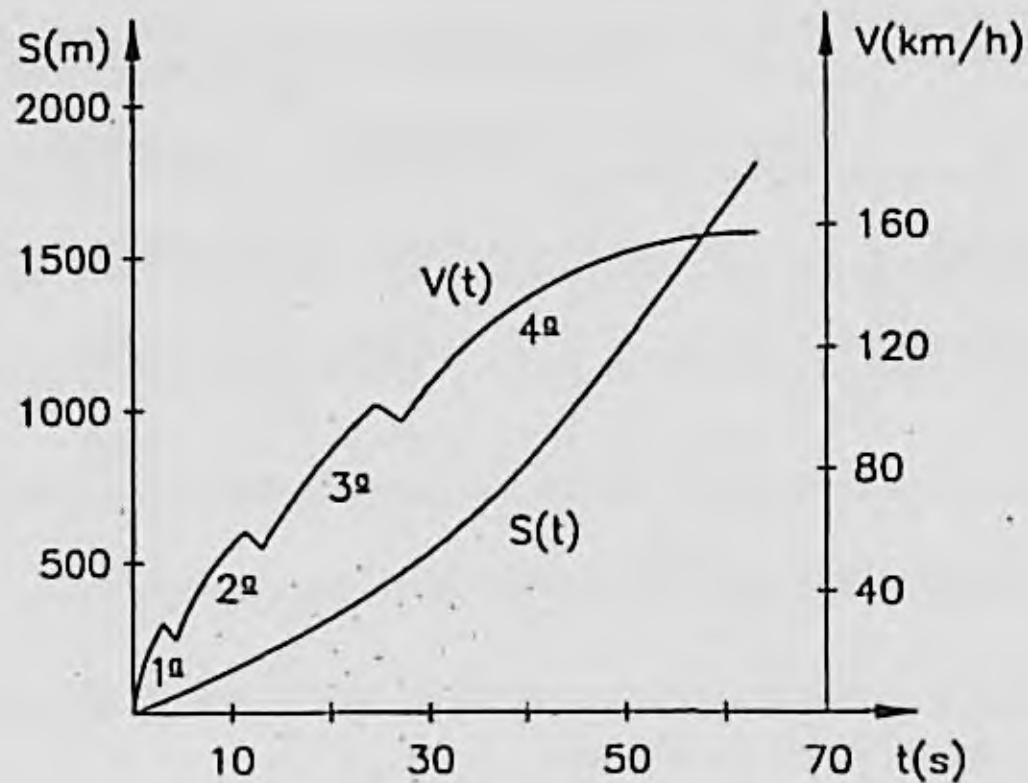


Figura 4.26. *Curvas características de aceleración de un turismo con cuatro relaciones de transmisión y cambio manual.*

Teniendo en cuenta lo anterior y aplicando las ecuaciones (4.90) y (4.92) a cada intervalo de relación de transmisión constante, puede estimarse el tiempo y espacio requerido para acelerar desde reposo hasta una velocidad cualquiera, quedando representado el proceso de aceleración en la figura 4.26.

En todo lo anterior se ha supuesto que el límite que impone la adherencia a la tracción es superior, para todas las velocidades, al esfuerzo máximo de tracción. Si esto no fuese cierto, como puede ser en el caso de baja adherencia, o en el arranque, con elevada aceleración, habría que calcular el esfuerzo disponible neto en función de la fuerza adherente disponible, en el intervalo en que ésta sea inferior a la tractora.

De todos modos, las prestaciones se calculan suponiendo adherencia normal en buenas condiciones del pavimento.

4.7.4. Rampa máxima.

En vehículos pesados, o todo terreno, interesa conocer la rampa máxima que puede ascender, más que la aceleración máxima. Normalmente se considera que la ascensión se produce a velocidad constante. Como la circulación por rampas elevadas se produce a velocidad baja, es posible ignorar la resistencia aerodinámica. En estas condiciones, la resistencia al movimiento puede ser evaluada teniendo en cuenta (4.1), (4.3) y (4.6.).

$$R_T = P \operatorname{sen} \theta + P f_r \quad 4.93$$

A muy baja velocidad el límite del esfuerzo tractor disponible puede estar condicionado por la adherencia, lo cual se observará en el diagrama de la figura 4.15. Si éste es el caso, teniendo en cuenta los valores de la fuerza adherente máxima que corresponda, ecuaciones (4.33), (4.34), (4.35) o (4.46) e igualando a (4.93):

$$F_{T_{\max}} = R_T = P \operatorname{sen} \theta + P f_r \quad 4.94$$

de donde:

$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{F_{T_{\max}} - P f_r}{P} \quad 4.95$$

Si se acepta la simplificación (4.7):

$$j \approx \frac{F_{T_{\max}} - P f_r}{P} \quad 4.96$$

Con (4.96) se comete un cierto error en el caso de rampas elevadas (5% para $j=0.32$, $\theta = 18^\circ$); debe de tenerse en cuenta que, en este caso, poniéndose en juego pares elevados y siendo crítica la adherencia, la transferencia de carga entre las ruedas de un mismo eje, como consecuencia del par de reacción opuesto al de tracción que se transmite al eje tractor, reduce la fuerza adherente en la rueda de menor carga. Dicha transferencia debe ser evaluada para lograr una mayor precisión.

La rampa máxima que es posible ascender a una velocidad cualquiera, y en una relación de transmisión determinada, puede estimarse gráficamente mediante el diagrama de la figura 4.15, o considerando el esfuerzo tractor en llanta a esa velocidad, supuesto inferior al de adherencia, e igualándolo a la resistencia total. La ecuación (4.57) permite obtener las revoluciones del motor para cualquier valor de V y una relación ξ_j determinada; conocido n_m puede obtenerse el par M_m de la curva de pares del motor y con este valor se determina F mediante (4.61). Igualando a R_T , que debe incluir la resistencia aerodinámica si se trata de velocidades medias o altas, se obtienen:

$$j(V) = \frac{F(V) - R_T(V)}{P} \quad 4.97$$

En esta expresión, el término $R_T(V)$ no incluye, lógicamente, la resistencia gravitatoria.

Ejercicio 4.1.

Un autobús presenta las siguientes características :

Peso en orden de marcha: 85 kN

Area frontal: 8 m²

Se realiza un conjunto de 10 ensayos, determinando la potencia en llanta mediante el control de consumo de combustible a dos velocidades diferentes, y sobre una superficie con rampa del 1%. Suponiendo que la resistencia a la rodadura no varía con la velocidad, estimar, en base a los datos contenidos en la tabla siguiente (resultados de los ensayos).

- a) Coeficiente de resistencia a la rodadura.
- b) Coeficiente efectivo de resistencia aerodinámica al avance.

Resultados de los ensayos:

V (Km/h)	Potencia kw
60	43,5 - 44,1 - 44,5 - 45,3 - 46,3
100	112,5 - 113,2 - 114,1 - 115,5 - 118,9

Indique los principales factores que pueden influir alejando los valores calculados de C_x y f_r de los reales.

SOLUCION:

La resistencia total al avance es:

$$R = P (f_r + \text{sen } \theta) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_r \cdot v^2$$

$$R = A + B \cdot v^2$$

donde:

$$A = P (f_r + \text{sen } \theta)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_r$$

A partir de la potencia media en llanta se obtiene el valor de la resistencia al movimiento para las dos velocidades:

$$N_{\text{media}}(60) = 44,74 \text{ Kw}$$

$$N_{\text{media}}(100) = 114,84 \text{ Kw}$$

$$R(60) = \frac{N_{\text{media}}(60)}{\frac{60}{3,6}} = 2684,4 \text{ N}$$

$$R(100) = \frac{N_{\text{media}}(100)}{\frac{100}{3,6}} = 4134,20 \text{ N}$$

Por tanto se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R(60) = A + B \left[\frac{60}{3,6} \right]^2$$

$$R(100) = A + B \left[\frac{100}{3,6} \right]^2$$

resolviendo el sistema, se obtienen los valores numéricos de los coeficientes A y B.

$$R(100) - R(60) = B \left[\frac{100^2 - 60^2}{3,6^2} \right]$$

de lo que,

$$B = 2,936 \text{ N/m}^2 \text{ s}^{-2}$$

y por tanto,

$$A = 1868,844 \text{ N}$$

Conocido el valor del coeficiente A se obtiene el coeficiente de resistencia a la rodadura:

$$A = P (f_r + \text{sen } \theta)$$

es decir:

$$f_r \approx 0,012$$

A partir del coeficiente B se obtiene el coeficiente de resistencia aerodinámica,

$$B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_f \cdot C_x$$

es decir:

$$C_x \approx 0,60$$

Los factores que pueden influir en la precisión de los valores calculados:

1. La resistencia a la rodadura no es constante.
2. Velocidad del aire.
3. Dirección del viento en relación a la trayectoria del vehículo.
4. Temperatura, presión, humedad que influirán en la densidad del aire.
5. Rugosidad y ondulación de la superficie que generando vibraciones proporcionan disipación de energía.
6. Dificultad de tener una velocidad constante realmente mientras se mide el consumo.

Ejercicio 4.2.

Un vehículo (figura 4.27) presenta las siguientes características:

- Peso: 20 kN.
- Distancia entre ejes: 280 cm.
- Distancia del centro de gravedad al eje delantero medida en su proyección

[Dinámica longitudinal. Prestaciones.]

sobre el plano de rodadura: 130 cm.

- Altura del c.d.g.: 50 cm.
- Area frontal: $2,3 \text{ m}^2$
- Coeficiente de resistencia aerodinámica: $C_x = 0,45$
- Coeficiente de resistencia a la rodadura:
 $f_r = 0,015 + 0,01 (V/100)^{2,5}$ (V en Km/h)
- Radio de rodadura de los neumáticos: 33 cm.
- Coeficiente de adherencia neumático-calzada: $\mu = 0,8$

Realizar los siguientes cálculos y estimaciones:

- 1) Considerando los límites que impone la adherencia, estimar la máxima velocidad, así como el máximo esfuerzo tractor que puede desarrollar el vehículo:
 - A) sobre suelo horizontal
 - B) sobre rampa del 20%

en los siguientes casos:

- a) con tracción trasera
 - b) con tracción delantera
 - c) tracción a las cuatro ruedas
- 2) Dibujar las curvas de resistencia al movimiento en función de la velocidad, y hallar el máximo esfuerzo en llanta del vehículo con los tres tipos de tracción.

SOLUCION:

- 1) **Resistencia a la rodadura:**

El coeficiente de resistencia a la rodadura es:

$$f_r = 0,015 + 0,01 \left[\frac{V}{100} \right]^{2,5} \quad V \text{ en km/h}$$

$$R_r = P \cdot f_r = 2000 f_r \cdot \text{daN}$$

En la tabla 4.2 se expresan en daN los valores de R_a y R_r para $V = 20, 40 \dots 460$ km/h. Se ha considerado un límite máximo de la velocidad tan alto para apreciar mejor las tendencias de las diferentes curvas, aunque no sea un valor realista.

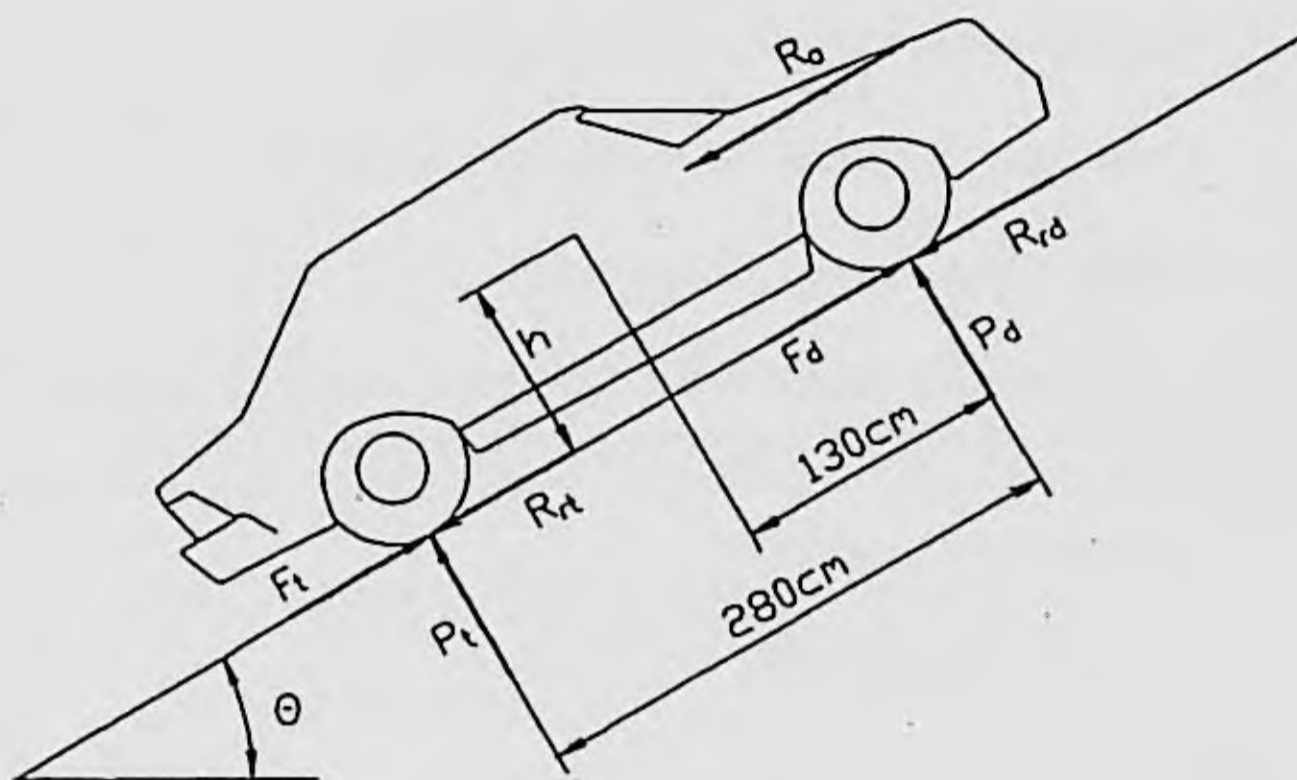


Figura 4.27. Vehículo en rampa

2) Resistencia aerodinámica:

$$R_a = \frac{\rho}{2} \cdot C_x \cdot A_r \cdot V^2$$

$$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$C_x = 0,45$$

$$A_r = 2,3 \text{ m}^2$$

$$R_a = 0,634 \cdot V^2 \quad (V \text{ en m/s; } R_a \text{ en N)}$$

$$R_a = \frac{0,634}{3,6^2} V^2 = 0,05 \cdot V^2 \quad (V \text{ en km/h; } R_a \text{ en N)}$$

$$R_a = 0,005 \cdot V^2 \quad (R_a \text{ en daN})$$

En la tabla 4.2 se expresan valores para $V = 20, 40 \dots 460$ km/h.

Puede observarse, para este vehículo, de los valores de la tabla, cómo, para una velocidad algo superior a 100 km/h se igualan los valores de ambas resistencias, superando la resistencia aerodinámica a la de rodadura a partir de dicha velocidad.

A) Circulación en horizontal:

La resistencia total al movimiento en horizontal, es: $R_{th} = R_r + R_a$ (valores en tabla 4.2.)

Esfuerzo tractor máximo:

Tracción a las cuatro ruedas:

Suponiendo que el reparto de esfuerzos tractores permite el aprovechamiento máximo de la adherencia disponible en cada rueda:

$$F_{max} = \mu \cdot P = 0,8 \cdot 20000 = 1600 \text{ daN}$$

Tracción trasera:

Teniendo en cuenta 4.34:

$$F_{T_{max}} = \frac{\mu P(l_1 - hf_r)}{L - \mu h}$$

Sustituyendo valores y calculando los esfuerzos para el intervalo 20-460 km/h se obtienen los resultados que se indican en la columna $F_{T_{max}}(0)$ de la tabla 4.2

Tracción delantera:

Aplicando la ecuación 4.33

$$F_{T_{dmax}} = \frac{\mu P(l_2 + hf_r)}{L - \mu h}$$

se obtienen los resultados que se indican en la columna $F_{T_{dmax}}(0)$ de la tabla 4.2

B) Circulación con subida en rampa del 20%:

Resistencia gravitatoria:

$$R_g = P \cdot \text{sen } \theta = 2000 \cdot 0,196 = 391 \text{ daN}$$

La resistencia total:

$$R_t = R_{th} + R_g \text{ (valores en tabla 4.2):}$$

Tracción 4 ruedas:

$$F_{max} = \mu A P A \cos 11,3 = 0.8.2000 A \cos 11,3 \approx 1569 \text{ daN}$$

Tracción trasera:

$$F_{Ft_{max}} (20\%) = F_{Tt_{max}} (0) \cos \theta$$

Tracción delantera:

$$F_{Fd_{max}} (20\%) = F_{Td_{max}} (0) \cos \theta$$

(Valores en tabla 4.2).

V (km/h)	fr	Rr	Ra	Rt(0)= Rr+Ra	Ftdmax (0)	Ftlmax (0)	Ftdmax (20%)	Ftlmax (20%)	Rt(20)= Rt(0)+Rg	Ftmax (0)	Ftmax (20)
20	0,015	30,358	1,957	32,314	753,7947	861,607	708,335	809,846	424,547	1600	1568,929
40	0,016	32,024	7,826	39,850	754,0030	861,329	708,531	809,385	432,083	1600	1568,929
60	0,018	35,577	17,609	53,186	754,4471	860,737	708,948	808,828	445,419	1600	1568,929
80	0,021	41,449	31,308	72,754	755,1811	859,759	709,638	807,909	464,986	1600	1568,929
100	0,025	50,000	48,915	98,915	756,2500	858,333	710,842	806,569	491,147	1600	1568,929
120	0,031	61,549	70,438	131,986	757,6936	856,409	711,999	804,761	524,219	1600	1568,929
140	0,038	76,382	95,873	172,255	759,5478	853,936	713,741	802,437	564,488	1600	1568,929
160	0,047	94,763	125,222	219,986	761,8454	850,873	715,900	799,559	612,218	1600	1568,929
180	0,058	116,938	158,484	275,423	764,6173	847,177	718,505	796,086	667,655	1600	1568,929
200	0,072	143,137	195,660	338,797	767,8921	842,810	721,582	791,983	731,029	1600	1568,929
220	0,087	173,578	236,748	410,326	771,6972	837,737	725,158	787,215	802,558	1600	1568,929
240	0,104	208,467	281,750	490,217	776,0584	831,922	729,256	781,751	882,449	1600	1568,929
260	0,124	248,003	330,665	578,668	781,0004	825,333	733,900	775,559	970,901	1600	1568,929
280	0,146	292,377	383,493	675,870	786,5471	817,937	739,112	768,609	1068,102	1600	1568,929
300	0,171	341,769	440,234	782,004	792,7211	809,705	744,914	760,874	1174,236	1600	1568,929
320	0,198	396,357	500,889	897,246	799,5447	800,607	751,326	752,324	1289,479	1600	1568,929
340	0,228	456,312	565,457	1021,768	807,0390	790,615	758,388	742,935	1414,001	1600	1568,929
360	0,261	521,797	633,938	1155,735	815,2247	779,700	766,060	732,679	1547,967	1600	1568,929
380	0,296	592,975	706,332	1299,306	824,1219	767,838	774,421	721,531	1691,539	1600	1568,929
400	0,335	670,000	782,639	1452,639	833,7500	755,000	783,468	709,468	1844,871	1600	1568,929
420	0,377	753,025	862,859	1615,884	844,1281	741,163	793,221	696,465	2008,116	1600	1568,929
440	0,421	842,198	946,993	1789,191	855,2747	726,300	803,695	682,499	2181,423	1600	1568,929
460	0,469	937,663	1035,040	1972,703	867,2079	710,390	814,909	667,548	2364,935	1600	1568,929

TABLA 4.2. Resultados obtenidos.

2) Representación en función de la velocidad

La figura 4.28(a) muestra los valores de la resistencia al movimiento (rodadura, aerodinámica y total en horizontal y ésta última con rampa del 20%)

En la figura 4.28(b), se representa los esfuerzos tractores máximos limitados por la adherencia dentro del rango de velocidades analizado, para los casos de tracción delantera, trasera y total y rampas de valores 0 y 20%. Puede apreciarse que, con los valores del ejercicio, los esfuerzos máximos de tracción calculados varían poco con la velocidad, si bien, en el caso de tracción delantera aumentan al aumentar V y lo contrario sucede con los disponibles si el vehículo es de tracción trasera.

En el intervalo de circulación normal del vehículo, la tracción trasera dispone de esfuerzos adherentes algo superiores a la tracción trasera.

Como es lógico, en el caso de transmisión a las cuatro ruedas, el esfuerzo adherente disponible es muy superior.

También puede comprobarse cómo, en rampas de valor no demasiado grande, los incrementos (tracción trasera) o decrementos (tracción delantera) de esfuerzo tractor máximo limitado por la adherencia no es muy importante.



Figura 4.28(a). Valores de la resistencia al movimiento en función de la velocidad.

FUERZAS TRACTURAS (Límite de adherencia)

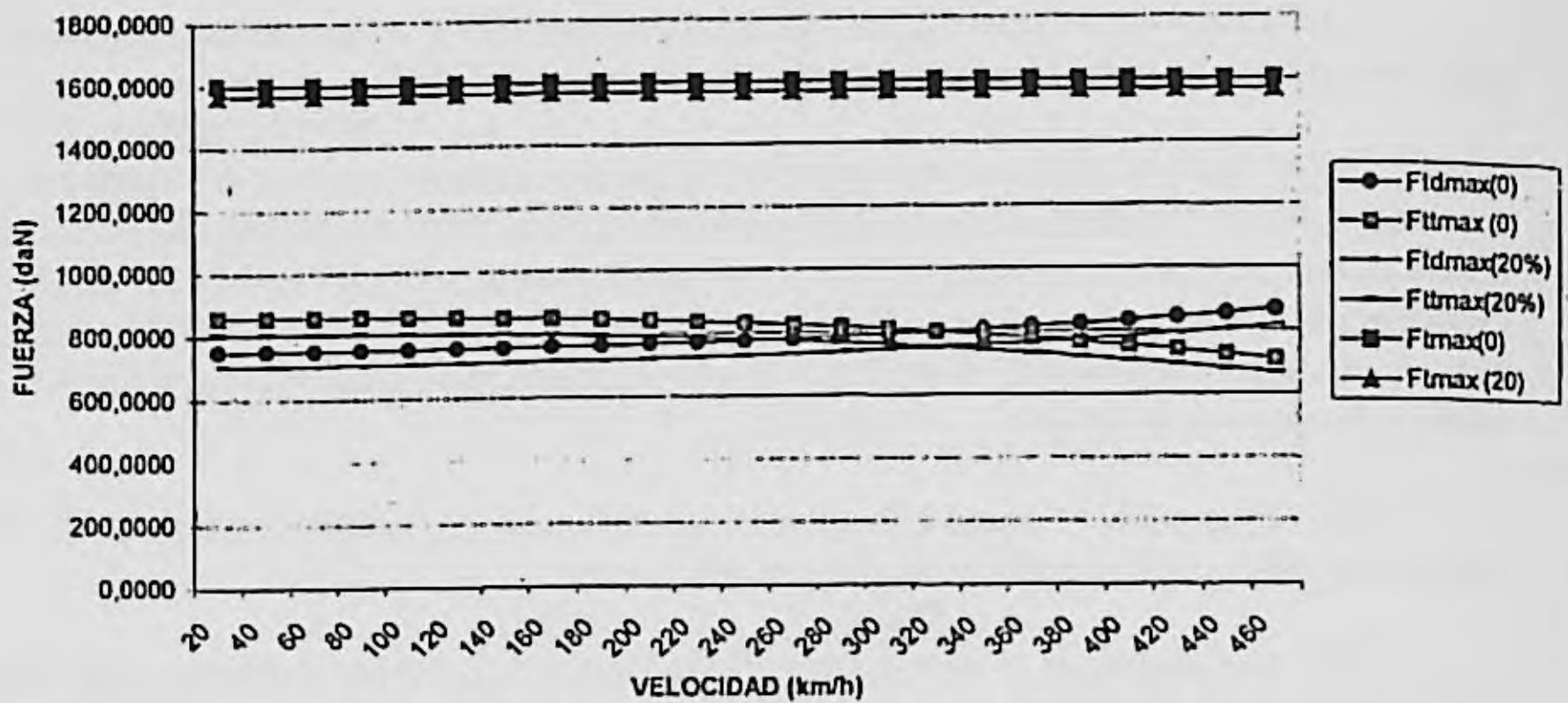


Figura 4.28 (b). Esfuerzos tractores máximos limitados por la adherencia

FUERZA DE TRACCIÓN LIMITADA POR LA ADHERENCIA Y RESISTENCIA AL MOVIMIENTO

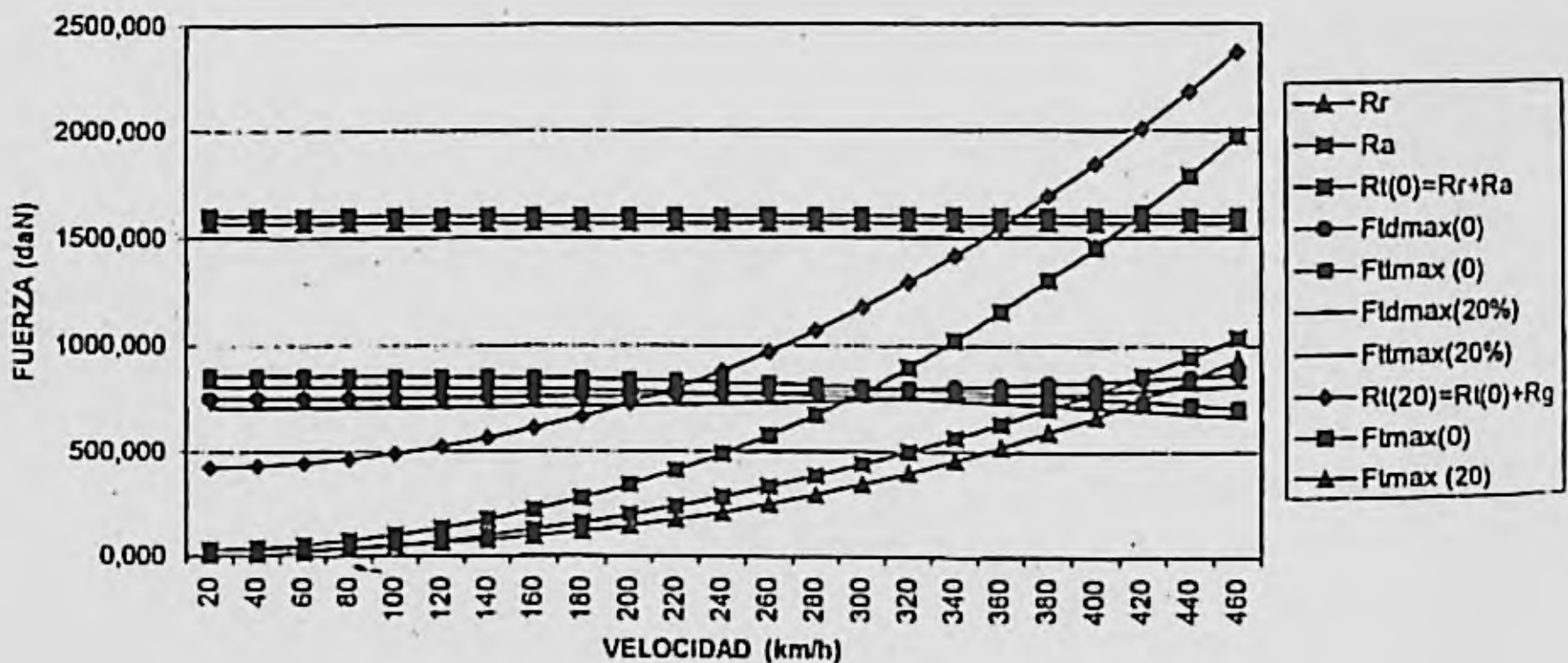


Figura 4.28(c)

En la figura 4.28(c) se han superpuesto los valores representados en las dos figuras anteriores observándose cómo para velocidades inferiores a 200 km/h, los esfuerzos de tracción limitados por la adherencia son superiores a la resistencia al movimiento, en todos los casos. En circulación sobre superficie horizontal, este límite permitiría alcanzar 300 km/h,

aproximadamente, para los casos de tracción en un eje y unos 420 km/h en el caso de tracción a las cuatro ruedas. Los esfuerzos tractores quedarán limitados por los proporcionados por el motor y la transmisión. Únicamente a velocidades bajas, sobre rampas muy acusadas o aceleraciones muy elevadas, la adherencia puede constituir una limitación al movimiento, especialmente en vehículos con un solo eje tractor.

Ejercicio 4.3.

Un vehículo automóvil presenta las siguientes características:

Peso bajo carga:	14,4 kN.
Peso sobre el eje anterior:	6,7 kN.
Peso sobre el eje posterior:	7,7 kN.
Area frontal:	1,86 m ² .
Batalla:	2,56 m.
Altura del c.d.g.:	0,6 m.
Neumáticos:	175 SR 13 (serie milimétrica $R_{NA} = 0,82$).
Motor:	
Velocidad máxima:	a 6000 r.p.m con Potencia: 103 CV.
Potencia máxima:	105 CV a 5500 r.p.m.
Par máximo:	14,5 m.kg a 4000 r.p.m.

Tracción trasera.

Coeficiente de resistencia aerodinámica al avance: 0,4.

Se desea determinar las relaciones de transmisión que, constituyendo términos de una progresión geométrica, permiten que el vehículo ofrezca las siguientes prestaciones:

Velocidad máxima que permita la cadena cinemática: 165 km/h.

Rampa máxima: 40%.

Calcular la velocidad máxima circulando en llano.

Para resolver el ejercicio, considérese:

Resistencia a la rodadura:

$$f_r = 0,015 + 0,01 \left[\frac{V}{100} \right]^{2,5}$$

Coefficiente de adherencia: $\mu = 0,8$

Deslizamiento neumático-pista: $i = 3\%$

Radio bajo carga: 28 cm.

Rendimiento de la transmisión: en directa 0,90
otras relaciones 0,85

La caja de cambios de la relación de transmisión permite 4 relaciones distintas, una de ellas directa.

SOLUCION:

a) La relación de transmisión en directa es:

$$\xi_4 = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_m}{60 \cdot v_m} r \cdot (1 - i)$$

Siendo v_{max} la velocidad máxima que permite la cadena cinemática, n_m el número máximo de revoluciones del motor y r el radio del neumático cuyo valor es:

$$r = \frac{1}{2} (13 \cdot 25,4 + 2 \cdot 0,82 \cdot 175) = 308,6 \text{ mm.}$$

de lo que:

$$\xi_4 = \frac{\pi \cdot 6000}{30 \cdot 45,8} 0,3086 \cdot 0,97 = 4,106$$

Podría adoptarse como reducción en puente trasero $\xi_4 = \frac{41}{10}$. En directa:

$$\begin{aligned}\xi'_4 &= 1 \\ \xi_4 &= 4,10\end{aligned}$$

- b) El valor máximo de la relación de transmisión se calculará a partir de la resistencia máxima al movimiento:

$$R_T = P \cdot \text{sen } \theta + P \cdot \text{cos } \theta \cdot f_r$$

es decir,

$$R_T = 5542,8 \text{ N}$$

Por otra parte:

$$\xi_1 = \frac{R_T \cdot r_c}{M_m \eta} = 12,84$$

$$\xi_{1'} = \frac{12,84}{4,1} = 3,13$$

- c) Las relaciones intermedias se obtienen calculando la relación K de la progresión:

$$K = \sqrt[3]{\frac{4,1}{12,84}} = 0,6835 \quad \xi_{1'} = 3,13 \quad \xi_1 = 12,84$$

$$\xi_2 = \xi_1 \cdot K = 8,78 \quad \xi_{2'} = 2,14 \quad \xi_2 = 8,78$$

$$\xi_3 = \xi_1 \cdot K^2 = 6,00 \quad \xi_{3'} = 1,46 \quad \xi_3 = 6,00$$

$$\xi_{4'} = 1 \quad \xi_4 = 4,1$$

- d) Intervalos de velocidad para un funcionamiento del motor entre n_{m1} y n_{m2} .

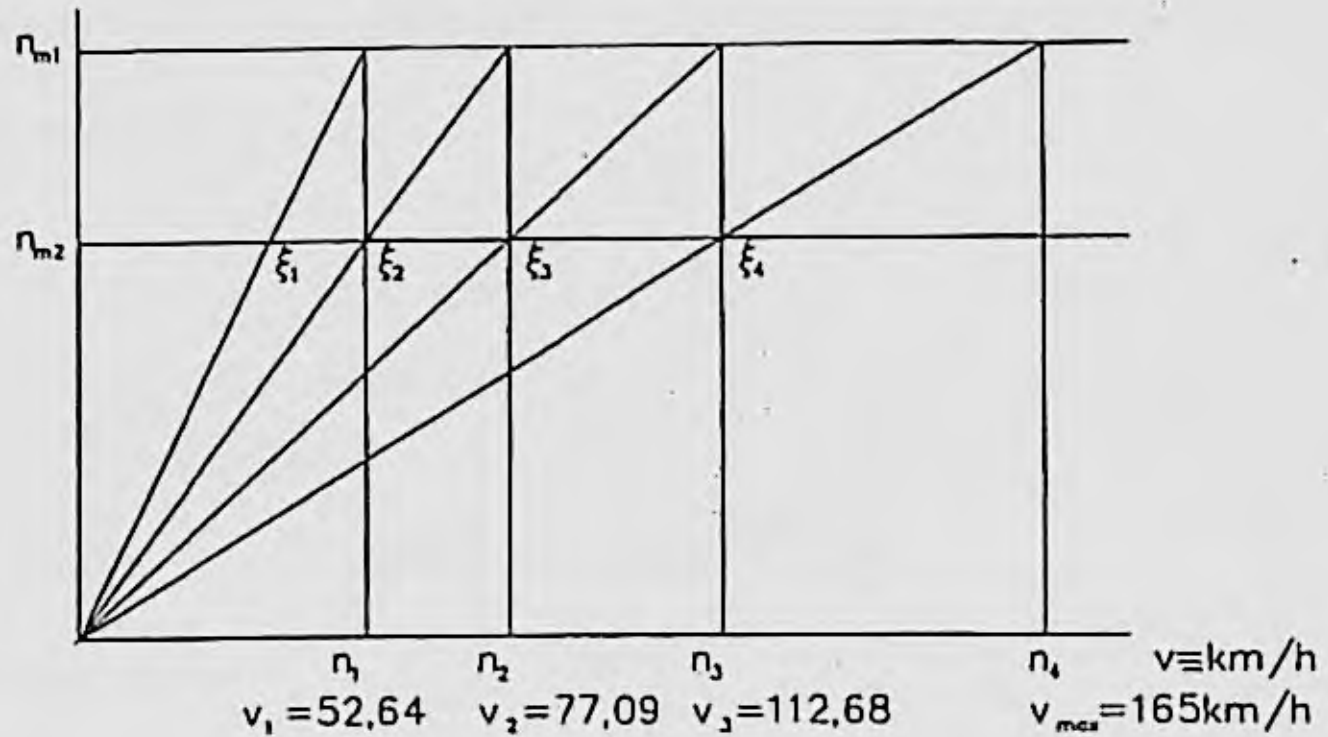


Figura 4.29. Escalones de velocidad

De la figura 4.29, se deduce:

$$\xi_4 = \frac{n_{m1}}{n_4} = \frac{n_{m2}}{n_3}$$

$$\xi_3 = \frac{n_{m1}}{n_3} = \frac{n_{m2}}{n_2}$$

$$\frac{\xi_4}{\xi_3} = \frac{n_{m2}}{n_{m1}} = K = 0,6835$$

$$n_{m2} = n_{m1} \cdot K = 4101 \text{ r.p.m.}$$

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_r}{60} r \cdot (1 - i) = 0,0313 \cdot n_r$$

$$n_4 = \frac{6000}{4,1} = 1463,4 \text{ r.p.m.} \quad V_4 = 164,90 \text{ km/h}$$

$$n_3 = \frac{6000}{6} = 1001 \text{ r.p.m.} \quad V_3 = 112,68 \text{ km/h}$$

$$n_2 = \frac{6000}{8,78} = 683,4 \text{ r.p.m.} \quad V_2 = 77,00 \text{ km/h}$$

$$n_1 = \frac{6000}{12,84} = 467,3 \text{ r.p.m.} \quad V_1 = 52,6 \text{ km/h}$$

e) Comprobación de $V_{\text{máx}}$ para circulación en llano.

La resistencia al movimiento es:

$$R(V) = 216 + 0,0352 \cdot V^2 + 0,00144 \cdot V^{2,5}$$

y la potencia,

$$H_R = R(V) \cdot V$$

$$n_r = \frac{V}{3,6 \cdot 0,0313} = \frac{V}{0,1127}$$

Se comprobará si la potencia suministrada por el motor a 6000 r.p.m. es suficiente para lograr su desplazamiento a 165 km/h.

$V(\text{km/h})$	$n_r(\text{r.p.m.})$	$n_m(\text{r.p.m.})$	$R(\text{N})$	$H_R(\text{kw})$
165	1464,1	6002,7	1677,9	76,90

$$H_R(165) = 76,90 \text{ kw} = \frac{76,90}{0,7355} = 104,56 \text{ CV}$$

Potencia requerida (H_R) = 104,56 CV

Potencia en llanta suministrada por el motor (H_l) = $H_m \eta = 92,7 \text{ CV}$

No se puede circular en llano a la velocidad de 165 km/h que permite la cadena cinemática, ya que la potencia requerida es mayor que la dada por el motor.

Considerando la velocidad de máxima potencia:

$$V = 0,1127 \cdot n_r = 0,1127 \frac{n_m}{4,1} = 151,58 \text{ km/h}$$

$$R(151,58) = 1430 \text{ N}$$

$$H_R(151,58) = 81,85 \text{ CV}$$

$$H_l = H_m \cdot \eta = 105 \cdot 0,9 = 94,5 \text{ CV} \quad 94,5 > 81,85$$

y, por lo tanto, sí podría circular por llano a la velocidad de 151,58 km/h. La velocidad máxima real estará comprendida entre este valor y 165 km/h.

Ejercicio 4.4.

Las características generales de un vehículo automóvil son las siguientes:

Peso con carga máxima: 1.350 daN.

Sobre eje delantero: 675 daN.

Sobre eje trasero: 675 daN.

Batalla: 2.438 mm.

Altura del centro de gravedad (con carga máxima): 540 mm.

Neumáticos 175/70 SR-13 con radio bajo carga de 263 mm.

Curvas características del motor según la figura 4.30.

Caja de velocidades de 5 relaciones, siendo $\xi_{2total} = 8,21$.

Velocidad máxima del vehículo 163 km/h.

Coefficiente de resistencia aerodinámica al avance $C_x = 0,37$.

Area frontal: 1,9 m².

Rendimiento de la transmisión: 0,85.

Deslizamiento: 3%

Calcular:

- 1) Rampa máxima que puede subir el vehículo en 5ª velocidad a 90 km/h suponiendo $\mu = 0,8$.
- 2) Aceleración máxima que puede comunicarse al vehículo circulando a 50 km/h con rampa del 15% y $\mu = 0,4$ en los siguientes supuestos:
 - 2.1) Tracción delantera.
 - 2.2) Tracción trasera.
 - 2.3) Tracción a las 4 ruedas.

En este caso el vehículo circula utilizando la 2ª velocidad.

[Dinámica longitudinal. Prestaciones.]

Considérese:

Coefficiente de resistencia a la rodadura:

$$f_r = 0,015 + 0,01 \left[\frac{V}{100} \right]^{2,5} \quad V \text{ (km/h)}$$

Coefficientes de masas rotativas:

$$\gamma_m = 1,05 + 0,0025 \cdot \xi^2$$

Densidad del aire: $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$

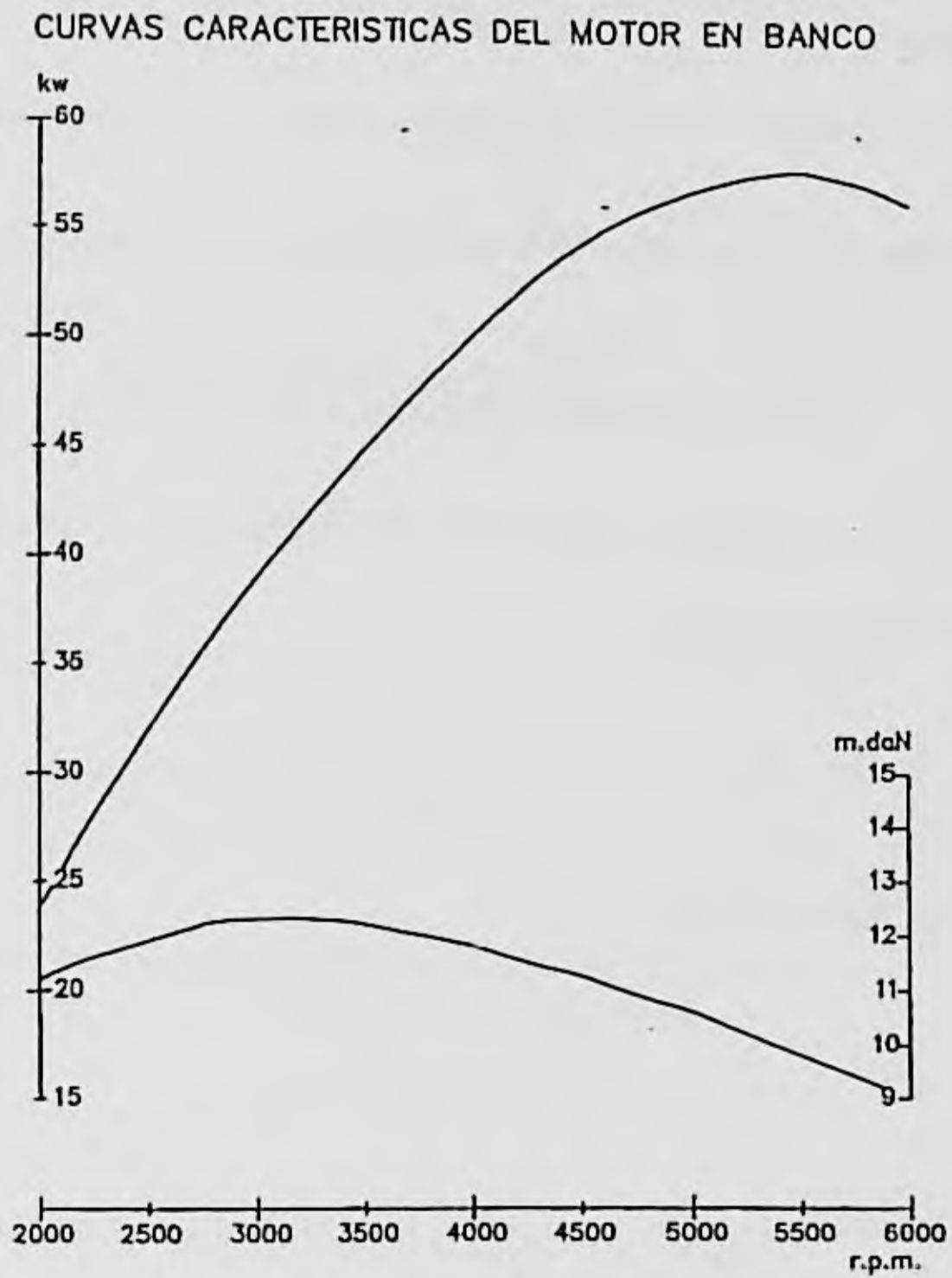


Figura 4.30. Curvas características del motor en banco.

SOLUCION:

1) Cálculo de la rampa máxima

Reducción en quinta velocidad. Consideramos que $V_{\text{máx}}$ se logra en dicha relación para la potencia máxima del motor ($n_m = 5.500$ r.p.m).

Radio del neumático:

$$r = \frac{1}{2} (13 \cdot 25,4 + 2 \cdot 175 \cdot 0,7) \approx 0,288\text{m.}$$

$$\xi_s = \frac{\pi n_m}{30 V_{\text{máx}}} r (1 - i)$$

sustituyendo valores:

$$\xi_s = 3,55$$

Para circular en 5ª velocidad a 90 km/h (25 m/s) el motor debe girar a:

$$(n_m)_{90} = \frac{30 \cdot 25}{\pi \cdot 0,288 \cdot 0,97} 3,55 = 3033 \text{ r.p.m.}$$

para estas revoluciones, del gráfico de la figura se obtiene: $M_m \approx 12,3$ m.daN

Esfuerzo tractor en llanta:

$$F_t = \frac{M_m \cdot \xi_s \cdot \eta}{r_c} = \frac{12,3 \cdot 3,55 \cdot 0,85}{0,263} = 141,1 \text{ daN} \quad (1)$$

Resistencia al movimiento:

$$R_t = R_a + R_r + P \cdot \text{sen } \theta$$

siendo:

$$R_a = \frac{\rho}{2} C_x \cdot A_f \cdot V^2 = 26,9 \text{ daN}$$

$$R_r = f_r \cdot P \cdot \text{cos } \theta$$

Considerando $\cos \theta = 1$

$$R_r = \left[0,015 + 0,01 \left[\frac{90}{100} \right]^{2,5} \right] 1350 = 30,6 \text{ daN}$$

es decir,

$$R_i = 26,9 + 30,6 + 1350 \cdot \text{sen } \theta = 57,5 + 1350 \cdot \text{sen } \theta \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned} R_i &= F_i \\ \text{sen } \theta &= \frac{141,1 - 57,5}{1350} = 0,0619 \end{aligned}$$

luego la rampa máxima en la que puede circular el vehículo a 90 km/h en 5ª velocidad es:

$$\theta = 3,55^\circ$$

equivalente a: $J = 6,2\%$

2) Cálculo de la aceleración máxima circulando a 50 km/h

$$R_a = \frac{1,225}{2} 0,37 \cdot 1,9 \cdot 13,89^2 = 8,3 \text{ daN}$$

$$R_r = \left[0,015 + 0,01 \left[\frac{50}{100} \right]^{2,5} \right] 1350 \cdot \cos \theta = 22,4 \text{ daN}$$

$$R_g = P \cdot \text{sen } \theta = 199,8 \text{ daN}$$

$$\gamma_m = (\text{coeficiente de masas rotativas}) = 1,05 + 0,0025 \xi_2^2 = 1,218$$

La resistencia total, considerando la fuerza de inercia es:

$$R_i = R_a + R_r + R_g + \gamma_m \frac{P}{g} a$$

$$R_i = 8,3 + 22,4 + 199,8 + 1,218 \frac{1350}{9,81} a = 230,5 + 167,6 a \quad (3)$$

Revoluciones del motor en 2ª a 50 km/h:

$$n_m(50) = \frac{\xi_2 \cdot V_{50} \cdot 30}{\pi \cdot r \cdot (1-i)} = 3898 \text{ r.p.m}$$

Par motor $M_m = 11,8 \text{ m} \cdot \text{daN}$. Esfuerzo tractor en llanta:

$$F_t = \frac{11,8 \cdot 8,21 \cdot 0,85}{0,263} = 313,1 \text{ daN} \quad (4)$$

Iguando (3) y (4): $F_t = R_t$, se obtiene:

$$a = \frac{313,1 - 230,5}{167,6} = 0,49 \text{ m/s}^2$$

El valor anterior es la aceleración máxima que permite el esfuerzo tractor en llanta suministrado por el motor. A continuación calcularemos los límites que impone la adherencia.

2.1. Tracción delantera:

$$F_{zd} = \frac{P \cdot \cos \theta l_2 - \left(R_a + P \cdot \frac{a}{g} + P \cdot \text{sen} \theta \right) \cdot h}{L}$$

es decir,

$$F_{zd} = 621,48 - 30,48a$$

$$F_{adh} = F_{zd} \cdot \mu = (621,48 - 30,48a)0,4$$

Iguando la fuerza de tracción adherente a la resistencia total en función de la aceleración, ecuación (3):

$$a_1 = \frac{0,4 \cdot 621,48 - 230,5}{167,6 + 30,48 \cdot 0,4} = 0,10 \text{ m/s}^2$$

2.2. Tracción trasera:

$$F_{zt} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot l_1 + \left(R_a + P \cdot \frac{a}{g} + P \cdot \text{sen} \theta \right) \cdot h}{L}$$

es decir,

$$F_{z1} = 713,7 + 30,48 a$$

$$F_{\text{adh}} = F_{z1} \cdot \mu = 713,7 \cdot 0,4 + 30,48 \cdot 0,4 a$$

Igualando con la resistencia total dada por la ecuación (3).

$$a_2 = \frac{713,7 \cdot 0,4 - 230,5}{167,6 - 30,48 \cdot 0,4} = 0,35 \text{ m/s}^2$$

2.3. Tracción a las cuatro ruedas

$$F_t = P \cdot \cos \theta \cdot \mu = 1350 \cdot 0,989 \cdot 0,4 = 230,5 + 167,6 a$$

$$a_3 = 1,81 \text{ m/s}^2$$

En el caso 2.1 $a_1 < a$ $a_{1mx} = a_1 = 0,10 \text{ m/s}^2$

En el caso 2.2 $a_2 < a$ $a_{2mx} = a_2 = 0,36 \text{ m/s}^2$

En el caso 2.3 $a_3 > a$ $a_{3mx} = a = 0,49 \text{ m/s}^2$

Ejercicio 4.5.

Los datos característicos de un Renault Clio RL 1.1., proporcionados por el fabricante son los siguientes:

Datos aerodinámicos:

- Coeficiente aerodinámico C_x :0,33
- Área frontal A_f : 1,86 m²

Datos de pesos y dimensiones:

- Batalla L:2,472 m
- Peso del vehículo en O.M; P:.....810 kp
- Altura del centro de gravedad en O.M; h:.....0,600 m
- Peso sobre el eje delantero en O.M; F_{zd} :.....510 kp
- Peso sobre el eje trasero en O.M; F_{zt} :300 kp
- Peso máximo admisible P_{max} :..... 1250 kp

[Teoría de los vehículos automóviles.]

- Altura del centro de gravedad para P_{max} ; h_m ::0,680 m
- Peso sobre el eje delantero para P_{max} ; F_{zdm} :650 kp
- Peso sobre el eje trasero para P_{max} ; F_{zdm} :600 kp

Datos de motor y cadena cinemática:

- Par motor máximo M_{max} : 78,5 NAm a 2500 r.p.m.
- Potencia máxima H_{max} : 48 CV a 5250 r.p.m.

Como complemento de los datos relativos al grupo motopropulsor, se incluyen las curvas de par motor y potencia suministradas por el fabricante.

- Relación del grupo cónico ξ_c :3,571
- Relación de transmisión en primera ξ_1 :3,731
- Relación de transmisión en segunda ξ_2 :2,049
- Relación de transmisión en tercera ξ_3 : 1,321
- Relación de transmisión en cuarta ξ_4 :0,967
- Relación de transmisión en quinta ξ_5 :0,795
- Relación de transmisión en marcha atrás ξ_r :3,571

Datos de los neumáticos:

- Tipo y dimensiones: 145 70 R13 S
- Desarrollo L_n : 1,650 m

Datos de prestaciones:

- Velocidad máxima V_{max} : 146 Km/h
- Pendiente máxima superable J_{max} : 40%
- Aceleración 0-100 Km/h: 17 s
- Tiempo necesario para recorrer 1000 metros: 38 s

Referente al motor, se conoce la curva de par motor expresada por puntos:

n (r.p.m.)	1650	2000	2500	4500	6000
PAR NAm	61,8	72,6	78,5	64,75	48,07
ω_m (r.p.s.)	27,5	33,3	41,7	75	100

Mediante los datos proporcionados por el fabricante se calculan otros con una utilidad mayor, estos son:

Valores derivados de los datos facilitados por el fabricante:

- Distancia entre C.D.G. y tren delantero l_1 :.....0,916 m
- Distancia entre C.D.G. y tren trasero l_2 :.....1,556 m
- Radio nominal del neumático r :0,2666 m
- Radio efectivo de la rueda r_e :.....0,26261 m
- Radio bajo carga de la rueda r_c :0,25862 m

Datos supuestos para la realización de los cálculos:

- Densidad del aire CN; ρ :..... 1,225 kg/m³
- Resistencia a la rodadura f_r :0,014

Se pide:

- 1) Obtención de la curva de par motor.
- 2) Curvas de resistencia al avance-velocidad. Curvas de potencia-velocidad.
- 3) Fuerza tractora máxima limitada por la adherencia.
- 4) Relaciones de transmisión.
- 5) Análisis comparativo de las relaciones de transmisión calculadas y las proporcionadas por el fabricante.
- 6) Esfuerzo tractor en llanta y esfuerzo resistente en función de la velocidad de circulación del vehículo.
- 7) Determinar la rampa máxima y la velocidad de circulación para cada relación de transmisión.
- 8) Aceleraciones: máxima en el arranque y media hasta alcanzar una cierta velocidad.
- 9) Tiempo de aceleración de 0 a 100 Km/h. Tiempo necesario para recorrer 1000 m con el vehículo inicialmente parado.

1) OBTENCIÓN DE LA CURVA DE PAR MOTOR

Para una correcta evaluación de las prestaciones del vehículo, se ha aproximado la curva de par motor en función del número de revoluciones del motor expresado en r.p.s., mediante un polinomio de 4 grado de la forma siguiente:

$$M_a = M_{a0} + K_1 \omega_m + K_2 \omega_m^2 + K_3 \omega_m^3 + K_4 \omega_m^4 \quad (1)$$

Para la obtención de los coeficientes del polinomio se emplean los cinco puntos de funcionamiento del motor, con par máximo, de la tabla dada en el enunciado.

Una vez calculados los coeficientes del polinomio se obtienen los siguientes resultados:

- * $M_{a0} = -140,8613105 \text{ NAm}$
- * $K_1 = 14,19198867 \text{ NAm/(r.p.s.)}$
- * $K_2 = -0,326732154 \text{ NAm/(r.p.s.)}^2$
- * $K_3 = 3,171937165 \cdot 10^{-3} \text{ NAm/(r.p.s.)}^3$
- * $K_4 = -1,134884113 \cdot 10^{-5} \text{ NAm/(r.p.s.)}^4$

2) CURVAS DE RESISTENCIA AL AVANCE-VELOCIDAD Y CURVAS DE POTENCIA-VELOCIDAD.

Para el cálculo de las curvas de resistencia al avance-velocidad, se han empleado las siguientes expresiones:

$$R = R_r + F_{xa} + R_g \quad (2)$$

Donde:

$$R_r = f_r P \cos \theta = 0,014 m g \cos \theta \quad \theta = \arctg \frac{J}{100} \quad (3)$$

$$F_{xa} = \frac{1}{2} \rho C_x A_f V^2 \quad (4)$$

con: $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

$$R_g = P \sin \theta = m g \sin \theta = m g \sin \left[\arctg \frac{J}{100} \right] \quad (5)$$

Se ha empleado el valor exacto del ángulo de la pendiente, en lugar de su aproximación, debido a que para pendientes del 50% la aproximación del ángulo de la pendiente por su tangente tiene menor exactitud.

La suma de las tres últimas ecuaciones conduce a una expresión cuadrática que se ha representado en la figura 4.31.

Para la obtención de las curvas de potencia en llanta velocidad, se ha multiplicado la ecuación 2 por la velocidad de avance, obteniéndose una cúbica. La gráfica obtenida está representada en la figura 4.32.

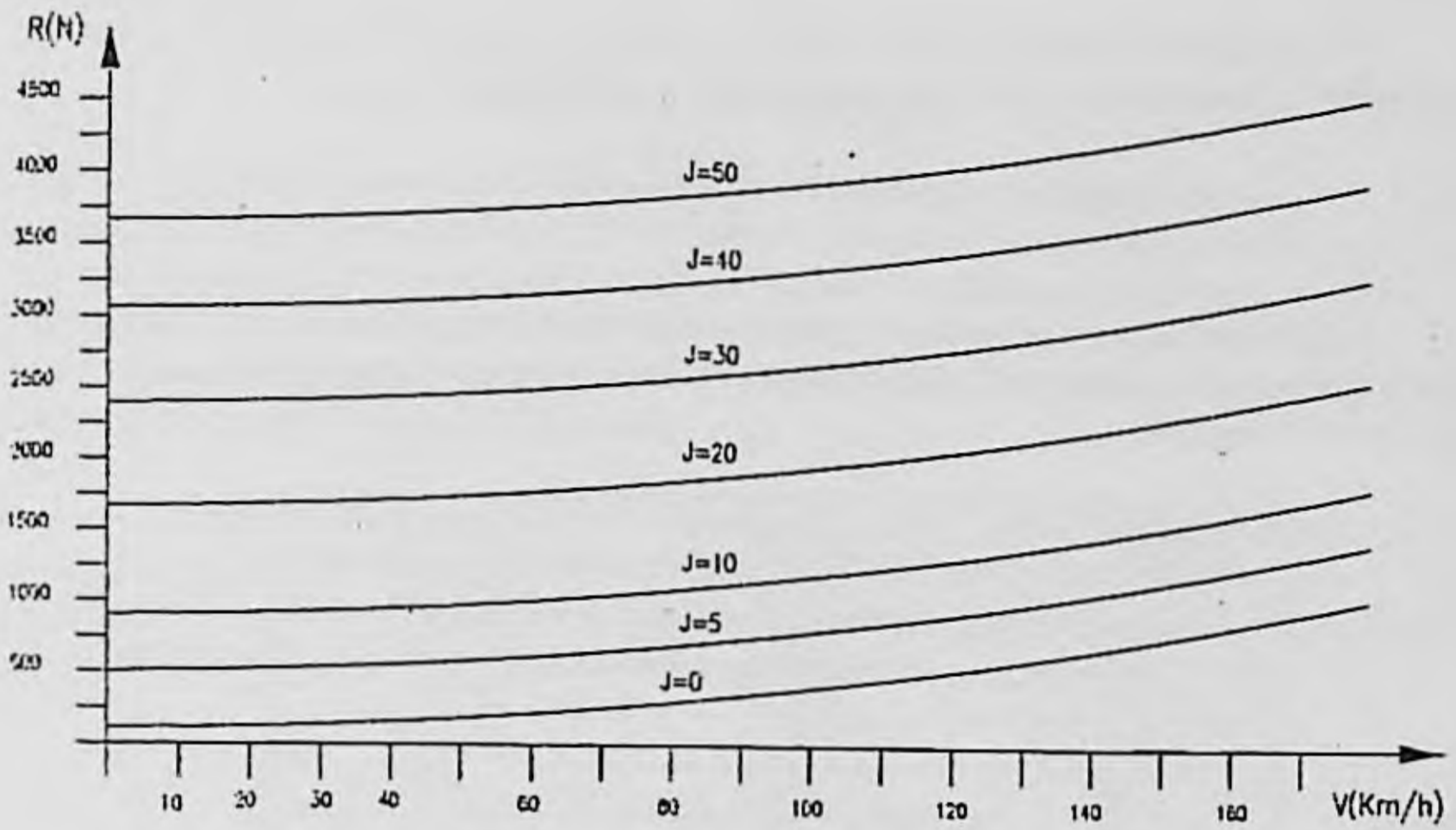


Figura 4.31. Curvas de resistencia al avance-velocidad, para diversas pendientes.

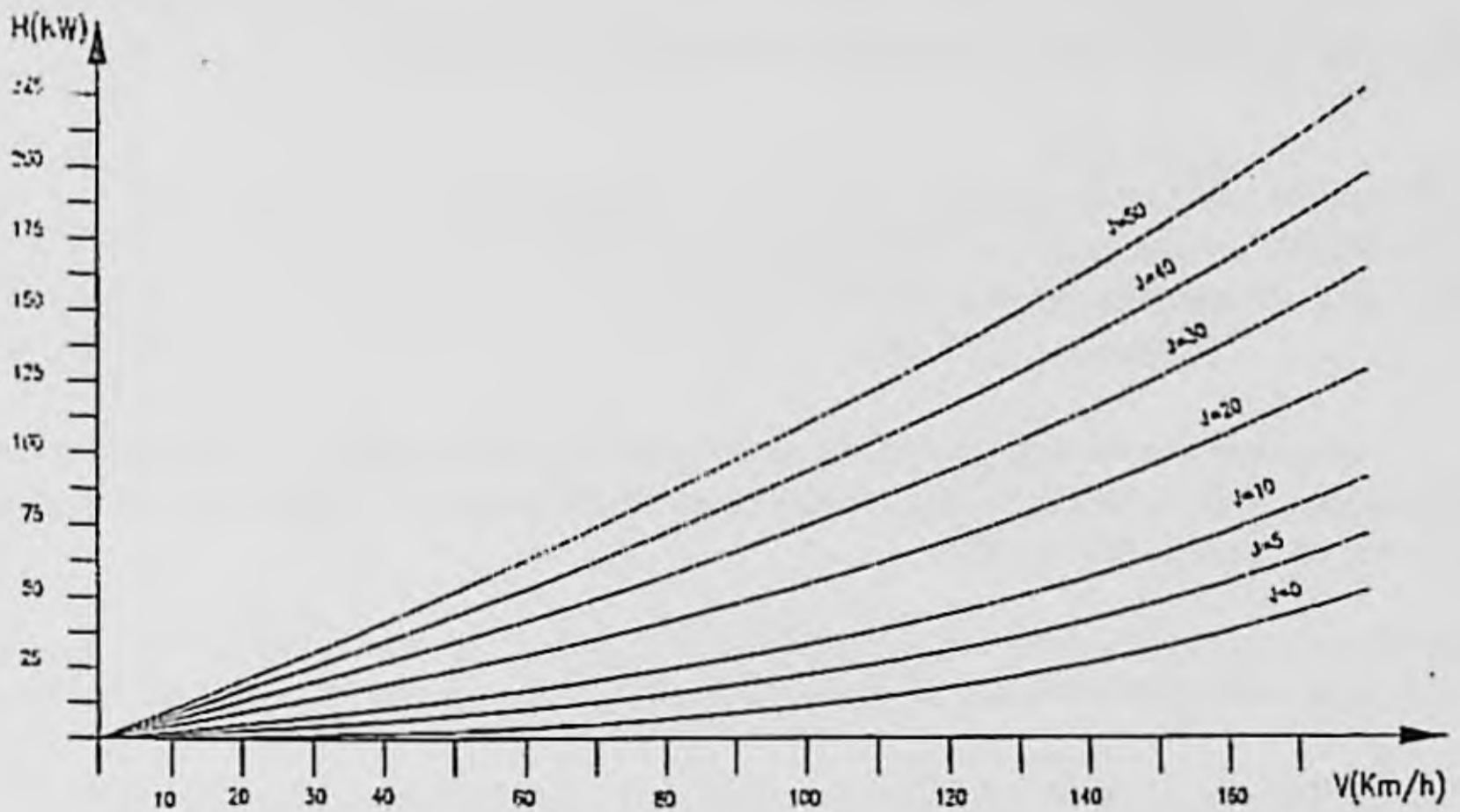


Figura 4.32. Curvas de potencia en llanta-velocidad, para diversas pendientes.

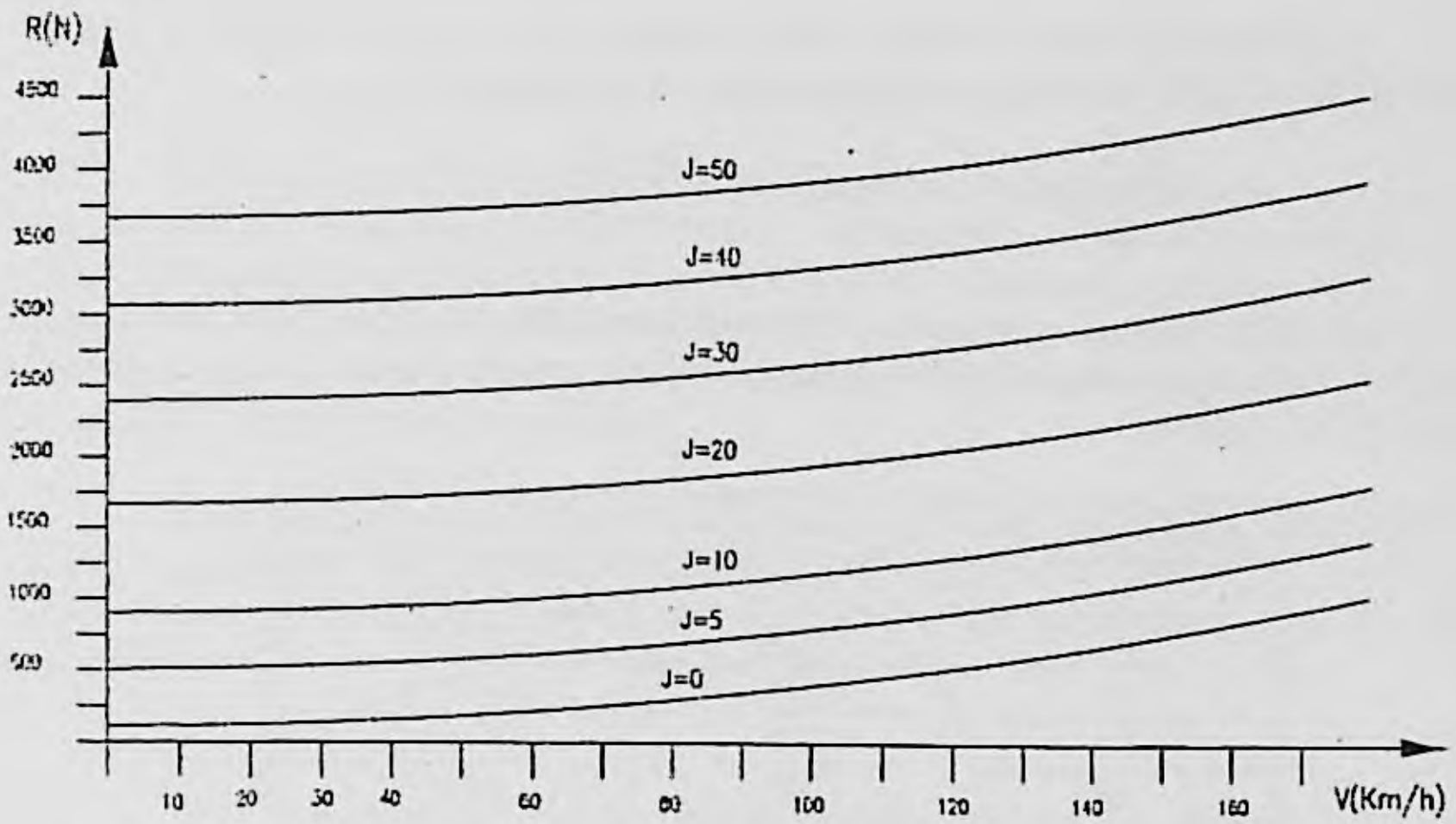


Figura 4.31. Curvas de resistencia al avance-velocidad, para diversas pendientes.

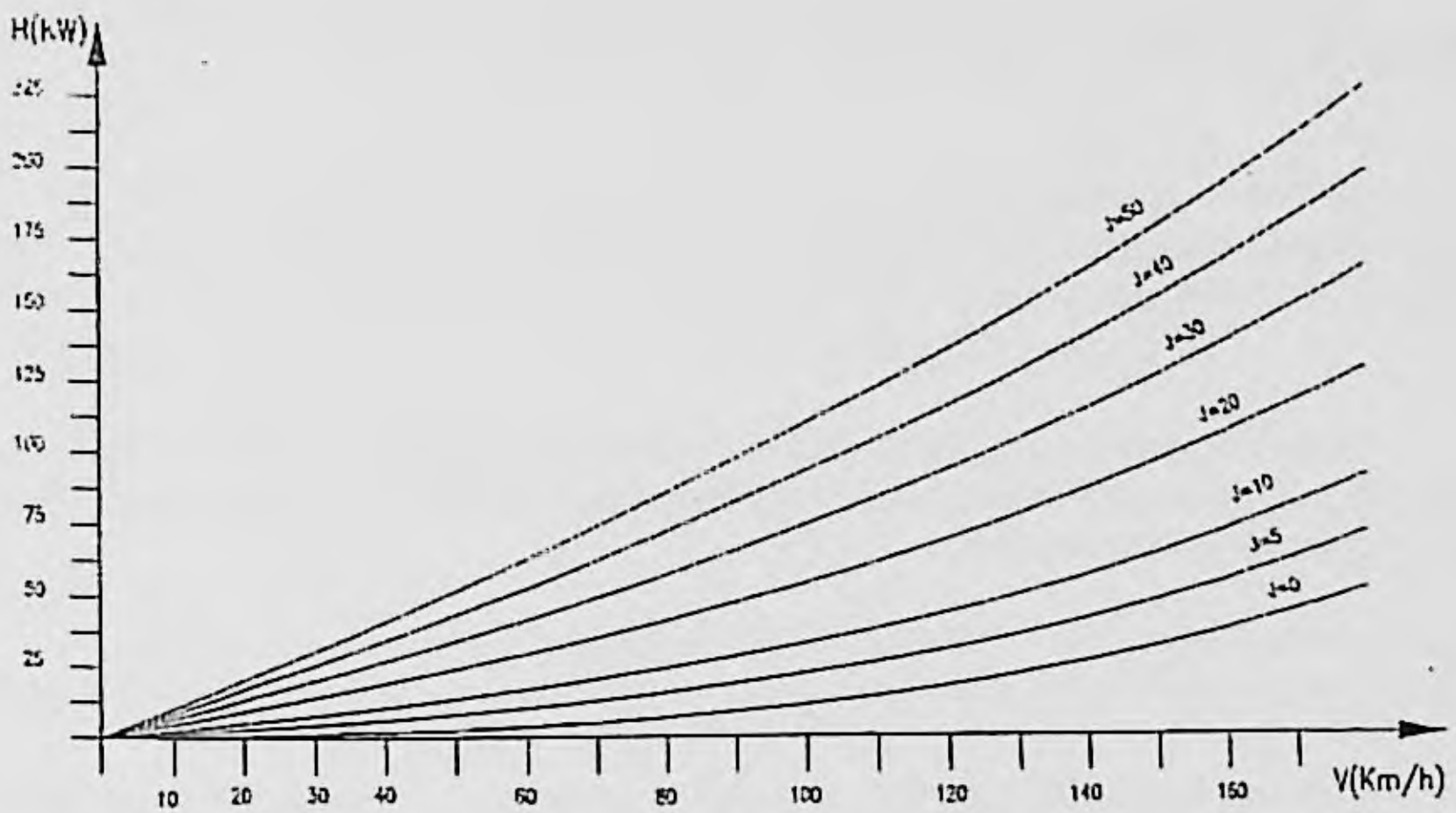


Figura 4.32. Curvas de potencia en llanta-velocidad, para diversas pendientes.

3) **FUERZA TRACTORA MÁXIMA LIMITADA POR LA ADHERENCIA.**

El vehículo en estudio tiene tracción delantera, la expresión empleada para la obtención de la fuerza tractora máxima limitada por la adherencia es:

$$F_{Tdm} \times = \mu P \cos \theta \frac{l_2 + h f_r}{L + \mu h} \quad (6)$$

Resolviendo la ecuación 6 con valores de adherencia ($\mu = 0,4$ y $\mu = 0,8$) y para diversas pendientes, se obtienen los siguientes valores para la fuerza tractora máxima, expresados en Newtons:

Pendiente (%)	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,8$
0	1833,5	3368,8
10	1824,4	3352,1
20	1797,9	3303,4
30	1756,1	3226,7
40	1702,3	3127,9
50	1639,9	3013,1

4) **DETERMINACIÓN DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN.**

Para la determinación de las relaciones de transmisión del grupo motopropulsor, se parten de los siguientes cinco datos proporcionados por el fabricante:

- * $J_{max} = 40\%$
- * $V_{max} = 146 \text{ km/h.}$
- * Neumáticos 145 70 R 13.
- * Potencia máxima 48 CV a 5250 r.p.m.
- * Par máximo 78,5 NAM.

Se quiere obtener una caja de velocidades con cinco relaciones de transmisión. En primer lugar, se calcula la relación de transmisión correspondiente a velocidad máxima ξ_{η} . Para ello, se aplica la siguiente expresión:

$$\xi_{\eta} = \frac{\pi \cdot n_{ml} \cdot r_c}{30 \cdot V} = \frac{\pi \cdot 5250 \cdot 0,26261}{30 \cdot 40,555} = 3,5599 \quad (7)$$

Dicha relación solamente tiene en cuenta la posibilidad cinemática. Analizando la posibilidad dinámica correspondiente a velocidad máxima, se obtiene:

$$H(w) \eta = (R_r + F_{\omega}) V = (0,014 \cdot 810 \cdot 9,81 + 0,029009 \cdot V^2) \frac{V}{3,6} \quad (8)$$

Suponiendo un rendimiento del 88% para la quinta marcha, se obtiene la siguiente expresión:

$$31046,4 = 30,9015 \cdot V + 0,0080058 \cdot V^3 \quad (9)$$

Mediante la cual, una vez resuelta, se obtiene una velocidad máxima por el criterio dinámico de $V_{\text{máx}} = 148,6$ km/h. Se observa que la velocidad máxima obtenida es algo superior a la proporcionada por el fabricante, esto me induce a pensar que se ha supuesto un mejor rendimiento para la relación de transmisión que el que realmente posee el vehículo, que se han minorado las pérdidas por rodadura, o que la potencia efectiva suministrada por el motor a la transmisión es algo inferior a la indicada.

La relación de transmisión correspondiente a la primera velocidad, se obtiene del dato proporcionado por el fabricante sobre la rampa máxima que el vehículo puede superar, con la suposición de que el vehículo pueda arrancar en dicha rampa máxima, con una aceleración longitudinal $a = 0,5$ m/s². Para ello se emplea la expresión siguiente:

$$\xi_1 = \frac{R_T \cdot r_c}{M_{\text{mm}} \cdot x \cdot \eta} = 13,6184 \quad (10)$$

Siendo la resistencia R_T total para una pendiente del 40% la siguiente:

$$R_T = P \cdot \text{sen } \theta_m \cdot x + f_r \cdot P \cdot \cos \theta_m \cdot x + \frac{P}{g} \cdot a = 3459,4 \quad \text{N} \quad (11)$$

Se ha considerado un rendimiento $\eta = 0,85$ para la primera relación de transmisión. Se debe comprobar si la rampa del 40% es admisible por adherencia, o cual es el coeficiente de adherencia μ necesario para superar dicha pendiente. Para ello, se emplea la siguiente expresión:

$$F_{Td} = \mu \cdot \left(\frac{P \cos \theta}{L} \cdot l_2 - \frac{P a}{g L} h - \frac{F_{sa}}{L} h - \frac{P \text{sen } \theta}{L} h \right) \quad (12)$$

De donde se obtiene el valor del coeficiente de adherencia necesario para superar la pendiente del 40%. Dicho valor $\mu = 0,77$ es menor que el utilizado en los cálculos de 0,8.

$$\mu = \frac{F_{Td}}{\frac{P \cos \theta}{L} \cdot l_2 - \frac{P a}{g L} h - \frac{F_{sa}}{L} h - \frac{P \text{sen } \theta}{L} h} = \frac{3459,4}{4474} = 0,77 \quad (13)$$

La razón de la progresión geométrica K se puede obtener con ξ_q y con ξ_1 :

$$K = \left(\frac{\xi_q}{\xi_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{3,5599}{13,6184} \right)^{\frac{1}{5-1}} = 0,7150 \quad (14)$$

Ahora ya se pueden obtener las relaciones de transmisión de la caja de velocidades, conociendo la relación de transmisión del grupo cónico, $\xi_c = 3,571$.

$$\begin{aligned} \xi_{1'} &= \frac{\xi_1}{\xi_c} = \frac{13,6184}{3,571} = 3,813 \\ \xi_{2'} &= \xi_{1'} \cdot K = 2,727 \\ \xi_{3'} &= \xi_{2'} \cdot K = 1,950 \\ \xi_{4'} &= \xi_{3'} \cdot K = 1,394 \\ \xi_{5'} &= \xi_{4'} \cdot K = 0,997 \end{aligned} \quad (15)$$

5) ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS RELACIONES DE TRANSMISIÓN.

En la tabla siguiente, se muestran las relaciones de transmisión obtenidas y las proporcionadas por el fabricante.

	FABRICANTE			CALCULADAS		
	ξ_i	$1/\xi_i$	K_i	ξ_i	$1/\xi_i$	K_i
ξ_1	3,731	0,268	0,549	3,813	0,262	0,715
ξ_2	2,049	0,488	0,645	2,727	0,367	0,715
ξ_3	1,321	0,757	0,732	1,950	0,513	0,715
ξ_4	0,967	1,034	0,822	1,394	0,717	0,715
ξ_5	0,795	1,258		0,997	1,003	
Relación del grupo cónico $\xi_c = 3,571$						

De la comparación de las relaciones de cambio anteriores, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- * El diseñador ha optado por una primera un poco más larga que la calculada; 3,731 frente a 3,813. El motivo que se supone es el de la necesidad de optar por un número entero de dientes en los piñones del cambio.
- * El diseñador ha optado por una 5ª mucho más larga que la necesaria para obtener la velocidad máxima con potencia máxima. Se supone que ha obrado así con la intención de mejorar el consumo circulando en carretera, la velocidad de par máximo en 5ª es de 90 km/h, que será muy próxima a la de mínimo consumo específico del motor.
- * La tercera, cuarta y quinta se encuentran muy próximas, esto induce a pensar que el diseñador ha procurado obtener un vehículo de más fácil manejo entre las velocidades de 50 km/h a velocidad máxima, el vehículo se encuentra optimizado para el uso en carretera.
- * La segunda se ha elegido de forma que cubra lo mejor posible el hueco existente entre primera y tercera, siendo penalizada la proximidad a la primera. En los gráficos siguientes, se observa que entre primera y segunda no se obtiene continuidad en la hipérbola óptima de transmisión, existiendo un hueco entre las dos velocidades anteriores. Para rampas del orden del 24%, el vehículo presenta mayores dificultades de ascenso, debiendo circular en primera y sin poder cambiar a segunda, aunque entre 10 y 40 km/h en primera, se encuentre sobrado de fuerza en dicha rampa.

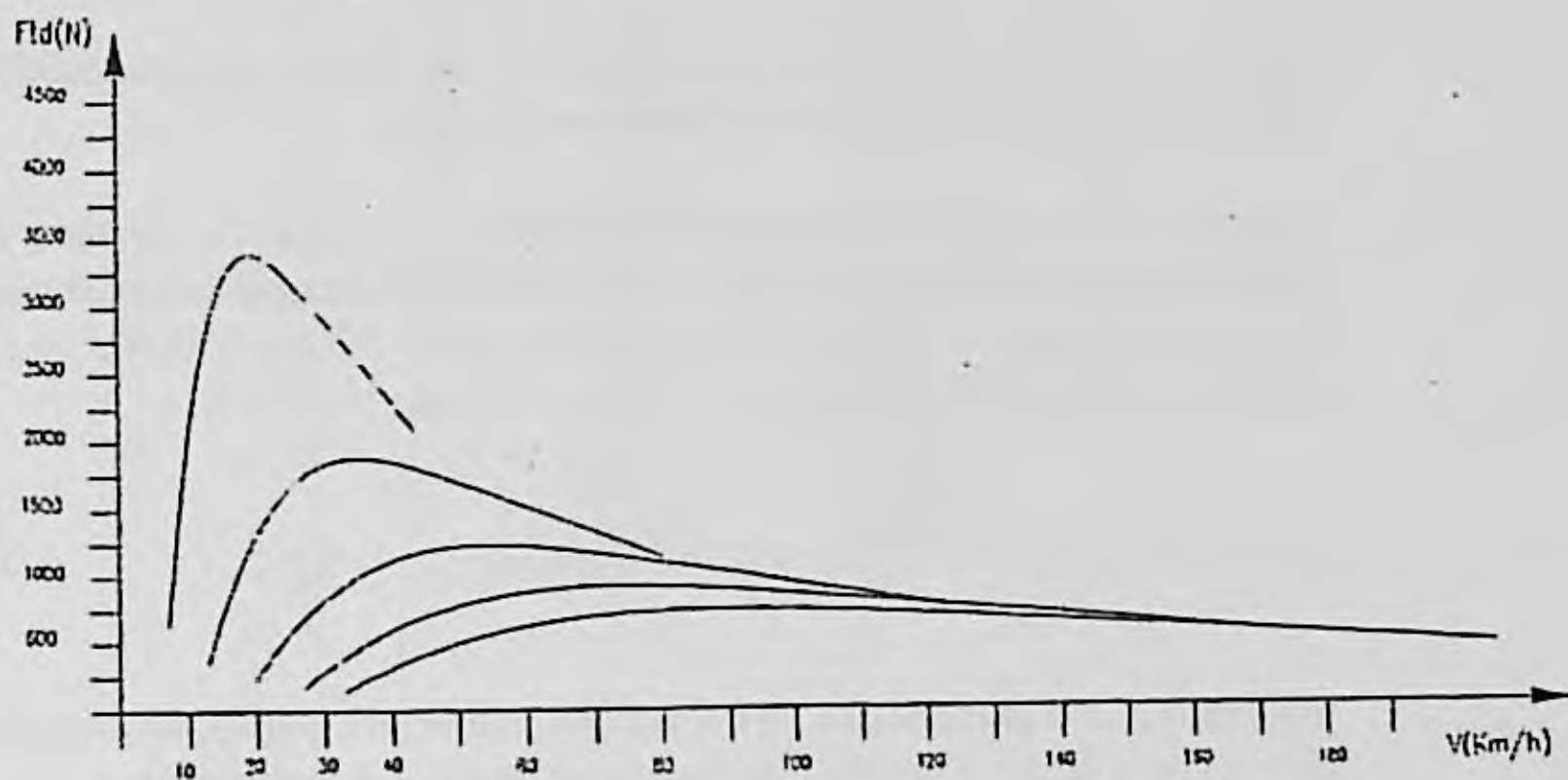


Figura 4.33. Curvas de fuerza tractora máxima limitada por el motor, para las relaciones de cambio adoptadas en el vehículo.

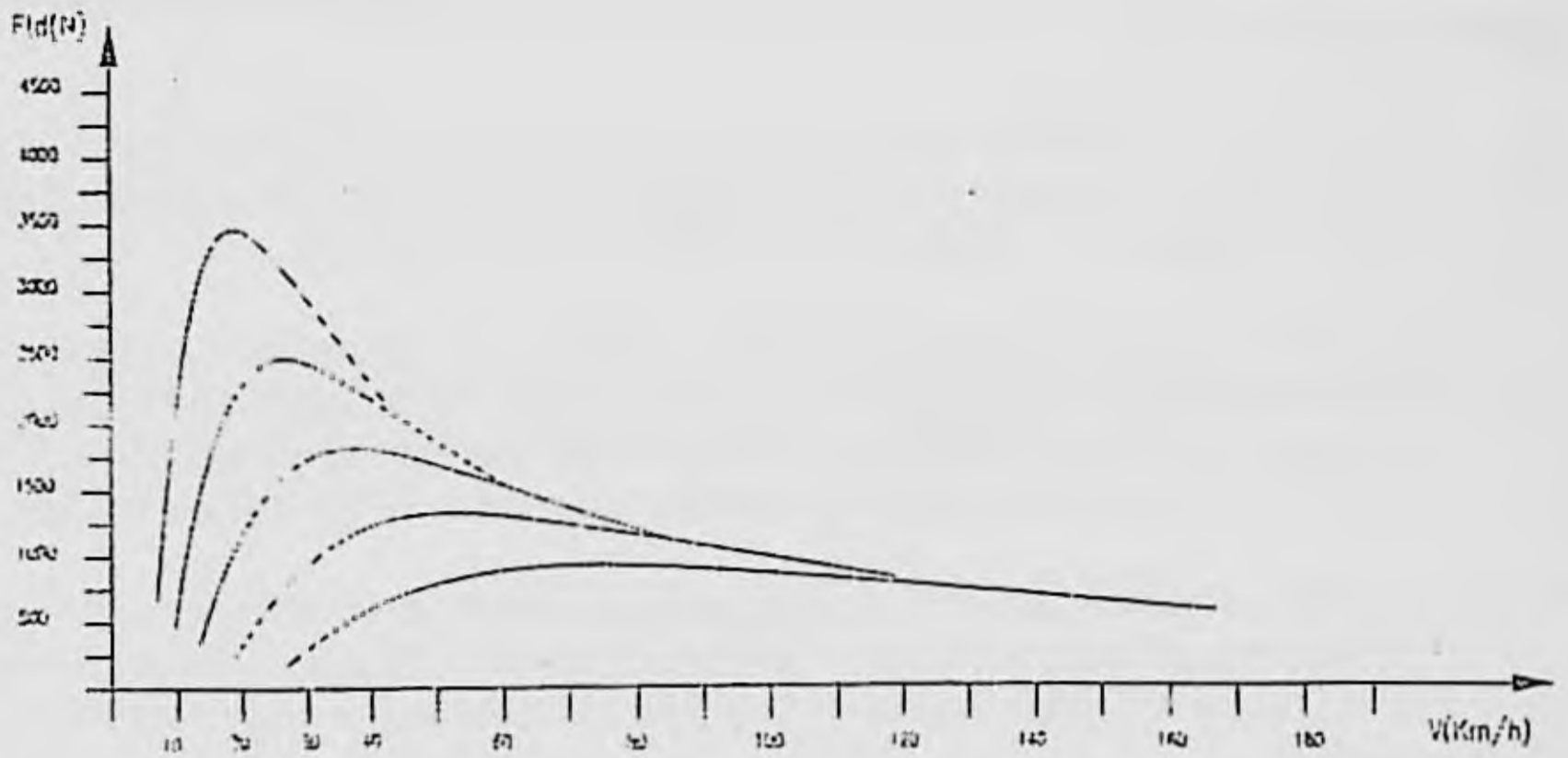


Figura 4.34. Curvas de fuerza tractora máxima limitada por el motor, para las relaciones de cambio calculadas para el vehículo.

6) GRÁFICOS DE ESFUERZOS EN LLANTA, TRACTORES Y RESISTENTES.

En las dos figuras siguientes se han representado los esfuerzos tractores en llanta y resistentes para las relaciones de cambio dadas por el fabricante y para las calculadas. El proceso para el dibujado de dichas curvas, es el siguiente:

- * Primero se dibujan las resistencias en llanta y la fuerza tractora máxima limitada por la adherencia, calculadas anteriormente.
- * Luego se calcula la velocidad de circulación, V, para un número de revoluciones determinado del motor y una relación de cambio seleccionada. Se varía el número de revoluciones del motor desde 1000 a 6000 r.p.m. La expresión utilizada es la siguiente, (V en km/h y n_{ml} en r.p.s.):

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_{ml} \cdot r_c}{\xi_i} \cdot 3,6 = 5,84944 \cdot \frac{n_{ml}}{\xi_i} \quad (16)$$

- * Para cada punto (abscisa), de velocidad calculada con la expresión anterior, se calcula la fuerza disponible en llanta con la siguiente expresión:

$$F_{Td} = \frac{M_m \cdot \eta_i \cdot \xi_i}{r_c} = 37,35575 \cdot \eta_i \cdot \xi_i \cdot M_m \quad (17)$$

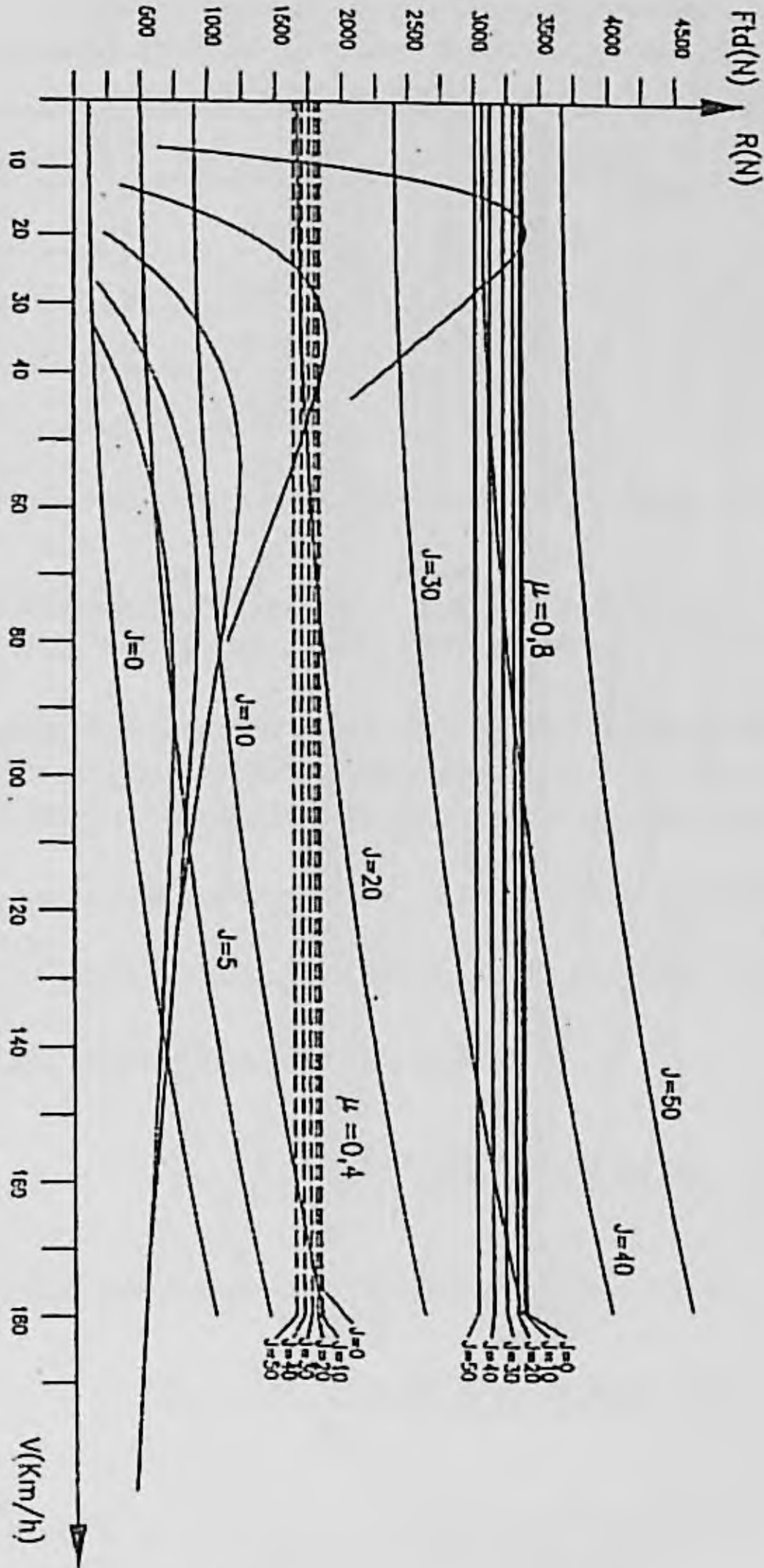


Figura 4.35.

Curvas de esfuerzos en llanta tractores y resistentes, para las relaciones de cambio adoptadas por el fabricante.

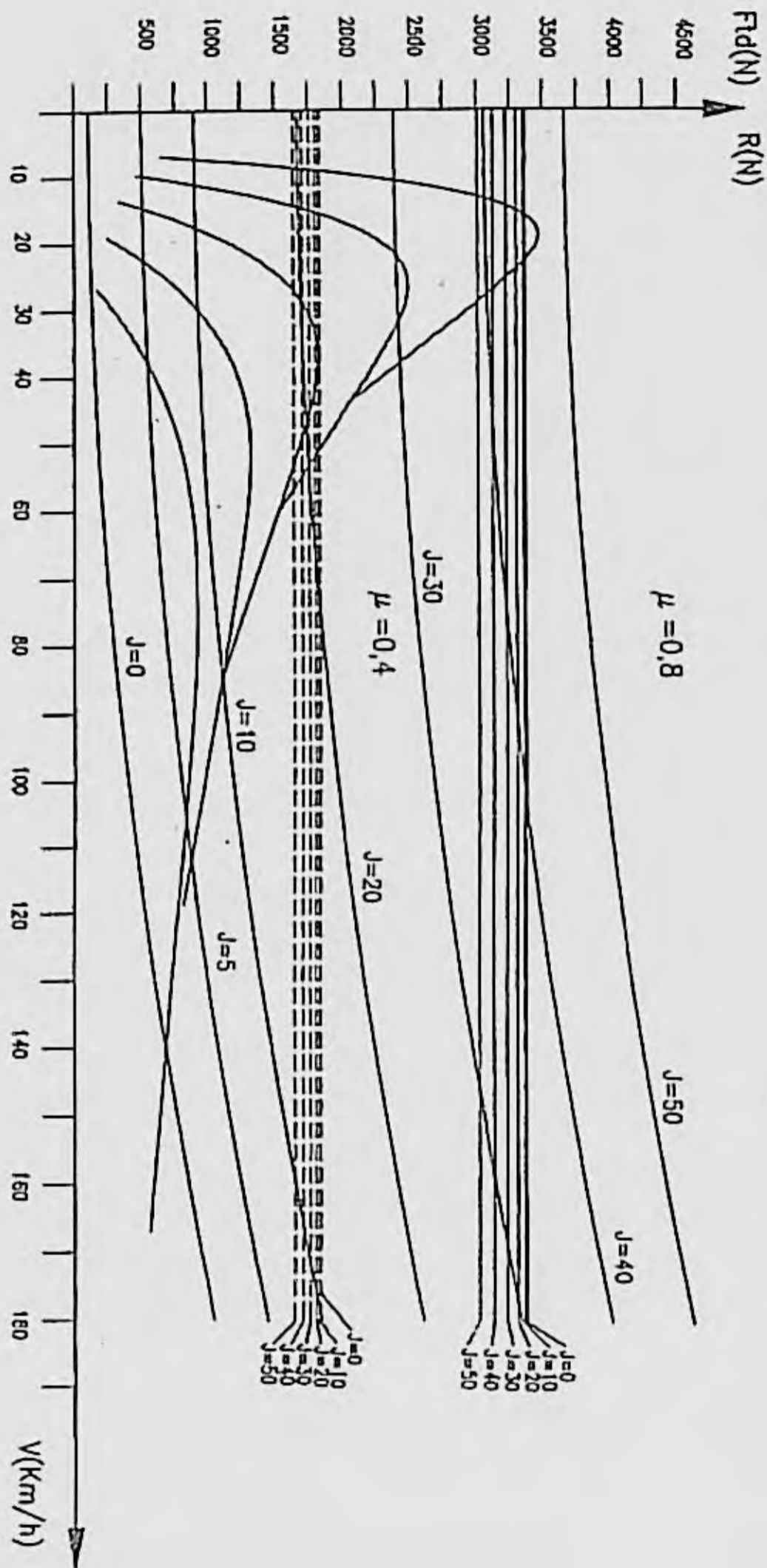


Figura 4.36. Curvas de esfuerzos en llanta tractores y resistentes, para las relaciones de cambio calculadas.

El rendimiento adoptado para cada velocidad se expresa en la tabla siguiente. La fuerza tractora delantera F_{Td} está expresada en Newtons, cuando el par motor se encuentra expresado en N . m. El par motor se obtiene para número de revoluciones del motor en función del polinomio de cuarto grado del par motor calculado con anterioridad.

Relación	Rendimiento	Fabricante	Calculada
ξ'_1	0,85	13,326	13,618
ξ'_2	0,86	7,318	9,739
ξ'_3	0,88	4,718	6,964
ξ'_4	0,9	3,454	4,979
ξ'_5	0,88	2,840	3,561

7) **DETERMINACIÓN DE LA RAMPA MÁXIMA Y VELOCIDAD DE CIRCULACIÓN PARA CADA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN.**

Para determinar la rampa máxima y la velocidad de circulación para cada relación de transmisión del vehículo, se impone la condición de que los esfuerzos tractores en llanta proporcionados por el motor sean iguales y tangentes a los esfuerzos resistentes en llanta.

El par motor dado en NAm con w_m en r.p.s. tiene la expresión:

$$M_m = - 140,86 + 14,192 w_m - 3,267 10^{-1} w_m^2 + 3,172 10^{-3} w_m^3 - 1,135 10^{-5} w_m^4 \quad (18)$$

La fuerza tractora delantera F_{Td} en Newtons es:

$$F_{Td} = \eta_i \cdot \xi_i \cdot \frac{M_m}{r_c} = 3,867 \cdot \eta_i \cdot \xi_i \cdot M_m \quad (19)$$

La velocidad de circulación V en km/h con w_m en r.p.s. es:

$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot w_m \cdot r_c}{\xi_i} \cdot 3,6 = 6,030 \cdot \frac{w_m}{\xi_i} \quad (20)$$

El número de revoluciones del motor w_m en función de la velocidad de circulación para cada relación de transmisión es de la expresión anterior:

$$w_m = \frac{V \cdot \xi_i}{6,030} = 0,166 \cdot \xi_i \cdot V \quad (21)$$

La fuerza tractora en llanta F_{Td} en función de la velocidad de circulación V y de cada relación de transmisión será:

$$F_{Td} = 3,267 \cdot \eta_i \cdot \xi_i \cdot \left[-140,86 + 14,192 \cdot 0,166 \cdot \xi_i \cdot V - 3,267 \cdot 10^{-1} \cdot (0,166 \cdot \xi_i \cdot V)^2 + 3,172 \cdot 10^{-3} \cdot (0,166 \cdot \xi_i \cdot V)^3 - 1,135 \cdot 10^{-5} \cdot (0,166 \cdot \xi_i \cdot V)^4 \right] \quad (22)$$

La resistencia total al avance en Newtons en función de la velocidad y la rampa es:

$$R = 111,2454 \cdot \cos \theta + 2,901 \cdot 10^{-2} \cdot V^2 + 7946,1 \cdot \sin \theta \quad (23)$$

Las dos condiciones a cumplir son las siguientes:

$$\begin{aligned} F_{Td} &= R \\ \frac{\partial F_{Td}}{\partial V} &= \frac{\partial R}{\partial V} \end{aligned} \quad (24)$$

Las derivadas parciales, respecto a la velocidad de avance V , de la fuerza tractora en llanta F_{Td} y de la resistencia al movimiento R son:

$$\frac{\partial F_{Td}}{\partial V} = 3,267 \cdot \eta_i \cdot \xi_i \cdot \left[2,356 \cdot \xi_i - 0,018 \cdot \xi_i^2 \cdot V + 4,353 \cdot 10^{-5} \cdot \xi_i^3 \cdot V^2 - 3,447 \cdot 10^{-8} \cdot \xi_i^4 \cdot V^3 \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial R}{\partial V} = 0,05802 \cdot V \quad (26)$$

La adherencia mínima necesaria para superar las rampas máximas se calcula mediante la expresión:

$$\mu = \frac{F_{Td}}{\frac{P \cos \theta}{L} - \frac{F_{xa}}{L} - \frac{P \sin \theta}{L}} \quad (27)$$

Resolviendo las ecuaciones de 24, para las cinco relaciones de transmisión se obtienen los siguientes resultados:

	ξ_i	η_i	V_c (km/h)	F_{Td} (N)	θ (E)	J	μ
ξ_1	13,326	0,85	19,08	3395,11	24,41	45,37	0,90
ξ_2	7,318	0,86	34,23	1885,52	12,67	22,48	0,42
ξ_3	4,718	0,88	50,94	1239,10	7,62	13,38	0,26
ξ_4	3,454	0,9	64,96	914,69	4,92	8,61	0,19
ξ_5	2,839	0,88	73,26	715,21	3,24	5,65	0,15

8) **ACELERACIÓN MÁXIMA EN EL ARRANQUE Y ACELERACIÓN MEDIA HASTA ALCANZAR UNA CIERTA VELOCIDAD.**

Aceleración máxima en el arranque:

El par máximo en el arranque (sin tener en cuenta el incremento de par que supone la deceleración angular del motor cuando este se encuentra girando a un número de revoluciones superior al impuesto por la cadena cinemática, situación que se produce durante el embragado del arranque), será el correspondiente al par máximo en primera velocidad. La fuerza tractora máxima en el arranque será la correspondiente a dicho par.

$$F_{Tdm} \cdot x = 78,5 \cdot \eta_1 \cdot \xi_1 \cdot \frac{l}{r_c} = 3438,16 \quad N \quad (28)$$

Por la ecuación de equilibrio horizontal, (con $\gamma_m = 1,066$):

$$a_x = F_{Tdm} \frac{x}{m \cdot \gamma_m} = 3,98 \quad \frac{m}{s^2} \quad (29)$$

La adherencia necesaria para poder obtener esta aceleración, aprovechando la fuerza de tracción calculada en (28) es:

$$\mu = \frac{F_{Tdm} \cdot x \cdot L}{P l_2 - \frac{P}{g} \cdot a h} = 0,815 \quad (30)$$

8) TIEMPO DE ACELERACIÓN DE 0-100 KM/H, TIEMPO DE 0-1000 M SALIDA PARADA.

Para la resolución de las dos restantes cuestiones se ha empleado un método de integración del tipo Newton-Euler con intervalos de longitud variable, en función de la relación de cambio engranada en cada momento. Así en primera velocidad, el incremento adoptado es de 500 r.p.m. para el motor, en segunda de 300 r.p.m., en tercera de 200 r.p.m. y en cuarta de 50 r.p.m. Las hipótesis adoptadas para la realización de los cálculos, se enumeran en los párrafos siguientes.

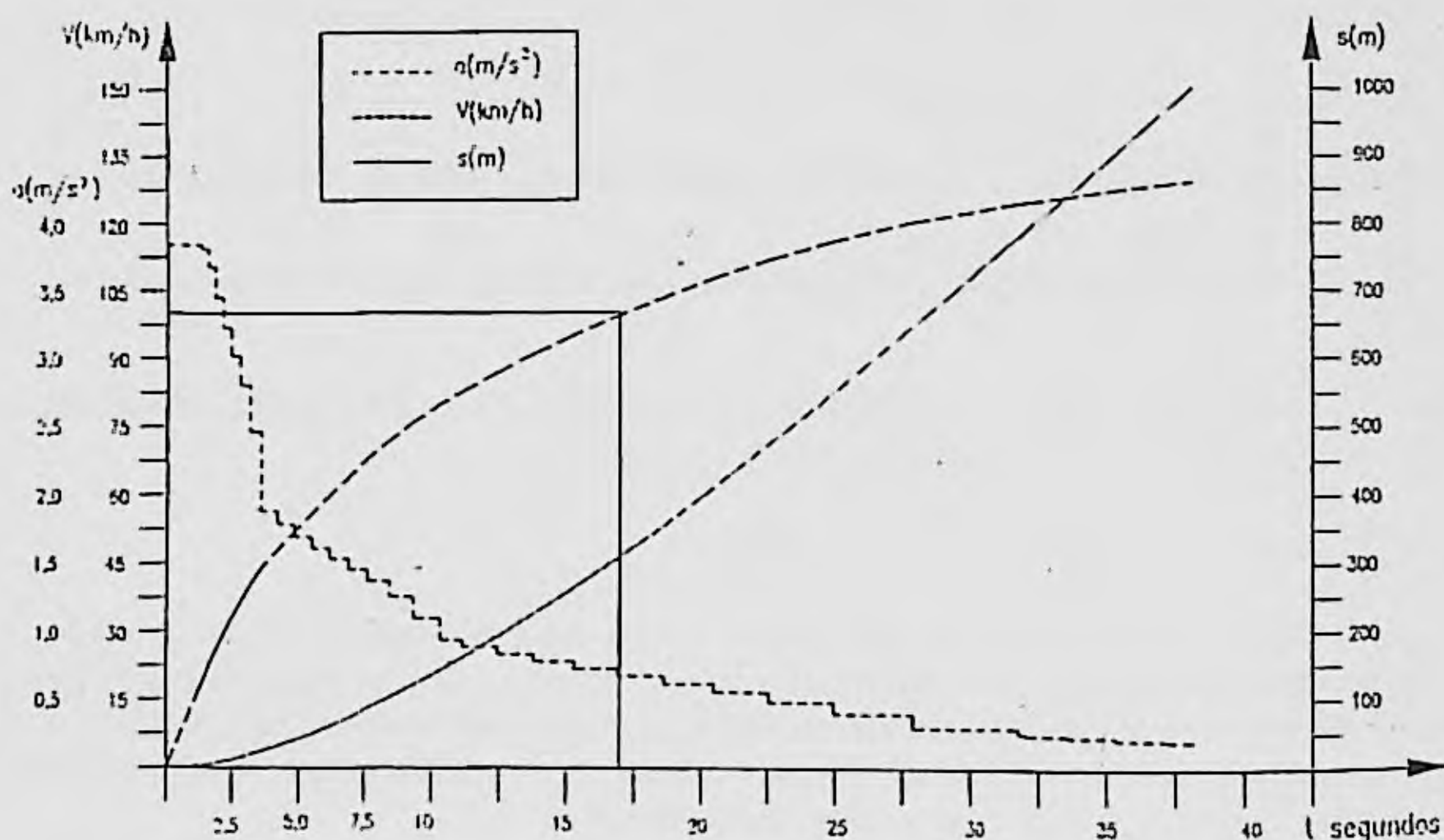


Figura 4.37. Aceleración media, velocidad y espacio recorrido en función del tiempo, en un proceso de aceleración con el vehículo inicialmente parado.

Hipótesis de cálculo:

- La fuerza tracción es constante en el intervalo de cálculo.
- Las fuerzas resistentes permanecen constantes en el intervalo de cálculo.
- Al ser los cambios de marcha muy rápidos se supone que el incremento de tiempo necesario es nulo.

- Se determina una aceleración media en cada intervalo de cálculo y, así mismo, la aceleración media que correspondería a un movimiento uniformemente acelerado para alcanzar la velocidad final desde vehículo parado y en el mismo tiempo total acumulado.
- Entre el momento del arranque y hasta que el vehículo alcanza la velocidad correspondiente al par máximo, se considera que existe deslizamiento en el embrague, pero se trasmite dicho par máximo.

Los resultados obtenidos para la aceleración media en cada intervalo de cálculo, la velocidad alcanzada y el espacio recorrido en función del tiempo, se pueden ver en la figura 4.37.

En la figura 4.38, se pueden encontrar los valores correspondientes a las r.p.m. del motor en función de la velocidad del vehículo y también de la aceleración media para alcanzar una velocidad determinada.

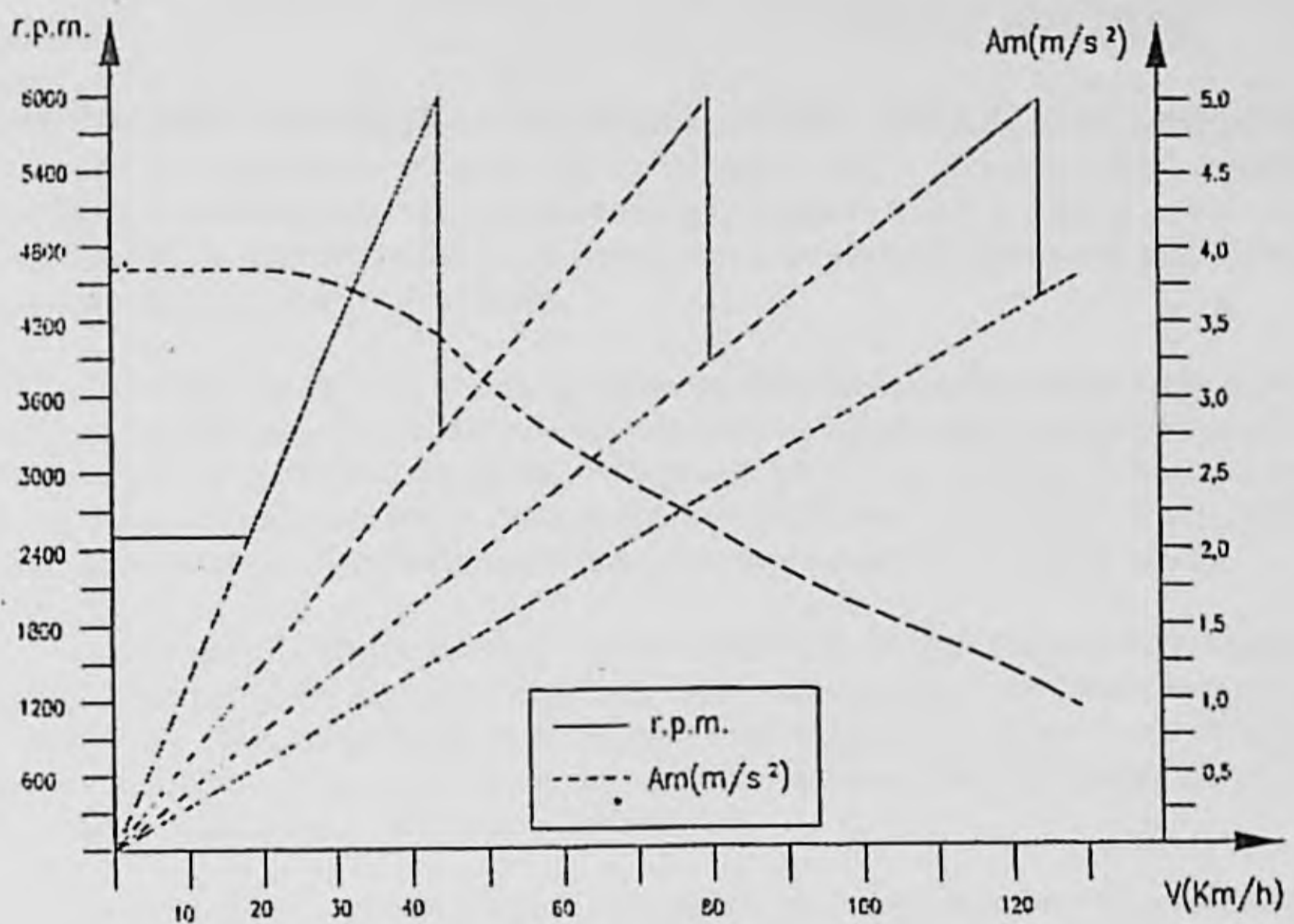


Figura 4.38. Aceleración media hasta alcanzar una velocidad y r.p.m. del motor en función de la velocidad, en un proceso de aceleración con el vehículo inicialmente parado.

Comparando los datos obtenidos para las prestaciones del vehículo mediante los cálculos realizados y los proporcionados por el fabricante se obtienen los siguientes valores:

	Calculados	Fabricante
Aceleración 0-100 km/h:	23 s.	17 s.
Tiempo necesario para recorrer 1000 metros:	4 s.	38 s.

Se puede observar que los valores obtenidos mediante el cálculo empleado, son prácticamente iguales a los proporcionados por el fabricante. Las pequeñas diferencias encontradas son debidas a las hipótesis utilizadas en dichos cálculos.

* **BIBLIOGRAFIA**

Referencias: [2], [7], [19], [20], [30], [32], [33], [39], [51] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

5.

FRENADO DE VEHÍCULOS AUTOMÓVILES

5.1. FRENADO. INTRODUCCION

Uno de los sistemas fundamentales de todo vehículo automóvil es el que le confiere la capacidad de reducir su velocidad hasta detenerlo, si es necesario, o si así lo decide el conductor. Se comprende que este sistema y el efecto que se pretende conseguir, es decir, detener o decelerar el vehículo, afecta de manera considerable a la seguridad. Por esta razón se ha prestado gran atención a su desarrollo y a la mejora de su eficiencia bajo diferentes condiciones operativas. Las reglamentaciones internacionales y las de muchos países, han atendido, también, al problema del frenado de los vehículos y definido características mínimas exigibles a diversos sistemas y vehículos.

En el presente capítulo se analizarán los conceptos fundamentales relacionados con el frenado de los vehículos y, especialmente, los relacionados con el reparto óptimo de frenada y con el proceso de deceleración y parada. Se prestará, así mismo, atención al efecto de los dispositivos que tienden a reducir o eliminar el riesgo de bloqueo de las ruedas, el cual, como se verá, produce efectos indeseables en el comportamiento dinámico de los vehículos.

En este tema, como en el anterior, se considerarán los vehículos como cuerpos rígidos, no dotados, por tanto, de suspensión. Así mismo, se considerará que el movimiento se produce en línea recta y sin acciones laterales, por lo que el análisis de los esfuerzos y movimientos asociados al proceso de frenado puede realizarse tomando como base el diagrama del cuerpo libre bidimensional que se representa en la figura 5.1.

En la figura 5.1. se ha representado al vehículo descendiendo sobre una pendiente de valor θ , ya que en este caso la componente del peso en dirección longitudinal ($P \sin\theta$) actúa como fuerza propulsora que ha de compensarse para frenar. Se ha mantenido la misma nomenclatura ya utilizada en la figura 4.5.

Se han representado los pares de frenado aplicados a las ruedas, M_{fd} y M_{fn} , las deceleraciones angulares de éstas: $\dot{\Omega}_d$ y $\dot{\Omega}_n$, y las fuerzas de frenado en el contacto rueda-

calzada: F_{rd} y F_{rt} . No se ha considerado, en cambio, la fuerza correspondiente a una masa remolcada, que se introduciría con gran facilidad en el modelo, porque su evaluación requeriría el análisis del frenado del remolque.

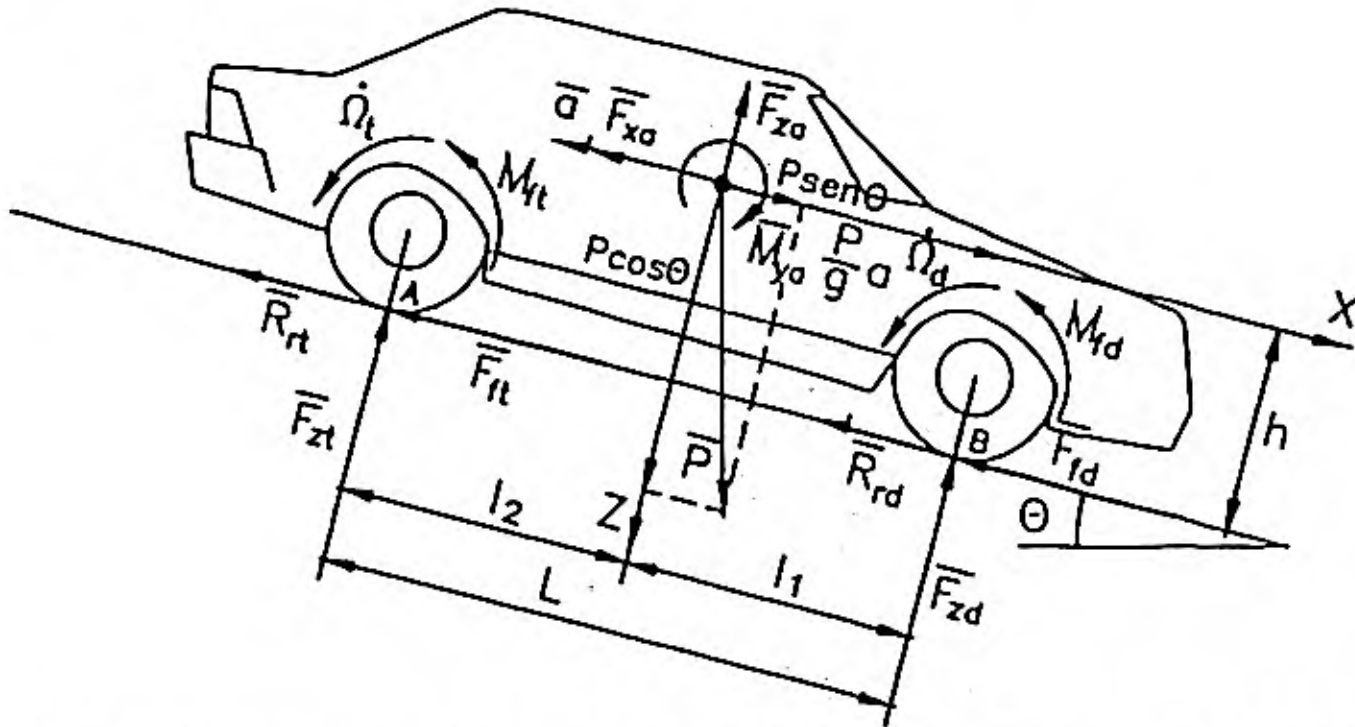


Figura 5.1. Modelo de cuerpo libre de un vehículo de dos ejes para el estudio del frenado.

5.2. FUERZAS Y MOMENTOS QUE ACTUAN EN EL PROCESO DE FRENADO

La mayoría de estos esfuerzos han sido representados en la figura 5.1. Faltan en ella algunos esfuerzos de inercia y los que ejerce el motor. A continuación comentaremos los aspectos más relevantes relacionados con cada uno de ellos.

5.2.1. Fuerza de frenado.

Las principales fuerzas retardadoras del vehículo, en el proceso de frenado, son las que se desarrollan en la superficie de las ruedas, como consecuencia de su contacto con la calzada, al serles aplicados pares que se oponen a su movimiento, es decir, las fuerzas de frenado.

Estas fuerzas, como las de tracción, tienen dos límites, uno el impuesto por la adherencia y el otro por el sistema de frenos. Normalmente éste último es más elevado, resultando crítico, en el proceso, el límite derivado del contacto rueda-calzada, que una vez rebasado conduce al bloqueo de las ruedas, cuyos efectos se analizarán en puntos posteriores.

Los esfuerzos que proporciona el sistema de frenado se traducen en sendos pares M_{rt} y M_{rd} , aplicados a las ruedas en sentido opuesto a su movimiento. Estos pares han de vencer la propia inercia de las masas rotativas asociadas a las ruedas, a la vez que producen la deceleración de la masa del vehículo en su movimiento de traslación. Suponiendo que I_{ej} representa el momento de inercia equivalente de las masas que giran conectadas a la rueda j y

que ésta adquiere una deceleración angular $\dot{\Omega}_j$, podrá establecerse la siguiente relación para dicha rueda:

$$F_{rj} r_c = M_{rj} - I_{ej} \dot{\Omega}_j \quad 5.1$$

$$F_{rj} = \frac{M_{rj} - I_{ej} \dot{\Omega}_j}{r_c} \quad 5.2$$

Siendo r_c el radio de la rueda bajo carga. Como se observa, el par que ha de resistir el contacto rueda-calzada ($F_{rj} \cdot r_c$) es igual al que proporciona el sistema de frenos a través de los elementos de fricción conectados a la rueda (M_{rj}), minorado por el par de inercia de las masas que giran conectadas a dicha rueda y que han de ser deceleradas.

5.2.2. Efecto de un desnivel longitudinal.

Cuando el vehículo circula sobre una superficie con desnivel θ , la componente del peso en dirección longitudinal, $P \sin \theta$, actuará como fuerza retardadora, cuando el vehículo asciende sobre una rampa y como fuerza propulsora del movimiento, durante descensos, por lo que deberá ser considerado en cálculos de frenado.

Por otra parte, el peso adherente es igual a $P \cos \theta$, por lo que se reduce el límite de la fuerza de frenado impuesto por la adherencia. Para valores usuales de θ , el coseno puede suponerse de valor unidad.

5.2.3. Resistencia a la rodadura.

La resistencia a la rodadura (ver 4.1.2., eq. 4.3.), interviene como fuerza retardadora aunque su influencia es muy pequeña frente a la fuerza de frenado.

5.2.4. Acciones aerodinámicas.

La resistencia aerodinámica al avance, F_{xa} , (ver 4.12, eq. 4.2.) solo tiene interés como fuerza retardadora a altas velocidades. A velocidades moderadas o bajas puede despreciarse frente al valor de la fuerza de frenado.

En los cálculos de frenado es frecuente no considerar la resistencia aerodinámica, con lo cual se comete un error que resulta favorable a la seguridad. En cualquier caso, ciertos cálculos para el dimensionamiento del sistema de frenado no pueden tenerla en consideración ya que, en la fase previa a la parada, en la cual pueden requerirse esfuerzos de frenado máximos, dicha resistencia es prácticamente nula.

La fuerza de sustentación aerodinámica F_{za} y el par de cabeceo M_{ya} , modifican las cargas dinámicas F_{zd} y F_{zt} que soportan las ruedas y, en consecuencia, la fuerza adherente. No obstante lo anterior, suelen, también, despreciarse estas acciones, cuyos valores solo tendrán interés práctico a muy altas velocidades, superiores a las de circulación de los vehículos normales. En cualquier caso, será necesario considerarlas en modelos con los que se pretenda una mayor precisión de simulación y cálculo del comportamiento del vehículo durante procesos de frenado a velocidades altas.

5.2.5. Resistencia del motor y transmisión.

La transmisión ofrece una resistencia que se compone de la inercia, la cual puede ser incluida en el momento de inercia equivalente considerado para las ruedas tractoras en el punto 5.2.1. y pérdidas de energía producidas en cada uno de sus elementos: cojinetes, engranajes, juntas, etc, las cuales se engloban en el rendimiento de la transmisión. El valor de esta resistencia puede ser despreciado en cálculos normales de frenado, debiendo tenerse en cuenta solo si se necesita una mayor precisión.

En cuanto a la resistencia que ofrece el motor, constituye, en muchos casos, un factor importante en el proceso de frenado. La potencia, como el par resistente, que ofrece el motor, en procesos de frenado en los que permanece conectado a las ruedas a través de la transmisión, es importante cuando gira a gran número de revoluciones y disminuye con la velocidad (figura 4.12) hasta hacerse pequeño en el último intervalo de un proceso de frenado. El par a la salida del motor, M_c , (figura 4.12), dependerá de la relación de la transmisión, ya que ésta condiciona la velocidad de giro. Por tanto, el valor de este par de frenado en las ruedas será:

$$M_{fm} = \frac{M_c \xi_j}{\eta_t} \quad 5.3$$

Siendo ξ_j la relación global de la transmisión para el escalonamiento j de su caja de velocidades (4.50) y η_t el rendimiento de la transmisión.

En bajadas prolongadas, especialmente si se trata de vehículos pesados, la retención efectuada por el motor es de suma importancia para preservar los elementos de fricción de los frenos de servicio, tanto de calentamientos como de mayores desgastes. En algunos casos se recurre a controlar el tiempo de apertura de válvulas, o a usar dispositivos de restricción de la salida en el escape, para aumentar la presión efectiva en los cilindros y, por tanto, el efecto frenante del motor.

Los convertidores de par usualmente transmiten potencia desde el motor a las ruedas y no en sentido contrario. En ese caso no es aprovechable el esfuerzo retardador del motor en procesos de frenado. En convertidores para vehículos pesados pueden incorporarse otros dispositivos de disipación de energía como, por ejemplo, elementos de restricción del flujo de fluido en circuitos internos del convertidor de par.

Por último, un comentario acerca del papel del motor en frenadas bruscas. Se ha dicho antes que el motor juega un papel importante como elemento de retención, especialmente en bajadas prolongadas y, en general, en procesos de baja o nula deceleración, para mantener constante la velocidad. Cuando se pretende frenar con elevada deceleración, ante una emergencia, por ejemplo, el motor, no solo no retiene, sino que debe ser frenado también, si permanece conectado a las ruedas a través de una transmisión mecánica, incrementando las exigencias sobre el sistema de freno.

Teniendo en cuenta la relación de transmisión y la inercia al giro que presenta el motor, puede calcularse un valor crítico de la deceleración, por encima del cual el motor debería ser desacoplado (desembragar) para mejorar el efecto del freno. Como una regla general, el motor debería ser desacoplado del resto de la transmisión siempre que se desee producir una deceleración apreciable y, desde luego, en frenadas de emergencia.

5.3. CONDICIONES IMPUESTAS POR LA ADHERENCIA. REPARTO OPTIMO DE FUERZAS DE FRENADO

5.3.1. Frenado de vehículos de dos ejes.

Como ha sido comentado antes, el bloqueo de las ruedas de un eje produce efectos negativos. Por una parte, es sabido que en situación de bloqueo (deslizamiento longitudinal unidad), el coeficiente de rozamiento entre neumático y calzada adquiere un valor inferior al de máxima adherencia, este último se produce para un valor del deslizamiento longitudinal de valor próximo al 20% (0.2). En consecuencia, cuando las ruedas se bloquean, disminuye el valor de la fuerza de frenado respecto a la máxima fuerza potencial que puede obtenerse en condiciones de rodadura.

El anterior efecto, con ser de gran interés, no es el más importante. El bloqueo de ruedas supone la superación de la adherencia neumático-calzada en la dirección longitudinal, razón por la cual, la interacción entre ambos elementos será incapaz de ofrecer una resistencia que equilibre una posible fuerza lateral, por muy pequeña que ésta sea. Como, por otra parte, resulta en la práctica imposible que se produzca una situación exenta de todo esfuerzo lateral (F_y , M_z o M_x) el vehículo podrá experimentar un desplazamiento lateral cuyo efecto es diferente según sea el eje cuyas ruedas bloquean.

Si el eje que bloquea es el trasero (figura 5.2) las fuerzas que actúan: de frenado y laterales en las ruedas delanteras, de inercia del vehículo y de rozamiento en las ruedas traseras, proporcionan un momento de guiñada resultante que crece con el ángulo de giro Ψ , hasta lograr que el vehículo gire completamente. En esta situación:

$$\frac{\partial M_z}{\partial \psi} > 0$$

5.4

lo cual produce inestabilidad direccional.

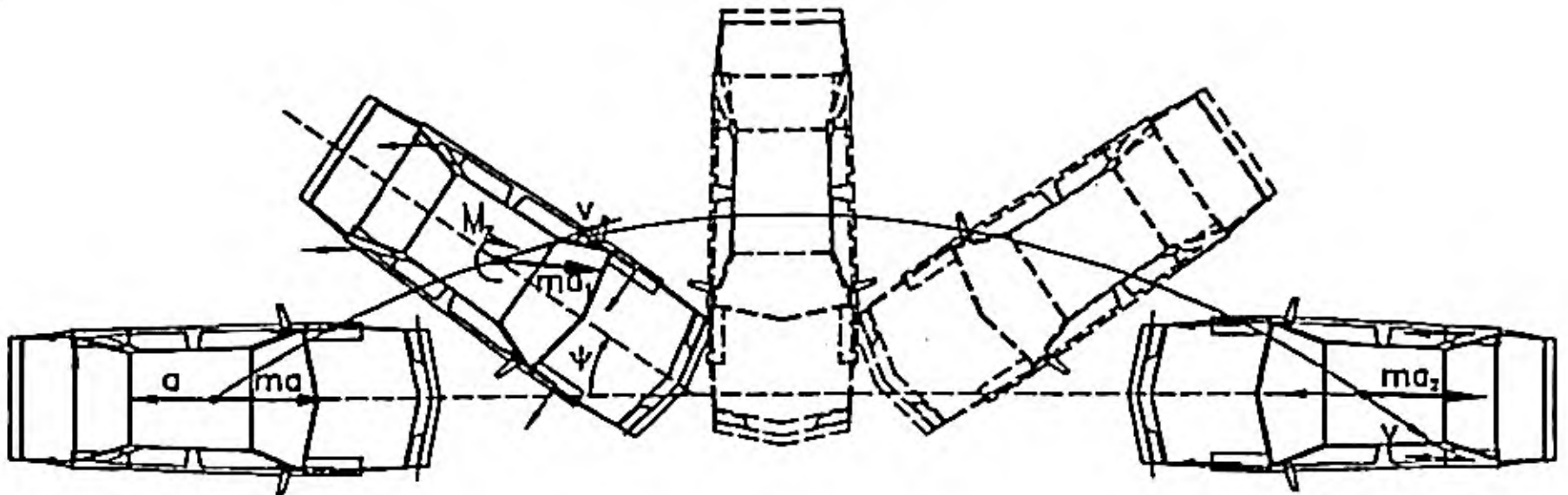


Figura 5.2. Comportamiento de un vehículo de dos ejes con bloqueo de las ruedas del eje trasero durante el frenado.

Si las ruedas que bloquean son las del eje delantero, entonces las fuerzas de inercia aplicadas al centro de gravedad y las de rozamiento o adherencia en las ruedas, proporcionan un momento de guiñada que disminuye con el valor con la perturbación lateral:

$$\frac{\partial M_z}{\partial \psi} < 0 \quad 5.5$$

Por lo que el sistema no es inestable. El ángulo de guiñada alcanzará un valor máximo, a partir del cual disminuirá, pudiendo cambiar de sentido, y produciendo una oscilación de guiñada, superpuesta al movimiento longitudinal. Esta situación puede originar pérdida de control direccional, menos grave, en términos generales, que la inestabilidad.

De lo anterior se deducen algunas conclusiones importantes:

- a) El bloqueo de las ruedas del eje trasero de un vehículo de dos ejes produce inestabilidad direccional.
- b) El bloqueo de las ruedas del eje delantero de un vehículo de dos ejes puede producir pérdida de control direccional.
- c) Debido a lo anterior, tanto en el diseño del sistema de frenos, como en la práctica de conducción, debe actuarse para evitar que se produzcan bloqueos de ruedas, tanto delanteras como traseras. Este es el objetivo de los sistemas antibloqueo que se estudiarán más tarde. Cuando el vehículo no dispone de estos dispositivos y ante una frenada brusca, especialmente en condiciones de baja adherencia de la

calzada, puede llegarse al bloqueo y será altamente probable que las ruedas de ambos ejes no alcancen al mismo tiempo las condiciones límite que lo provocan. En ese caso, resulta menos desfavorable que el bloqueo se produzca antes en las ruedas delanteras.

d) En todos los casos, el bloqueo hace disminuir el coeficiente de adherencia, pasando al valor de rozamiento en deslizamiento, lo cual, en el mejor de los casos, si no se produjese alteración grave de la trayectoria, haría aumentar la distancia de frenado respecto a la condición óptima de frenado (aprovechamiento máximo de la adherencia).

A la luz de lo anterior se comprenderá que el aprovechamiento de la adherencia disponible en cada eje constituye un problema crítico en el frenado. Tal aprovechamiento será máximo si el esfuerzo transmitido por el sistema de frenos a cada rueda es proporcional a la carga dinámica que soporta. Este aspecto y la manera de optimizar la frenada, minimizando los efectos negativos del bloqueo de ruedas, se estudia en los puntos siguientes.

5.3.1.1. Reparto óptimo de fuerzas de frenado.

Considerando los esfuerzos y dimensiones expresadas en la figura 5.1 y despreciando F_{za} y M_{ya} , por las razones expuestas en el punto 5.2.4., se obtiene, tomando momentos respecto a los puntos A y B:

$$F_{zd} = \frac{P l_2 \cos \theta + \left(\frac{P}{g} a - P \operatorname{sen} \theta - F_{xa} \right) h}{L} \quad 5.6$$

$$F_{zt} = \frac{P l_1 \cos \theta - \left(\frac{P}{g} a - P \operatorname{sen} \theta - F_{xa} \right) h}{L} \quad 5.7$$

Se ha mantenido aquí el mismo signo de $P \operatorname{sen} \theta$ que utilizamos en las expresiones (4.25) y (4.26), pero suponiendo que $\theta > 0$ en subidas y $\theta < 0$ en bajadas, pueden utilizarse las expresiones (5.6) y (5.7), con generalidad.

El equilibrio de fuerzas en dirección longitudinal permite establecer:

$$\frac{P}{g} a - P \operatorname{sen} \theta - F_{xa} = F_{rd} + F_{rt} + R_{rd} + R_{rt} = F_r + R_r \quad 5.8$$

Considerando: $F_r = \mu P$; $R_r = P \cos \theta f_i$; haciendo $\cos \theta \approx 1$ y sustituyendo (5.8) en (5.6) y (5.7):

$$F_{zd} = \frac{Pl_2}{L} + \frac{hP}{L} [\mu + f_r] \quad 5.9$$

$$F_{zt} = \frac{Pl_1}{L} - \frac{hP}{L} [\mu + f_r] \quad 5.10$$

Los primeros sumandos de los segundos miembros representan las cargas estáticas sobre los ejes delantero y trasero, y los segundos la transferencia de carga desde el trasero al delantero. Obsérvese que dicha transferencia es igual a la que produce una deceleración de valor $g (\mu + f_r)$, por tanto, una fuerza de inercia $g (\mu + f_r) \cong P/g$, aplicada en el centro de gravedad del vehículo.

Si denominamos K_{fd} y K_{ft} a las proporciones de esfuerzo de frenado con el que el sistema de frenos actúa sobre las ruedas delanteras y traseras, respectivamente;

$$K_{fd} = \frac{F_{fd}^s}{F_f^s} \quad 5.11$$

$$K_{ft} = \frac{F_{ft}^s}{F_f^s} \quad 5.12$$

$$K_{fd} + K_{ft} = \frac{F_{fd}^s + F_{ft}^s}{F_f^s} = 1 \quad 5.13$$

Se utiliza el superíndice s para significar que se trata de esfuerzos proporcionados por el sistema de frenos.

Para lograr un aprovechamiento óptimo de las cargas dinámicas expresadas en (5.9) y (5.10) durante el proceso de frenado debe cumplirse:

$$\frac{F_{fd}^a}{F_{fd}^s} = \frac{F_{ft}^a}{F_{ft}^s} \quad 5.14$$

Siendo F_{fd}^a y F_{ft}^a los valores de las fuerzas de frenado limitados por la adherencia.

De (5.11), (5.12) y (5.14) se obtiene, para el reparto óptimo de fuerzas de frenado:

$$\frac{K_{fd0}}{K_{ft0}} = \frac{F_{fd}^s}{F_{ft}^s} = \frac{F_{fd}^a}{F_{ft}^a} = \frac{\mu F_{zd}}{\mu F_{zt}} \quad 5.15$$

y sustituyendo (5.9) y (5.10):

$$\frac{K_{fd0}}{K_{ft0}} = \frac{l_2 + h(\mu + f_r)}{l_1 - h(\mu + f_r)} \quad 5.16$$

que es la expresión del reparto óptimo de esfuerzos de frenado entre las ruedas traseras y las delanteras. Así, por ejemplo, para un vehículo con las siguientes características:

$$\begin{aligned} l_1 &= 1.3 \text{ m} & h &= 0.5 \text{ m} \\ l_2 &= 1.2 \text{ m} & f_r &= 0.01 \text{ m} \end{aligned}$$

Circulando sobre una superficie de adherencia máxima $\mu = 0.85$

$$\begin{aligned} K_{rdo} &= 0.653 \\ K_{no} &= 0.347 \end{aligned}$$

Los anteriores valores significan que, en las condiciones expresadas, un reparto de esfuerzos de frenado del 65.2% en las ruedas delanteras y el 34.8% en las traseras, permitirá alcanzar la fuerza máxima de frenado limitada por la adherencia, en cada eje, al mismo tiempo, en una frenada límite, logrando que ésta sea óptima.

Considerando que la única causa de la transferencia de cargas entre ambos ejes fuese la inercia causada por la deceleración a del centro de gravedad, ($F_{za} = 0$, $\theta = 0$), la carga dinámica en cada uno de los ejes valdrá:

$$F_{zd} = \frac{Pl_2}{L} + \frac{Ph}{gL} a \quad 5.17$$

$$F_{z1} = \frac{Pl_1}{L} - \frac{Ph}{gL} a \quad 5.18.$$

La fuerza de frenado total, para alcanzar una deceleración a , es:

$$F_f = \frac{P}{g} a - R_r = P \left[\frac{a}{g} - f_r \right] \quad 5.19$$

De (5.11) y (5.12), suponiendo $F_{rd}^s = F_{rd}$ y $F_{rn}^s = F_{rn}$:

$$F_{rd}^s = K_{rd} F_f^s = K_{rd} P \left[\frac{a}{g} - f_r \right] \quad 5.20$$

Como por otra parte, de (5.17):

$$F_{rd}^a = \mu F_{zd} = \frac{\mu P}{L} \left[l_2 + \frac{a}{g} h \right] \quad 5.21$$

Igualando (5.20) y (5.21) y despejando a/g se tiene:

$$\left(\frac{a}{g}\right)_d = \frac{\frac{\mu l_2}{L} + f_r K_{rd}}{K_{rd} - \frac{\mu h}{L}} \quad 5.22$$

Haciendo lo mismo para las ruedas del eje trasero y considerando que $K_{rt} = 1 - K_{rd}$, se obtiene:

$$\left(\frac{a}{g}\right)_t = \frac{\frac{\mu l_1}{L} + (1 - K_{rd}) f_r}{1 - K_{rd} + \frac{\mu h}{L}} \quad 5.23$$

Si suponemos que μ representa el valor máximo de la adherencia, las expresiones (5.22) y (5.23) expresan las deceleraciones máximas, en unidades de g , que pueden obtenerse, hasta que las ruedas del eje delantero y trasero, respectivamente, alcanzan dicho valor máximo de la adherencia, a partir del cual puede sobrevenirse el bloqueo. Las anteriores expresiones permiten, pues, calcular límites que impone la adherencia a la deceleración por frenado, con las simplificaciones que ya fueron establecidas.

Las ecuaciones (5.22 y (5.23) pueden representarse tomando K_{rd} como variable independiente, obteniéndose el gráfico de la figura 5.3.

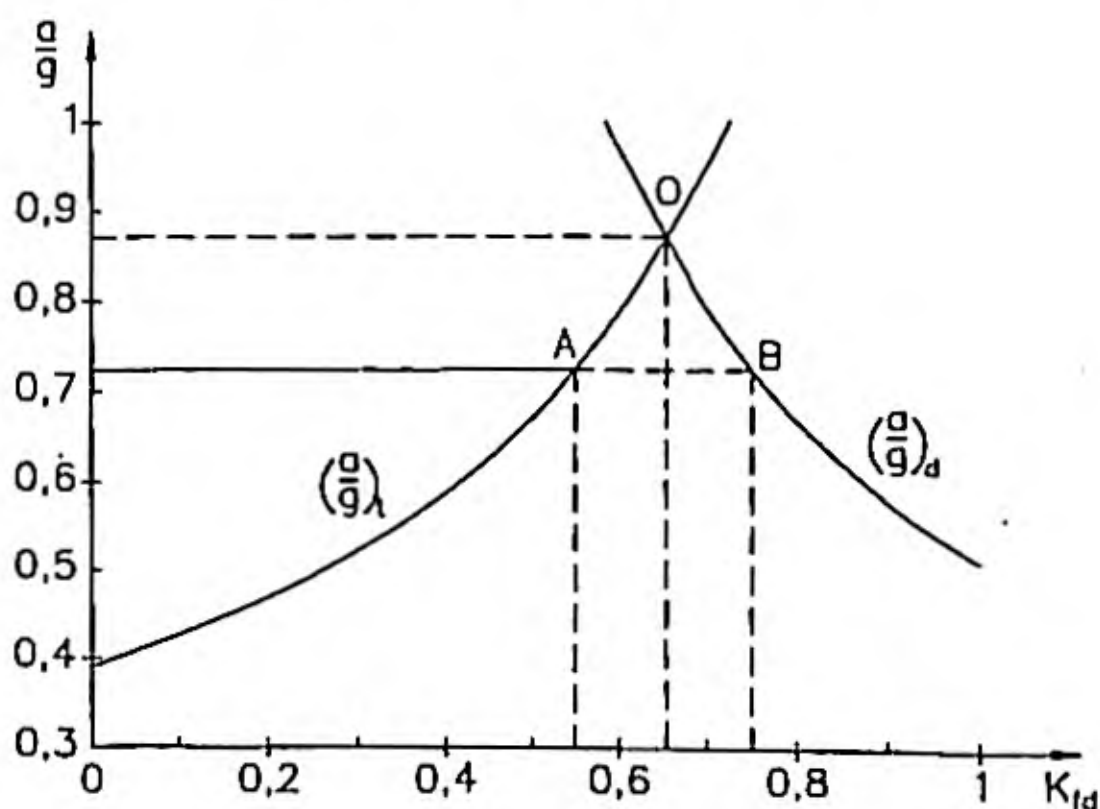


Figura 5.3. Influencia del reparto de esfuerzos de frenado en la deceleración de un vehículo de dos ejes.

Las curvas de la figura 5.3 corresponden a un vehículo cuyas características son las del ejemplo numérico anterior, considerando que $\mu = \mu_{\max} = 0.85$.

El punto O, de intersección de ambas curvas corresponde al frenado óptimo y, por tanto, a un reparto de esfuerzos de frenado como el calculado antes. Si en el vehículo se estableciese un reparto con valor $K_{fd} = 0,75$, punto B, se alcanzaría antes el bloqueo de las ruedas delanteras y este punto representaría el límite efectivo de frenado, consiguiéndose una deceleración máxima $a/g = 0,72$. Si, por el contrario, $K_{fd} = 0,55$ (punto A), bloquearían antes las ruedas traseras y el límite de la deceleración quedaría establecido, también en $a/g = 0,72$. Como se observa, en ambos casos, la capacidad de frenado es inferior a la que permite la adherencia y que solo puede obtenerse para un reparto con $K_{fd} = 0,653$.

Si se igualan las expresiones (5.22) y (5.23) se obtiene que el valor de K_{fd} para el punto O, (frenado óptimo) es:

$$K_{fd0} = \frac{1}{L} (l_2 + hf_r + \mu h) \quad 5.24$$

Como puede observarse, la proporción óptima de frenado depende de la posición del centro de gravedad (l_2 y h) y de la adherencia de la calzada (μ). La influencia de la resistencia a la rodadura es mucho más reducida por el pequeño valor de f_r . En consecuencia, si el reparto de frenada es invariable ($K_{fd} = \text{cte}$), solo se obtendrá frenado óptimo en unas circunstancias concretas, dentro del amplísimo margen de condiciones operativas del vehículo. Todo ello se ve agravado en vehículos industriales, en los cuales se produce una notable modificación de sus características entre las situaciones de vacío y de plena carga.

En la figura 5.4 se ilustra este efecto, representando las curvas de deceleración máxima en vacío y en carga.

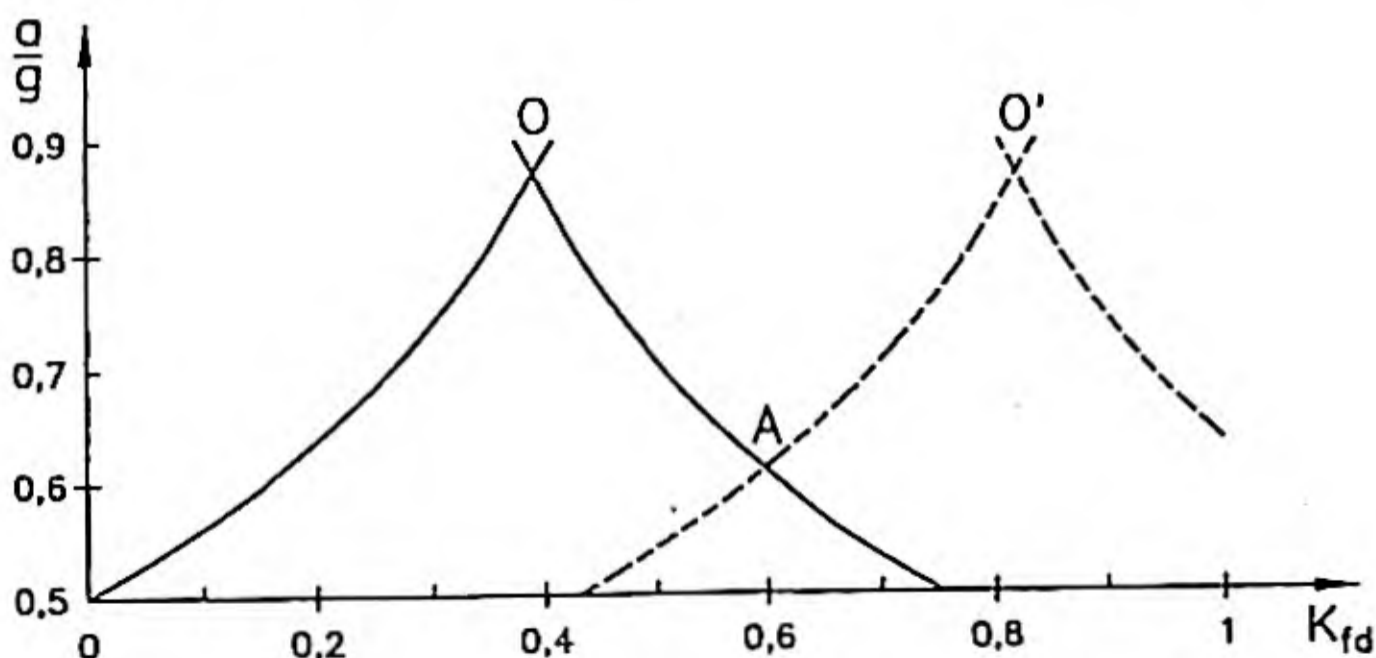


Figura 5.4. Curvas de deceleración máxima para un camión ligero en vacío (—) y a plena carga (---).

Como puede observarse, el frenado óptimo en vacío (punto O) y a plena carga (punto O') requieren repartos de frenada muy distintos. En la práctica se recurre a instalar limitadores o compensadores de frenada que modifican K_{rd} según el estado de carga, cambiando la relación de presiones en los cilindros de freno delantero y trasero, mediante una válvula que modifica sus características cuando la suspensión es deformada por el peso. Este aspecto será ilustrado en el punto siguiente.

En turismos, las dos parejas de curvas de la figura 5.4 están más próximas. Los puntos O y O' se encuentran más cercanos y resulta más sencillo encontrar una solución de compromiso para un reparto fijo de esfuerzos de frenado, que suele situarse próximo al punto de corte de las curvas $(a/g)_c$ en carga y $(a/g)_d$ en vacío, (punto A) de la figura (5.4), sin demasiada reducción de la eficiencia de frenado.

5.3.1.2. Curvas de equiaderencia. Modificación del reparto de fuerzas de frenado.

Otra forma de analizar los riesgos de bloqueo de las ruedas y la relación entre los límites que impone la adherencia, frente a la respuesta que proporciona el sistema de frenos al actuar sobre las ruedas, es utilizar las llamadas curvas de equiaderencia. Como su nombre indica, se trata de la representación, en un diagrama, de la función $F_R = f(F_{rd})$ o $M_R = f(M_{rd})$, con la condición de que ambas ruedas alcancen al mismo tiempo la adherencia máxima.

Considerando que la deceleración del vehículo es:

$$a = \frac{F_{rd} + F_R}{p/g} = \frac{F_f}{p/g} \quad 5.25$$

y al mismo tiempo, considerando a las fuerzas de frenado como únicas que producen dicha deceleración, el valor de ésta, teniendo en cuenta que $F_f = \mu \equiv P$, será:

$$a_{max} = \frac{P\mu}{P/g} = \mu g \quad 5.26$$

ó también:

$$\frac{a}{g} = \mu \quad 5.27$$

Naturalmente, cuando μ adquiere valor máximo, se obtendrá, también, el máximo valor de la deceleración.

Teniendo en cuenta (5.17), (5.18) y (5.27):

$$F_{rd} = \frac{\mu P}{L} [l_2 + \mu h] \quad 5.28$$

$$F_{rd} = \frac{\mu P}{L} [l_1 - \mu h] \quad 5.29$$

Dividiendo ambas y despejando μ :

$$\frac{F_{rd}}{F_n} = \frac{l_2 + \mu h}{l_1 - \mu h} \quad 5.30$$

$$\mu = \frac{F_{rd} l_1 - F_n l_2}{h(F_{rd} + F_n)} \quad 5.31$$

Sustituyendo (5.31) en (5.28) o (5.29) y operando, se obtiene:

$$(F_{rd} + F_n)^2 + \frac{P}{h} [F_n l_2 - F_{rd} l_1] = 0 \quad 5.32$$

Esta ecuación corresponde a una parábola en el plano (F_{rd}, F_n) , cuyo eje es paralelo a la bisectriz del segundo cuadrante y pasa por el origen. En la figura 5.5 se representa la ecuación (5.32)

De las ecuaciones (5.27) y (5.25) se obtiene:

$$F_n = -F_{rd} + \frac{a}{g} P = -F_{rd} + \mu P \quad 5.33$$

dando valores a $\mu = a/g$ se obtiene, en la figura 5.5, una familia de rectas de deceleración constante, correspondientes a cada valor de μ . Los puntos de corte de esta familia de rectas con la parábola de equiaderencia, informan de los esfuerzos de frenado en cada uno de los ejes para lograr la deceleración correspondiente.

Por otra parte, teniendo en cuenta 5.17 y 5.18 y que:

$$\frac{P}{g} a = F_{rd} + F_n \quad 5.34$$

se obtiene, para el eje delantero:

$$F_{rd} = \mu_d \left[\frac{Pl_2}{L} + (F_{rd} + F_n) \frac{h}{L} \right] \quad 5.35$$

y para el eje trasero,

$$F_n = \mu_t \left[\frac{Pl_1}{L} - (F_{rd} + F_n) \frac{h}{L} \right] \quad 5.36$$

Operando en (5.35) y (5.36) se obtienen:

$$F_{\bar{n}} = F_{rd} \left(\frac{L}{h\mu_d} - 1 \right) - \frac{Pl_2}{h} \quad 5.37$$

$$F_{\bar{n}} = -F_{rd} \frac{\mu_1 h}{L + \mu_1 h} + \frac{Pl_1 \mu_1}{L + \mu_1 h} \quad 5.38$$

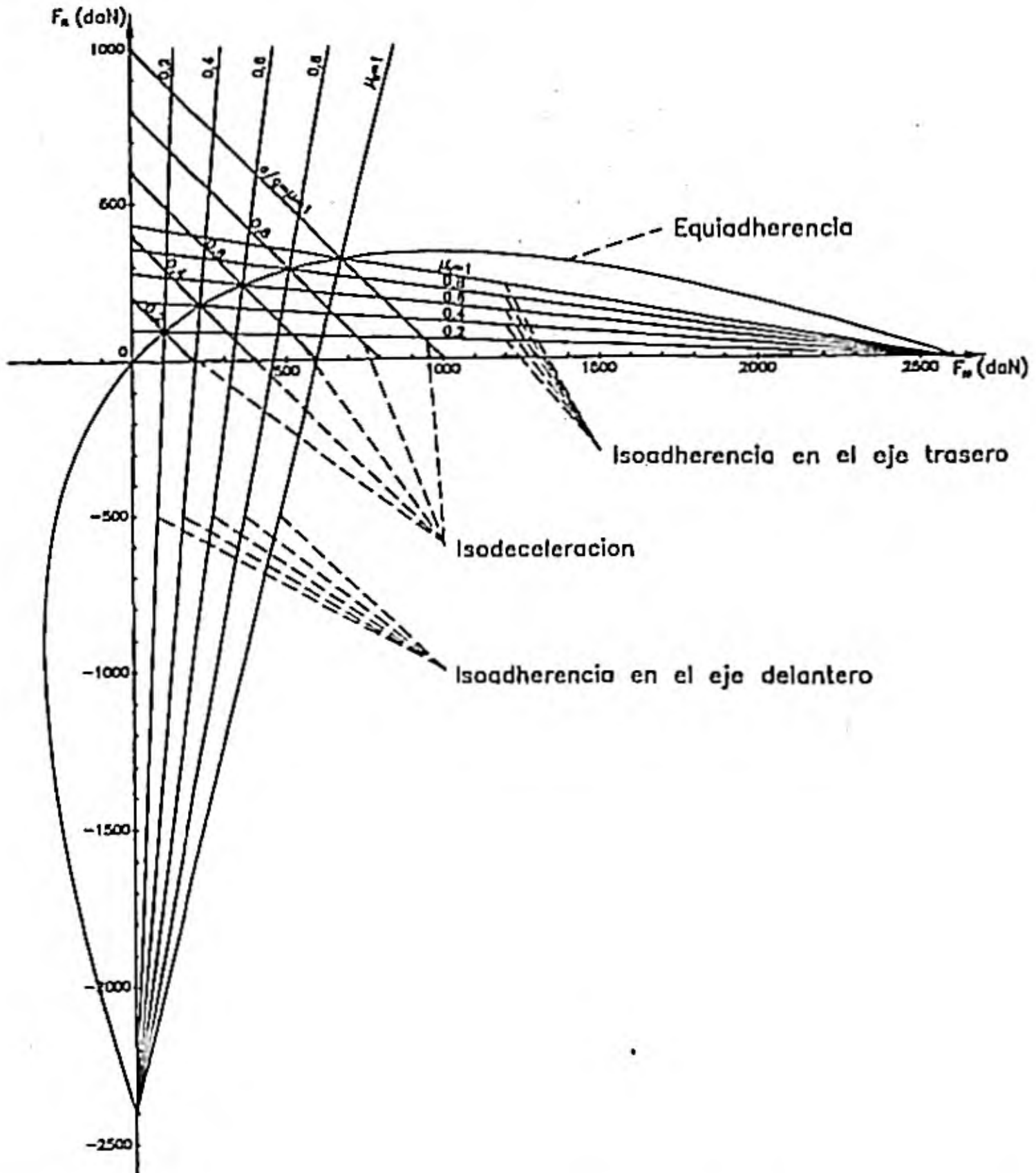


Figura 5.5. Curvas de isoadherencia, equiadherencia e isodeceleraciones de un vehiculo de dos ejes. (Datos del vehiculo: $l_1 = 1.3$ m, l_2 m, $h = 0.5$ m, $P = 1000$ daN)

Estas ecuaciones representan rectas en un plano con ejes de coordenadas F_{fd} y F_{fd} . Teniendo en cuenta que μ_d y μ_l son los valores de la adherencia requeridos en los respectivos ejes, para diferentes valores de la misma se obtienen dos familias de rectas que denominaremos de isoadherencia. Estas rectas se cortan dos a dos para iguales valores de la adherencia ($\mu_d = \mu_l$) en puntos de la parábola cuya ecuación es la (5.32), de ahí que esta parábola y todas las que se pueden construir para distintos estados de carga de un vehículo se denominan curvas de equiadherencia. Las dos familias de curvas obtenidas para diferentes valores de μ_d y μ_l , de las ecuaciones (5.37) y (5.38) se representan en la figura 5.5, así como la parábola de equiadherencia y las rectas (5.33) de isoaceleración.

Una curva de equiadherencia, como se dijo, es el lugar geométrico de los puntos que, para unas condiciones determinadas de carga del vehículo, logran el máximo aprovechamiento de la adherencia en ambos ejes. En este aspecto puede denominarse "curva ideal de frenado" o "curva de frenado óptimo". En la práctica solo tiene interés un intervalo de la curva para $F_f > 0$ y $\mu \neq 1$ (Figura 5.6, curva OA). Un punto del diagrama con ordenada superior al de la curva, $F_{fd} > F_{fd}(\mu_{máx})$, indica que las ruedas traseras bloquean antes. En puntos comprendidos entre la curva de equiadherencia y el eje F_{fd} , el bloqueo sobrevendría con anterioridad en las ruedas delanteras, en caso de producirse, y puesto que esta situación es menos peligrosa, la actuación del sistema de freno deberá proporcionar en todo momento valores correspondientes a puntos de esta zona.

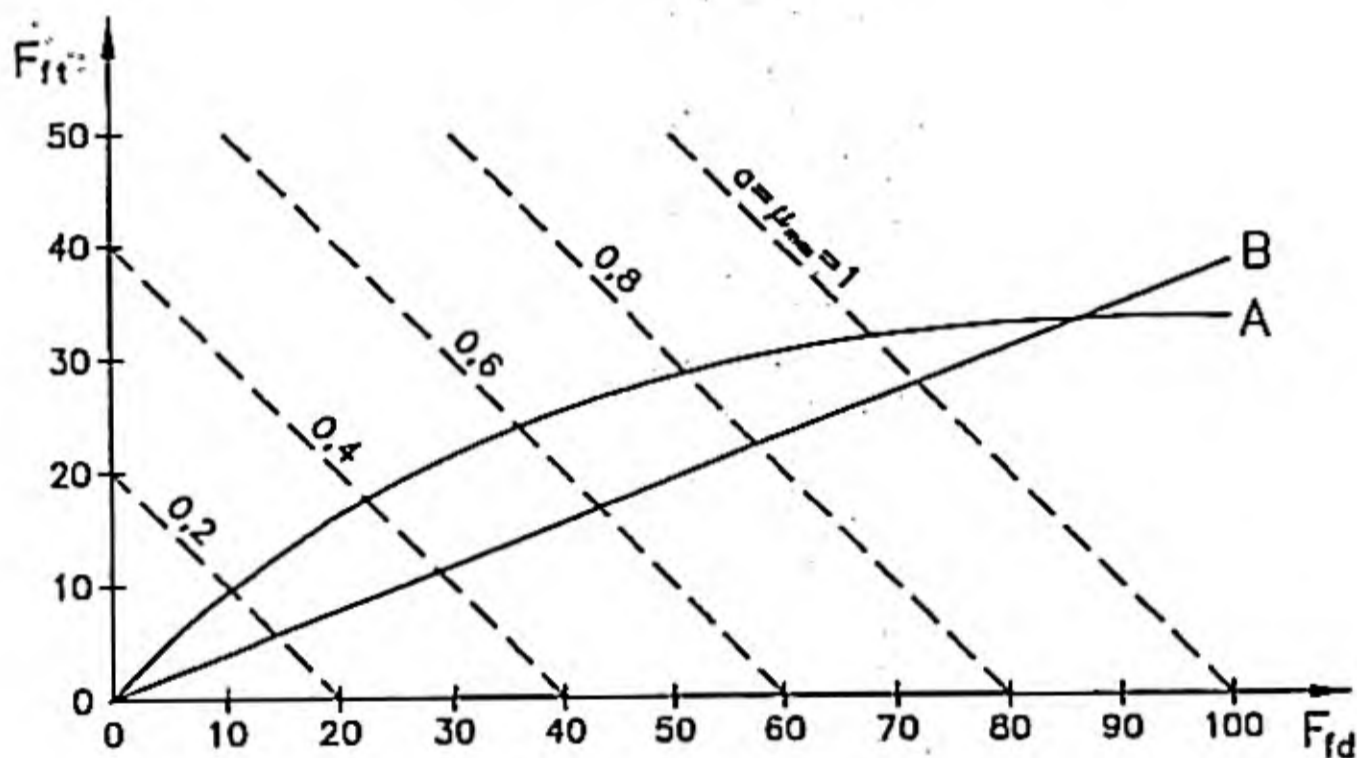


Figura 5.6. Diagrama de frenado de un vehículo de dos ejes.

Si consideramos que el sistema de frenos produce una relación constante entre las fuerzas de frenado delante y detrás, lo cual puede lograrse haciendo llegar la misma presión a los circuitos de frenos de todas las ruedas, se obtendrá:

$$F_{fd}^s = K \cdot F_{fd}^s \quad 5.39$$

En la figura 5.6 la ecuación (5.39) representa una recta (OB), la cual, para garantizar que no bloqueará primero el eje trasero, en ninguna condición, deberá tener menor valor de ordenada que la curva de equiadherencia, al menos en el intervalo de condiciones operativas. Esta condición suele establecerse al menos para deceleraciones entre 0.15 g y 0.9 g. Cuando el sistema de frenos actúa sobre la recta OB, no aprovecha toda la adherencia disponible, parábola OA, lo cual hará disminuir la eficiencia del sistema de frenos. Tal disminución será tanto mayor, cuanto más separadas estén, en el punto correspondiente de funcionamiento, la parábola de equiadherencia y la recta de frenado.

De la ecuación (5.32) se deduce la dependencia de la curva de equiadherencia del peso del vehículo, y de la posición del centro de gravedad. En consecuencia, el estudio de las condiciones de frenado debe tener en cuenta este factor, analizándose, normalmente, las condiciones extremas que pueden ser la de marcha en vacío y a plena carga.

Por otra parte, resulta práctico representar las curvas de equiadherencia en función de los momentos de frenado en ambas ruedas. Teniendo en cuenta (5.28) (5.29) y (5.27):

$$M_{fd} = r_c F_{fd} = r_c \frac{Pl_2}{L} \frac{a}{g} + r_c \frac{Ph}{L} \left(\frac{a}{g} \right)^2 \quad 5.40$$

$$M_n = r_c F_n = r_c \frac{Pl_1}{L} \frac{a}{g} - r_c \frac{Ph}{L} \left(\frac{a}{g} \right)^2 \quad 5.41$$

Las ecuaciones (5.40) y (5.41) representan una familia de parábolas de equiadherencia cuando varía el estado de carga del vehículo (P, l₁, l₂, h), en función del parámetro a/g. En la figura 5.7 se representan dos curvas correspondientes a marcha en vacío y a plena carga de un vehículo con las siguientes características:

Vacío en orden de marcha:

$$P_v = 1000 \text{ daN}; l_{1v} = 1,15 \text{ m}; l_{2v} = 1,35 \text{ m}; h_v = 0,45 \text{ m}$$

Plena carga:

$$P_c = 1500 \text{ daN}; l_{1c} = 1,4 \text{ m}; l_{2c} = 1,1 \text{ m}; h_c = 0,55 \text{ m}$$

En la figura se han representado las escalas de aceleración correspondientes a cada una de las curvas. Para otras condiciones intermedias de carga, la parábola de equiadherencia correspondiente se encuentra entre las dos anteriores.

Sobre la misma figura 5.7 se ha representado el efecto de un compensador de frenada variable con la carga. La recta OAB representa la relación constante entre las fuerzas de

frenado de ambos ejes, sin actuación del compensador. A partir de A, punto próximo al de corte de la recta OB con la parábola OM, actúa el compensador si el vehículo circula en vacío, modificando la relación de presiones que llegan a los frenos de cada eje; concretamente reduciendo la del eje trasero, y cambiando, por tanto, la pendiente de la recta de actuación del sistema de frenos que pasa ahora a ser la AC. Esta recta proporciona pares de frenado en el eje trasero, que no superan los valores correspondientes a la curva de equiadherencia en todo el tramo previsto de valores de la aceleración, o de μ .

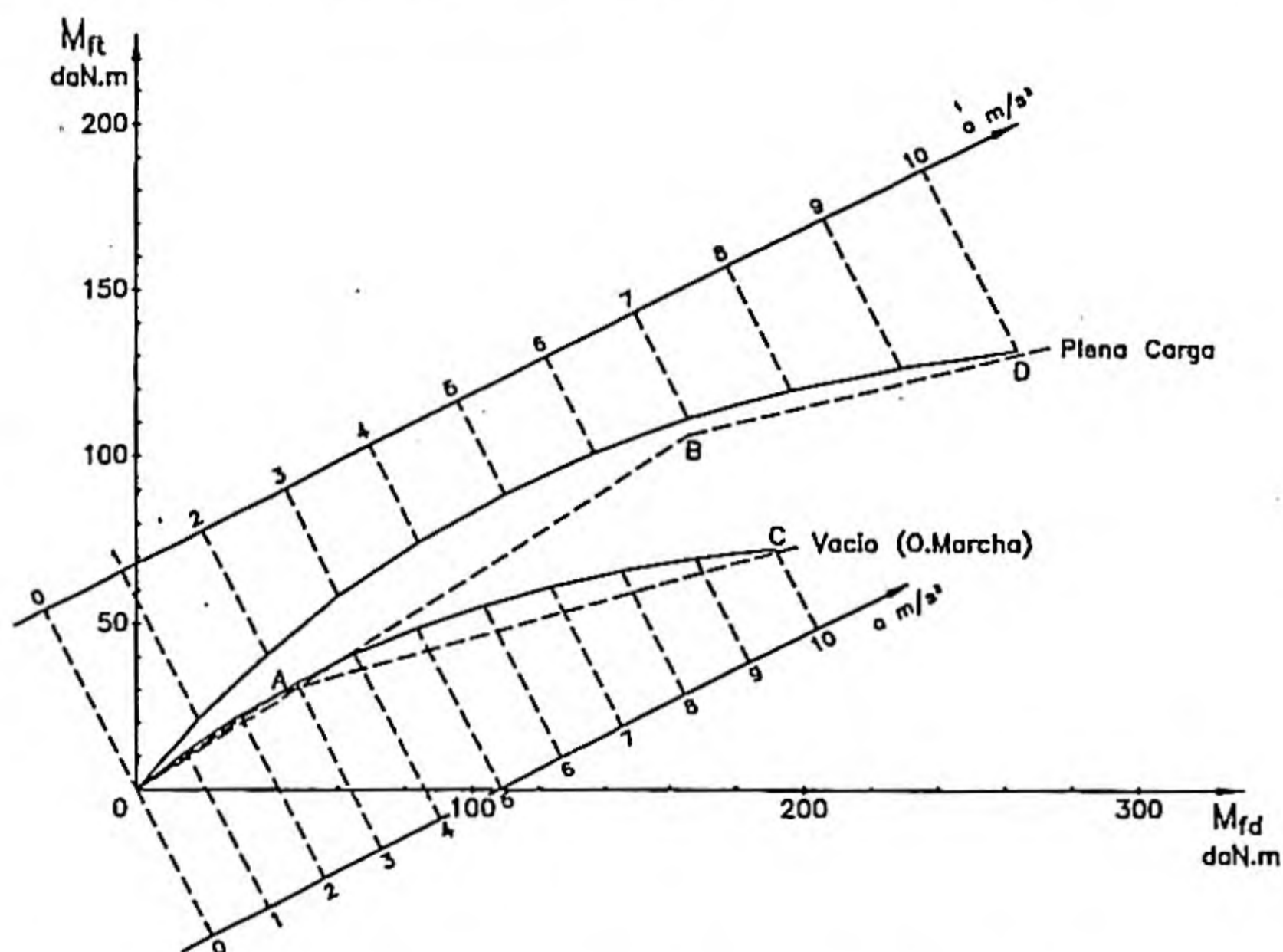


Figura. 5.7. Curvas de equiadherencia y de actuación del sistema de frenos con compensador de frenada.

Cuando el vehículo está cargado, la deformación de la suspensión actúa sobre el compensador, modificando la presión de corte, que se desplaza desde la correspondiente al punto A (vacío) hasta la del punto B (plena carga). Como puede observarse, en todos los casos de actuación del sistema de frenos, el par atrás es inferior al valor correspondiente de equiadherencia, por lo que no existe riesgo de bloqueo de ruedas traseras con antelación a las delanteras. Por otra parte, la proximidad entre las rectas OBD y OAC con las curvas ideales de PC y OM respectivamente, da idea de un buen aprovechamiento de la capacidad de frenado en función de la adherencia.

5.3.2. Frenado de vehículos articulados tractor-semirremolque

5.3.2.1. Efectos del bloqueo de ruedas

Este tipo de vehículos presenta problemas aún más complejos, que los de dos ejes, en lo que se refiere al reparto óptimo de las fuerzas de frenado, como consecuencia de disponer de un mayor número de ejes. El bloqueo de las ruedas de cualquiera de los ejes (a estos efectos supondremos que los ejes del semirremolque quedan representados en uno, cualquiera que sea su número) produce situaciones de riesgo, aunque de diferente gravedad, como en el caso de los vehículos de dos ejes.

Ahora, la situación más peligrosa es el bloqueo de las ruedas del eje trasero del tractor; en este caso, un desplazamiento lateral de la parte posterior del tractor origina sendos movimientos de guiñada, con sentidos opuestos, del tractor y del semirremolque, plegándose uno respecto al otro hasta la interacción física entre ambos. Como en el caso de bloqueo de las ruedas del eje trasero de un vehículo de dos ejes, se produce una situación inestable que se suele denominar "efecto tijera".

El bloqueo de las ruedas traseras del semirremolque produce una oscilación lateral de éste, respecto a la quinta rueda, mientras que el bloqueo de las ruedas delanteras del tractor tiene un efecto análogo al que indicamos antes para el caso de vehículos de dos ejes, es decir, una posible pérdida de control direccional. El orden de mayor a menor gravedad potencial es: bloqueo de las ruedas del eje trasero del tractor-ruedas del eje de semirremolque-ruedas del eje delantero del tractor. El diseño del sistema de freno debería garantizar el no bloqueo en ese mismo orden, aunque en este caso será más difícil lograrlo para el conjunto de condiciones operativas, sin recurrir a dispositivos antibloqueo.

5.3.2.2. Reparto de fuerzas de frenado

El reparto de fuerzas de frenado se analiza, en este caso, como en el de vehículos de dos ejes, calculando las cargas dinámicas sobre los tres ejes durante el frenado. Para hacerlo recurrimos al modelo de cuerpo libre representado en la figura 5.8.

En la figura 5.8 se han considerado como únicas fuerzas retardadoras las de frenado en los ejes. Esta hipótesis ya fue utilizada y explicada en el estudio del frenado de vehículos de dos ejes.

Se definen los siguientes coeficientes de fuerzas de frenado:

$$C_d = \frac{F_{fd}}{F_{zd}}; \quad C_t = \frac{F_{ft}}{F_{zt}}; \quad C_s = \frac{F_{fs}}{F_{zs}} \quad 5.42$$

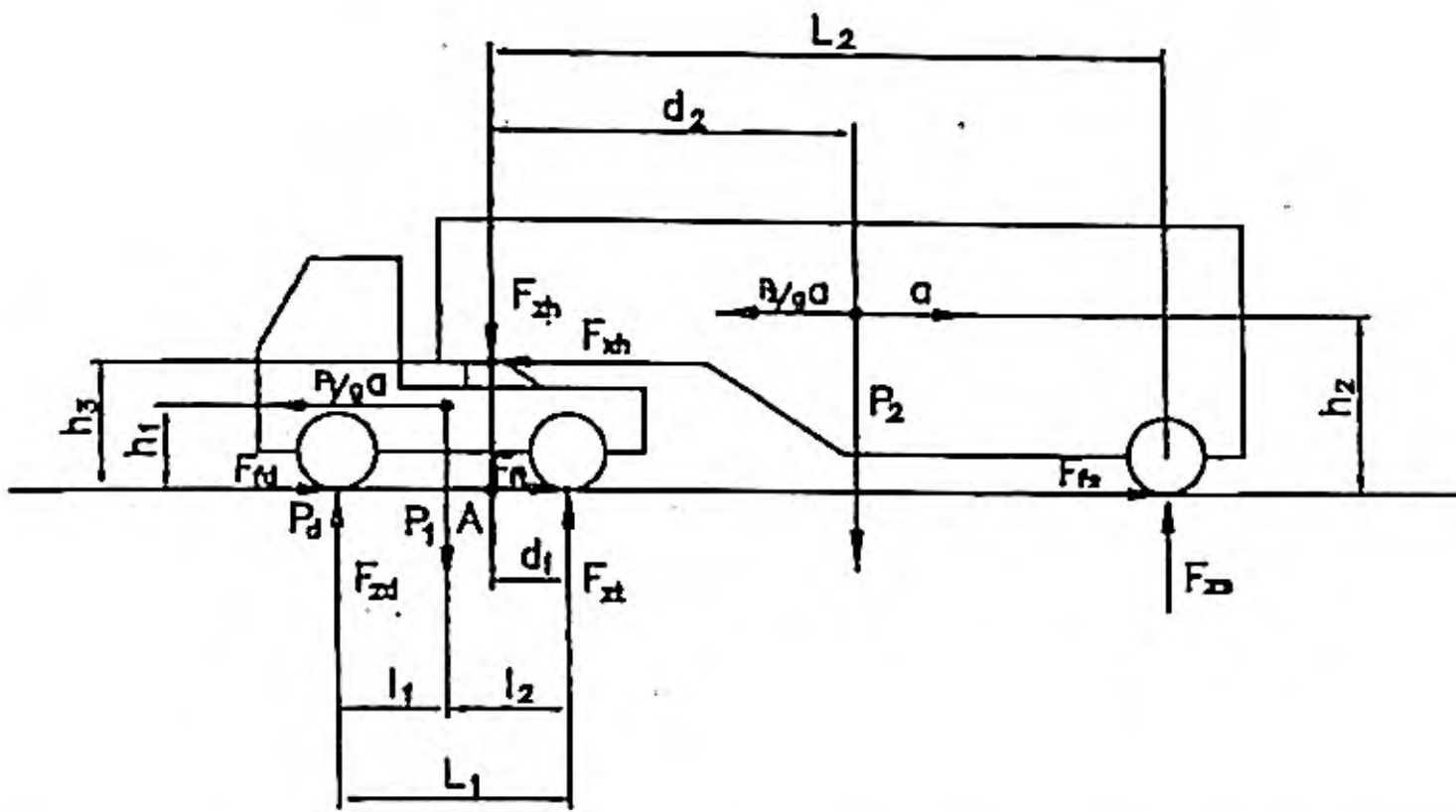


Figura 5.8. Modelo de cuerpo libre de un vehículo articulado tractor-semirremolque para el estudio del frenado.

El equilibrio de tractor, semirremolque y del conjunto, permite establecer:

Tractor:

$$P_1 + F_{zh} - F_{zd} - F_{zt} = 0 \quad 5.43$$

$$\frac{a}{g} P_1 + F_{zh} - C_d F_{zd} - C_l F_{zt} = 0 \quad 5.44$$

$$F_{zd} (L_1 - d_1) - F_{zt} d_1 - F_{zh} h_3 - P_1 (L_1 - l_1 - d_1) - \frac{P_1}{g} a h_1 = 0 \quad 5.45$$

La ecuación 4.45 expresa la nulidad de momentos de fuerzas respecto al punto A.

Semirremolque:

$$P_2 - F_{zs} - F_{zh} = 0 \quad 5.46$$

$$\frac{a}{g} P_2 - F_{zh} - C_s F_{zs} = 0 \quad 5.47$$

$$P_2 d_2 + F_{zh} h_3 - F_{zs} L_2 - \frac{P_2}{g} a h_2 = 0 \quad 5.48$$

Conjunto:

$$P_1 + P_2 - F_{zd} - F_{za} - F_{zs} = 0 \quad 5.49$$

$$\frac{a}{g} (P_1 + P_2) - C_d F_{zd} - C_t F_{za} - C_s F_{zs} = 0 \quad 5.50$$

$$F_{zd}(L_1 - d_1) - F_{za}d_1 - F_{zs}L_2 - P_1(L_1 - l_1 - d_1) + \quad 5.51$$

$$+ P_2d_2 - P_1\frac{a}{g}h_1 - P_2\frac{a}{g}h_2 = 0$$

De las anteriores ecuaciones pueden obtenerse:

$$F_{zd} = \frac{P_1 \left[L_1 - l_1 + \frac{a}{g} h_1 + (C_t - \frac{a}{g}) h_3 \right]}{L_1 + (C_t - C_d) h_3} +$$

$$+ \frac{P_2 \left[l_2 - d_2 + (C_s - \frac{a}{g}) h_3 + \frac{a}{g} h_2 \right] (d_1 + C_t h_3)}{(L_2 + C_s h_3) [L_1 + (C_t - C_d) h_3]} \quad 5.52$$

$$F_{za} = \frac{P_1 \left[l_1 - \frac{a}{g} h_1 + \left(\frac{a}{g} - C_d \right) h_3 \right]}{L_1 + (C_t - C_d) h_3} +$$

$$+ \frac{P_2 \left[L_2 - d_2 + (C_s - \frac{a}{g}) h_3 + \frac{a}{g} h_2 \right] [L_1 - d_1 - C_d h_3]}{(L_2 - C_s h_3) [L_1 + (C_t - C_d) h_3]} \quad 5.53$$

$$F_{zs} = \frac{P_2 \left[d_2 + (h_3 - h_2) \frac{a}{g} \right]}{C_s h_3 + L_2} \quad 5.54$$

Suponiendo que la adherencia se aprovecha por igual en todos los ejes, en el eje j:

$$F_{\bar{j}} = \mu F_{zj} \quad 5.55$$

Teniendo en cuenta (5.55), (5.42) y (5.27):

$$C_d = C_1 = C_2 = \frac{a}{g} = \mu \quad 5.56$$

sustituyendo (5.56) en (5.52) a (5.54) se obtiene:

$$F_{zd} = P_1 \frac{L_1 - l_1 + \mu h_1}{L_1} + P_2 \frac{(L_2 - d_2 + \mu h_2)(d_1 + \mu h_3)}{L_1(L_2 + \mu h_3)} \quad 5.57$$

$$F_{zd} = P_1 \frac{l_1 - \mu h_1}{L_1} + P_2 \frac{(L_2 - d_2 + \mu h_2)(L_1 - d_1 - \mu h_3)}{L_1(L_2 + \mu h_3)} \quad 5.58$$

$$F_{zs} = P_2 \frac{d_2 + (h_3 - h_2)\mu}{\mu h_3 + L_2} \quad 5.59$$

Conocidas las cargas dinámicas de (5.57) a (5.59) y teniendo en cuenta (5.55), el reparto óptimo de frenada entre los tres ejes será:

$$K_{rd} = \frac{F_{rd}}{F_r} = \frac{F_{zd}}{P_1 + P_2} \quad 5.60$$

$$K_n = \frac{F_n}{F_r} = \frac{F_{zt}}{P_1 + P_2} \quad 5.61$$

$$K_{rs} = \frac{F_{rs}}{F_r} = \frac{F_{zs}}{P_1 + P_2} \quad 5.62$$

siendo:

$$F_r = F_{rd} + F_n + F_{rs} = (P_1 + P_2)\mu \quad 5.63$$

$$K_{rd} + K_n + K_{rs} = 1 \quad 5.64$$

Si se representan las ecuaciones (5.60) a (5.62) para tres estados de carga distintos, se obtienen las curvas de K_{rd} , K_n y K_{rs} en función de μ , que se representan en la figura 5.9.

Como puede observarse de la figura 5.9, cada valor de μ , y estado de carga, requiere unos valores diferentes de K_{rd} , K_n y K_{rs} para que se cumpla la condición de frenado óptimo. Con una adecuada distribución de fuerzas de frenado, y el uso de compensadores de frenado se puede lograr un frenado, que minimice los efectos negativos del bloqueo de ruedas, para el intervalo de condiciones operativas más frecuentes, aunque resulta imposible lograr un frenado óptimo en cualquier circunstancia.

Debido a lo anterior, los sistemas antibloqueo son especialmente deseables en este tipo de vehículos.

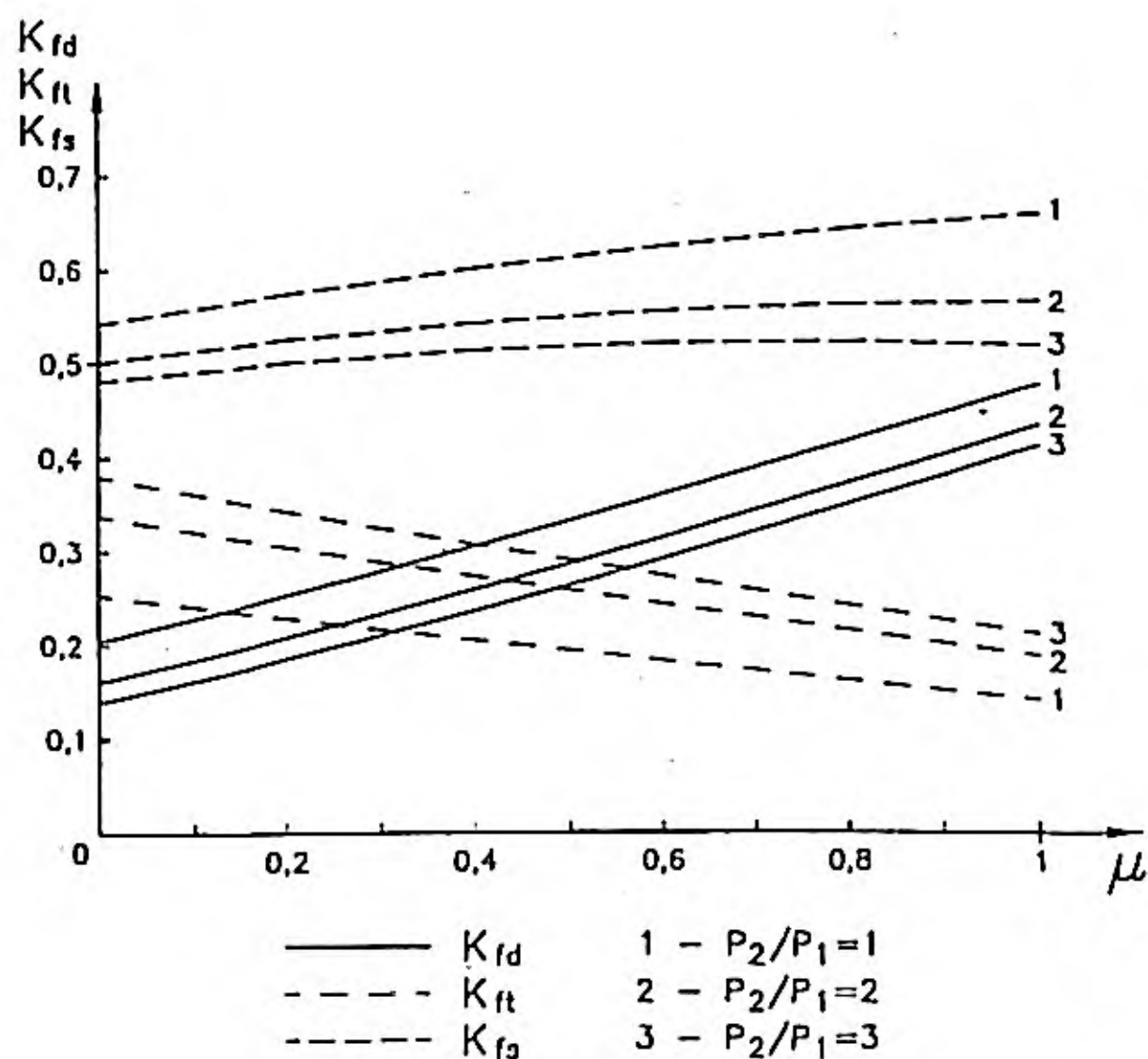


Figura 5.9. Variación ideal de la distribución de fuerzas de frenado con el coeficiente de adherencia para un tractor-semirremolque. Los datos del vehículo en función de las cargas: $P_1 = 63 \text{ KN}$; $L_1 = 3,35 \text{ m}$; $L_2 = 7,5 \text{ m}$; $d_1 = 0,5 \text{ m}$; $h_1 = 0,9 \text{ m}$; $h_3 = 1,1 \text{ m}$; $l_1 = 2,23 \text{ m}$; $l_2 = 1,12 \text{ m}$; $h_2 = 2,5 \text{ m}$; $d_2 = 3,8 \text{ m}$ Estados de carga: a) $P_2 = P_1$; b) $P_2 = 2P_1$; c) $P_2 = 3P_1$.

5.4. EL PROCESO DE FRENADO

En los puntos anteriores se han analizado las condiciones requeridas para que el proceso de frenado sea óptimo y se ha puesto de manifiesto la dificultad de lograr tal propósito para el conjunto de las condiciones operativas. En este apartado nos referiremos a dos aspectos de la respuesta del vehículo que suelen tomarse como criterios para valorar el comportamiento en frenado, estos son el rendimiento y la distancia de frenado.

5.4.1. Rendimiento de frenado

Como se puso de manifiesto en el punto 5.3.1.2., cuando se consideran las fuerzas de frenado como únicas fuerzas retardadoras del movimiento del vehículo, y se impone la

condición, deseable, de que ninguna rueda alcance aisladamente las condiciones de bloqueo, la deceleración máxima a_i ideal que puede lograrse es:

$$\frac{a_i}{g} = \mu_{\max} \quad 5.65$$

En el frenado real es imposible alcanzar el anterior límite por las razones que fueron analizadas en los puntos anteriores, ya que es imposible lograr el reparto óptimo de frenado en cualquier condición. En consecuencia, si consideramos que la deceleración máxima real que alcanza el vehículo es a_{\max} el rendimiento de frenado se define por la relación:

$$\eta_f = \frac{a_{\max}/g}{\mu_{\max}} \quad 5.66$$

Suponiendo una adherencia de $\mu_{\max} = 0.8$, se obtiene:

$$a_i = 0.8 g \approx 8 \text{ m s}^{-2} \quad 5.67$$

deceleración que es difícil de obtener en turismos sobre asfalto seco aún con los frenos bien ajustados.

Si se tiene en cuenta el confort de los pasajeros o el desplazamiento de la carga, no debe sobrepasarse un límite inferior al valor anterior, normalmente fijado en unos 3 m/s^2 ó $0,3 g$.

En colisiones de severidad baja y media se obtienen valores de la deceleración comprendidos entre 1 y 4 g, y aún mayores. En cuanto al límite de supervivencia humana ha sido establecido por algunos autores en valores que superan los 20 g.

5.4.2. Distancia de frenado

Considerando el factor de masas rotativas ($\gamma_r = 1.05$) y el conjunto de fuerzas retardadoras del movimiento del vehículo, puede establecerse:

$$a = -\frac{F_f + \Sigma R}{\gamma_r P/g} = -\frac{F_f + P \text{sen}\theta + P f_r + CV^2}{\gamma_r P/g} \quad 5.68$$

en donde se considera $\theta > 0$ en ascensos y $C = \frac{1}{2} C_x A_f$

Por otra parte, si S es la distancia recorrida:

$$adS = VdV \quad 5.69$$

sustituyendo el valor de a , e integrando, se obtiene el espacio recorrido para frenar entre la velocidad inicial (V_1) y otra de valor V_2 :

$$S_{V_1-V_2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{VdV}{a} \quad 5.70$$

$$S_{V_1-V_2} = -\frac{P\gamma_r}{g} \int_{V_1}^{V_2} \frac{VdV}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r + CV^2} \quad 5.71$$

Suponiendo F_r y f_r independientes de la velocidad:

$$S_{V_1-V_2} = \frac{P\gamma_r}{2Cg} \text{Ln} \frac{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r + CV_1^2}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r + CV_2^2} \quad 5.72$$

y la distancia hasta detener el vehículo ($V_2 = 0$) será:

$$S_p = \frac{P\gamma_r}{2gC} \text{Ln} \left[1 + \frac{CV_1^2}{\eta_r \mu P + P\text{sen}\theta + P f_r} \right] \quad 5.73$$

En la expresión (5.73) se ha sustituido F_r por $\eta_r \mu P$

En el proceso de frenado intervienen las reacciones del conductor y del sistema de frenos. Desde que surge una circunstancia imprevista, que obliga a frenar, hasta que el conductor actúa sobre el pedal del freno, transcurre un tiempo, llamado de reacción del conductor (t_{rc}), cuyo valor varía entre 0.5 y 2 s.

Por otra parte, desde que se inicia la acción sobre el sistema de frenos hasta que éste actúa con la fuerza requerida, en las diferentes ruedas, transcurre otro tiempo (t_{rs}) denominado de reacción del sistema, que adquiere un valor del orden de 0.3 s; en consecuencia, el cálculo de la distancia de parada desde que ocurre el acontecimiento que hace decidir frenar el vehículo será:

$$S_{PT} = S_p + V_1 (t_{rc} + t_{rs}) \quad 5.74$$

5.4.3. Tiempo de frenado

Teniendo en cuenta que:

$$dt = \frac{dV}{a} \quad 5.75$$

sustituyendo (5.68):

$$t = -\frac{P\gamma_r}{g} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r + CV^2} \quad 5.76$$

$$t = -\frac{P\gamma_r}{g} \left[\frac{l}{[C(F_r + P\text{sen}\theta + P f_r)]^{1/2}} \cdot \text{tg}^{-1} \left[\left(\frac{C}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r} \right)^{1/2} \cdot V \right] \right]_{v_1}^{v_2}$$

$$t = \frac{P\gamma_r}{gA} [\text{tg}^{-1} B V_1 - \text{tg}^{-1} B V_2] \quad 5.77$$

siendo:

$$A = [C(F_r + P\text{sen}\theta + P f_r)]^{1/2} \quad 5.78$$

$$B = \left[\frac{C}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r} \right]^{1/2} \quad 5.79$$

Si se desprecia la resistencia aerodinámica, se obtiene una relación mucho más simple que mayor el tiempo de frenado:

$$t_1 = \frac{P\gamma_r}{g} \frac{l}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r} (V_1 - V_2) \quad 5.80$$

En cuanto al tiempo de parada, de (5.77) y (5.80) resulta:

$$t_p = \frac{P\gamma_r}{A} \text{tg}^{-1} B V_1 \quad 5.81$$

$$t_{p1} = \frac{P\gamma_r}{g} \frac{V_1}{F_r + P\text{sen}\theta + P f_r} \quad 5.82$$

A estos tiempos deben añadirse los de reacción que fueron comentados en el punto anterior.

5.4.4. Potencia disipada durante el frenado

Despreciando la resistencia aerodinámica, de rodadura y el efecto de frenado del motor, la potencia instantánea que deben disipar los frenos será:

$$H = \left(\gamma_r \frac{P}{g} \cdot a + P \text{sen} \theta \right) \cdot V \quad 5.83$$

El cálculo de la potencia total interesa para el diseño térmico de los frenos y, en ese caso, es suficiente estimar un valor medio de la potencia, calculado para un período suficientemente amplio. Para este propósito, la hipótesis de nulidad de las demás fuerzas retardadoras actúa como margen de seguridad.

Para la estimación de la potencia media pueden considerarse dos casos: marcha con aceleraciones y frenadas frecuentes y marcha en descensos prolongados a velocidad constante.

En el primer caso, al frenar desde una cierta velocidad, hasta detener el vehículo, la energía que debe disiparse es la cinética y el tiempo de disipación puede estimarse como la suma del destinado a acelerar, desde parado hasta una velocidad V , y el requerido para detener el vehículo desde la misma velocidad. Con este criterio, la potencia media a disipar es:

$$H_{m_1} = \frac{1}{2} \frac{P \gamma_r}{g} \frac{V^2}{t_a + t_f} \quad 5.84$$

los tiempos t_a y t_f se calculan mediante (4.90) y (5.81). Cuando aumenta V lo hace también t_a con una ley de crecimiento mayor, por lo que la ecuación H_{m_1} presentan un máximo entre la velocidad nula y otra suficientemente alta (figura 5.10).

En el segundo caso, descenso prolongado con velocidad constante, la potencia media que se ha de disipar es:

$$H_{m_2} = V \cdot P \text{sen} \theta \quad 5.85$$

Esta potencia media crece linealmente con la velocidad para un valor prefijado de θ , en consecuencia, puede representarse, en la misma figura 5.10, como una familia de rectas, de $\theta = \text{constante}$, que pasan por el origen de coordenadas.

Si se fija un valor límite de la velocidad de descenso para cada valor de la pendiente θ , a cada pareja (V_j, θ_j) le corresponde un punto sobre la correspondiente recta, y uniendo estos

puntos se obtiene una curva, que puede tener análoga forma a la correspondiente al primer caso.

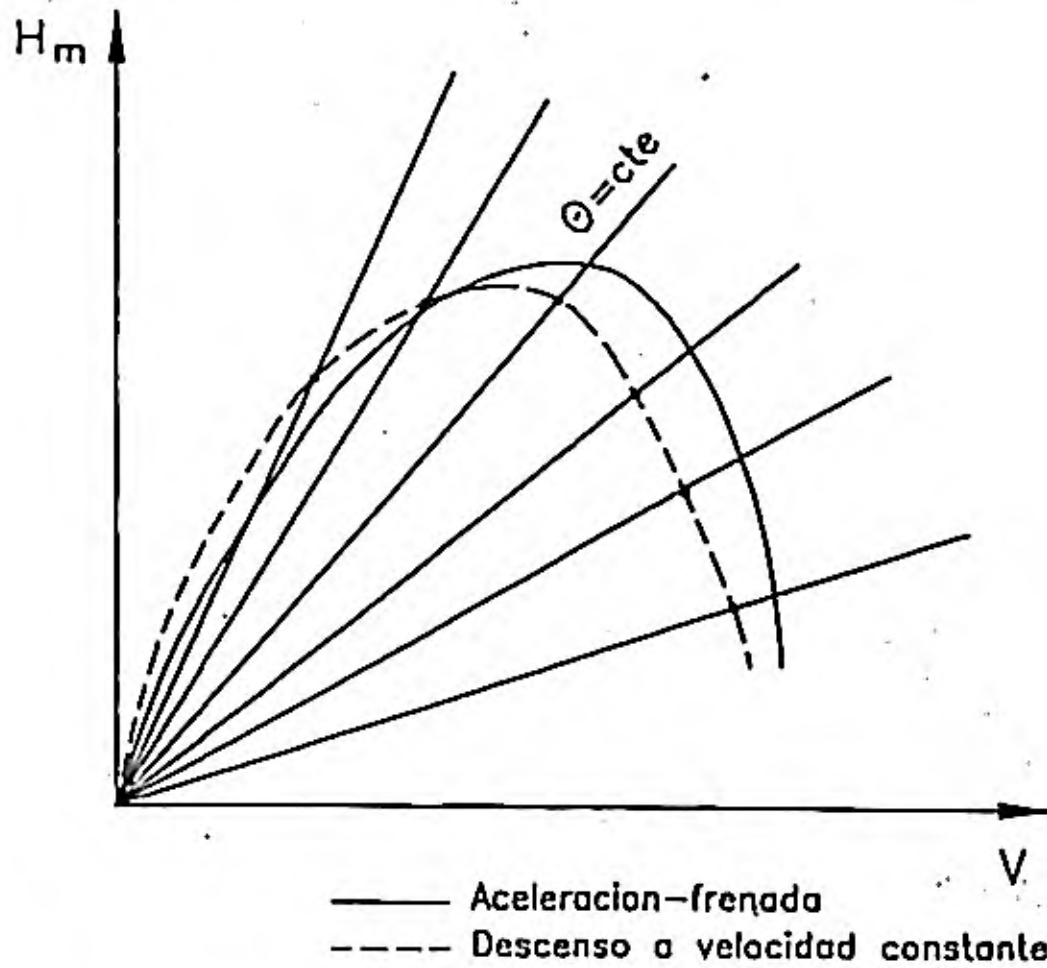


Figura 5.10. Potencia media disipada en el frenado.
 — Movimiento variado.
 - - - - Descenso a velocidad constante.

En general, en el caso de vehículos ligeros la condición primera (aceleración-frenado-aceleración) es más crítica, mientras que en el caso de vehículos pesados resulta más desfavorable la segunda (descenso prolongado a velocidad constante). En cualquier caso, los gráficos de la figura 5.10 ayudan a adoptar las soluciones más convenientes en el diseño del sistema de frenos.

5.5. SISTEMAS ANTIBLOQUEO DE FRENADO (ABS)¹

5.5.1. Introducción.

Cuando se produce una frenada severa, o en condiciones de muy baja adherencia entre neumático y suelo, el esfuerzo de frenado aplicado a una o varias ruedas puede superar al máximo esfuerzo adherente y, en consecuencia, producirse el bloqueo de las mismas.

(1) ABS: ANTI-LOCK BRAKING SYSTEM

Si una rueda queda bloqueada, la adherencia lateral se hace prácticamente nula y si el vehículo es solicitado por un esfuerzo lateral suficientemente grande, puede producirse un deslizamiento en esta dirección de las ruedas bloqueadas, lo que ocasiona, generalmente, pérdida de control direccional (bloqueo de ruedas delanteras de un vehículo), pérdida de estabilidad (bloqueo de ruedas traseras), efecto "tijera" (bloqueo de ruedas traseras del tractor en combinaciones tractor-semirremolque), etc,... como se indicó en puntos anteriores.

Junto a los indeseables y peligrosos efectos señalados, el bloqueo de ruedas reduce el valor de la adherencia longitudinal y aumenta la distancia de frenado.

Por último, si la calzada presenta diferentes valores de la adherencia, en las zonas en que toman contacto las ruedas de cada lado del vehículo, una frenada suficientemente severa haría bloquear las ruedas del costado de baja adherencia y producir en el vehículo un momento de guiñada, que puede tener efectos negativos para el control direccional e, incluso, estabilidad del vehículo. Análoga influencia puede tener la diferencia de pesos adherentes, en las ruedas interiores y exteriores, durante circulación en curva.

Por otra parte, es bien sabido que, variaciones en el peso y posición del centro de gravedad del vehículo también afectan al peso adherente dinámico en cada eje y que, al objeto de adaptar el reparto de frenada entre ambos, se utilizan dispositivos que hacen variar la relación entre las presiones en los cilindros de freno delanteros y traseros, según la carga, detectada por la deformación de la suspensión. Aunque estos dispositivos corrigen alguno de los efectos anteriores, no resuelven todas las situaciones y se hacen menos útiles en la medida que aumenta el número de ejes del vehículo.

Teniendo en cuenta, además, que tanto la estabilidad del vehículo como su control direccional y distancia de frenado, constituyen factores esenciales de su seguridad activa o primaria, se comprenderá el esfuerzo que se ha venido haciendo, desde hace algunas décadas, por desarrollar dispositivos que eviten el bloqueo de las ruedas y optimicen el valor de la adherencia aprovechada en la frenada.

Las primeras patentes sobre sistemas antibloqueo datan de los años 20, aunque no se desarrollan hasta los años 50, siendo sus primeras aplicaciones en el campo de la aviación. En el año 1962 se presentó un sistema antibloqueo en el Salón Internacional del Automóvil de Francfort, desarrollado por las firmas Graubremse y Teldix. En el año 1973, la casa MAN informaba de que disponía de un sistema completamente desarrollado. En 1974 las firmas Wabco-Westinghouse y Daimler-Benz iniciaron un programa de cooperación para el desarrollo de un sistema propio. Análoga atención fue prestada al tema por parte de las empresas americanas y japonesas.

Durante la década de los 70 se avanzó en el desarrollo de los sistemas, orientando los esfuerzos hacia:

[Frenado de vehículos automóviles.]

- Transmisión de funciones lógicas desde los componentes mecánicos a la electrónica.
- Uso de la técnica digital para reducir componentes, lograr una más alta densidad de integración, aumentar fiabilidad y reducir costes.
- Simplificar y perfeccionar los componentes mecánicos.

Desde el año 1.981 hasta el presente, esta técnica, tomando como base el microprocesador, ha ido incorporándose progresivamente, tanto a los vehículos comerciales como de turismo, en su gama media y alta. Actualmente se encuentra desarrollada, aunque se siguen incorporando perfeccionamientos para aumentar su eficacia.

5.5.2. Objetivos de los sistemas ABS.

Las funciones fundamentales de un sistema antibloqueo de ruedas en frenada son:

- Detectar el momento en el que se inicia el bloqueo de cada una de las ruedas controladas, o existen las condiciones para que éste se produzca.
- Actuar sobre el sistema de frenos del vehículo, modulando la presión del fluido que acciona los dispositivos de frenado de la rueda o ruedas en situación de bloqueo, de tal forma que evite éste y mantenga el deslizamiento longitudinal (i) de la rueda en un intervalo de máxima adherencia.
- Anular dicha actuación cuando desaparecen las condiciones que originaron el riesgo de bloqueo.

Todo lo cual se pretende lograr:

- Un incremento de la seguridad activa del vehículo:
 - * Mediante la reducción de la distancia de frenado.
 - * Mejora de la estabilidad del vehículo.
 - * Mejora del control direccional.

Aunque con menor importancia, también se logra una disminución del desgaste de los neumáticos.

5.5.3. Principios físicos de un sistema antibloqueo.

La adherencia entre el neumático y la calzada depende, como es bien sabido, de las características de ambos y varía con el deslizamiento, i , entre ellos. Figura 5.11.

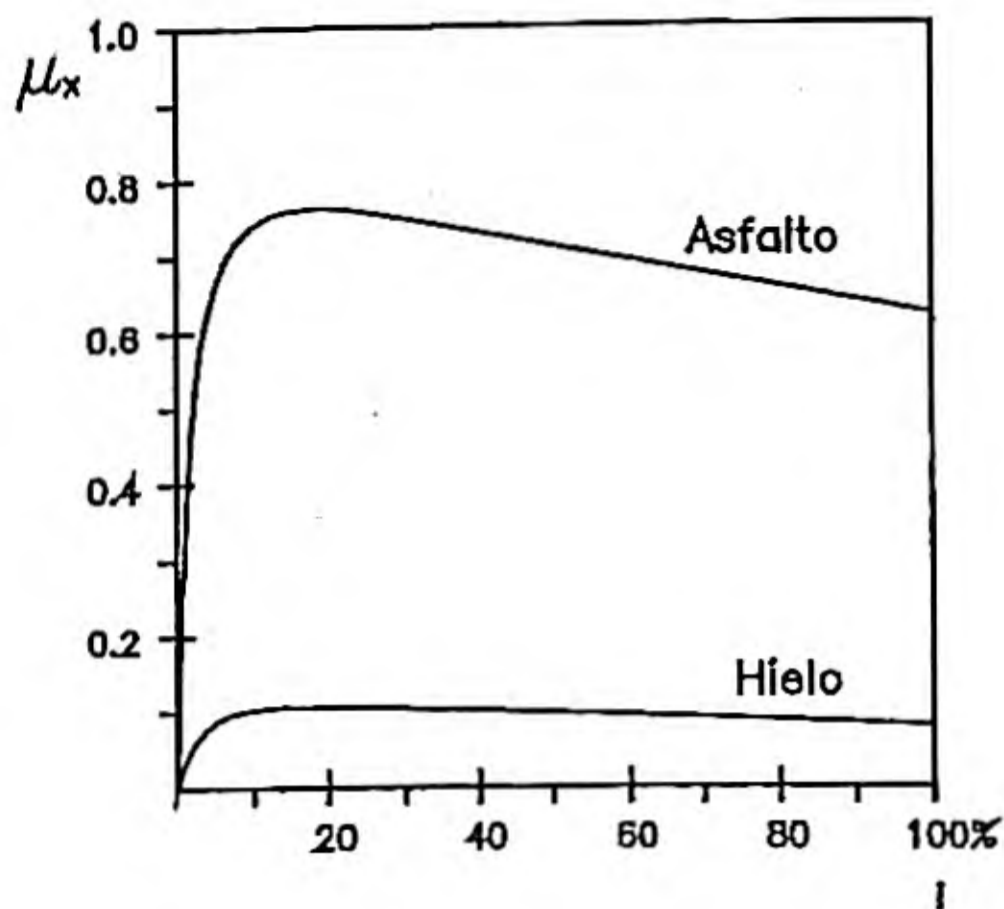


Figura 5.11. Variación del coeficiente de fuerza de frenado μ_x con el deslizamiento.

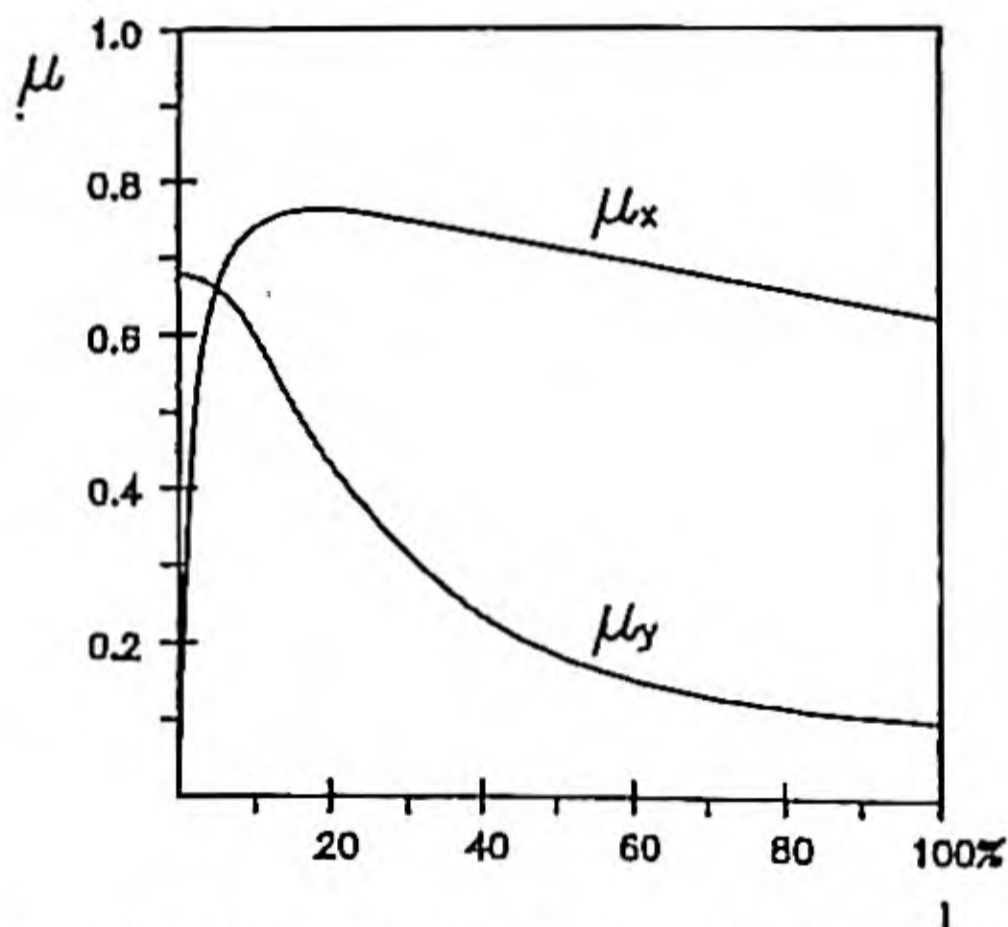


Figura 5.12. Variación de los coeficientes de fuerza de frenado μ_x y de fuerza lateral μ_y con el deslizamiento para un cierto valor del ángulo de deriva.

Cuando actúa simultáneamente una fuerza transversal (F_y) mientras se produce la frenada, las variaciones de los coeficientes de esfuerzo longitudinal (F_x/F_z) y lateral ($F_{y\alpha}/F_z$), siendo F_z la fuerza normal a la superficie de contacto que actúa entre ésta y la rueda, dependen

de i y del ángulo de deriva α respectivamente (figura 5.2), siendo:

$$i = \left(1 - \frac{\omega \cdot r}{V} \right) \cdot 100\%$$

donde V es la velocidad longitudinal del eje de la rueda; ω la velocidad angular de la rueda y r el radio nominal.

Al aplicar una fuerza de frenado, para valores del deslizamiento superiores a un cierto límite, la adherencia longitudinal puede superar su valor máximo y pasar rápidamente a un valor de deslizamiento, inferior al máximo, a través de un período inestable y rápido de bloqueo de la rueda. Si existen simultáneamente esfuerzos laterales, la adherencia en esta dirección se reduce hasta valores prácticamente nulos.

Aunque la situación óptima sería la que asegurase que $\mu_x = \mu_{x\max}$ en todo el proceso de frenado, esto resulta imposible en la práctica, por razones de control e inercia del sistema de frenado, por lo que es necesario establecer un intervalo de valores de i . Normalmente este intervalo, en torno al valor de μ_{\max} suele extenderse del 10% al 30% de deslizamiento longitudinal, dentro del cual μ_x se mantiene con valores elevados y μ_y conserva valores, que suelen ser suficientes, para asegurar la necesaria fuerza lateral de adherencia, en situaciones normales de circulación.

Los problemas básicos que se plantean para lograr lo anterior son:

- Tener información acerca de la evolución cinemática de las ruedas.
- Establecer una lógica capaz de distinguir las condiciones en las que puede ocurrir el bloqueo (PREDICCIÓN) y "ordenar" al circuito de frenos las actuaciones adecuadas para evitarlo, disminuyendo la presión en el circuito de freno correspondiente.
- Estimar el momento en el que se han restablecido las condiciones de no bloqueo y debe aumentarse nuevamente la presión de freno (RESELECCIÓN).
- Disponer de elementos de captación, cálculo, decisión y ejecución de órdenes, capaces de realizar estas funciones en muy corto espacio de tiempo (milisegundos) y con fiabilidad.

5.5.4. Elementos fundamentales de un sistema antibloqueo.

Los elementos básicos del circuito de control de una rueda en un sistema ABS pueden verse en la figura 5.13. [5,6].

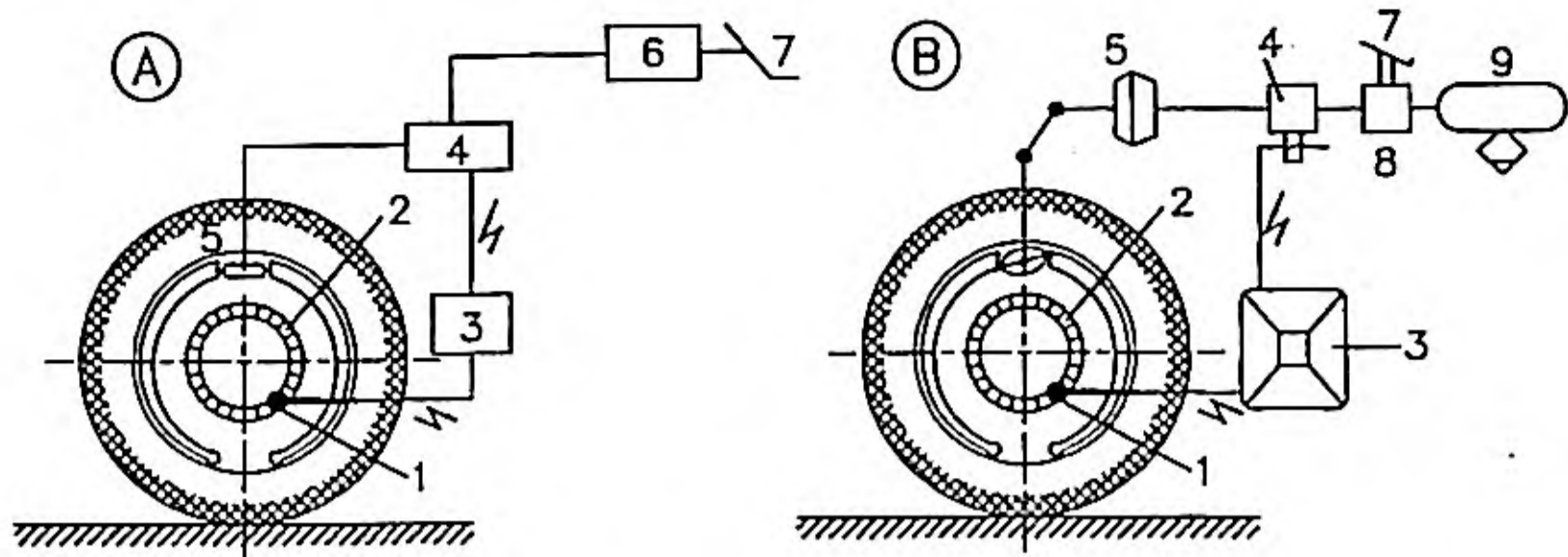


Figura 5.13. Circuito de control. A.- Frenos hidráulicos. B.- Frenos neumáticos. 1.- Captador inductivo, 2.- Rueda dentada. 3.- Unidad de control electrónico. 4.- Válvula de control (modulador de presión). 5.- Cilindro de freno de rueda. 6.- Cilindro principal. 7.- Pedal de freno. 8.- Válvula de mando de freno. 9.- Depósito de aire.

El captador inductivo, situado junto a una rueda dentada que gira con la rueda del vehículo, emite una señal cuya frecuencia es proporcional a la velocidad de la rueda, como consecuencia de la modificación del flujo magnético que produce cada diente de la rueda al pasar frente a él. Esta señal es analizada en el microprocesador 3, que dispone así de la velocidad angular de la rueda y, mediante cálculo y derivación, de la velocidad de desplazamiento (velocidad circunferencial) que correspondería a dicha velocidad angular, así como de la aceleración angular.

A partir de estos datos, el sistema debe deducir la necesidad de disminuir o mantener constante la presión en los cilindros de freno de la rueda, o ruedas, correspondientes y emitir la señal de actuación sobre la válvula de control 4, la cual realizará esta función.

Han sido desarrollados diversos sistemas que incorporan soluciones distintas para muchos de los componentes. Aquí describiremos uno de ellos con más detalle, el sistema Wabco [5]. En este sistema la válvula de control (Fig. 5.1) consta, a su vez, de dos válvulas de solenoide (i, h) y dos válvulas de diafragma (f, b); éstas últimas abren los orificios e y c cuando la diferencia de presión en las cámaras adyacentes permite vencer el esfuerzo elástico de los correspondientes resortes.

El orificio 1 conecta con el calderín de alimentación, a través de la válvula accionada por el pedal de freno. El orificio de salida 2 conecta con el cilindro o cilindros de freno correspondientes. La ventana 3 comunica con la atmósfera.

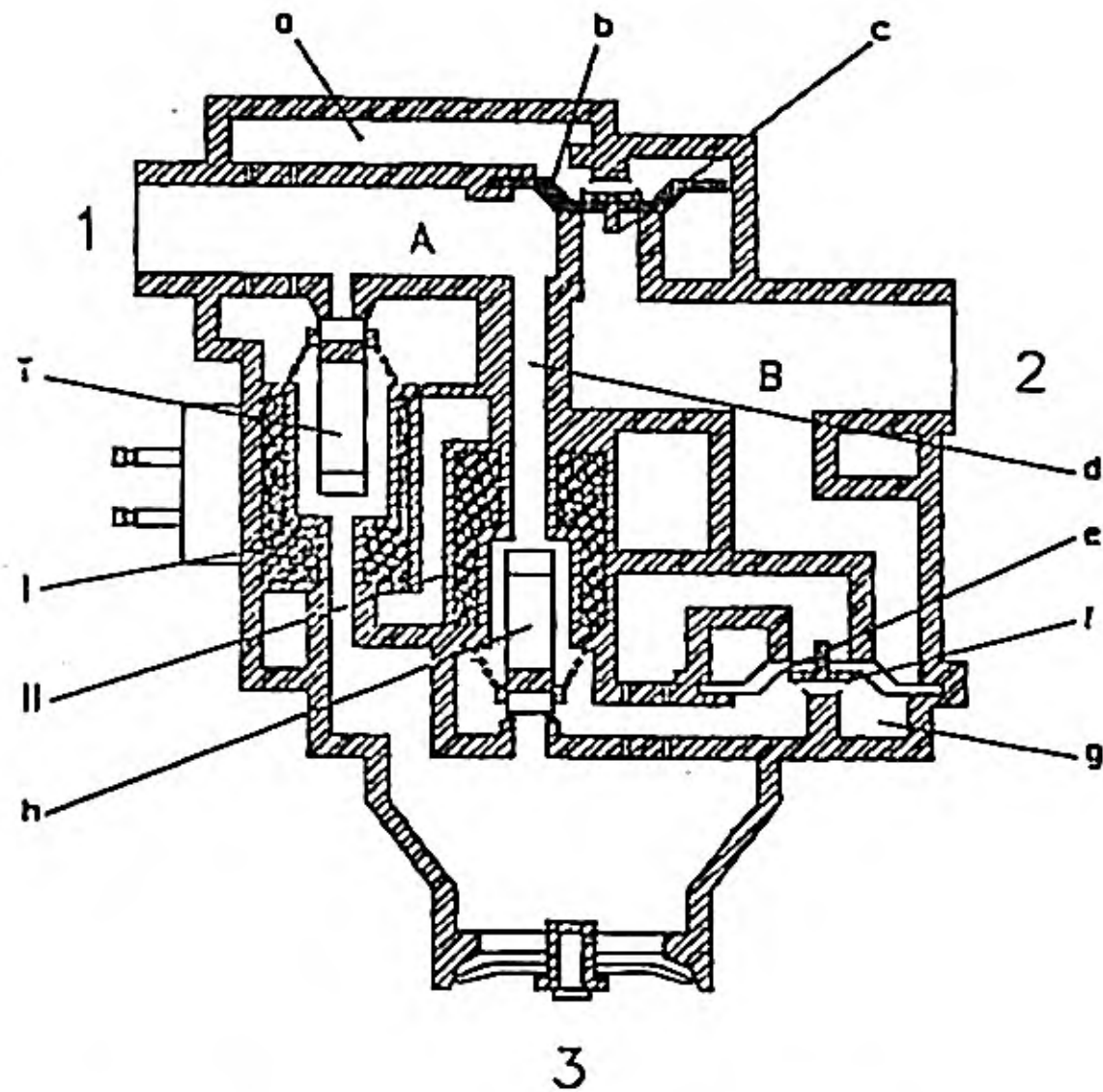


Figura 5.14. Ejemplo de válvula de control (ABS de Wabco).

El incremento de presión se logra con las válvulas de solenoide en la posición de la figura. En esta posición la cámara a se encuentra a presión atmosférica y la A a la del circuito de aire a presión; el diafragma b, abre y las cámaras A y B se encuentran comunicadas pasando el aire del calderín al circuito que alimenta las válvulas de freno (figura 5.a).

Cuando la unidad de control detecta condiciones de bloqueo y "decide" disminuir la presión en los cilindros de freno, se energiza el solenoide I, desplazando hacia abajo la válvula i, con lo que la cámara a se llena con aire a presión y el diafragma b cierra el orificio c.

Por otra parte, el solenoide II es también alimentado, con lo que la válvula h se desplaza hacia arriba cerrando el paso al aire a presión contenido en la cámara A y poniendo en comunicación con la atmósfera a la cámara g.

El diafragma f se abre, por la presión a que se encuentra la cámara B, y el circuito de frenos, y el aire de éste escapa a la atmósfera por la ventana 3 (figura 5.b).

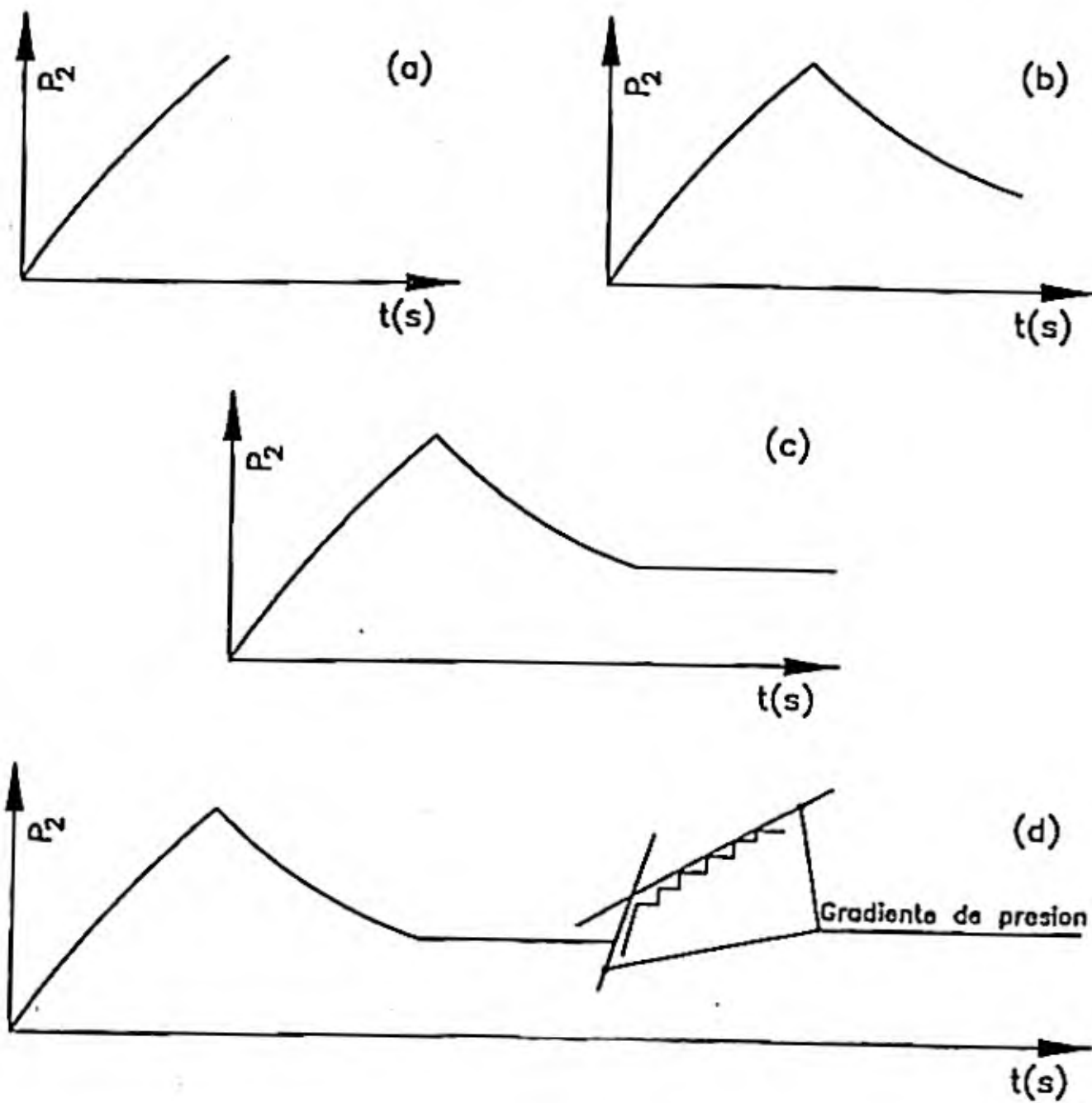


Figura 5.15. Variación de presión en el circuito de frenos según el accionamiento de la válvula de control.

Por último, si la orden de la Unidad de Control es mantener la presión constante, el solenoide I se activa y la válvula de entrada i se abre, cerrándose el diafragma b como en el caso anterior. La válvula h, en cambio, se cierra, con lo que el aire de la cámara A llena la cámara g, quedando cerrado el diafragma f. En estas condiciones, el circuito de freno, y la cámara B, quedan aislados, por el cierre de ambos diafragmas (posición representada en la figura 5.14) tanto del circuito de alimentación, como de la atmósfera y la presión en ellos permanece constante (figura 5.15.c).

Debido a la inercia del sistema, el nuevo incremento de presión, una vez eliminado el riesgo de bloqueo, se produce en forma de escalonamiento (figura 5.15.d).

5.5.5. Criterios y ciclos de control.

De las señales recibidas en la Unidad de Control, procedentes de los sensores de velocidad de las ruedas, aquella debe deducir las condiciones de cada rueda en relación con el bloqueo y para ello se han seguido diferentes criterios de predicción, como son [4] [2]:

$$a) -\dot{\omega} < -\dot{\omega}_r \quad -\dot{V}_c < -\dot{V}_\sigma$$

$$b) \omega < \omega_r \quad V_c < V_\sigma$$

$$c) i > i_r$$

Las anteriores variables y parámetros son:

$\omega, \dot{\omega},$	-	Velocidad y aceleración angular de la rueda.
\dot{V}_c	-	Aceleración circunferencial de la rueda.
V_c	-	Velocidad de desplazamiento de la rueda.
i	-	Deslizamiento longitudinal en frenado.
$\dot{V}_\sigma; \dot{\omega}_r$	-	Constantes. Valores de referencia.
i_r	-	Constante positiva. Valor de referencia.
ω_r, V_σ	-	Velocidad de referencia generadas internamente por el sistema.

Normalmente se utiliza, también, una constante de tiempo de retardo, para garantizar que una o más condiciones son satisfechas, durante un intervalo finito de tiempo, con el objeto de minimizar el riesgo de una predicción falsa derivada de "ruidos" del sistema o discontinuidades localizadas de las condiciones de la calzada.

La velocidad de desplazamiento del vehículo, o de la rueda, necesaria para calcular el deslizamiento, no es conocida; su estimación se hace mediante algoritmos más o menos complicados que tienen en cuenta el comportamiento de todas las ruedas.

En relación con los criterios de re – selección, o reinicio de la aplicación de presión de frenado, los más usuales son:

$$1) \dot{\omega} > \dot{\omega}_r \quad \dot{V}_c > \dot{V}_{r'e}$$

$$2) \omega > \omega_r \quad V_c > V_{c'r}$$

Siendo $\dot{\omega}_r, \dot{V}_{c'r}$, cantidades positivas y ω_r, V_r velocidades y aceleraciones de referencia, calculadas por la Unidad de Control, no necesariamente iguales a ω_r y V_r respectivamente.

Ejemplos de valores de referencia son:

$$i_r \approx 10\%$$

$$-\dot{V}_{c'r} \approx -9.8 \text{ a } -16 \text{ m/s}^2$$

Conviene hacer algunas consideraciones acerca de las variables de control utilizadas (i, ω, Γ, \dots). En relación con el deslizamiento, las curvas $\mu_x(i)$, (figuras 5.11 y 5.12), presentan valores de μ_{max} y leyes de variación en torno a este valor que dependen del pavimento y condiciones en que éste se encuentra; en consecuencia, no pueden adoptarse límites constantes, válidos para todas las circunstancias, en condiciones adecuadas de funcionamiento.

En cuanto a la deceleración de la rueda, utilizada como criterio único, también presenta inconvenientes. Esta variable es adecuada para el control de ruedas no motrices sobre calzadas con coeficiente de adherencia constante.

En ruedas motrices y relaciones de transmisión con reducción elevada, pueden alcanzarse valores altos del deslizamiento sin que la deceleración alcance el valor de preselección. Con crecimiento suave de la presión, la rueda puede incluso bloquear.

Por otra parte, un decrecimiento brusco de la adherencia rueda-calzada, puede causar elevada deceleración en ruedas no motrices durante un período dilatado de tiempo.

Debido a todo ello, la deceleración de la rueda, aisladamente, tampoco es suficiente como variable de control. Estas son las razones por las cuales suelen adoptarse combinaciones de ambas variables para el control de los sistemas ABS.

[Frenado de vehículos automóviles.]

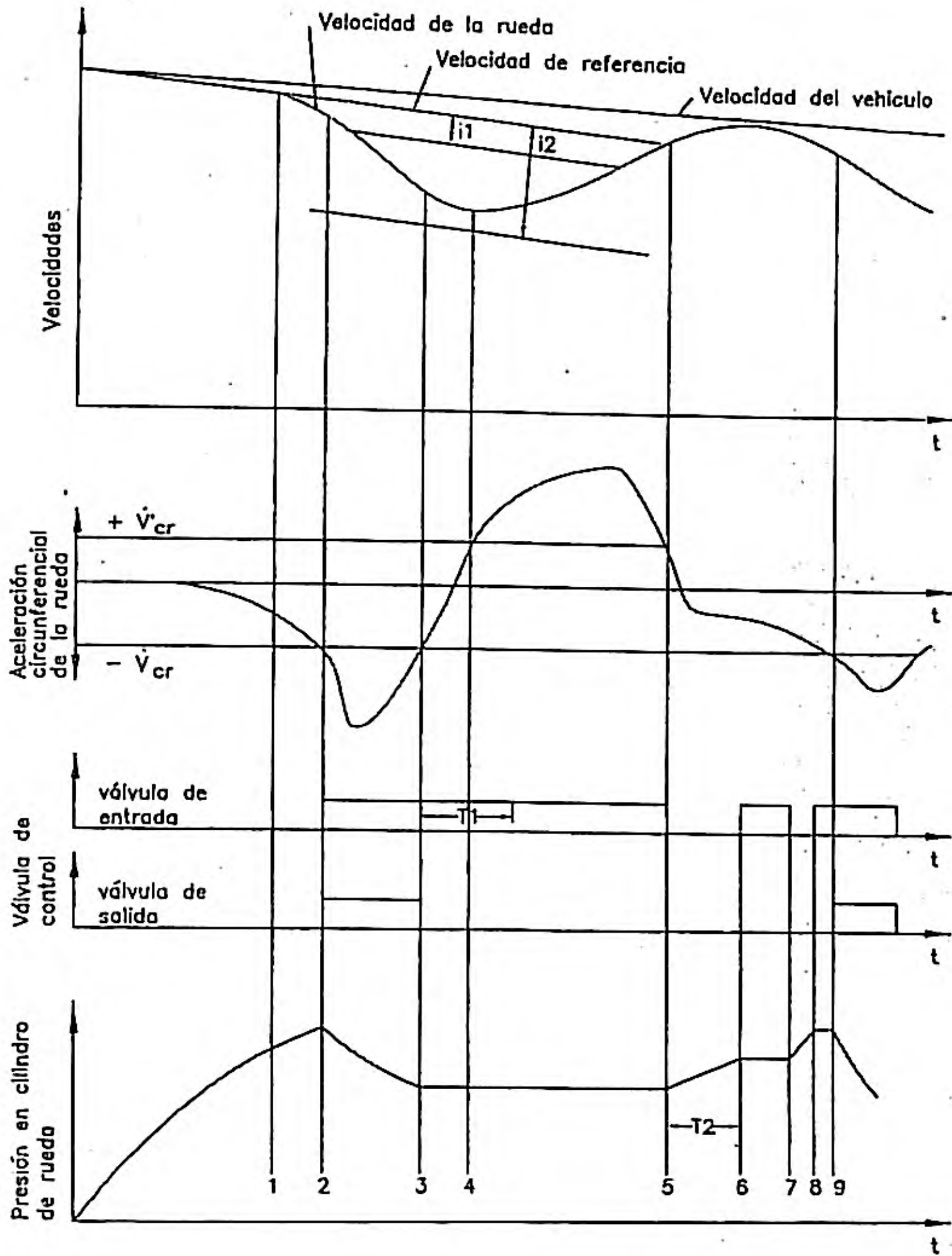


Figura 5.16. Ciclo de Control.

Para ilustrar la actuación de la Unidad de Control, podemos hacer referencia al siguiente ejemplo de un ABS para turismos [6].

Cuando la deceleración circunferencial de la rueda es mayor de 1.6 g., la señal se almacena en un circuito de memoria durante un período de 140 ms. Durante este período, si la velocidad angular de la rueda decrece un 5% del valor almacenado, y si al mismo tiempo la deceleración del vehículo, medida a través de ruedas con deslizamiento nulo o muy pequeño, no es mayor de 0.5 g., la Unidad de Control predice que la rueda está en el punto de bloqueo y envía una señal a la válvula de control, para reducir la presión en el cilindro de freno. Por el contrario, si la deceleración del vehículo es mayor de 0.5 g., entonces el sistema predice bloqueo y actúa reduciendo la presión de freno, tan pronto como el decrecimiento de la velocidad angular de la rueda sea un 15% del valor almacenado.

Para completar esta parte del tema, describiremos la actuación del sistema de la casa Wabco [5] para vehículos industriales, a través de un ciclo de control (figura 5.16).

En este sistema se han establecido los límites de referencia de aceleración circunferencial de la rueda, \dot{V}_{cr} y $-\dot{V}_{cr}$, y los límites de deslizamiento i_1 y i_2 .

En el punto 1, la señal del captador empieza a interpretarse como deceleración de la rueda que el vehículo no puede físicamente alcanzar. Desde este momento, el control calcula una velocidad de referencia de acuerdo con una deceleración constante. A partir de aquí, el deslizamiento se calculará como diferencia entre la velocidad de la rueda y la de referencia.

En el punto 2, se alcanza el límite de deceleración $-\dot{V}_{cr}$ y la rueda se supone que entra en el intervalo inestable de la curva $\mu_x(i)$. La Unidad de Control actúa sobre la válvula de solenoides (se describió anteriormente) reduciéndose la presión hasta el momento en que la deceleración vuelve a adquirir un valor igual al límite $-\dot{V}_{cr}$ (punto 3), entonces una nueva señal hace que la presión se mantenga constante.

La presión se mantiene constante por un tiempo prefijado T_1 . Normalmente la aceleración de la rueda alcanza el límite $+\dot{V}_{cr}$ dentro del tiempo T_1 (punto 4); si esto sucede, la presión continúa constante; si no hubiese ocurrido así, probablemente en superficies de muy baja adherencia, la presión habría sido reducida de nuevo porque se habría rebasado el límite i_2 de deslizamiento, lo cual habría originado una nueva señal.

Durante la fase de presión constante, la rueda es acelerada pasando al intervalo de deslizamiento estable y rebasando de nuevo el límite $+\dot{V}_{cr}$, en el punto 5; en este instante, el valor de la adherencia empieza a estar por debajo del valor μ_{xmax} . A partir de este punto se incrementa rápidamente la presión durante otro intervalo de tiempo T_2 . Este intervalo es predeterminado durante el primer ciclo de control y tiene como objetivo superar la histéresis del freno.

Después de este incremento rápido de presión, pueden producirse nuevos incrementos en forma pulsatoria. Normalmente se vuelve a alcanzar el límite \dot{V}_{cr} (punto 9), durante la fase pulsatoria, y la presión es reducida de nuevo, iniciándose otro ciclo.

La lógica de los diferentes ABS no es necesariamente fija, existen sistemas adaptativos (incluido el descrito antes) que modifican los parámetros de control en función de diferentes condiciones operativas (velocidad del vehículo, superficies de bajo rozamiento, etc.) en orden a extender satisfactoriamente su eficacia a un amplio rango de condiciones de circulación.

5.5.6. Técnicas de control en los sistemas ABS.

Aunque se ha desarrollado un mayor número de técnicas de control por ABS, puede decirse que las fundamentales son [2] [4]:

- Control independiente: CI
- Control por selección inferior (select-low): CSI

Control Independiente (C.I.).

Esta técnica consiste en controlar individualmente cada una de las ruedas. El sistema incorpora tantos captadores y válvulas de control como ruedas. Este sistema permite que cada rueda frene con máxima adherencia y, en consecuencia, minimiza las distancias de frenado, sin embargo, tiene un grave inconveniente, pues produce un momento de guiñada elevado, en el caso de frenada severa, sobre pista con diferente coeficiente de adherencia en las zonas donde se mueven las ruedas de cada lado del vehículo. Esto puede observarse en la figura 5.17.

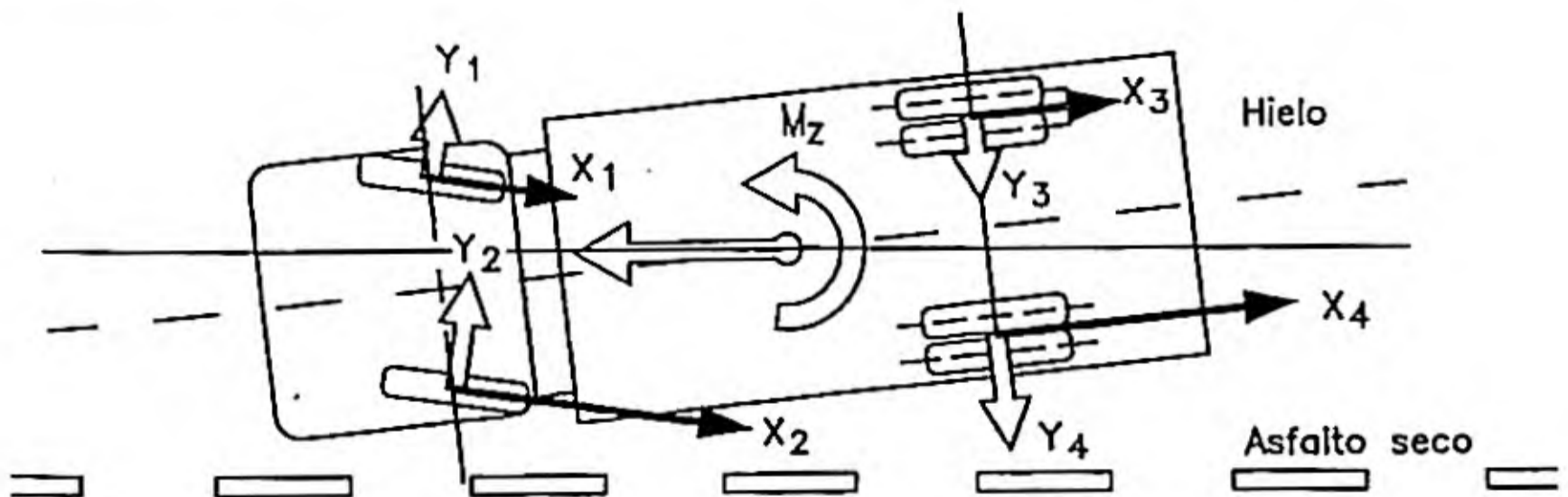


Figura 5.17. Esfuerzos en un vehículo frenando sobre superficie de adherencia asimétrica respecto al vehículo.

En el caso representado en la figura, si las condiciones no son muy severas, el momento M_z será compensado por el producido por los esfuerzos laterales (y) desarrollados entre las ruedas y la calzada; será suficiente el giro de las ruedas directrices para compensar el momento de guiñada. En este caso existirá un problema de control direccional superable, si el conductor es suficientemente diestro. Si se rebasa cierto límite, la falta de control se transformará en inestabilidad y no existirá posibilidad de control de la trayectoria, girando el vehículo sobre su eje Z , mientras se desplaza. Análogo efecto puede presentarse en frenadas severas en curva, al existir un menor peso adherente en las ruedas interiores, cuando la aceleración lateral es suficientemente elevada.

Control por Selección Inferior (C.S.I.).

Las ruedas de un mismo eje se controlan simultáneamente, ajustando la presión de freno a las condiciones de aquella cuyo bloqueo se predice antes. Esto impone que el par de frenada de la rueda alejada del punto de bloqueo sea menor que el que admitiría la adherencia.

Con este sistema se evita el riesgo antes señalado, pero se aumenta la distancia de frenado. Es decir, el control y estabilidad direccional son mejores que si el vehículo no dispusiese de ABS, pero la distancia de frenado aumenta.

Los diferentes sistemas desarrollados constituyen combinaciones de estas técnicas o variantes de las mismas.

En la figura 5.18 se representan varias posibilidades e indicaciones de su influencia en el control direccional, estabilidad y distancia de frenado [3], en relación con los sistemas de freno sin ABS, y considerando dos situaciones: superficie de rodadura simétrica y no simétrica respecto a la adherencia.

Por razones de seguridad, los sistemas de freno con ABS, igual que los sistemas convencionales, disponen de doble circuitos de frenos para que el fallo de un componente no invalide completamente el sistema en las cuatro ruedas. Una disposición bastante utilizada es la diagonal; en ella se instalan dos circuitos completamente independientes que accionan, cada uno, los frenos una rueda delantera y la trasera del lado contrario. El fallo de un circuito deja al vehículo frenado con una diagonal.

La información contenida en la figura 5.18 puede ser fácilmente interpretada. Si consideramos, por ejemplo, el tercer sistema, con dos canales de control y sensores en las ruedas delanteras, al prevenir el bloqueo de estas ruedas, pero no el de las traseras, salvo que se haga llegar a ellas una presión de frenado muy baja en cualquier condición, lo cual incrementaría la distancia de frenado, crea unas condiciones de inestabilidad peores, incluso, que en sistemas de frenos sin ABS. Lo anterior se debe a que un sistema sin ABS, tras bloquear las ruedas traseras, si continúa creciendo la presión sobre el freno, inmediatamente después bloquean las delanteras, siendo ésta una situación más favorable desde el punto de vista de la

estabilidad. En cambio, mejora el control direccional por el mismo hecho de no bloquear las ruedas delanteras.

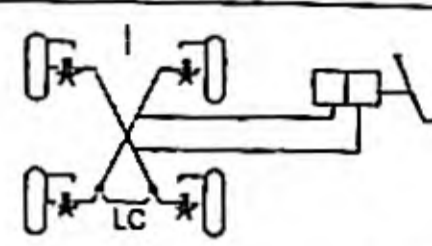
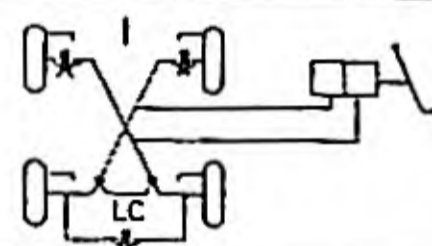
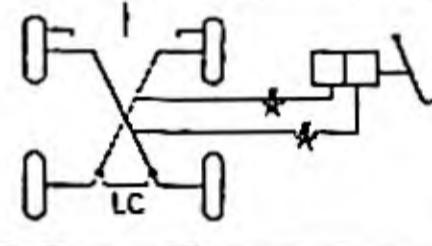
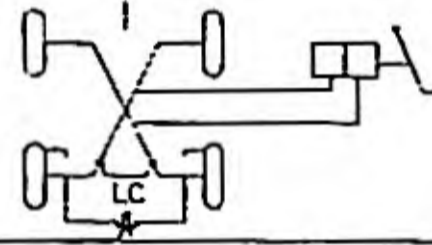


		Control Dirección	Estabilidad	Distancia de frenado
		Asf/hielo	Asf/hielo	Asf/hielo
4 Canales ABS		++	+ -	++
3 Canales ABS CI-CSI		++	+ 0	+ 0
2 Canales ABS		++	--	0 0
1 Canal ABS CSI Eje trasero		--	++	+ -
* Canal de control - Sensor LC Regulador de presión en función de la carga		+ Mejor 0 Igual - Peor	que un sistema convencional de frenado Superficie con  adherencia asimétrica  adherencia asimétrica	

Figura 5.18 Comparación de diferentes sistemas antibloqueo para vehículos de tracción delantera superpuestos a un sistema de frenado-diagonal convencional

Además de las técnicas de control descritas antes, se han desarrollado otras más o menos intermedias, por ejemplo, la Firma Wabco [5] propone un sistema de control independiente modificado (CIM), en el eje delantero. Esta técnica dispone una actuación inicial como selección inferior y luego regula gradualmente la presión de freno de la rueda con mayor adherencia disponible hasta un nivel máximo controlado. El eje trasero se regula por control independiente, lo cual está justificado por el hecho de que, debido a la transferencia de carga en frenadas severas, su influencia general en el frenado suele ser menor. En la figura 5.19 se expresan los resultados comparativos de tres sistemas CI-CI; CSI-CI; CIM-CI, representándose las presiones en frenos y ángulos de dirección requerido, así como las distancias de frenado, en el caso de circulación de un vehículo sobre calzada de adherencia asimétrica (asfalto/hielo), con las tres combinaciones anteriormente indicadas.

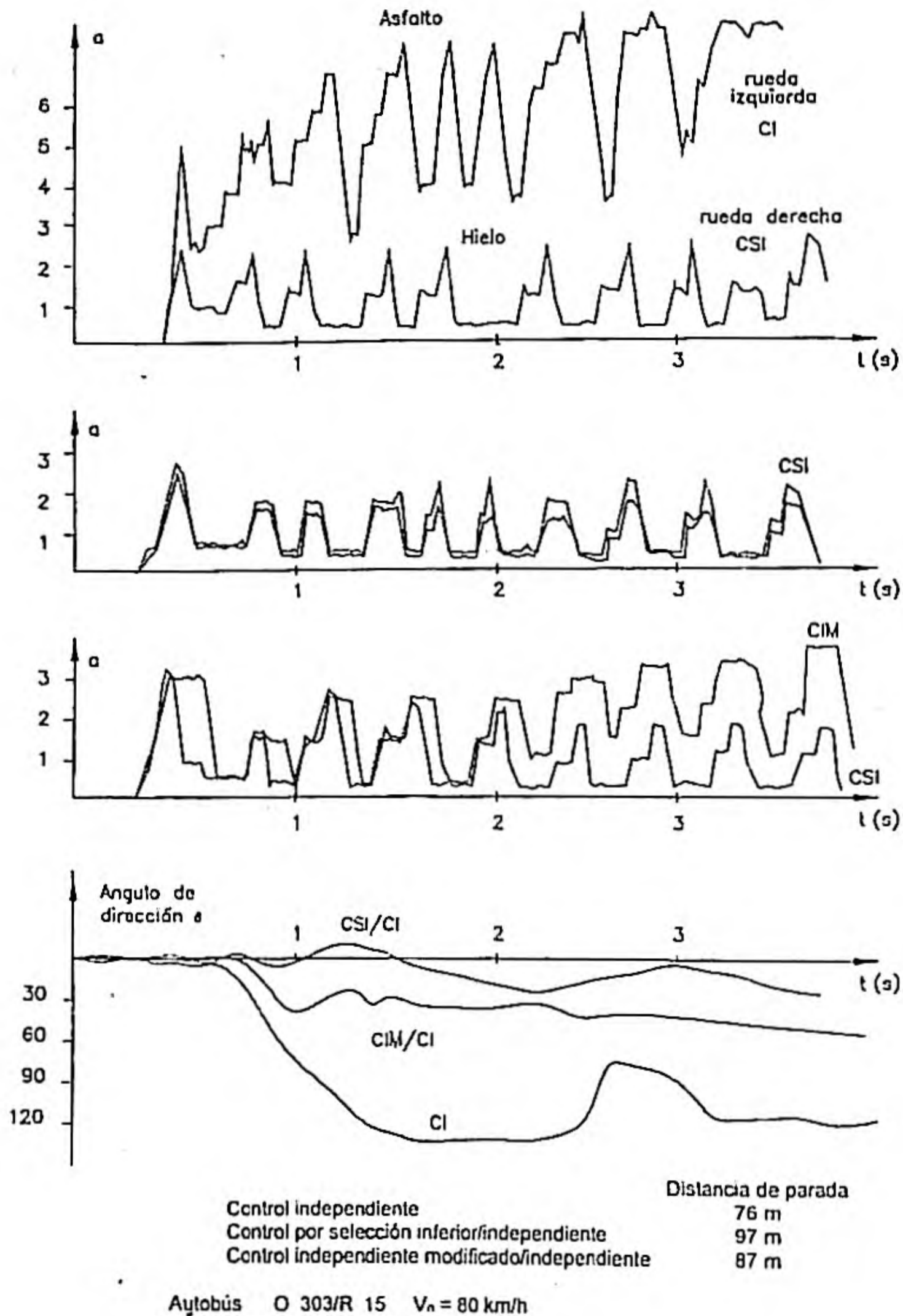


Figura 5.19. Comparación de tres sistemas ABS.

[Frenado de vehículos automóviles.]

Puede observarse que las combinaciones CSI-CI y CIM-CI no requieren ángulos correctores de dirección muy diferentes y, en cambio, la distancia de frenado en el segundo caso queda mejorada respecto al primero.

El control independiente de las cuatro ruedas produce, como ya sabíamos, la distancia de parada más pequeña, pero requiere un ángulo corrector de dirección muy elevado en el caso de adherencia asimétrica.

Con carácter general, se trata de reducir el momento de guiñada, producido por fuerzas de frenado diferentes en las ruedas de un mismo eje, lo suficiente para que pueda ser equilibrado con los esfuerzos laterales generados por la adherencia disponible, pero conservando el máximo valor posible de dichas fuerzas de frenado.

De todo lo anterior puede deducirse que las soluciones adoptadas por cada firma responde a criterio distinto, que el objetivo de optimizar el frenado de los vehículos mediante sistemas ABS aún no está agotado, y que la adopción de diferentes criterios conduce a resultados diferentes en cuanto a distancia de frenado y comportamiento direccional de los vehículos.

Ejercicio 5.1.

Un vehículo turismo presenta las siguientes características:

- Batalla: 2,49 m.
 - Reparto de pesos en orden de marcha:
 - Eje delantero: 547 daN.
 - Eje trasero: 468 daN.
 - Reparto de pesos a plena carga:
 - Eje delantero: 645 daN.
 - Eje trasero: 810 daN.
- Altura del centro de gravedad:
- En orden de marcha: 0,45 m.
 - En plena carga: 0,55 m.

El sistema de frenos dispone de un limitador de presión en el eje trasero. Este limitador actúa a partir de un cierto valor de la deceleración, manteniendo constante la presión en los cilindros de freno de las ruedas traseras. Dicho valor de la deceleración varía con las condiciones de carga, de tal forma que se logre la máxima capacidad de frenado sin riesgo de bloqueo de las ruedas traseras. Se conoce, así mismo, que sin actuar el limitador de presión, es decir, con idéntica presión en los cilindros de las ruedas delanteras y en las traseras, la relación de fuerzas de frenado es: $(F_{fd}/F_{ft}) = 1,5$

Calcular, cuando el vehículo circula en orden de marcha y a plena carga:

- 1) Valores de las deceleraciones a partir de las cuales deberá actuar el limitador.
- 2) El rendimiento de frenado del vehículo circulando sobre una calzada de adherencia 0,9, para una fuerza de frenado de las ruedas delanteras de 700 daN. Considérese la posibilidad de que no llegue a actuar el limitador.
- 3) Representación gráfica.

SOLUCION:

- 1) **Valores de la deceleración a partir de los cuales debe actuar el limitador.**

Teniendo en cuenta las ecuaciones 5.28, 5.29 y 5.27:

$$F_{fd} = \frac{P}{g \cdot L} \left[a \cdot l_2 + \frac{h}{g} a^2 \right]$$

$$F_n = \frac{P}{g \cdot L} \left[a \cdot l_1 - \frac{h}{g} a^2 \right]$$

Por otra parte, se conoce la relación entre las fuerzas de frenado con que actúa el sistema en cada eje, cuando no actúa el limitador:

$$\frac{F_{fd}'}{F_n'} = \frac{l_2 + \frac{h}{g} a}{l_1 - \frac{h}{g} a} = 1,5$$

despejando la aceleración se tiene que:

$$a = \frac{1,5 \cdot l_1 - l_2}{2,5 \cdot \frac{h}{g}}$$

- 1.1) **Vehículo circulando en orden de marcha**

$$l_2 = \frac{P_1}{P} L = 1,342 \text{ m.} \quad \text{Entonces } l_1 = 1,148 \text{ m.}$$

[Frenado de vehículos automóviles.]

La deceleración a partir de la cual debe actuar el limitador es:

$$a_{om} = \frac{1,5 \cdot 1,148 - 1,342}{2,5 \cdot \frac{0,45}{9,81}} = 3,31 \text{ m/s}^2$$

1.2) Vehículo circulando a plena carga.

$$l_2 = \frac{P_1}{P} L = 1,103 \text{ m.} \quad \text{Entonces } l_1 = 1,386 \text{ m.}$$

La deceleración a partir de la cual debe actuar el limitador:

$$a_{pc} = \frac{1,5 \cdot 1,386 - 1,103}{2,5 \cdot \frac{0,55}{9,81}} = 6,96 \text{ m/s}^2$$

2) Rendimiento de frenado.

$$\eta = \frac{a}{g} \mu$$

Cálculo de las fuerzas de frenado aplicadas al eje trasero si no actuase el limitador, para $F_{rd} = 700 \text{ daN}$

$$F_{\eta} = \frac{700}{1,5} = 466,66 \text{ daN}$$
$$F_r = 700 + 466,66 = 1166,66 \text{ daN}$$

Despreciando la deceleración por otros esfuerzos resistentes. En orden de marcha:

$$a_{om} = \frac{1166,66}{1015} 9,81 = 11,28 \text{ m/s}^2 > 3,31 \text{ m/s}^2$$

A plena carga:

$$a_{pc} = \frac{1166,66}{1455} 9,81 = 7,87 \text{ m/s}^2 > 6,96 \text{ m/s}^2$$

Puesto que en ambos casos los valores de la deceleración son superiores a los

calculados en el punto anterior, el limitador actúa para $F_{fd} = 700$ daN, por tanto, las fuerzas de frenado en el eje trasero serán:

$$F_{ft} = \frac{P}{g \cdot L} \left[a \cdot l_1 - \frac{h}{g} a^2 \right]$$

En orden de marcha:

$$F_{ftom} = \frac{1015}{9,81 \cdot 2,49} \left[3,31 \cdot 1,148 - \frac{0,45}{9,81} 3,31^2 \right] = 137 \text{ daN}$$

A plena carga:

$$F_{ftpc} = \frac{1455}{9,81 \cdot 2,49} \left[6,96 \cdot 1,386 - \frac{0,55}{9,81} 6,96^2 \right] = 412,8 \text{ daN}$$

Ver figura 5.18.

2.1) Cálculo de la deceleración y rendimiento de frenado con el vehículo circulando en orden de marcha.

$$a_{om} = \frac{(700 + 137)}{1015} 9,81 = 8,09 \text{ m/s}^2$$

Carga dinámica sobre el eje delantero:

$$F_{zd} = \frac{P \cdot l_2}{L} + \frac{P}{g} a \frac{h}{L}$$

$$F_{zd} = 547 + 837 \frac{0,45}{2,49} = 698,27 \text{ daN}$$

$$F_{zd} = 468 - 151,2 = 316,8 \text{ daN}$$

Fuerza adherente máxima:

$$F_{ad} = 698,27 \cdot 0,9 = 628,4 < 700 \text{ daN}$$

$$F_{at} = 316,8 \cdot 0,9 = 285,12 > 137 \text{ daN}$$

Luego el eje delantero se encuentra bloqueado. Es necesario, para calcular el rendimiento de frenado, estimar el valor de la adherencia en deslizamiento y deceleración

máxima, considerando las ruedas delanteras bloqueadas.

$$F_{rd} = \frac{P}{L} \mu_d \left[l_2 + \frac{h}{g} a \right]$$

La fuerza total de frenada:

$$F_r = \frac{P}{L} \mu_d \left[l_2 + \frac{h}{g} a \right] + F_n = \frac{P}{g} a$$

Es decir,

$$\frac{a}{g} = \frac{\frac{P}{L} \cdot \mu_d \cdot l_2 + F_n}{P \left[1 - \frac{h \cdot \mu_d}{L} \right]}$$

Como $F_{nom} = 137 \text{ daN}$ y considerando $\mu_d = 0,7$, sustituyendo valores en la expresión anterior,

$$\frac{a}{g} = 0,586$$

En estas circunstancias el rendimiento del sistema habrá sido:

$$\eta = \frac{\frac{a}{g}}{\mu} = \frac{0,586}{0,9} = 0,651$$

2.2) **Cálculo de la deceleración y rendimiento de frenado con el vehículo circulando a plena carga.**

$$a_{pc} = \frac{(700 + 412,8)}{1455} 9,81 = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Transferencia de carga:

$$\Delta F_z = a \frac{P}{g} \cdot \frac{h}{L}$$
$$\Delta F_z = 1112,8 \cdot \frac{0,55}{2,49} = 245,8 \text{ daN}$$

Carga sobre el eje delantero:

$$F_{zd} = 645 + 245,8 = 890,8 \text{ daN}$$

Carga sobre el eje trasero:

$$F_{zt} = 810 - 245,8 = 564,2 \text{ daN}$$

Fuerza adherente máxima en el eje delantero:

$$F_{ad \max} = F_{zd} \cdot \mu = 890,8 \cdot 0,9 = 801,7 \text{ daN} > 700 \text{ daN}$$

Fuerza adherente máxima en el eje trasero:

$$F_{at \max} = F_{zt} \cdot \mu = 564,2 \cdot 0,9 = 507,8 \text{ daN} > 412,8 \text{ daN}$$

En consecuencia no bloquea ningún eje. El rendimiento de frenado es:

$$\eta = \frac{\frac{7,5}{9,81}}{0,9} = 0,849$$

3) En la figura 5.20 se representan los valores anteriormente calculados.

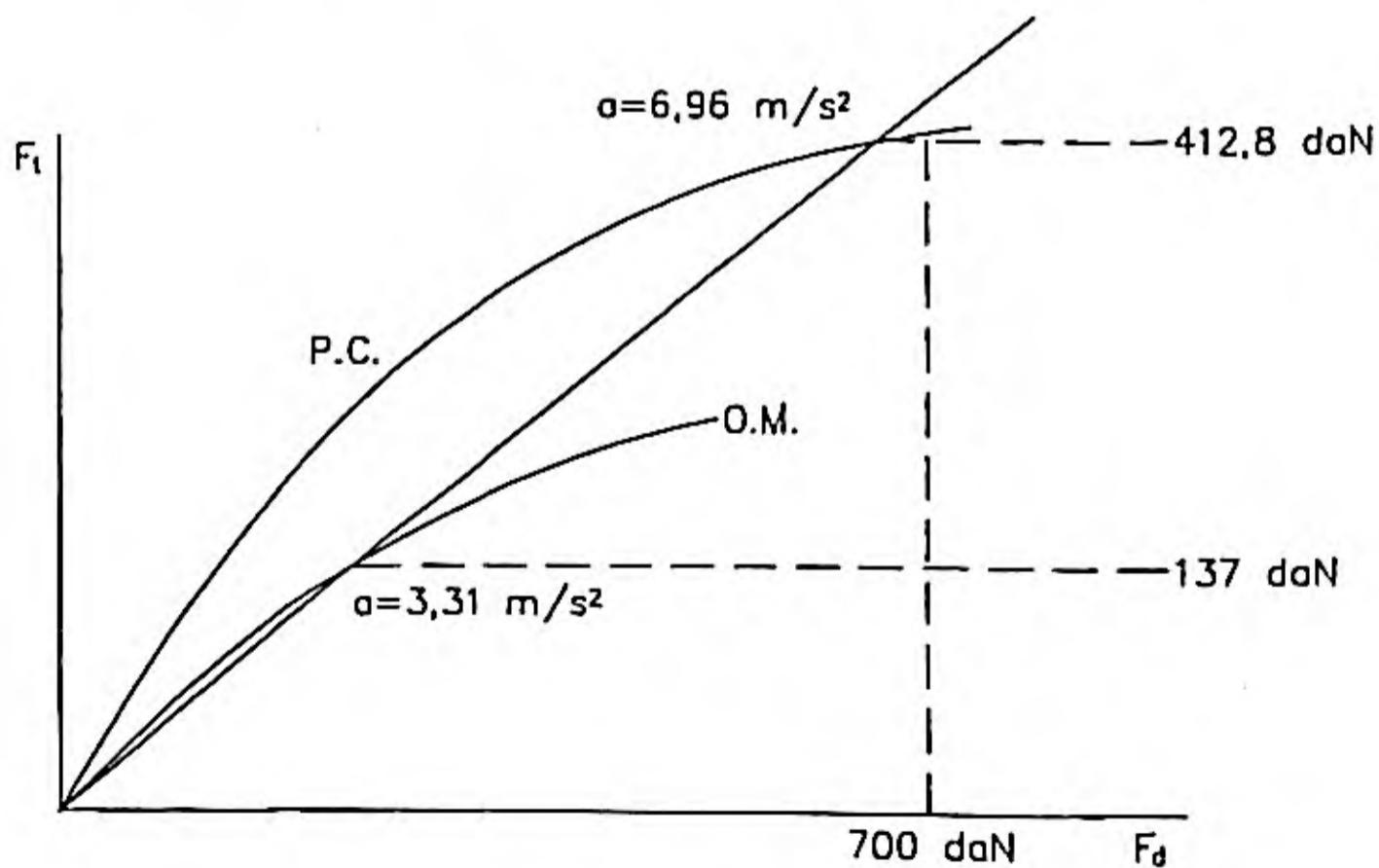


Figura 5.20. Resultados obtenidos.

Ejercicio 5.2.

Las características generales y de carga de un vehículo tractor y semirremolque son las siguientes:

- Peso del tractor sin carga: sobre eje delantero 42 kN, sobre eje trasero 21 kN.
- Peso total del semirremolque incluida carga 380 kN, siendo la tara de 50 kN y carga sobre la 5ª rueda 130 kN en reposo y sobre superficie horizontal.
- Distancia entre ejes del tractor: 3,350 m.
- Distancia (proyección sobre la superficie de rodadura) entre 5ª rueda y eje tractor 0.5 m.
- Distancia entre eje de semirremolque y la 5ª rueda del tractor: 7,5 m.
- Altura de 5ª rueda respecto al suelo: 1,1 m.
- Altura del c.d.g. del tractor: 0,9 m.
- Altura del c.d.g. del semirremolque: 2 m.

1º.- Determinar la distribución óptima de fuerza de frenado entre los diferentes ejes suponiendo plena carga y coeficiente de adherencia neumático-carretera $\mu = 0,4$. Calcular, en las condiciones de frenado máximo y uniforme: la deceleración producida como consecuencia de la acción del freno; las cargas sobre cada eje y los esfuerzos sobre la 5ª rueda.

2º.- Suponiendo que el vehículo circula a media carga, manteniendo la posición del centro de gravedad del semirremolque, sobre una calzada mojada de coeficiente de adherencia $\mu = 0,25$, razonar cual sería el comportamiento probable del vehículo, realizando los cálculos precisos para ello.

SOLUCION:

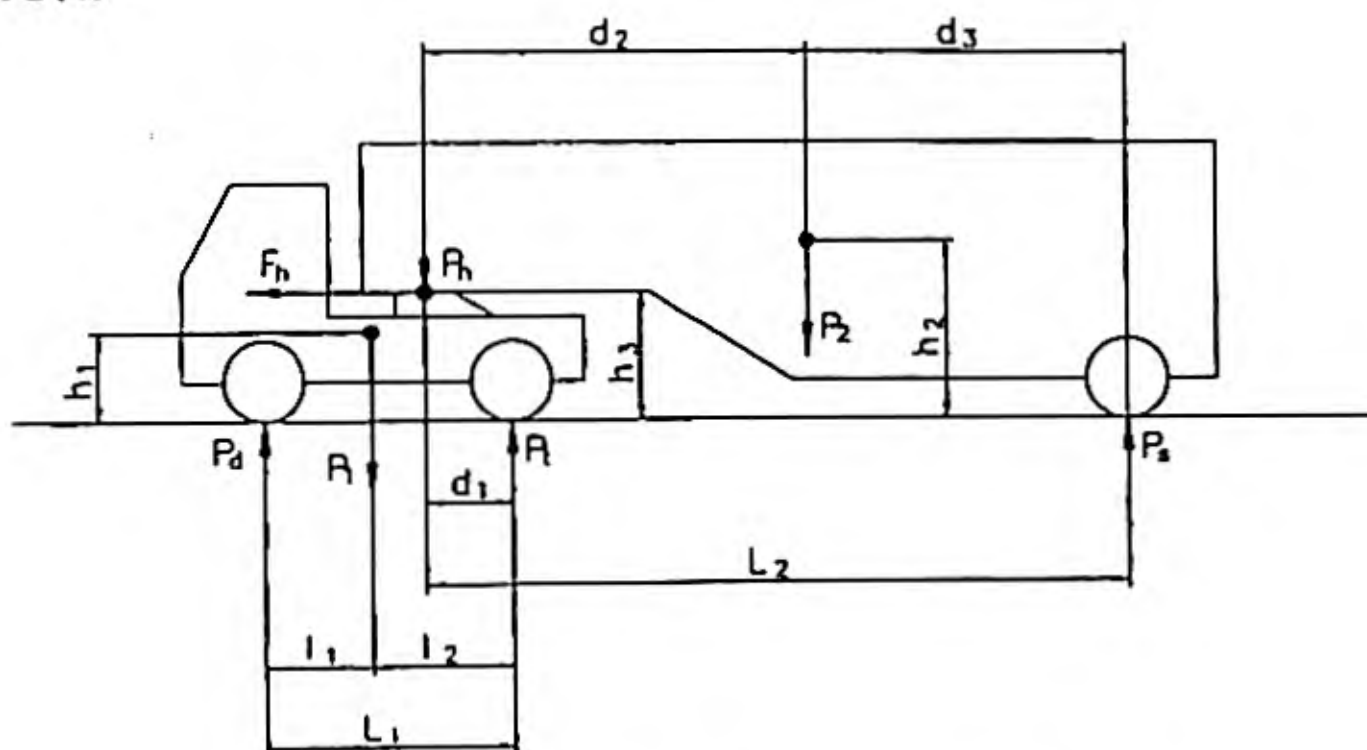


Figura 5.21. Vehículo tractor-semirremolque

1) Condiciones de frenado óptimo.

$$l_2 = \frac{P_d \cdot L_1}{P_1} = 223.3 \text{ cm}$$

$$l_1 = 335 - 223.3 = 111.7 \text{ cm}$$

$$d_3 = \frac{P_h \cdot L_2}{P_2} = 256.6 \text{ cm}$$

$$d_2 = 750 - 256.6 = 493.4 \text{ cm}$$

$$\mu = 0.4 = C_d = C_1 = C_2 = \frac{a}{g}$$

$$F_{zd} = \frac{P_1 (L_1 - l_1 + \mu \cdot h_1)}{L_1} + P_2 \frac{(L_2 - d_2 + \mu \cdot h_2) \cdot (d_1 + \mu \cdot h_3)}{L_1 (L_2 + \mu \cdot h_3)}$$

$$P_d = 93.97 \text{ kN}$$

$$F_{z1} = P_1 \frac{(l_1 - \mu \cdot h_1)}{L_1} + P_2 \frac{(L_2 - d_2 + \mu \cdot h_2) \cdot (L_1 - d_1 - \mu \cdot h_3)}{L_1 (L_2 + \mu \cdot h_3)}$$

$$P_1 = 130.13 \text{ kN.}$$

$$F_{z2} = P_2 \frac{d_2 + \mu \cdot (h_3 - h_2)}{\mu \cdot h_3 + L_2}$$

$$P_2 = 218.9 \text{ kN}$$

$$P_T = 443 \text{ kN} = F_{zd} + F_{z1} + F_{z2}$$

Fuerzas y coeficientes de frenado:

$$F_{fd} = \mu \cdot P_d = 37.59 \text{ kN} \quad K_d = \frac{F_{zd}}{P_T} = 0.212 (21.2\%)$$

$$F_{f1} = \mu \cdot P_1 = 52.04 \text{ kN} \quad K_1 = \frac{F_{z1}}{P_T} = 0.294 (29.4\%)$$

$$F_{f2} = \mu \cdot P_2 = 87.56 \text{ kN} \quad K_2 = \frac{F_{z2}}{P_T} = 0.494 (49.4\%)$$

Esfuerzos sobre la 5ª rueda:

[Frenado de vehículos automóviles.]

$$P_h = P_2 - F_{zs} = 161,1 \text{ kN}$$

$$F_h + C_s \cdot P_s = P_2 \cdot \frac{a}{g}; \quad C_s = \frac{F_{fs}}{F_{zs}}$$

$$F_h = 64,44 \text{ kN}$$

2) Para frenado óptimo en estas condiciones:

$$P_2 = 165 + 50 = 215 \text{ kN. (Vehículo a media carga)}$$

$$\mu = 0,25 = C_d = C_i = C_s \text{ (Condiciones de frenado óptimo)}$$

$$P'_T = 278 \text{ kN.}$$

Operando se llega a:

$$F'_{za} = 65,84 \text{ kN.} \quad F'_{ra} = 16,46 \text{ kN.} \quad K'_d = 0,237 (23,7\%)$$

$$F'_{za} = 81,94 \text{ kN.} \quad F'_{ra} = 20,48 \text{ kN.} \quad K'_i = 0,295 (29,5\%)$$

$$F'_{za} = 130,22 \text{ kN.} \quad F'_{ra} = 32,56 \text{ kN.} \quad K'_s = 0,468 (46,8\%)$$

Comportamiento probable del vehículo:

$$K'_d > K_d$$

$$K'_i \geq K_i$$

$$K'_s < K_s$$

Bloquearán primero las ruedas del semirremolque.

Ejercicio 5.3.

Una combinación tractor-semirremolque presenta las siguientes características generales:

- Peso del tractor: 65 kN.
- Peso del semirremolque: 270 kN.
- Distancia entre ejes del tractor: 3,70 m.
- Distancia entre el eje trasero del tractor y el eje del semirremolque: 7,2m.

[Teoría de los vehículos automóviles.]

- Distancia, en proyección sobre el suelo, entre la quinta rueda y el eje trasero del tractor: 0,60 m.
- Altura respecto al suelo de la quinta rueda: 1 m.
- Altura del centro de gravedad del tractor: 0,97 m.
- Distancia del c.d.g. del tractor al eje delantero, en su proyección sobre el suelo: 1,8 m.
- Distancia del c.d.g. del semirremolque al eje trasero, en su proyección sobre el suelo: 3,5 m.
- Altura del c.d.g. del semirremolque: 1,6 m.

Suponiendo que el vehículo circula sobre una rampa del 10% y frena, produciendo la deceleración máxima posible del conjunto que puede lograrse en función de la adherencia, calcular: la distribución de fuerzas de frenado requeridas en cada eje, los esfuerzos en la quinta rueda y la distancia de frenado, si se mantienen las condiciones de éste desde la velocidad inicial (60 km/h) hasta que el vehículo está parado.

Supóngase un coeficiente de adherencia $\mu = 0,85$. Se despreciarán las fuerzas aerodinámicas.

SOLUCION:

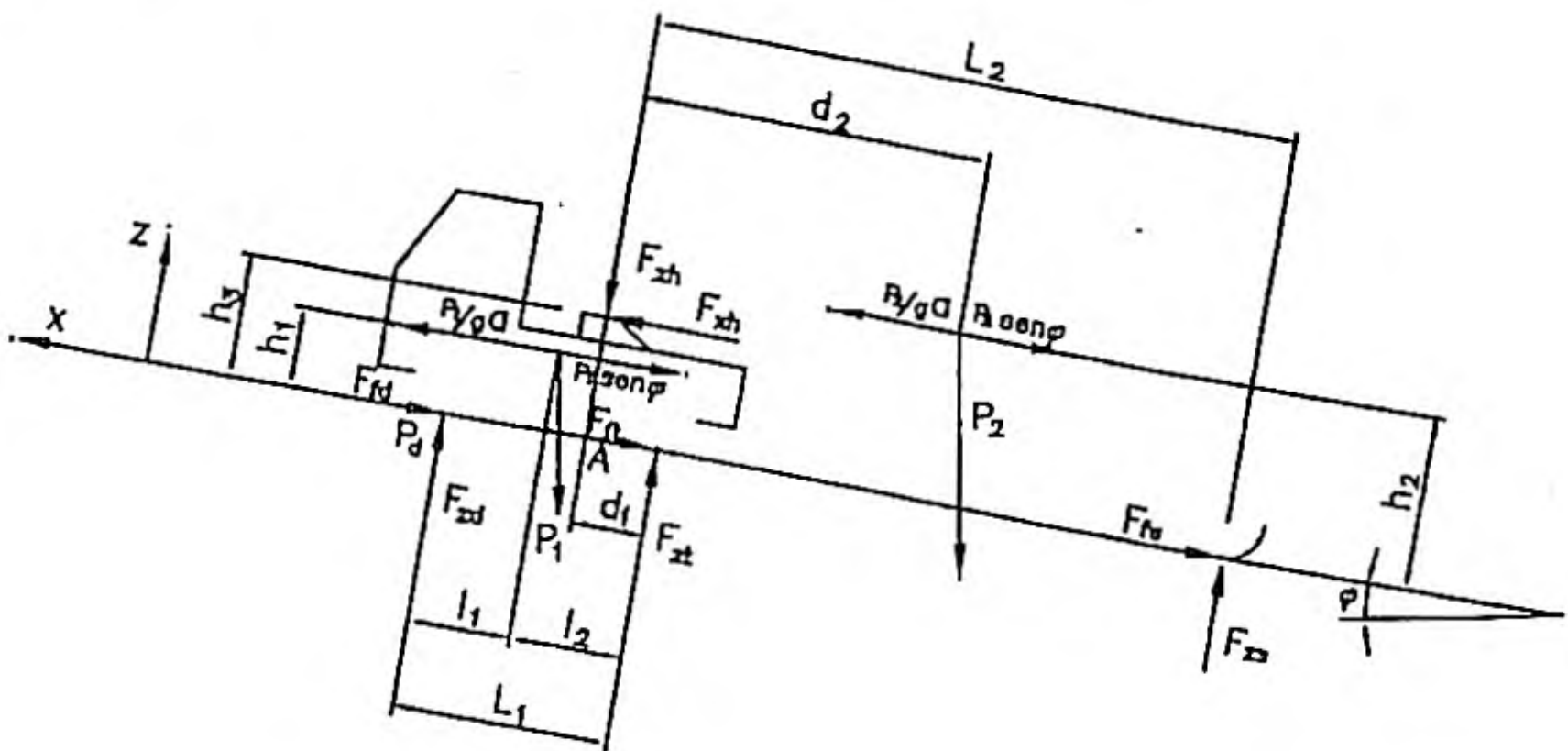


Figura 5.22. Vehículo tractor-semirremolque.

Condiciones de frenado:

Tractor

$$P_1 \cdot \frac{a}{g} - P_1 \cdot \text{sen } \theta - F_{rd} - F_{rn} - F_h = 0 \quad (\Sigma F_x = 0)$$

$$F_{zd} + F_{zd} - P_1 \cdot \text{cos } \theta - P_h = 0 \quad (\Sigma F_z = 0)$$

$$\left(P_1 \cdot \text{sen } \theta - P_1 \cdot \frac{a}{g} \right) h_1 - P_1 \cdot l_2 \cdot \text{cos } \theta +$$

$$+ F_{zd} L_1 - P_h d_1 + F_h h_3 = 0 \quad (\Sigma M_y = 0)$$

Semirremolque

$$P_2 \cdot \frac{a}{g} - P_2 \cdot \text{sen } \theta - F_{rs} + F_h = 0 \quad (\Sigma F_x = 0)$$

$$F_{zs} + P_h - P_2 \cdot \text{cos } \theta = 0 \quad (\Sigma F_z = 0)$$

$$\left(P_2 \cdot \text{sen } \theta - P_2 \cdot \frac{a}{g} \right) h_2 + P_2 \cdot d_2 \cdot \text{cos } \theta -$$

$$- P_s L_2 - F_h h_3 = 0 \quad (\Sigma M_y = 0)$$

Incógnitas:

$$F_{zd}, F_{zd}, F_{zs}; P_h, F_h$$

$$F_{rd} = \mu \cdot F_{zd} \quad F_{rn} = \mu \cdot F_{zd} \quad F_{rs} = \mu \cdot F_{zs}$$

Considerando $\text{cos } \theta = 1$ y teniendo en cuenta que:

$$P \cdot \text{sen } \theta + P \cdot \mu = P \cdot \frac{a}{g}$$

$$\frac{a}{g} = \mu + \text{sen } \theta$$

Entonces, sustituyendo:

$$P_1(\mu + \operatorname{sen} \theta) - P_1 \cdot \operatorname{sen} \theta - \mu(F_{zd} + F_{zt}) - F_h = 0$$

$$F_{zd} + F_{zt} - P_1 \cos \theta - P_h = 0$$

$$h_1[P_1 \operatorname{sen} \theta - P_1(\mu + \operatorname{sen} \theta)] - P_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta + F_{zd} L_1 - P_h d_1 + F_h h_3 = 0$$

$$h_1[P_1 \operatorname{sen} \theta - P_1(\mu + \operatorname{sen} \theta)] - P_1 \cdot l_2 \cdot \cos \theta + F_{zd} L_1 - P_h d_1 + F_h h_3 = 0$$

$$F_{zs} + P_h - P_2 \cos \theta = 0$$

$$h_2[P_2 \operatorname{sen} \theta - P_2(\mu + \operatorname{sen} \theta)] + P_2 \cdot d_2 \cdot \cos \theta - F_{zs} \cdot L_2 - F_h h_3 = 0$$

Operando queda el sistema:

$$\mu(P_1 - F_{zd} - F_{zt}) - F_h = 0$$

$$P_d + P_t - P_1 \cos \theta - P_h = 0$$

$$-P_1(\mu \cdot h_1 + l_2 \cos \theta) + F_{zs} L_1 - P_h d_1 + F_h h_3 = 0$$

$$\mu(P_2 - F_{zs}) + F_h = 0$$

$$F_{zs} + P_h - P_2 \cos \theta = 0$$

$$P_2(d_2 \cdot \cos \theta - \mu h_2) - F_{zd} L_2 - F_h h_3 = 0$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$0,85(65 - F_{zd} - F_{zt}) - F_h = 0$$

$$F_{zd} + F_{zt} - 65 \cdot \cos 5,71 - P_h = 0$$

$$-65(0,85 \cdot 0,97 + 1,9 \cos 5,71) + 3,7 \cdot F_{zd} - 0,6 \cdot P_h + F_h = 0$$

$$0,85(270 - F_{zs}) + F_h = 0$$

$$F_{zs} + P_h - 270 \cos 5,71 = 0$$

$$270(4,3 \cos 5,71 - 0,85 \cdot 1,6) - 7,8 \cdot F_{zs} - F_h = 0$$

y operando:

$$0,85(F_{zd} + F_{zt}) - F_h = 55,25 \quad (1)$$

[Frenado de vehículos automóviles.]

$$F_{zd} + F_{zd} - P_h = 64,68 \quad (2)$$

$$3,7F_{zd} - 0,6P_h + F_h = 176,48 \quad (3)$$

$$0,85 F_{zs} - F_h = 229,5 \quad (4)$$

$$F_{zs} + P_h = 268,66 \quad (5)$$

$$7,8F_{zs} + F_h = 788,04 \quad (6)$$

de (4) y (6)

$$F_{zs} = 117,63 \text{ kN}$$

de (5)

$$P_h = 151,03 \text{ kN}$$

de (6)

$$F_h = 129,47 \text{ kN}$$

de (3)

$$F_{zd} = 107,18 \text{ kN}$$

de (2)

$$F_{zd} = 108,53 \text{ kN}$$

Distancia de frenado:

Si se supone deceleración máxima:

$$a_{\max} = (\mu + \text{sen } \theta) g \text{ (Se incluye el esfuerzo retardador de la rampa)}$$

$$a = a_{\max} = (0,85 + \text{sen } 5,71) \cdot 9,81 = 9,31 \text{ m/s}^2$$

El tiempo de parada desde $V_0 = 60 \text{ km/h}$ a $V = 0$

$$V = V_0 - at \quad (V_0 = 16,66 \text{ m/s})$$

$$t = \frac{16,66}{9,31} = 1,79 \text{ s}$$

Distancia:

$$e = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$e = 16,66 \cdot 1,79 - \frac{1}{2} \cdot 9,31 \cdot 1,79^2 = 14,9 \text{ m.}$$

Ejercicio 5.4.

Un autobús presenta las siguientes características generales:

- Ancho: 2,4 m.
- Distancia entre ejes: 6,5 m.
- Peso cargado: 12 t.
- Carga estática sobre el eje delantero: 30% del peso total.
- Coeficiente de resistencia aerodinámica al avance: $C_x = 0,65$.
- Superficie transversal: $6,5 \text{ m}^2$
- En pruebas estáticas de estabilidad lateral mantiene el equilibrio hasta una inclinación de 47° con suspensión anulada.

Se consideran tres opciones en cuanto al sistema de freno:

- a) No dispone de dispositivo antibloqueo en los ejes.
- b) Está equipado con dispositivo antibloqueo en los dos ejes.
- c) Sólo incorpora antibloqueo en el eje trasero.

Calcular en forma aproximada las variaciones de la distancia total de frenado al considerar las opciones anteriores, admitiendo lo siguiente:

- El vehículo circula a 90 km/h por una calzada horizontal y en recta, cuando el conductor percibe un obstáculo y frena al límite de las posibilidades del vehículo.
- Se produce bloqueo de las ruedas en los supuestos (a) y (c), pero no se altera la trayectoria rectilínea del vehículo.
- El coeficiente de adherencia presenta los siguientes valores:
$$\mu_{\max} = 0,8 \text{ y con deslizamiento } \mu_d = 0,6$$
- Coeficiente de resistencia a la rodadura $f_r = 0,012$
- Tiempo de reacción del conductor: 1s.

[Frenado de vehículos automóviles.]

- Tiempo de respuesta del sistema de freno: 0,3s.
- El sistema antibloqueo aprovecha totalmente la adherencia disponible.
- Coeficiente de masas rotativas: 1,05

SOLUCION:

a) Vehículo sin dispositivo antibloqueo

La distancia de frenado una vez que pisa el pedal y el sistema actua:

$$S_{1a} = \frac{\gamma_m \cdot P}{2 \cdot g \cdot C} \ln \left[1 + \frac{C \cdot V_i^2}{\eta \cdot \mu \cdot P + f_r \cdot P \cdot \cos \theta + P \cdot \sin \theta} \right]$$

$$V = 25 \text{ m/s}$$

$$\gamma_m = 1,05$$

$$\theta = 0$$

$$P = 117720 \text{ N.}$$

Suponiendo que bloquean todas las ruedas

$$\mu = 0,6 \text{ (ruedas bloqueadas)}$$

$$f_r = 0,012$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot A_r = 2,58 \text{ Kg/m}$$

$$\rho = 1,225 \text{ Kg/m}^3$$

$$\eta = 1 \text{ (eficacia de frenado maxima)}$$

$$S_{1a} = \frac{1,05 \cdot 117720}{2 \cdot 9,81 \cdot 2,58} \ln \left[1 + \frac{2,58 \cdot 25^2}{117720 (0,6 + 0,012)} \right] = 54,05 \text{ m.}$$

La distancia recorrida debido a los tiempos de reacción (conductor, sistema):

$$t_r = t'_r + t''_r \quad t'_r = 1 \text{ s.} \quad t''_r = 0,3 \text{ s.}$$

$$S_{2a} = t_r \cdot V$$

$$S_{2a} = 1,3 \cdot 25 = 32,5 \text{ m.}$$

Distancia total:

$$S_a = S_{1a} + S_{2a} = 86,55 \text{ m.}$$

- b) Vehículo equipado con dispositivos antibloqueo en los dos ejes.

Coefficiente de adherencia máximo (no llegan a bloquearse las ruedas).

$$S_{1b} = \frac{1,05 \cdot 117720}{2 \cdot 9,81 \cdot 2,58} \ln \left[1 + \frac{2,58 \cdot 25^2}{117720 (0,8 + 0,012)} \right] = 40,85 \text{ m.}$$

$$S_{2b} = 32,5 \text{ m.}$$

$$S_b = 73,35 \text{ m.}$$

Reducción de la distancia de frenado 15%.

- c) Vehículo equipado con dispositivo antibloqueo sólo en el eje trasero.

Se supondrá que bloquea el eje delantero únicamente

Se necesita calcular la altura del c.d.g., para calcular las cargas dinámicas sobre cada eje.

Mediante el ensayo estático de estabilidad lateral:

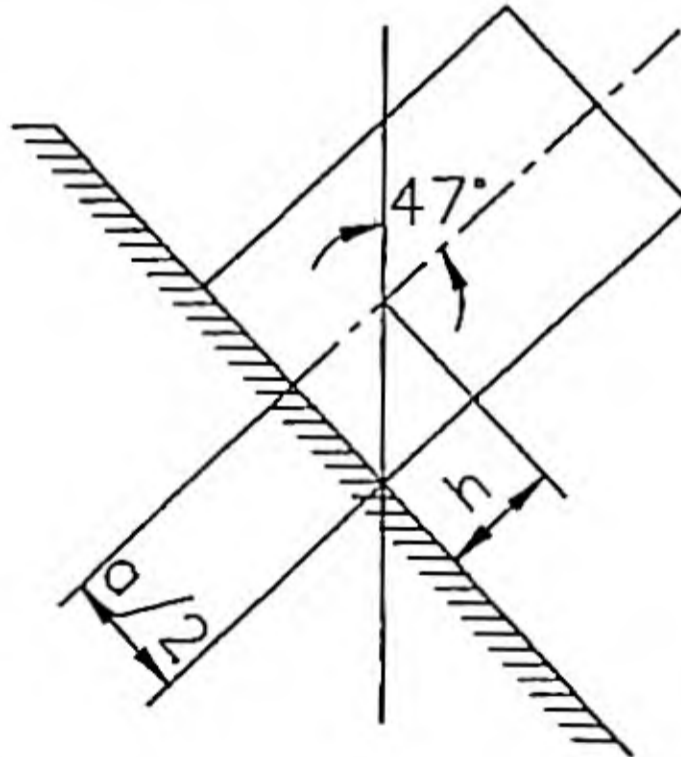


Figura 5.23. Ensayo estabilidad lateral.

$$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \operatorname{tg} 47^\circ$$

$$h = \frac{2,4}{\operatorname{tg} 47} = 1,12 \text{ m.}$$

Suponiendo que la deceleración es constante:

En una primera aproximación, consideramos el valor medio de los casos anteriores. (Posteriormente será necesario recalcularlo).

$$a_a = \frac{v^2}{2 \cdot S_{1a}} = \frac{25^2}{2 \cdot 54,05} = 5,78 \text{ m/s}^2;$$

$$a_b = \frac{v^2}{2 \cdot S_{1b}} = \frac{25^2}{2 \cdot 40,85} = 7,65 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Aceleración media } a = 6,71 \text{ m/s}^2$$

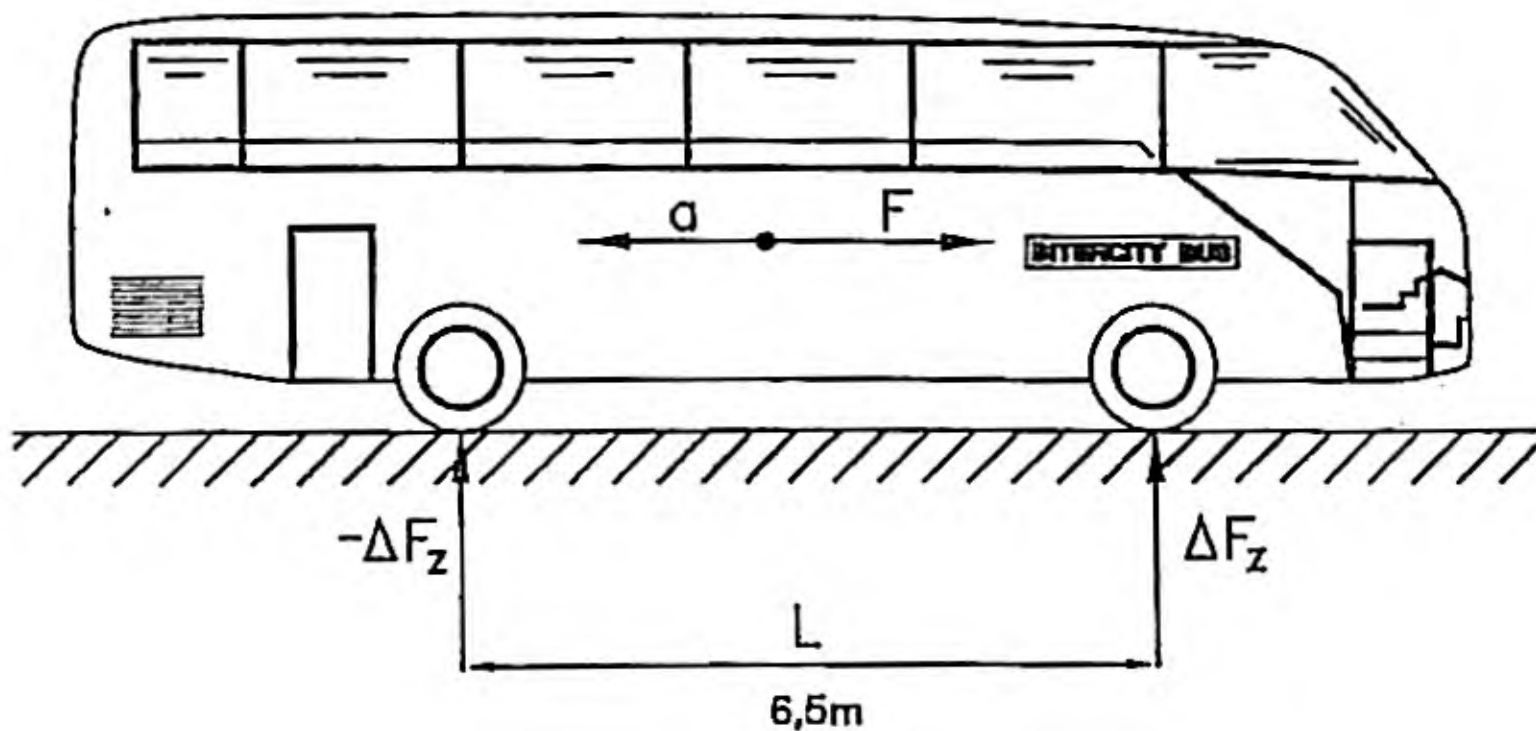


Figura 5.24. Esquema del autobús.

En la frenada, se produce un desplazamiento del peso hacia el eje delantero (carga dinámica sobre cada eje).

$$\Delta F_z = a \frac{P}{g} \cdot \frac{h}{L} \quad \Delta F_z = 6,71 \frac{117720}{9,81} \frac{1,12}{6,5} = 13874 \text{ N.}$$

$$F_{zd} = 117720 \cdot 0,3 + 13874 = 49190 \text{ N.}$$

$$F_{za} = 117720 \cdot 0,7 - 13874 = 68530 \text{ N.}$$

La fuerza de frenado será:

$$F_F = F_{zd} \cdot \mu_d + F_{za} \cdot \mu_{\max} = 49190 \cdot 0,6 + 68530 \cdot 0,8 = 84338 \text{ N.}$$

La distancia de frenado será:

$$S'_{lc} = \frac{\gamma_m \cdot P}{2 \cdot g \cdot C} \ln \left[1 + \frac{C \cdot v^2}{F_F + f_r \cdot P \cdot \cos \theta + P \cdot \sin \theta} \right] =$$

$$= \frac{1,05 \cdot 117720}{2 \cdot 9,81 \cdot 2,58} \ln \left[1 + \frac{2,58 \cdot 25^2}{84338 + 0,012 \cdot 117720} \right] = 45,49 \text{ m.}$$

la aceleración correspondiente es:

$$a' = \frac{25^2}{2 \cdot 45,49} = 6,87 \approx 6,71 \text{ m/s}^2 \text{ (primera aproximación).}$$

Considerando este nuevo valor de aceleración:

$$\begin{aligned} \Delta F_z &= 14205 \text{ N} & F_{zd} &= 49521 \text{ N} \\ F_F &= 84272 \text{ N} & F_{za} &= 68199 \text{ N} \\ S''_{lc} &= 45,53 \text{ m.} & a'' &= 6,86 \text{ m/s}^2 \approx a' \end{aligned}$$

Distancia total de parada:

$$S_c = 45,53 + 32,5 = 78,03 \text{ m.}$$

Variación de la distancia de frenado, respecto a los casos (a) y (b):

$$\begin{aligned} \Delta_{ca} &= -8,25 \text{ m.} \approx 9,8\% \text{ de reducción respecto al caso (a)} \\ \Delta_{cb} &= 4,67 \text{ m.} \approx 6\% \text{ de incremento respecto al caso (b)} \end{aligned}$$

* BIBLIOGRAFIA

Referencias: [2], [6], [19], [20], [27], [28], [30], [33], [39], [45] [46], [49], [50], [51], [52], [54], [57] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

6.

DINÁMICA LATERAL DEL VEHÍCULO

6.1. INTRODUCCIÓN.

Las características direccionales de los vehículos de carretera definen su respuesta a las acciones ejercidas por el conductor sobre el volante, así como a aquellas ejercidas por el medio, que pueden afectar a la dirección del movimiento: viento, irregularidades de la calzada y fuerza centrífuga.

El comportamiento direccional presenta dos problemas básicos:

- El control del vehículo para poder elegir la trayectoria deseada.
- La estabilidad de la dirección del movimiento frente a perturbaciones externas.

El primer problema implica la existencia de un sistema sobre el que el conductor pueda actuar, en forma sencilla y segura, para modificar ciertos parámetros en función de las condiciones en que circula el vehículo, de tal forma que éste responda orientando su trayectoria en la dirección deseada de marcha. Estos parámetros son los giros de las ruedas directrices respecto a ejes aproximadamente perpendiculares a la superficie de rodadura. En la mayoría de los vehículos solo las ruedas delanteras son directrices. El segundo problema está relacionado con el movimiento lateral del vehículo respecto a su trayectoria, al ser afectado por las acciones del medio o camino de rodadura, y durante el período transitorio, en acciones que el conductor ejerce sobre la dirección.

Las variables que definen el movimiento lateral son: velocidad lateral, y , velocidad de guiñada, Ψ , y velocidad de balanceo, ϕ , es decir, tres de los seis grados de libertad del vehículo considerado como cuerpo rígido, (figura 1.3).

Los factores fundamentales que influyen en las características direccionales de un vehículo son:

Dimensionales: Distancia entre ejes o batalla y vía.

Reparto de masas: Posición del centro de gravedad; relación masa suspendida/no suspendida.

Aerodinámicas: Coeficientes aerodinámicos de fuerza lateral y momento de guiñada.

Neumáticos: Características laterales (rigidez de deriva y su variación en función de la carga) y esfuerzos transversales.

Suspensión: Características geométricas y dinámicas.

El comportamiento del vehículo queda, a su vez, afectado por las características del medio. Las principales son:

- Angulo de incidencia del aire.
- Irregularidades de la calzada.
- Radio de curvatura y peralte de la calzada.
- Coeficiente de adherencia.

La velocidad ocupa un papel importante, pudiendo existir una velocidad crítica a partir de la cual el vehículo muestra un comportamiento direccional inestable. Para el estudio del comportamiento dinámico del vehículo se recurre a su modelización matemática, contemplando un número mayor o menor de grados de libertad y de acciones externas, según el propósito del análisis.

La estabilidad direccional implica que los valores de las variables que definen el movimiento lateral: y , ϕ , Ψ , (figura 1.3), convergen hacia los valores correspondientes del régimen estacionario, en un tiempo finito, una vez que cesa la perturbación que las hizo variar, o durante el régimen transitorio entre dos estados estacionarios diferentes definidos por el sistema de dirección. Puesto que el conductor actúa sobre el vehículo mediante los elementos de control, volante en este caso, y éste ejerce acciones dinámicas sobre aquél, ambos constituyen un sistema, completado con el medio (figura 1.2), del que depende en realidad el comportamiento general del vehículo.

En este y los siguientes apartados estudiaremos las características direccionales de los vehículos. Inicialmente abordaremos la geometría de la dirección y la maniobrabilidad a velocidad próxima a cero; después, se realiza un estudio simplificado de su respuesta en curva para determinar las velocidades límite de derrape y vuelco. Por último, utilizando dos modelos de complejidad creciente, se analizará el comportamiento direccional en régimen estacionario y transitorio, así como los factores que influyen en la estabilidad.

6.2. GEOMETRÍA DE LA DIRECCIÓN

Para analizar las características direccionales de los vehículos es conveniente iniciar el estudio discutiendo su comportamiento lateral a baja velocidad. En estas condiciones, la fuerza centrífuga puede considerarse despreciable. Los ángulos de deriva de los neumáticos serán nulos, salvo en el caso de vehículos con ejes en tandem no orientables. También se considera nula la transferencia de carga entre las ruedas de un mismo eje. La trayectoria del vehículo quedará definida por la orientación de las ruedas directrices respecto al plano longitudinal (X, Z en la figura 1.3), impuestas por el sistema de dirección, en función de la posición del volante.

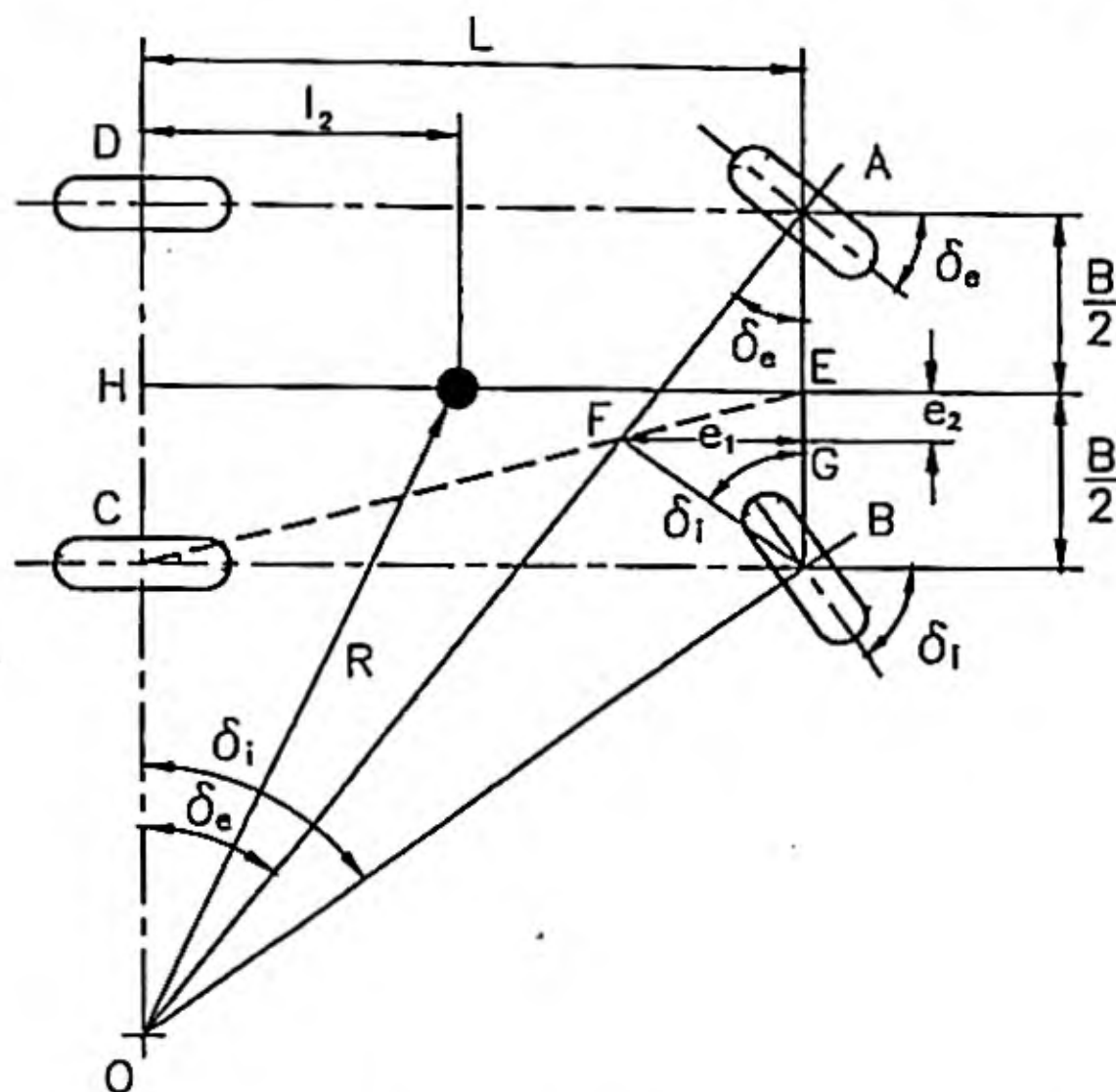


Figura 6.1. Geometría básica del guiado de un vehículo de dos ejes

En las condiciones anteriores puede demostrarse que existe una relación simple entre la dirección del movimiento y los ángulos (δ_j) de giro de las ruedas directrices. El comportamiento direccional del vehículo dependerá de la geometría del sistema de dirección.

La condición a imponer al sistema de dirección es que durante el giro exista un deslizamiento mínimo entre neumático y calzada. Esto obliga a que todas las ruedas se orienten, de tal forma, que su movimiento sea de rodadura, sin deslizamiento transversal, lo cual, a su vez, impone que todas se desplacen siguiendo trayectoria con centro instantáneo de rotación común (considerado un diagrama plano como el de la figura 6.1). Admitiendo que las ruedas posteriores mantienen sus planos medios perpendiculares a su eje, la anterior condición sólo puede cumplirse si las perpendiculares a los planos medios de las ruedas delanteras (su traza

sobre el plano de rodadura) se cortan en un punto O perteneciente a la prolongación del eje geométrico trasero.

De la figura 6.1 puede expresarse:

$$\begin{aligned} \text{Cotg } \delta_i &= \frac{\overline{OC}}{L} \\ \text{Cotg } \delta_e &= \frac{\overline{OC} + B}{L} \\ \text{Cotg } \delta_e - \text{Cotg } \delta_i &= \frac{B}{L} \end{aligned} \quad 6.1$$

La relación (6.1) se conoce como condición de ACKERMAN para la geometría de la dirección. La anterior relación puede ilustrarse gráficamente: trazando en la figura 6.1 un segmento CE, queda definido el punto F de intersección con la recta OA. Uniendo ahora F y B, puede demostrarse que el ángulo $\hat{FBE} = \delta_i$. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{Cotg } \delta_e &= \frac{B/2 + e_2}{e_1} \\ \text{Cotg } \hat{FBE} &= \frac{B/2 - e_2}{e_1} \end{aligned}$$

Restando las anteriores expresiones:

$$\text{Cotg } \delta_e - \text{Cotg } \hat{FBE} = \frac{2e_2}{e_1} = 2 \frac{B/2}{L} = \frac{B}{L} \quad 6.2$$

Comparando las expresiones (6.1) y (6.2) se tiene que:

$$\hat{FBE} = \delta_i$$

De lo anterior se deduce que, considerando cualquier pareja de ángulos δ_i y δ_e que cumplan la condición de Ackerman, las rectas que contengan a los puntos A y B, y formen respectivamente ángulos δ_e y δ_i con la recta AB, y con los sentidos expresados en la figura 6.1, se cortarán en puntos de la recta que une el centro de la proyección de la rueda interior trasera (C) con el punto medio de la proyección del eje geométrico delantero.

En la figura 6.2. se representan tres curvas $\delta_e(\delta_i)$: a) correspondiente a una dirección paralela ($\delta_e = \delta_i$); b) correspondiente a la función 6:1 con $B/L = 0.60$ y c) que representa una relación típica de las usadas en la práctica.

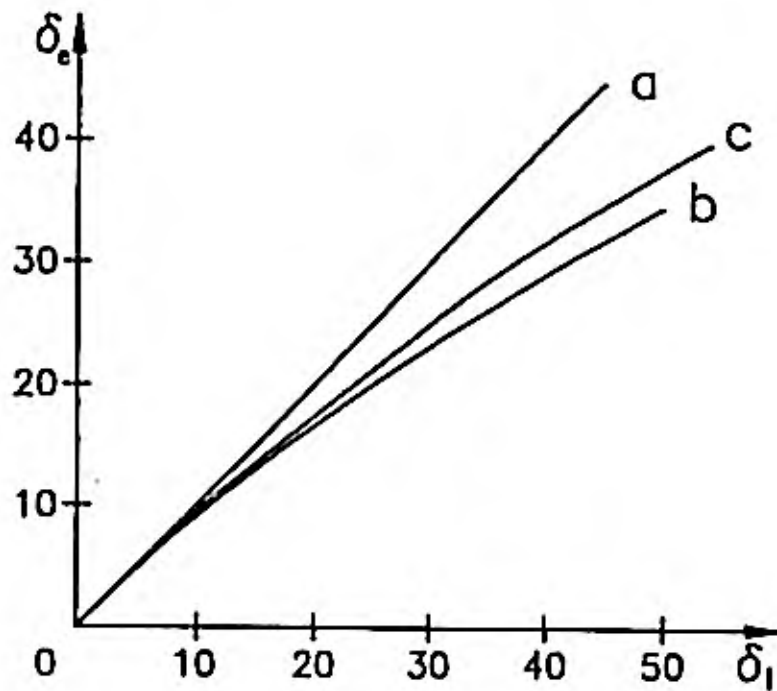


Figura 6.2. Características de varios tipos de dirección

Para evaluar las características de una dirección particular, con relación a la geometría de ACKERMAN, puede utilizarse un método gráfico que permite dibujar el lugar geométrico de los puntos F, (figura 6.1) de intersección de las rectas que, pasando por A y B, forman con la dirección AB los ángulos (δ_e, δ_i) que la timonería de dirección proporciona. Consideremos que la timonería de la dirección es un mecanismo plano, que forma un cuadrilátero articulado (figura 6.3), con un brazo de dirección conectado a cada rueda y una barra de acoplamiento entre ambos, o tirante. Para diferentes giros δ_i de la rueda interior, es posible definir geoméricamente los giros δ_e de la rueda exterior y con éstos valores se determinan los correspondientes puntos F. Uniendo éstos puntos se obtiene una curva que, en la medida que se separa de la línea EC, indica un error respecto a la geometría de Ackerman y, por tanto, un deslizamiento mayor o menor entre neumático y suelo. A esta línea se denomina "curva de error" (figura 6.4).

Teniendo en cuenta la figura 6.4, es posible establecer una relación que ligue δ_e y δ_i ,

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\epsilon - \delta_e) + \text{sen}(\epsilon - \delta_i) &= \\ &= \frac{B}{b} - \sqrt{\left(\frac{B}{b} - 2\text{sen}\epsilon\right)^2 - [\cos(\epsilon - \delta_e) - \cos(\epsilon - \delta_i)]^2} \end{aligned} \quad 6.3$$

Calculando δ_e para valores de δ_i mediante (6.3) y (6.1), puede evaluarse el error de la dirección mediante la diferencia $\Delta\delta_e$ entre los valores obtenidos, para cada δ_i .

Un mecanismo de dirección tan simple como el representado en la figura 6.3 es aplicable, únicamente, en vehículos dotados con suspensión con puente rígido del eje directriz, utilizada solo en algunos vehículos industriales. El mecanismo de dirección de turismos y otros vehículos de ruedas independientes es más complejo, pero siempre es posible definir una relación del tipo de la (6.3).

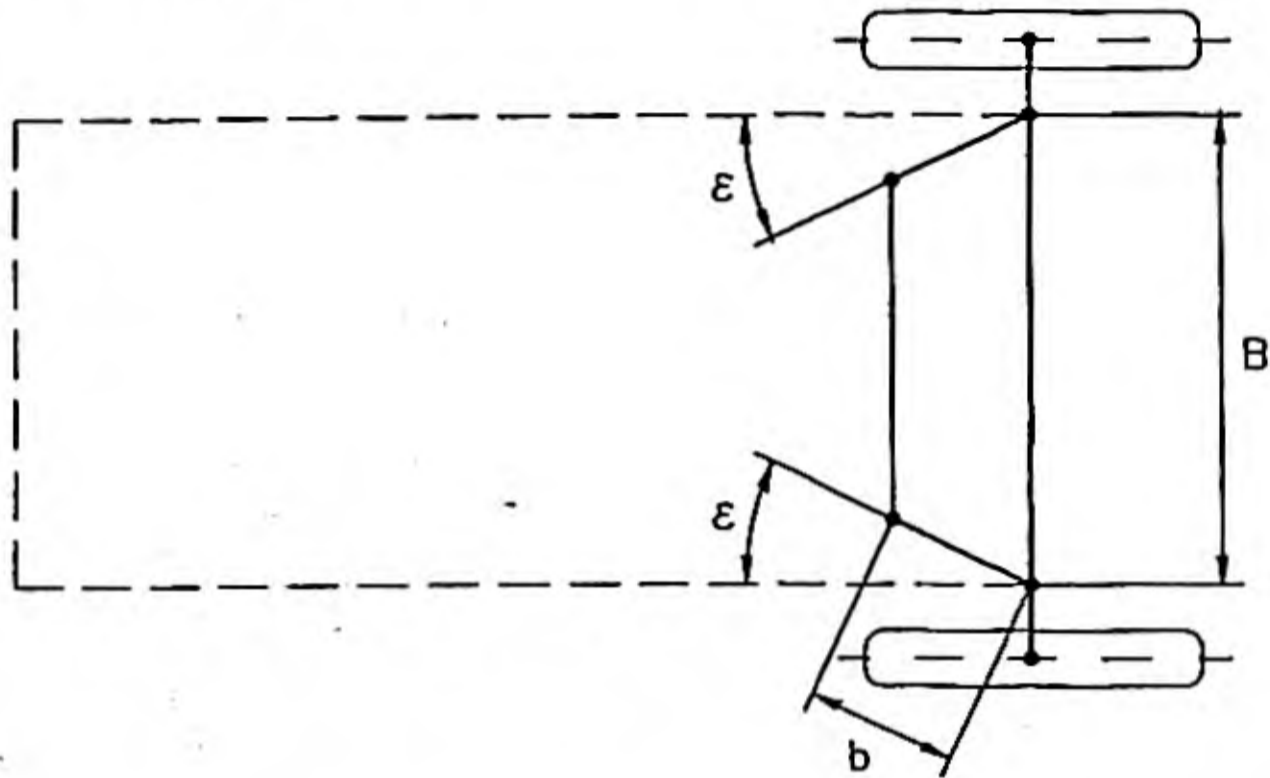


Figura 6.3. Mecanismo de dirección formando un cuadrilátero articulado.

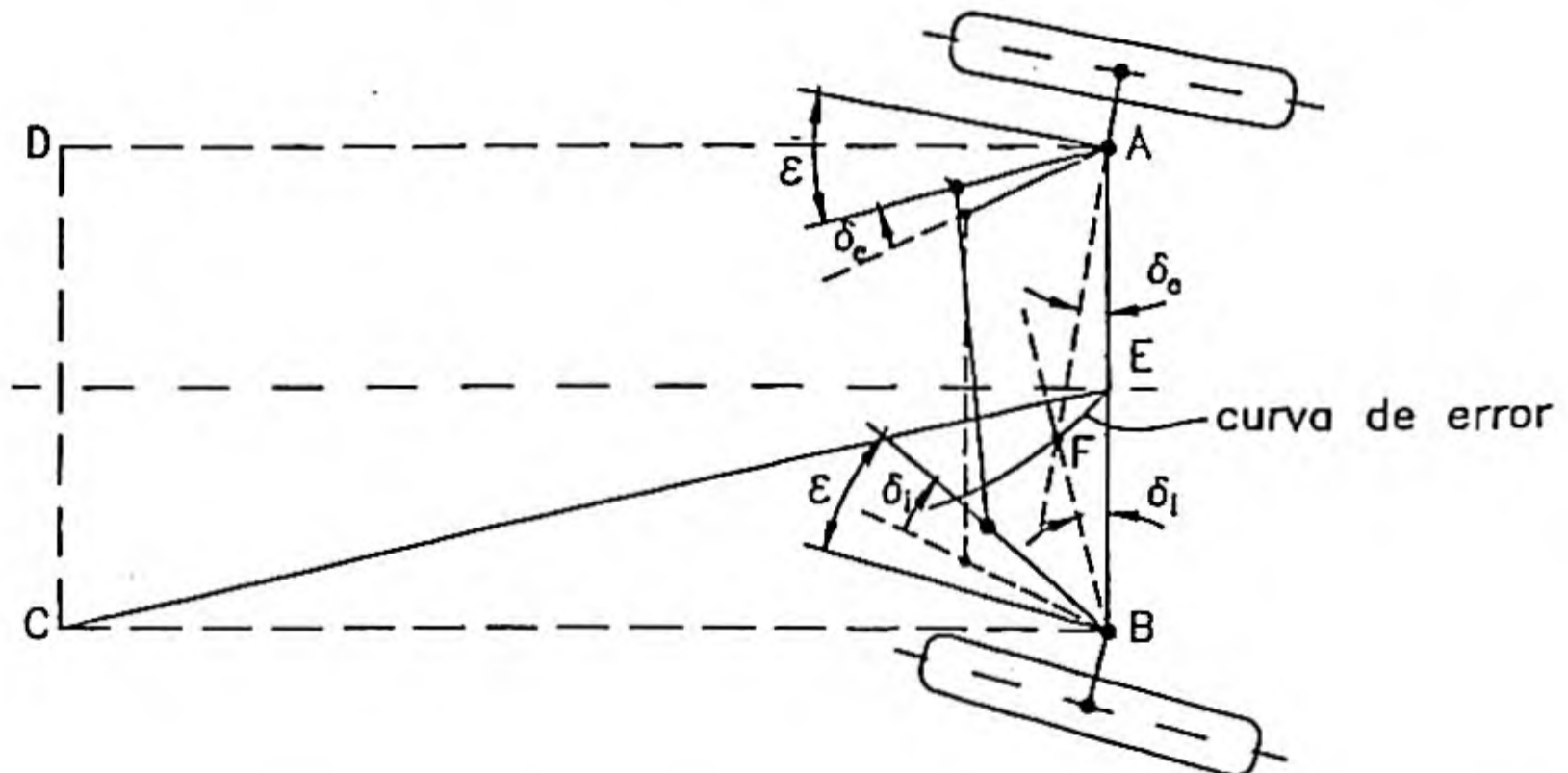


Figura 6.4. Curva de error en un sistema de dirección con timonería en disposición de cuadrilátero articulado.

El error de la dirección se verá modificado por la flexibilidad de la suspensión, al actuar sobre el vehículo diferentes cargas dinámicas. La mayor o menor proximidad de la dirección de la geometría de Ackerman influye en el momento autoalineante en maniobras a baja velocidad. Una dirección que cumple la condición de Ackerman produce un par autoalineante que crece con el ángulo de dirección, mientras que otra que fuera próxima a la dirección paralela ($\delta_e = \delta_i$) produce pares autoalineantes que disminuyen con δ , pudiendo incluso invertir su sentido.

Como se ha dicho antes, el no cumplimiento de la relación de Ackerman produce deslizamiento lateral en los neumáticos, es decir, éstos deben deformarse rodando con ángulos de deriva que realmente corrigen el error de dirección, haciendo posible que el centro instantáneo de rotación se sitúe sobre la recta definida por el eje trasero.

Lo anterior se ilustra en la figura 6.5 a) y b). En la figura 6.5 a) se ha considerado que el vehículo tiene una batalla inferior a la que haría cumplir la relación de Ackerman, mientras que en la figura 6.5 b) se ha considerado una batalla superior. En ambos casos, los neumáticos delanteros adquieren ángulos de deriva iguales y de sentido contrario, de forma que el centro instantáneo de rotación se sitúa, aproximadamente, en el centro del segmento definido por los puntos a y b de intersección de la recta que contienen al eje trasero geométrico y las perpendiculares a las ruedas delanteras que contienen a sus centros.

Como se observa en la figura 6.5, en ambos casos el mecanismo de dirección está sometido al par ($F_{yz} - F_{zy}$), que es compensado por el ($F_l - F_r$) de reacción en las manguetas.

De la figura 6.1 puede deducirse el radio de la trayectoria del centro de gravedad:

$$R = \sqrt{l_2^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{l_2^2 + \left(L \cotg \delta_i + \frac{B}{2} \right)^2} \quad 6.4$$

Como veremos más adelante (figura 6.27) para determinados estudios interesa utilizar modelos de vehículos de dos ruedas, una por eje, situada en el centro de dicho eje. En ese caso se considera que el ángulo de dirección de la rueda que representa a las dos del eje delantero (δ) cumple:

$$\cotg \delta = \frac{\cotg \delta_1 + \cotg \delta_2}{2} \quad 6.5$$

Cuando el vehículo está dotado de más de dos ejes, y uno solo es directriz, ocupando los otros posiciones fijas respecto a la estructura del vehículo, no es posible obtener giros exentos de deslizamiento lateral de los neumáticos. En la figura 6.6 por ejemplo, en la que se representa un vehículo con eje trasero en tanden, sin posibilidad de orientación angular, el centro instantáneo de rotación sobre el plano de rodadura, se situará en un punto de la traza de un plano vertical transversal, equidistante de ambos ejes del tanden, con el de rodadura. En este

caso, las ruedas estarán sometidas a deriva. Lo anterior puede evitarse si uno de los ejes del tandem admite pequeños ángulos de guiñada, con los que poder adaptarse a las exigencias del giro. En este caso el comportamiento será como el representado en la figura 6.7.

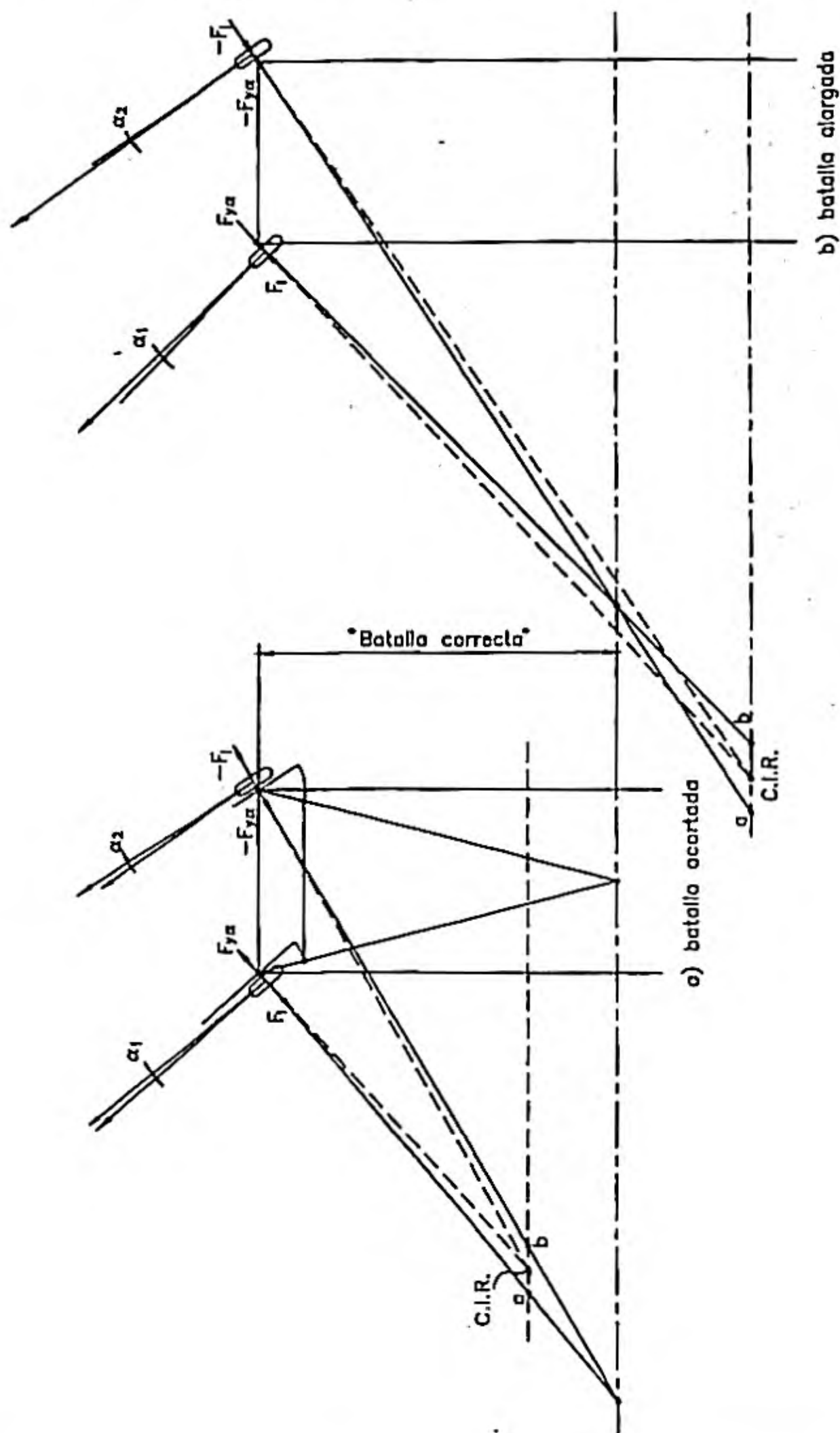


Figura 6.5. Efecto de valores de la batalla distintos al correspondiente a la geometría de Ackerman.

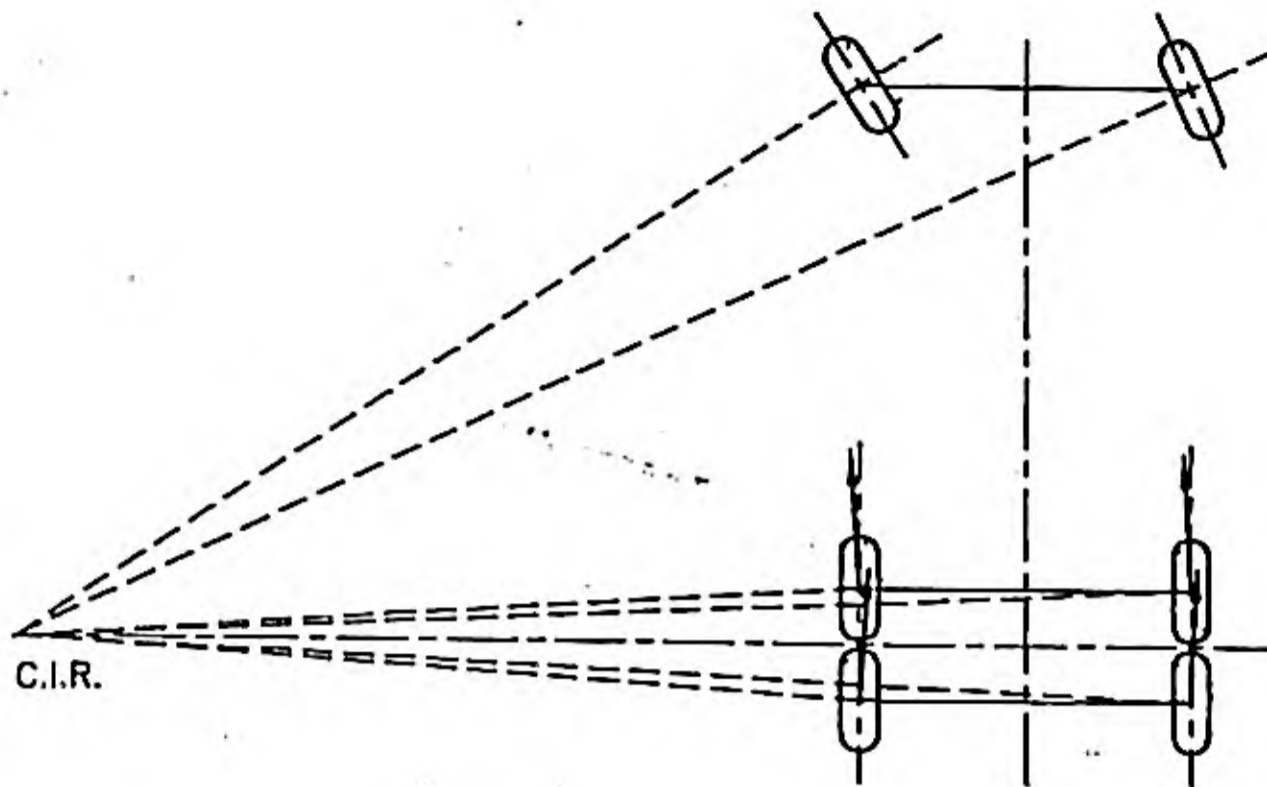


Figura 6.6. Geometría de giro de un vehículo con dos ejes en tandem

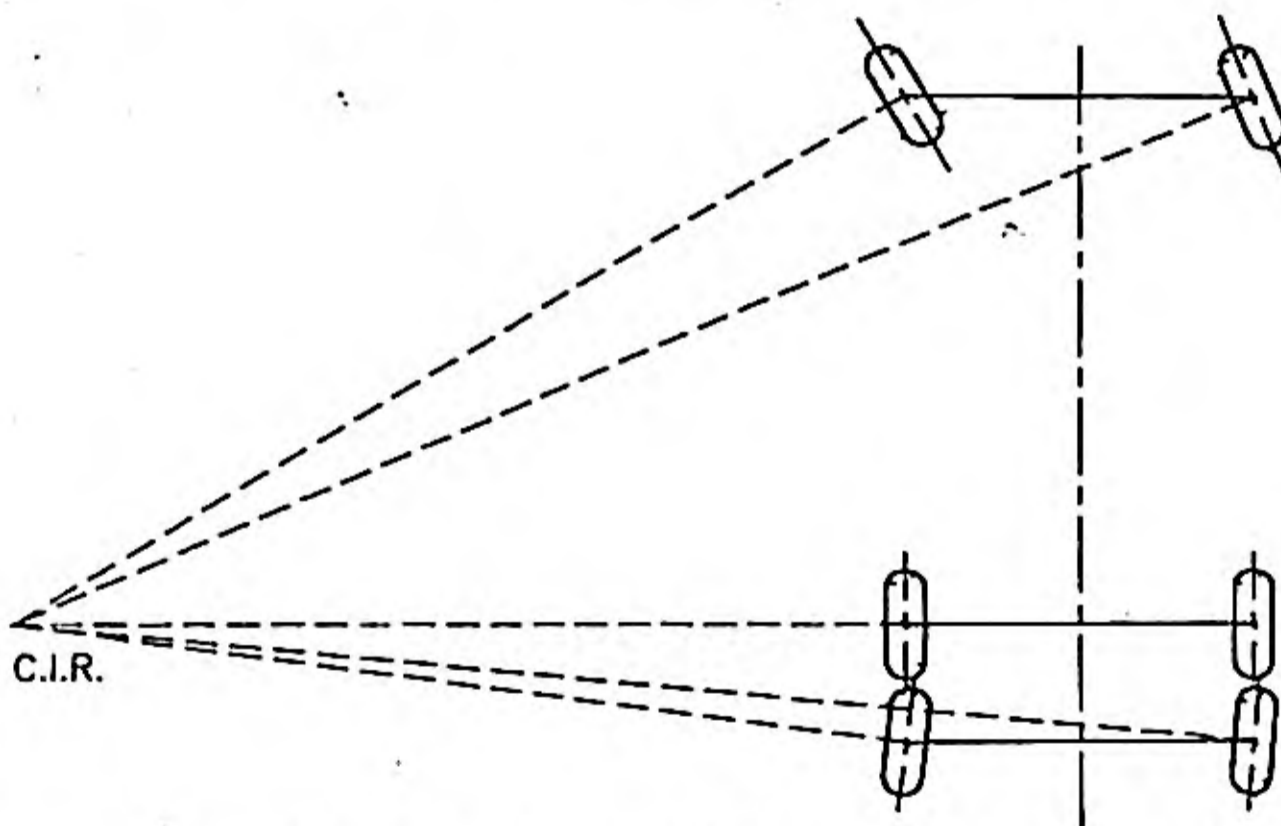


Figura 6.7. Geometría de giro de un vehículo con dos ejes en tandem, uno de ellos orientable.

Por último debemos señalar que el cumplimiento estricto de la relación de Ackerman no impide que exista un cierto deslizamiento lateral. Téngase en cuenta que las ruedas suelen tener una cierta convergencia (planos medios no paralelos al plano longitudinal), que puede tener un valor superior al error $\Delta\delta$ comentado y, así mismo, que tanto el ángulo de caída (ver capítulo 2) como la flexibilidad de la suspensión, ya indicada, condicionan la geometría de la rodadura, originando dicho deslizamiento.

6.3. MANIOBRABILIDAD A VELOCIDAD MUY REDUCIDA

Las maniobras a baja velocidad de los vehículos deben permitir que éstos puedan circular en el interior de dos superficies cilíndricas coaxiales, cuyos radios (mínimo para la interior, y máximo para la exterior) quedan fijados por reglamentos. De esta manera se asegura la capacidad mínima de maniobra, o maniobrabilidad, entre bordillos, o entre paredes, característica fundamental para predecir las posibilidades del vehículo en giros por calles estrechas, entrada a garages, etc. Es de gran interés en vehículos de grandes dimensiones.

Para valorar la maniobrabilidad, en la forma definida en el párrafo anterior, no solo debe tenerse en cuenta el radio de la trayectoria del centro de gravedad o de otro punto singular cualquiera; en realidad es el conjunto del vehículo el que debe quedar inscrito en las superficies cilíndricas antes indicadas. En este aspecto adquiere gran importancia una característica del comportamiento direccional, que denominaremos "desviación de rodadas".

Por desviación de rodadas entenderemos el desplazamiento lateral experimentado por la trayectoria del centro del eje más retrasado respecto al más adelantado del vehículo, combinación o tren de vehículos. Ambas trayectorias son circulares en el giro estacionario, y entonces la desviación de rodadas es la diferencia de sus radios. En giros de vehículos articulados existe un período transitorio, desde la trayectoria recta hasta otra circular estacionaria, que debe de ser tenido en cuenta en el análisis de la maniobrabilidad del vehículo.

6.3.1. Desviación de rodadas en movimiento estacionario durante giros

Supondremos, en este caso, que el vehículo o composición de vehículos, manteniendo constante el ángulo de dirección, adquiere su configuración estacionaria de modo que los centros de todos sus ejes describen trayectorias de radio constante. En vehículos rígidos de dos ejes esta situación se produce desde el inicio del giro, siempre que δ permanezca constante. En vehículos articulados se alcanza tras un período transitorio.

En la figura 6.8 se esquematiza el giro de un vehículo de dos ejes.

Como puede observarse la desviación de rodada estacionaria DR es:

$$DR_1 = R_1 - R_2 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - L^2} \quad 6.6$$

En la figura 6.8 se representa el giro de un vehículo tractor-semirremolque, de ella se deduce:

$$R_3^2 = R_1^2 - L_1^2 \quad 6.7$$

$$R_2^2 = R_3^2 + d_1^2 = R_1^2 - L_1^2 + d_1^2 \quad 6.8$$

$$R_4^2 = R_2^2 - L_2^2 = R_1^2 - L_1^2 + d_1^2 - L_2^2 \quad 6.9$$

$$DR_2 = R_1 - R_4 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - L_1^2 + d_1^2 - L_2^2} \quad 6.10$$

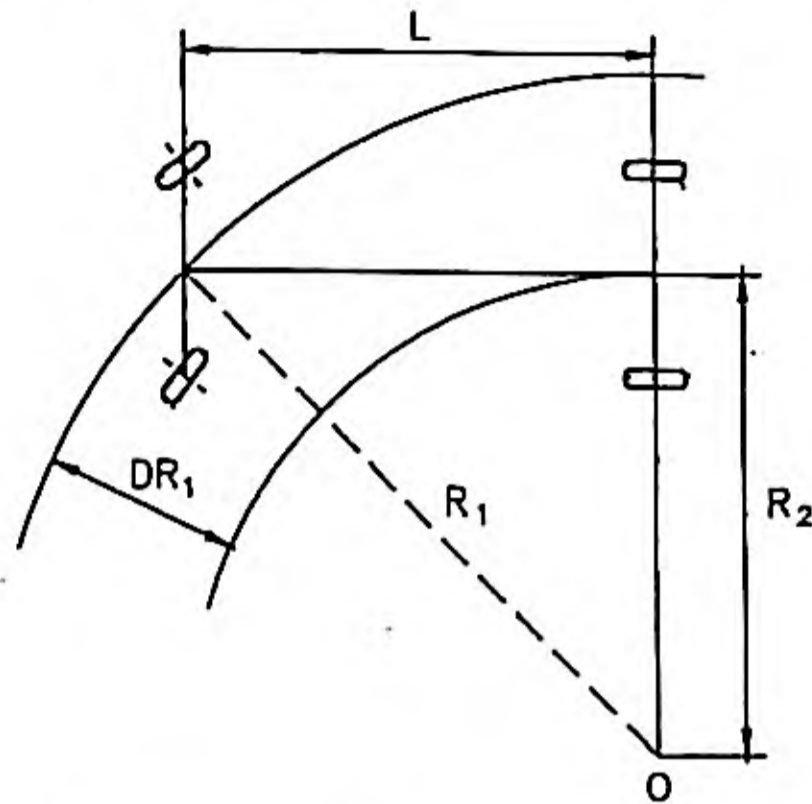


Figura 6.8. Desviación de rodadas en un giro estacionario de vehículos de dos ejes.

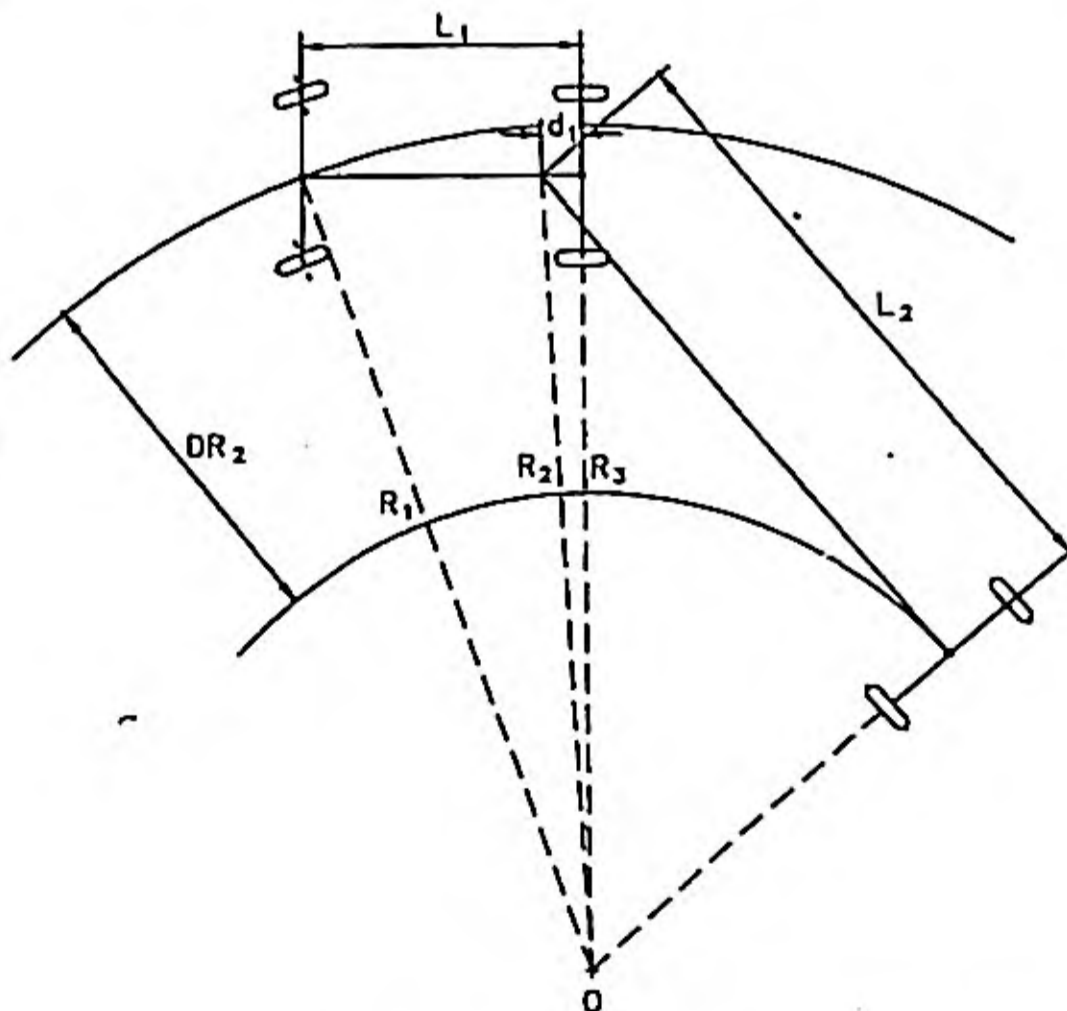


Figura 6.9. Desviación de rodadas en un giro estacionario de un vehículo articulado tractor-semirremolque.

En forma análoga puede determinarse la desviación de rodadas para cualquier tren de vehículos. Como último ejemplo, en la figura 6.10 se representa un tren tractor-semirremolque-remolque deduciéndose fácilmente, para este caso:

$$DR_3 = R_1 - R_7 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - L_1^2 + d_1^2 - L_2^2 + d_2^2 - d_3^2 - L_3^2} \quad 6.11$$

Obsérvese que es posible establecer una relación general en la que al radio de la trayectoria correspondiente al primer eje se resta la raíz cuadrada de ese mismo radio, elevado al cuadrado, al cual se restan todos los cuadrados de las batallas de los diferentes vehículos del tren, así como los de las longitudes de elementos articulados de cada uno (d_3 en el caso anterior), y se suman las distancias de los puntos de articulación, fijados a la estructura de cada vehículo, a los ejes más próximos (d_1 y d_2), elevadas, igualmente, al cuadrado. Así por ejemplo, si a la composición de la figura 10 se añadiese un nuevo remolque de batalla L_4 y longitud de la barra de arrastre d_5 , siendo d_4 la distancia del punto de articulación al eje trasero del remolque anterior, tendríamos:

$$DR_4 = R_1 - R_{10} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - L_1^2 + d_1^2 - L_2^2 + d_2^2 - d_3^2 - L_3^2 + d_4^2 - d_5^2 - L_4^2} \quad 6.12$$

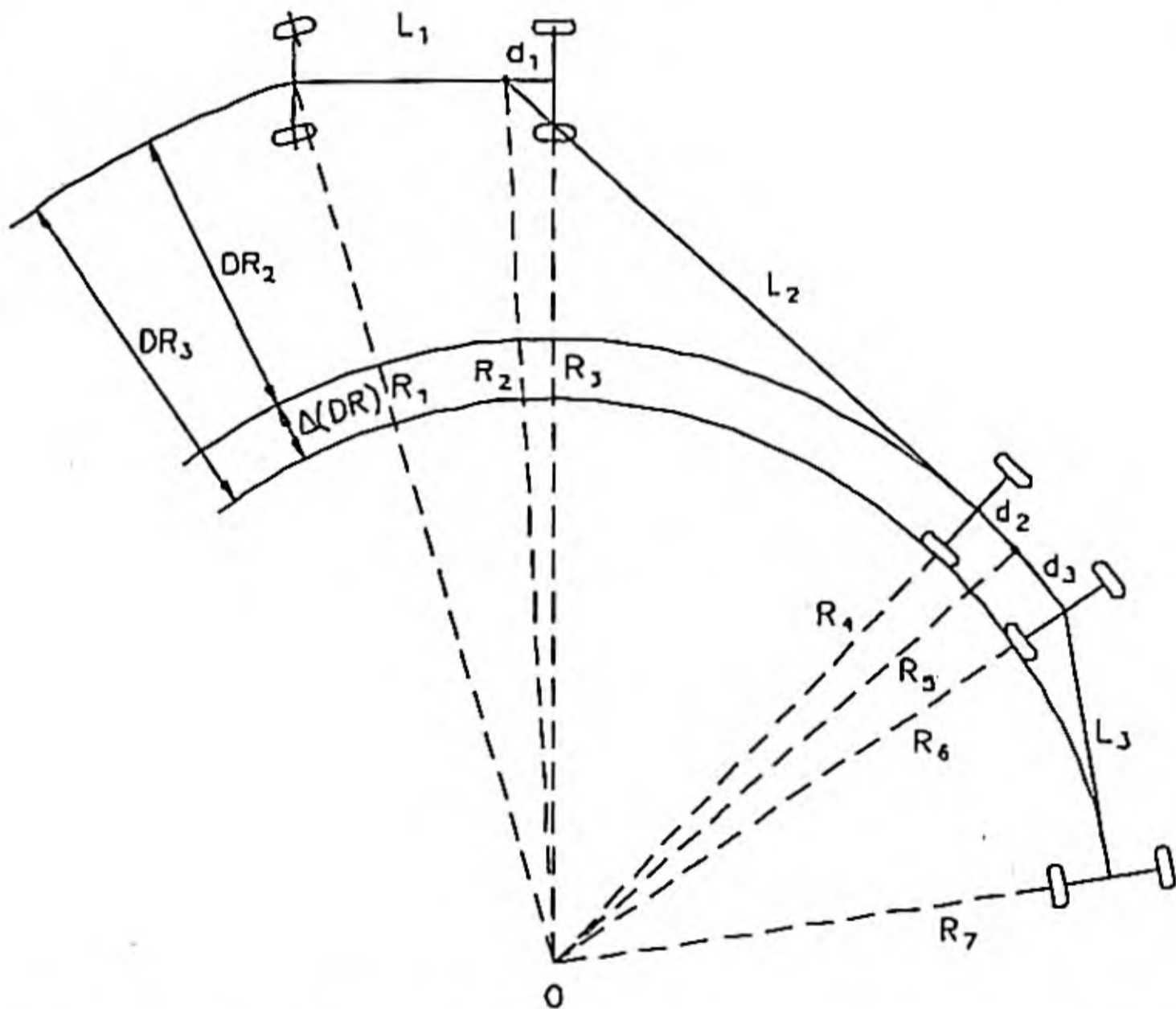


Figura 6.10. Desviación de rodadas en un giro estacionario de un tren tractor-semirremolque-remolque.

De las ecuaciones (6.10) a (6.12) puede deducirse cómo, el uso de vehículos articulados permite reducir la desviación de rodadas respecto a vehículos de longitud análoga, con menor número de articulaciones. Si comparamos el vehículo tractor-semirremolque con otro rígido de igual longitud, la DR_2 (6.9) se convertirá en:

$$DR_2' = R_1 - \sqrt{R_1^2 - (L_1 + L_2 - d_1)^2} > DR_2 \quad 6.13$$

En la figura 6.10 se aprecia el pequeño incremento que experimenta la desviación de rodadas, $\Delta(DR)$, al añadir a la composición de la figura 6.9, un remolque, manteniendo constante R_1 .

6.3.2. Desviación transitoria de rodadas.

Consideremos una composición tractor-semirremolque (Figura 6.11) y que giran las ruedas directrices un ángulo tal que, en el diagrama plano de la figura, el centro instantáneo de rotación del tractor se sitúe en O. Si se inicia el movimiento en estas condiciones, en el instante inicial $t = 0$, el centro instantáneo de rotación del semirremolque sigue estando en el punto del infinito correspondiente a la recta que pasa por su eje.

Una vez iniciado el movimiento, y transcurrido un tiempo t , el c.i.r del semirremolque ocupa la posición O_1 de la figura 6.11 b.

En la figura 6.11 b y c se han representado las posiciones en los instantes t y $t+dt$ respectivamente. En éste último caso solo se representa el semirremolque, cuyo movimiento ocasiona la desviación transitoria de rodadas que tratamos de analizar.

El tractor sigue, desde el momento de iniciar el movimiento, trayectorias circulares. El punto B (quinta rueda), de articulación entre ambos vehículos, también seguirá una trayectoria circular de radio R_B . En cuanto al punto D, como se ha dicho, parte de una trayectoria recta ($R_D = \infty$) y si el giro se mantiene con el mismo ángulo δ de volante, el tiempo suficiente, llegará a adquirir un valor constante, coincidente con el de giro estacionario, es decir $R_D = R_4$ de la ecuación (6.9). A continuación calcularemos su variación entre ambos valores en función de los ángulos de guiñada Ψ_1 y Ψ_2 del tractor y semirremolque, respectivamente.

En la figura 6.11 c:

$$\overline{B'B} = R_B \cdot d\psi_1 \quad 6.14$$

$$\overline{B'B''} = \overline{D'B'} \cdot d\psi_2 = L_2 \cdot d\psi_2 \quad 6.15$$

$$\overline{B'B''} = \overline{BB'} \text{sen}(\psi_1 + \varphi - \psi_2) \quad 6.16$$

Igualando (6.15) a (6.16) y sustituyendo (6.14), se obtiene una ecuación diferencial que relaciona las variables asociadas a las posiciones del vehículo:

$$\frac{d\psi_2}{d\psi_1} = \frac{R_B}{L_2} \text{sen}(\psi_1 + \varphi - \psi_2) \quad 6.17$$

Con la hipótesis de que $R_B = \text{cte}$ y que para $t = 0$: $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, la integración de la ecuación (6.17) da como solución:

$$\psi_1 = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\left[1 - (b-a) \text{tg} \frac{\psi_1 - \psi_2 + \varphi}{2} \right] \left[1 - (b+a) \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right]}{\left[1 - (b+a) \text{tg} \frac{\psi_1 - \psi_2 + \varphi}{2} \right] \left[1 - (b-a) \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right]} \right] \quad 6.18$$

siendo:

$$a = \sqrt{\frac{R_B^2}{L_2^2} - 1} ; \quad b = R_B / L_2 \quad 6.19$$

El radio del punto medio del eje del semirremolque R_D será:

$$R_D = L_2 / \text{tg}(\psi_1 - \psi_2 + \varphi) \quad 6.20$$

El cálculo de la trayectoria de D se hará por puntos mediante (6.18) a (6.20). Fijado un radio para el eje delantero del tractor R_A , se calculan R_B y v que permanecerán constantes. Mediante la ecuación (6.18) se calcularán los distintos valores de Ψ_1 para valores de Ψ_2 y con ellos, mediante (6.20) los de R_D . La trayectoria completa se obtendrá variado Ψ_2 desde cero hasta que R_D adquiere un valor constante. El resultado se ilustra en la figura 6.12, en la cual se han dibujado: trayectorias circulares de A, B y D, esta última correspondiente al movimiento estacionario; la trayectoria de D, que parte de la posición de este punto en el instante de iniciar el giro y tiende asintóticamente a la trayectoria circular estacionaria; por último, se ha representado, también, el lugar geométrico de los c.i.r. del semirremolque (punto O_1), que desde el ∞ se acerca a 0, hasta coincidir con este punto en el movimiento estacionario.

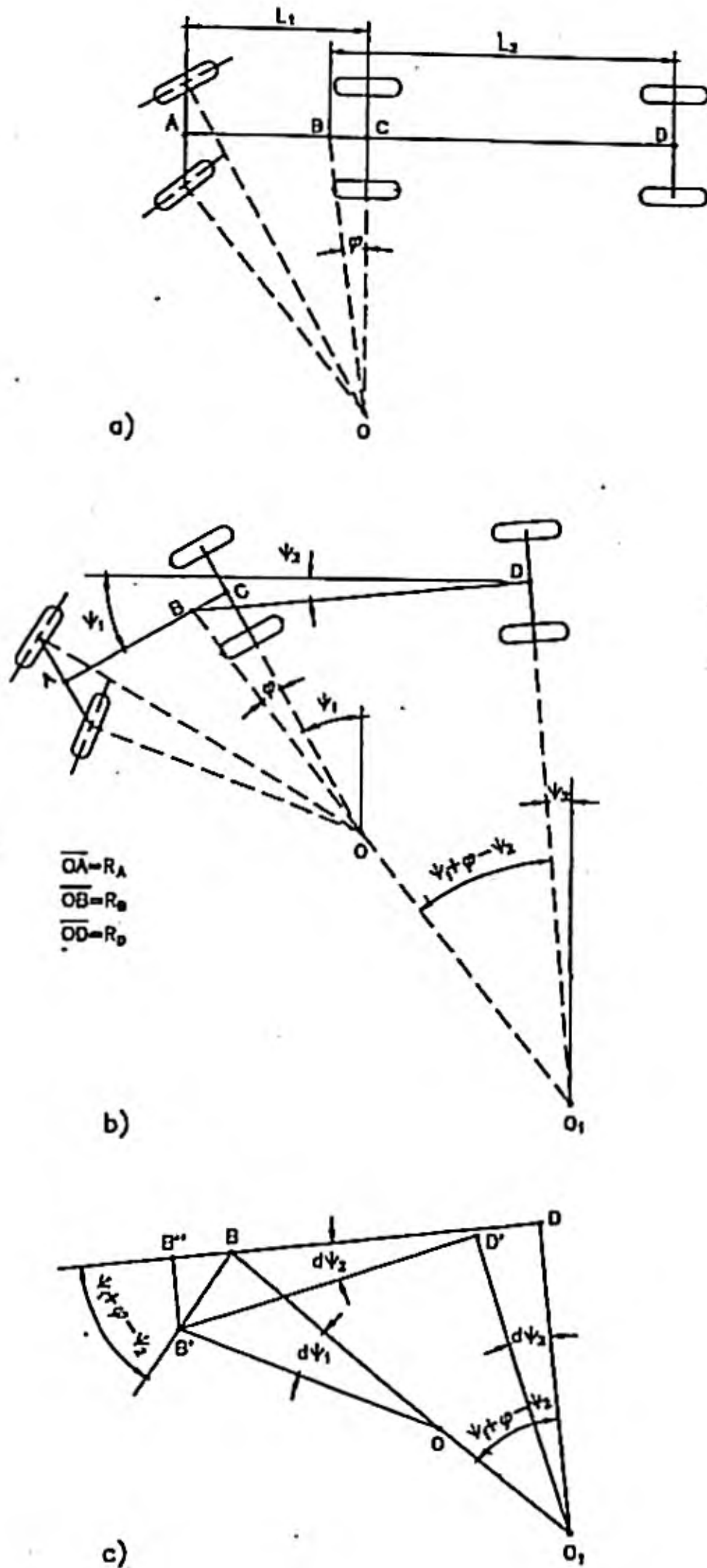


Figura 6.11. Trayectoria de un tractor-semirremolque al iniciar un giro. a) Disposición inicial, b) Configuración un instante t posterior. c) Configuración en un instante $t + dt$. (Sólo el semirremolque).

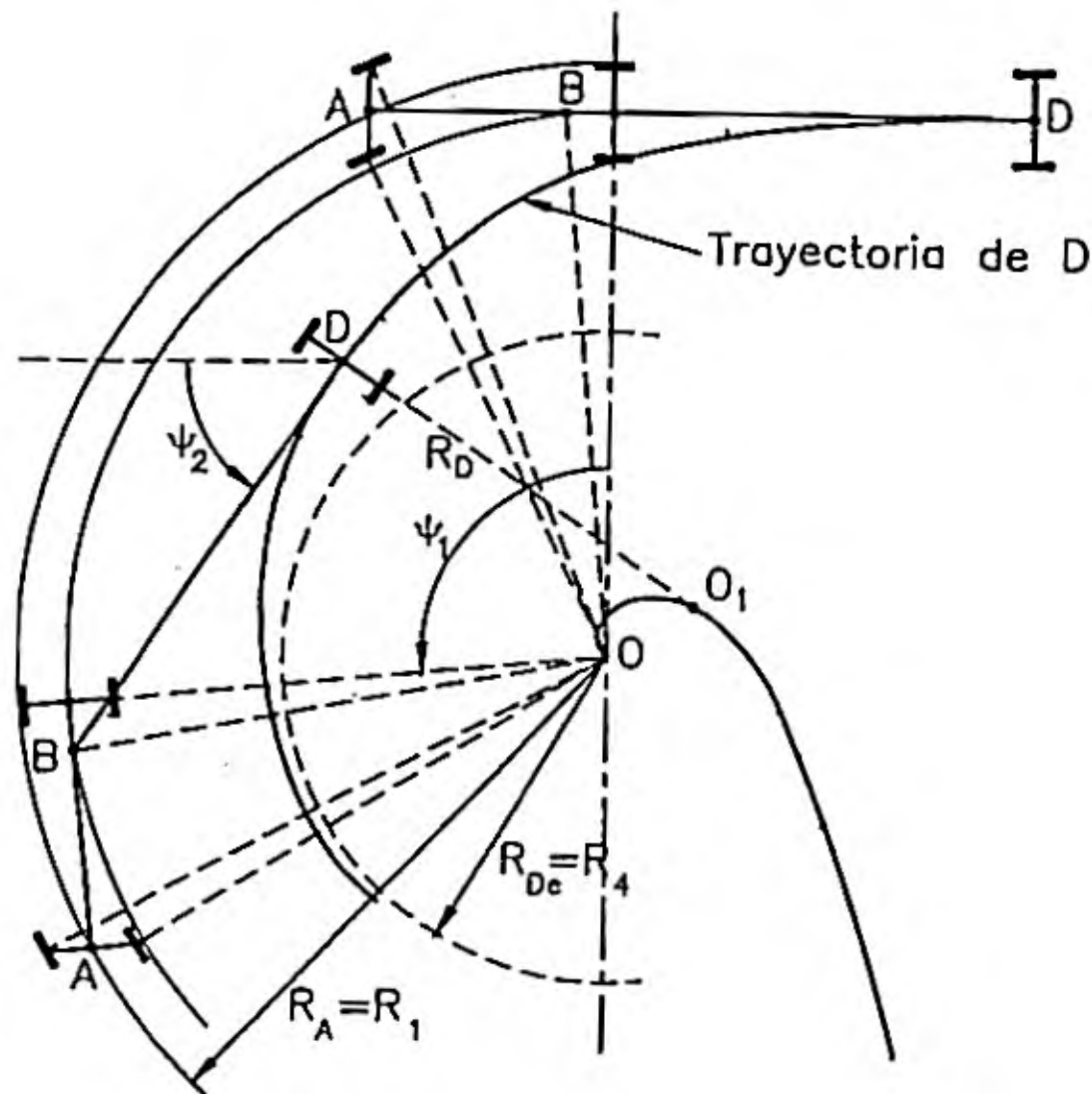


Figura 6.12. Trayectoria polar de un tractor-semirremolque en el período transitorio del giro.

6.4. CIRCULACIÓN EN CURVA. VELOCIDADES LÍMITE DE DERRAPE Y DE VUELCO.

Cuando un vehículo describe una trayectoria curva, la fuerza centrífuga, actuando sobre su centro de gravedad, a una altura h desde la superficie de rodadura, origina un esfuerzo lateral, que debe ser compensado por las fuerzas de adherencia entre los neumáticos y el suelo, y un momento de vuelco. Al aumentar la velocidad, se incrementarán ambos efectos por lo que el vehículo puede perder su trayectoria, si la adherencia transversal es sobrepasada, o volcar, en ciertas condiciones.

Para obtener una primera aproximación se puede considerar que la suspensión es rígida o, lo que es lo mismo, que el desplazamiento del centro de gravedad, como consecuencia de la flexibilidad de la suspensión, ejerce una influencia despreciable. Así mismo, se supondrá que la calzada, en la curva, dispone de un peralte expresado por su ángulo de inclinación (ζ) respecto de la horizontal (figura 6.13).

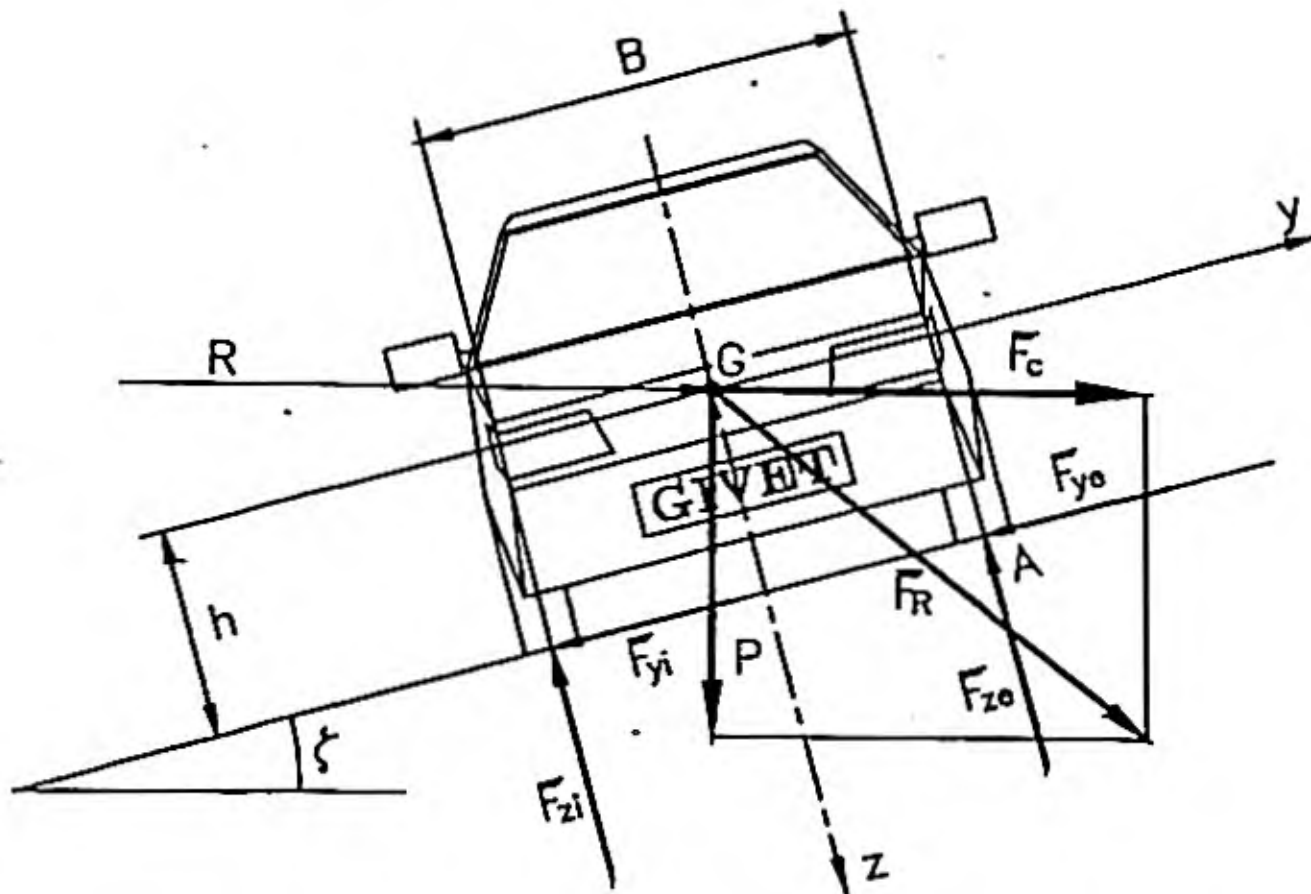


Figura 6.13. Modelo bidimensional para el cálculo aproximado de las velocidades límite de derrape y de vuelco.

6.4.1. Cálculo aproximado de la velocidad límite de derrape

De la figura 6.13:

$$F_{zi} + F_{ze} = P \cos \zeta + F_c \sin \zeta \quad 6.21$$

$$F_{yi} + F_{ye} = -P \sin \zeta + F_c \cos \zeta \quad 6.22$$

Teniendo en cuenta que:

$$(F_{zi} + F_{ze}) \mu_y = F_{ye} + F_{yl} \quad 6.23$$

y sustituyendo (6.21) y (6.22) en la anterior:

$$\mu_y (P \cos \zeta + F_c \sin \zeta) = -P \sin \zeta + F_c \cos \zeta \quad 6.24$$

Teniendo en cuenta que la fuerza centrífuga es:

$$F_c = \frac{PV^2}{gR} \quad 6.25$$

Sustituyendo (6.25) en (6.24) y despejando V, resulta:

$$V = \sqrt{gR \frac{\mu_y + \operatorname{tg}\zeta}{1 - \mu_y \operatorname{tg}\zeta}} \quad 6.26$$

Si $\mu_y = \mu_{y\max}$, se obtiene, de (6.26), la velocidad límite de derrape:

$$V_{ld} = \sqrt{gR \frac{\mu_{y\max} + \operatorname{tg}\zeta}{1 - \mu_{y\max} \cdot \operatorname{tg}\zeta}} \quad 6.27$$

Si la curva no está peraltada $\zeta = 0$

$$V'_{ld} = \sqrt{gR \mu_{y\max}} \quad 6.28$$

6.4.2. Cálculo aproximado de la velocidad límite de vuelco.

La condición límite de vuelco, puede expresarse geoméricamente, en la figura 6.13, cuando la resultante, F_R , de las fuerzas que actúan sobre el centro de gravedad del vehículo (P y F_c), corta a la superficie de rodadura en el punto exterior de la huella contacto del neumático exterior (considerando el diagrama plano de la figura, punto A).

Puesto que:

$$F_y = F_c \cos\zeta - P \operatorname{sen}\zeta \quad 6.29$$

$$F_z = P \cos\zeta + F_c \operatorname{sen}\zeta \quad 6.30$$

la condición de vuelco podrá formularse:

$$\frac{F_y}{F_z} = \frac{F_c \cos\zeta - P \operatorname{sen}\zeta}{P \cos\zeta + F_c \operatorname{sen}\zeta} = \frac{B/2}{h} \quad 6.31$$

Sustituyendo (6.25) en (6.31) y despejando V, puede obtenerse la velocidad límite de vuelco V_{lv} :

$$V_{lv} = \sqrt{gR \frac{B/2h + \operatorname{tg}\zeta}{1 - B/2h \cdot \operatorname{tg}\zeta}} \quad 6.32$$

y para el caso de peralte nulo:

$$V'_{lv} = \sqrt{gR \frac{B}{2h}} \quad 6.33$$

Comparando (6.32) y (6.33) con (6.27) y (6.28), respectivamente, puede comprobarse que las expresiones de las velocidades límite de derrape, y de vuelco, son formalmente análogas, pudiéndose obtener una de la otra sin más que sustituir $\mu_{y\max}$ por $B/2h$, o al contrario. Esto permite realizar el siguiente análisis:

- a) Si $\mu_{y\max} = \frac{B}{2h}$; $V_{ld} = V_{lv}$. Teóricamente ambos fenómenos, derrape y vuelco, sobrevendrían para el mismo valor de la velocidad, suponiendo valores determinados de R y ζ .
- b) Si $\mu_{y\max} > \frac{B}{2h}$; $V_{ld} > V_{lv}$, lo cual significa que el vehículo volcaría al alcanzar su velocidad un valor superior a V_{lv} sin llegar a derrapar. Esta situación se presenta en vehículos cuyo centro de gravedad se encuentra a una altura elevada en relación con la vía, y siempre que la adherencia sea suficientemente alta. Puede presentarse en vehículos industriales sobre pavimento seco.
- c) Si $\mu_{y\max} < \frac{B}{2h}$; $V_{lv} > V_{ld}$. En estas condiciones el vehículo tenderá a derrapar antes que volcar. Es el caso de los turismos y de vehículos industriales circulando sobre calzadas con adherencia no muy elevada.

Los siguientes ejemplos numéricos ilustran los anteriores resultados.

1) Para el caso de un turismo:

Suponiendo: $B = 1.4$ m; $h = 0,5$ m; $\mu_y = 0.8$ y 0.5 ; $R = 200$ m; $\zeta = 0^\circ$ y 15° .

	V_{ld} (Km/h)		V_{lv} (Km/h)	
	$\zeta = 0^\circ$	$\zeta = 15^\circ$	$\zeta = 0^\circ$	$\zeta = 15^\circ$
$\mu_y = 0.5$	79.7	106.2	133.7	184.2
$\mu_y = 0.8$	100.8	131.5		

- 2) Un vehículo industrial de $B = 1.8 \text{ m}$; $h = 1.2 \text{ m}$; $\frac{B}{2h} = 0.75$, cuando $\mu_{y\max} > 0.75$: $V_{lv} < V_{ld}$, el vehículo puede volcar antes que derrapar.

6.4.3. Consideraciones acerca de la adherencia lateral en circulación en curva.

En relación con el valor de $\mu_{y\max}$ en la dirección lateral (y), conviene hacer algunas consideraciones. En primer lugar, su valor dependerá del conjunto de condiciones que fueron analizadas en el capítulo 2, especialmente de la sollicitación que se haga del neumático en dirección longitudinal (tracción o frenado durante la circulación en curva).

Por otra parte, en el análisis anterior se ha supuesto que todos los neumáticos, ruedan con el mismo ángulo de deriva. En general los ángulos de deriva serán diferentes para cada neumático, (figura 6.14), lo cual implicará que el más cargado lateralmente alcanzará antes la condición de deslizamiento lateral y ello hace que el coeficiente efectivo de adherencia lateral sea inferior al nominal.

Esta diferencia crece al disminuir el radio de la curva.

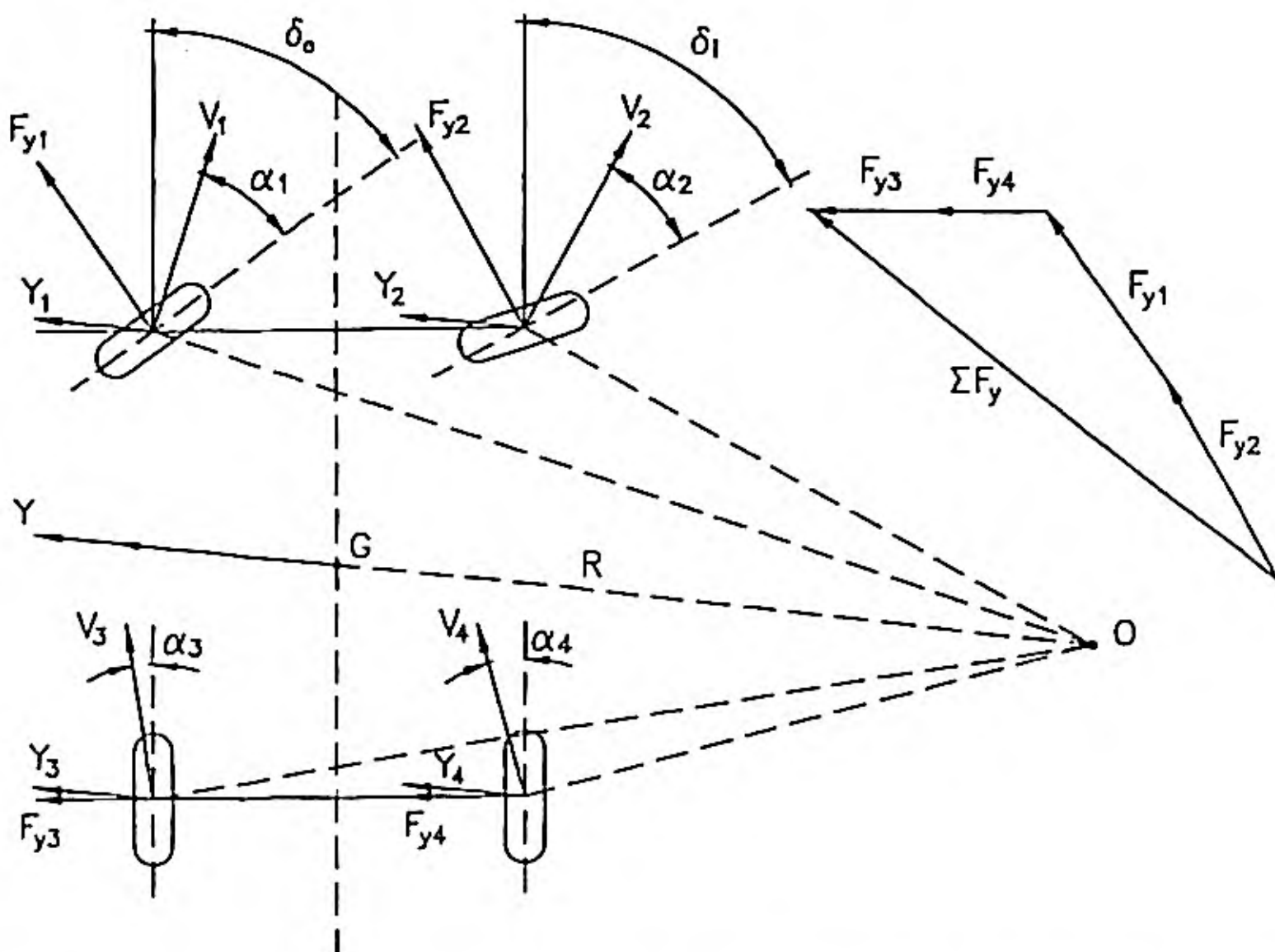


Figura 6.14. Fuerza de deriva ejercida por los neumáticos de un vehículo que recorre una curva de radio R .

Por otra parte, debe tenerse en cuenta que la fuerza centrífuga F_c actúa en la dirección Y , y ésta ha de ser compensada en cada rueda, soportando empujes Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , en esta dirección, que no coincide con la dirección transversal de dichas ruedas. La resultante de todas las fuerzas laterales ΣF_y , no puede obtenerse como una suma algebraica de las fuerzas F_y que actúan sobre cada rueda, sino como una suma vectorial, por tanto:

$$\Sigma F_y = \mu_{yef} \cdot P < F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} = \mu_y \cdot P \quad 6.34$$

Ello justifica que en la realidad, el valor experimental del coeficiente de adherencia lateral de un vehículo sea menor que el nominal correspondiente a un neumático aislado y que el valor efectivo disminuya al hacerlo el radio de la trayectoria, dependiendo, a su vez, del vehículo considerado. En la tabla 6.1 se ofrecen algunos valores obtenidos en pista de pruebas por el Instituto Sperimentale Auto Motori (ISAM ROMA).

R m	ALFA ROMEO R1750GT	RENAULT R4	AUDI 170	FIAT 500F	INOCENTI I4	FIAT 124T	DAF 55	BMW 2500
14	0.561	0.48	0.52	0.516	0.55	0.561	0.502	0.531
26.5	0.628	0.52	0.573	0.525	0.602	0.618	0.551	0.582
39	0.639	0.527	0.597	0.526	0.605	0.628	0.513	0.586

TABLA 6.1. Valores experimentales de la adherencia efectiva lateral máxima (ISAM. Roma).

6.4.4. Estabilidad en condiciones de vuelco estático.

Para completar este apartado, analizaremos la mecánica del proceso de vuelco, aunque limitado al caso en que dicho vuelco está originado, únicamente, por el par de fuerzas formado por la fuerza centrífuga aplicada en el centro de gravedad y la correspondiente reacción entre neumáticos y superficie de rodadura.

Contemplaremos los casos de suspensión rígida y elástica, así como el de vehículos de dos ejes y tractor-semirremolque.

Es innecesario indicar que, en vehículos de elevado centro de gravedad (autocares, camiones, etc.), el vuelco es una causa importante de accidentes de tráfico. Los conceptos que se analizan a continuación son útiles para comprender el fenómeno en muchos de los casos de vuelco de este tipo de vehículos.

6.4.4.1. Vehículos con suspensión rígida.

Es ilustrativo analizar primero este caso, más teórico que real. De acuerdo con la figura 6.15 podemos formular:

Momento primario de vuelco:

$$\frac{P \cdot a_y}{g} h = M_{yv} \quad 6.35$$

Momento de reacción:

$$(F_{ze} - F_{zi}) \frac{B}{2} = M_{yR} \quad 6.36$$

Momento de desplazamiento lateral del c.d.g.:

$$P \cdot h \cdot \phi = M_{yD} \quad 6.37$$

La ecuación de equilibrio estacionario implica:

$$\frac{P \cdot a_y}{g} h = (F_{ze} - F_{zi}) \frac{B}{2} - P \cdot h \cdot \phi \quad 6.38$$

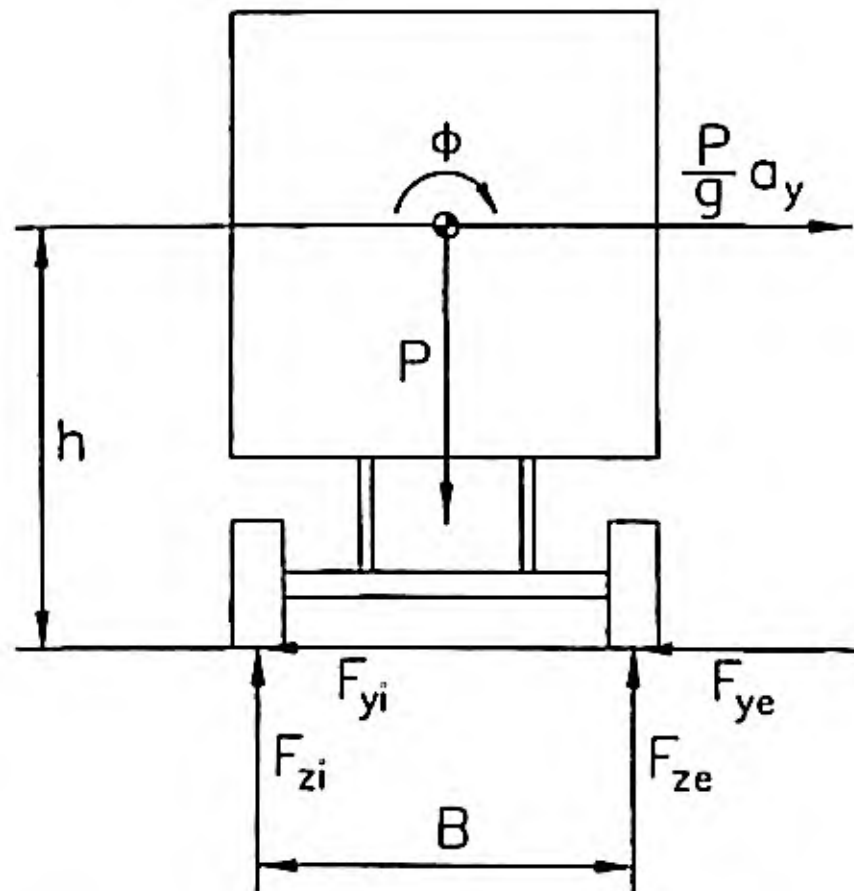


Figura 6.15. Modelo de vuelco de vehículo de suspensión rígida.

Representamos gráficamente la anterior ecuación (figura 6.16) de la forma siguiente:

En la parte izquierda de la figura se ha representado la función $M_{yv}(a_y)$, es decir, el momento primario de vuelco en función de la aceleración lateral del centro de gravedad.

En la parte derecha, el momento neto de reacción ($M_{yR} - M_{yD} = M_{yRN}$) que se opone al

momento primario de vuelco. La pendiente negativa de este momento neto de reacción indica que existe una condición de inestabilidad en el vuelco. Entre 0 y A, un aumento de la aceleración lateral induce un momento de reacción capaz de mantener el equilibrio. En el punto A se alcanza el valor máximo del momento neto de reacción, cuyo valor será: $M_{yRN_{max}} \approx PB/2$; ($F_{ze} = P$, $F_{zi} = 0$, $M_{yD} \approx 0$), a partir de ese punto, a un incremento de a_y y M_{yv} corresponde un incremento de ϕ y una disminución de M_{yRN} . Se ha supuesto que el punto A se alcanza para un pequeño valor de ϕ , admitiendo que el sistema presenta una cierta flexibilidad, aún sin suspensión.

El punto A, y el correspondiente A' en la recta M_{yv} (a_y), representan el "umbral de vuelco", el cual corresponde a la condición en la cual la aceleración lateral alcanza el valor máximo que el vehículo puede tolerar sin volcar, o dicho de otro modo, el valor a_y para el que el vehículo proporciona el máximo momento neto de reacción al vuelco.

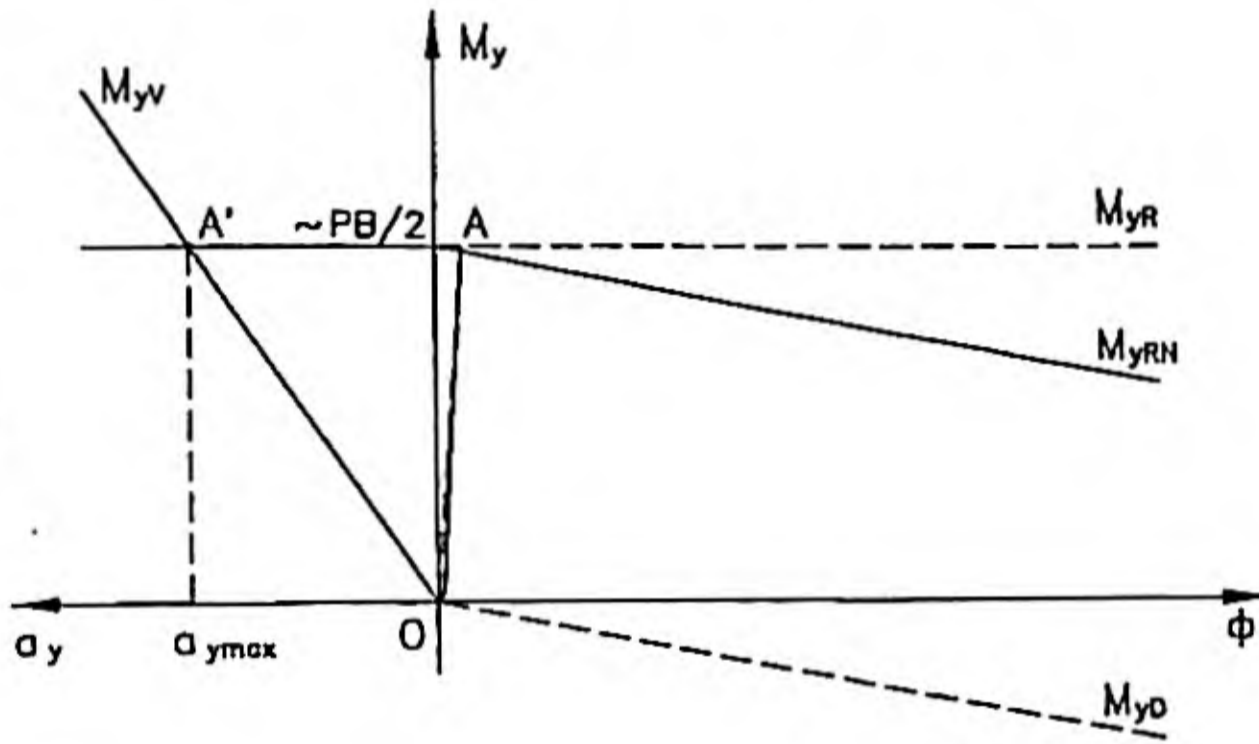


Figura 6.16. Vuelco de un vehículo de suspensión rígida.

En el caso que estudiamos, como en A':

$$\frac{P}{g} a_{y_{max}} h = \frac{B}{2} P \quad 6.39$$

$$a_{y_{max}} = g \frac{B}{2h} \quad 6.40$$

Puede comprobarse que este límite corresponde al valor de V_{IV} calculado en el apartado 6.4.2. para $\zeta = 0$ (ecuación 6.33).

6.4.4.2. Influencia de la suspensión elástica.

En este caso supondremos que:

- El giro ϕ de la masa suspendida como consecuencia de la elasticidad de la suspensión, y de los neumáticos, se produce respecto a la intersección del plano longitudinal medio del vehículo (XZ) en situación de reposo y el plano de rodadura (figura 6.17).
- La masa no suspendida es despreciable en relación a la suspendida.

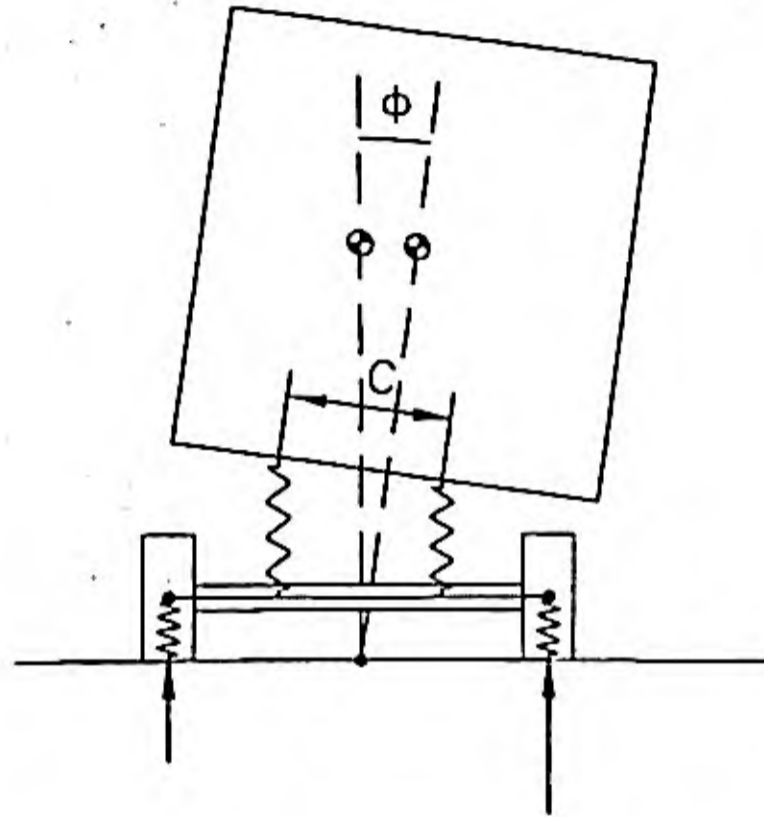


Figura 6.17. Modelo de vuelco de vehículo con suspensión elástica.

Con estas hipótesis, la ecuación (6.38) resulta aplicable a este caso. La diferencia fundamental en el comportamiento del vehículo, respecto al supuesto de suspensión rígida, estriba en que el máximo valor del momento de reacción neto, que se alcanzará en el instante en que toda la carga se ha transferido a la rueda derecha, es inferior, como consecuencia de requerirse un mayor ángulo de balanceo ($\phi = \phi_L$) para completar la transferencia de carga. Este efecto puede verse en la figura 6.18.

El valor de la aceleración lateral en el "umbral de vuelco" será ahora:

$$h \frac{P \cdot a_{y\max}}{g} = \frac{P \cdot B}{2} - P \cdot h \cdot \phi_L \quad \Rightarrow \quad a_{y\max} = \left(\frac{B}{2h} - \phi_L \right) g \quad 6.41$$

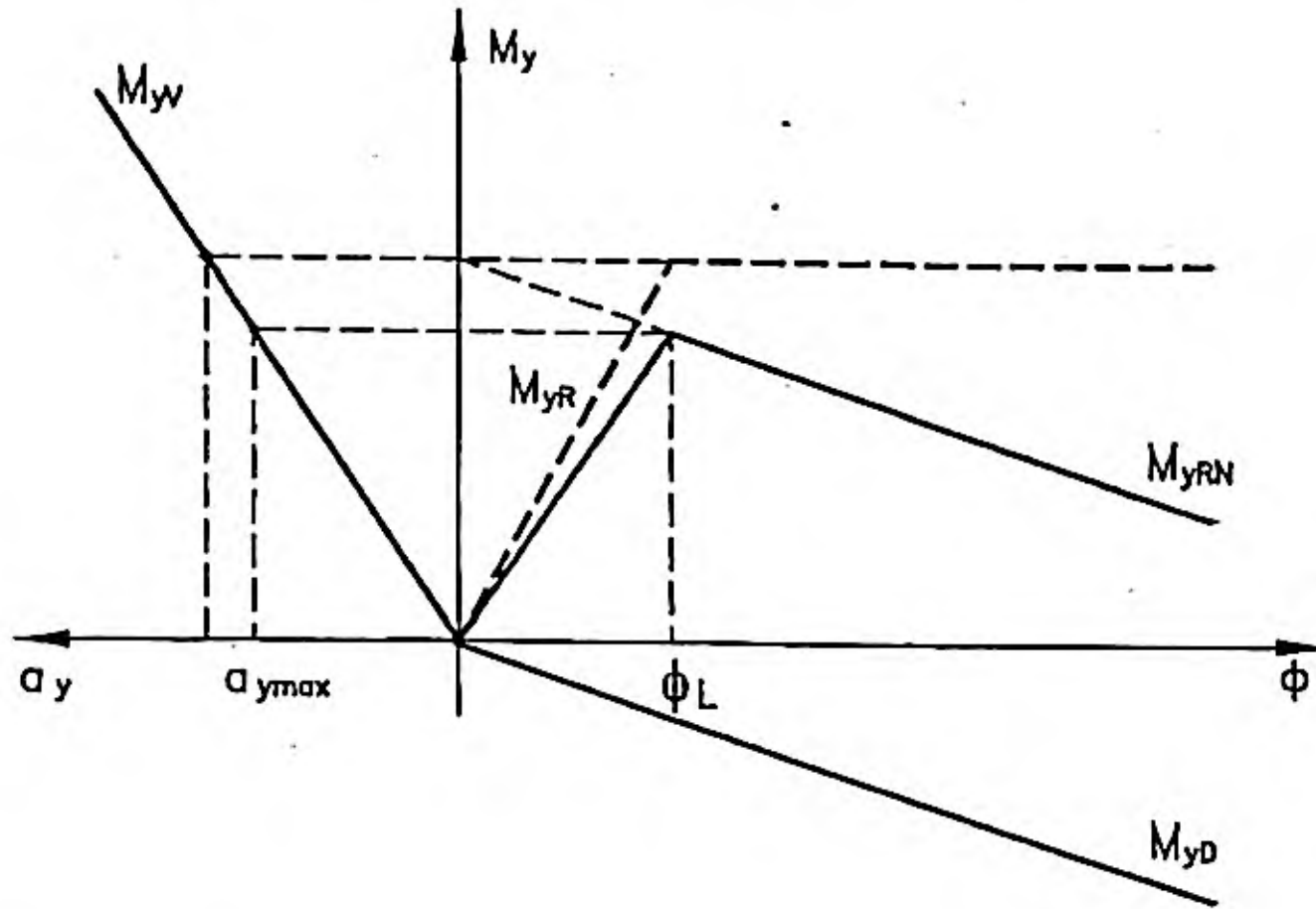


Figura 6.18. Respuesta al vuelco de un vehículo con suspensión elástica.

En el caso de los vehículos con suspensión de ballestas, puede existir un juego libre (J) en el apoyo de la ballesta, como se indica en la figura 6.19. En este caso, al ir aumentando el ángulo de vuelco, el apoyo interior perderá contacto mientras se produce el recorrido vertical J, antes de invertirse el sentido del esfuerzo flector sobre el resorte.

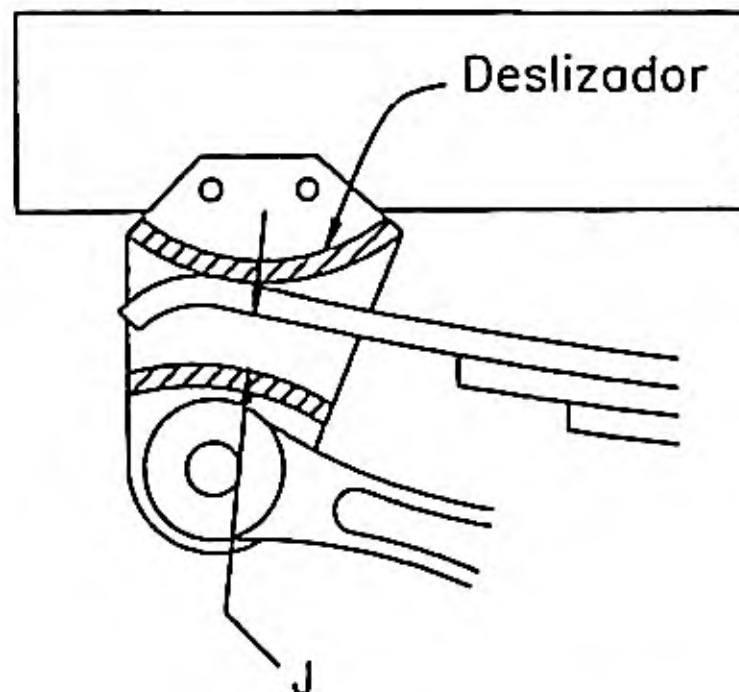


Figura 6.19. Asiento de ballesta con juego libre (J).

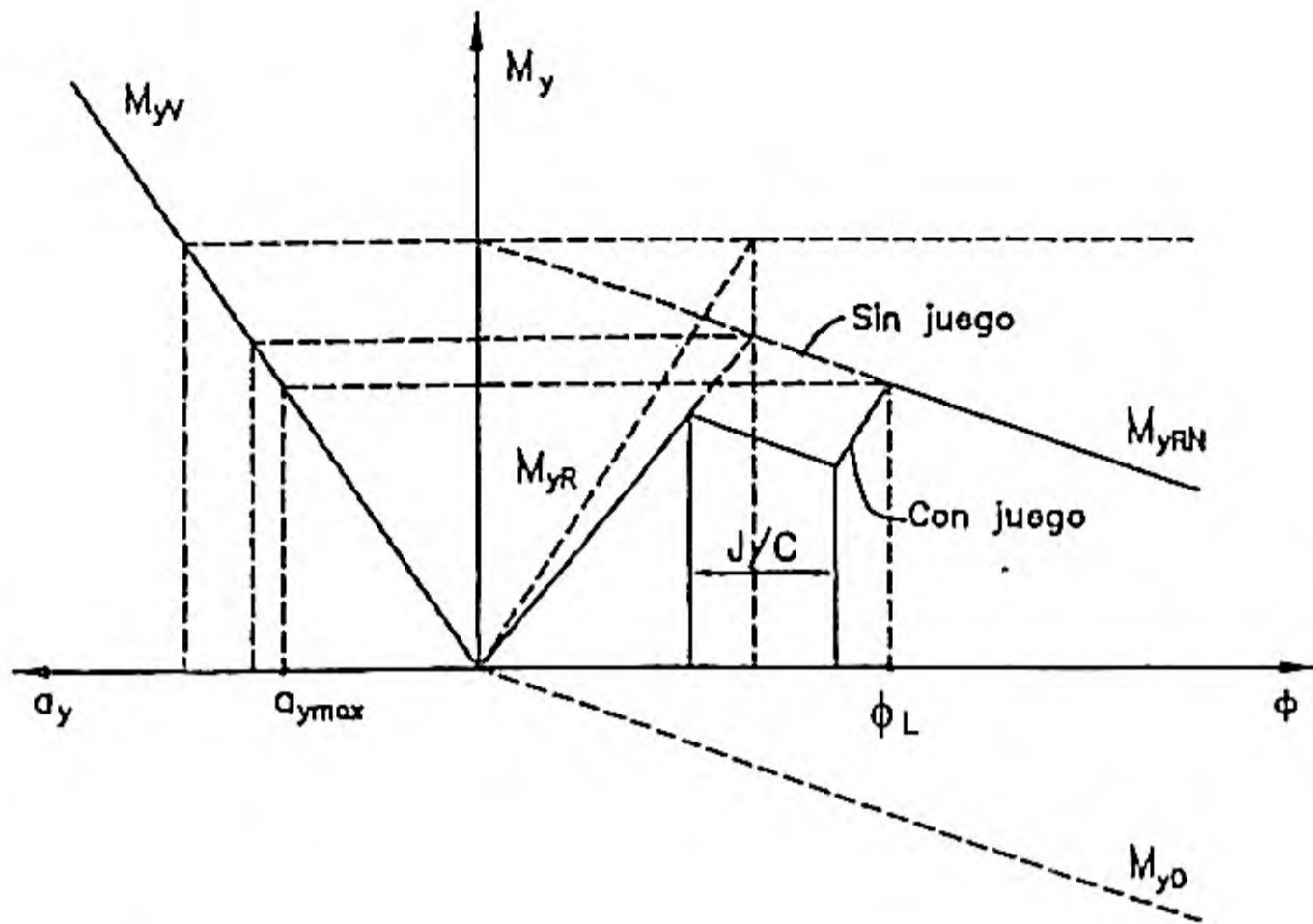


Figura 6.20. Efecto del juego J en el apoyo de ballestas.

Este efecto se traduce en una disminución del momento de reacción neto como consecuencia de un mayor ángulo ϕ_L y, por tanto, una disminución de la aceleración correspondiente al "umbral de vuelco". (Figura 6.20).

Suponiendo que la distancia entre el apoyo de las ballestas de un mismo eje, (en sentido transversal) es C , el incremento de ángulo de vuelco que se produce durante el recorrido J es J/C .

6.4.4.3. Influencia del centro de balanceo de la suspensión.

Considerando el vehículo sustentado por un solo eje, en un diagrama plano, los movimientos de balanceo de las masas suspendidas y no suspendidas se producen respecto a puntos denominados centros de balanceo.

Para un eje, el centro de balanceo de la suspensión (CBS) queda definido por el punto de giro entre la masa suspendida y la no suspendida. El centro de balanceo de los neumáticos (CBN) queda definido por el movimiento de balanceo de la masa no suspendida. Ambos centros son los puntos a través de los cuales se transmiten las componentes laterales de las fuerzas de reacción (suspensión-masa suspendida y neumático-suelo, respectivamente).

En la figura 21 pueden verse representados los dos centros de balanceo definidos y los ángulos de balanceo respecto a cada uno de ellos.

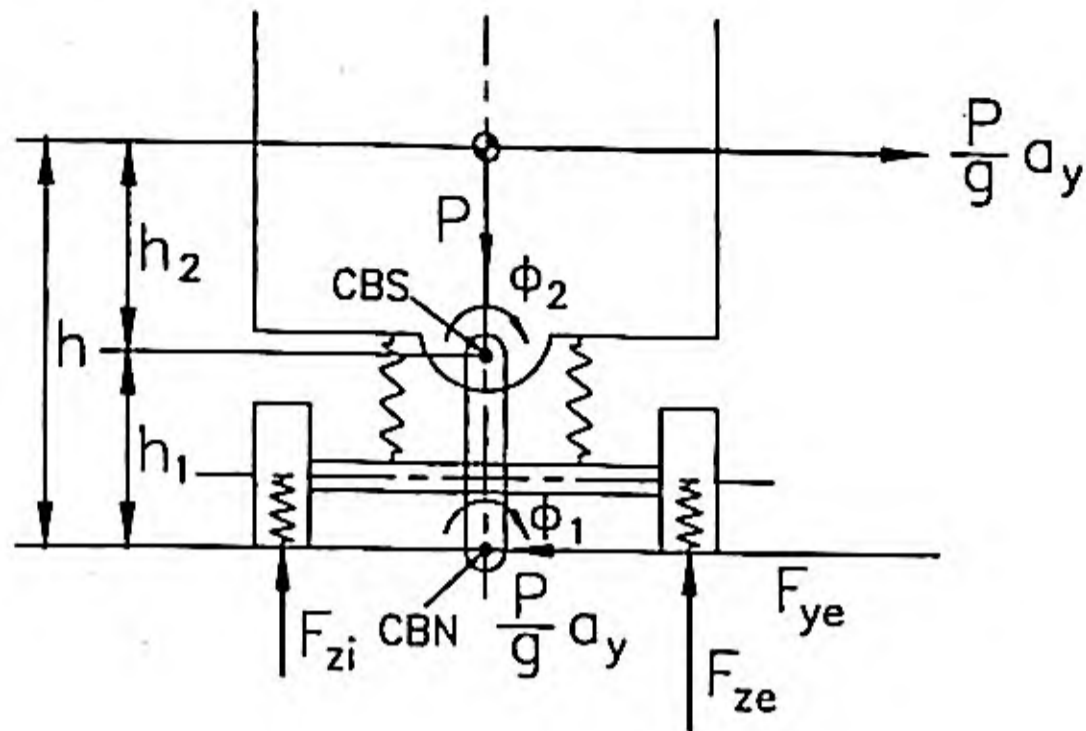


Figura 6.21. Modelo simplificado de vehículo indicando los centros de balanceo de suspensión de neumáticos.

Como puede comprobarse, el ángulo de balanceo de la masa suspendida respecto a la superficie de rodadura será:

$$\phi \approx \phi_1 + \phi_2 \quad 6.42$$

y el momento de desplazamiento del centro de gravedad.

$$M_{yD} \approx P(h_1 \phi_1 + h_2 \phi_2) \quad 6.43$$

Analicemos los dos casos extremos posibles:

- $h_1 = 0$; $h_2 = h$. En este caso ambos centros de balanceo coinciden sobre la superficie de rodadura y el mecanismo de vuelco coincide con el analizado en el punto anterior, es decir: $M_{yD1} = P \cdot h_2 \cdot \phi_2$
- $h_1 = h$, $h_2 = 0$. El centro de balanceo de la suspensión coincide con el centro de gravedad del vehículo. En este caso $M_{yD2} = P \cdot h \cdot \phi_1$. Ante la acción de una aceleración lateral, el único balanceo producido se deberá a la deformación de los neumáticos, siendo $\phi_1 \ll \phi_2$. El comportamiento sería análogo al de suspensión rígida. Los casos reales serán intermedios entres estos dos límites.

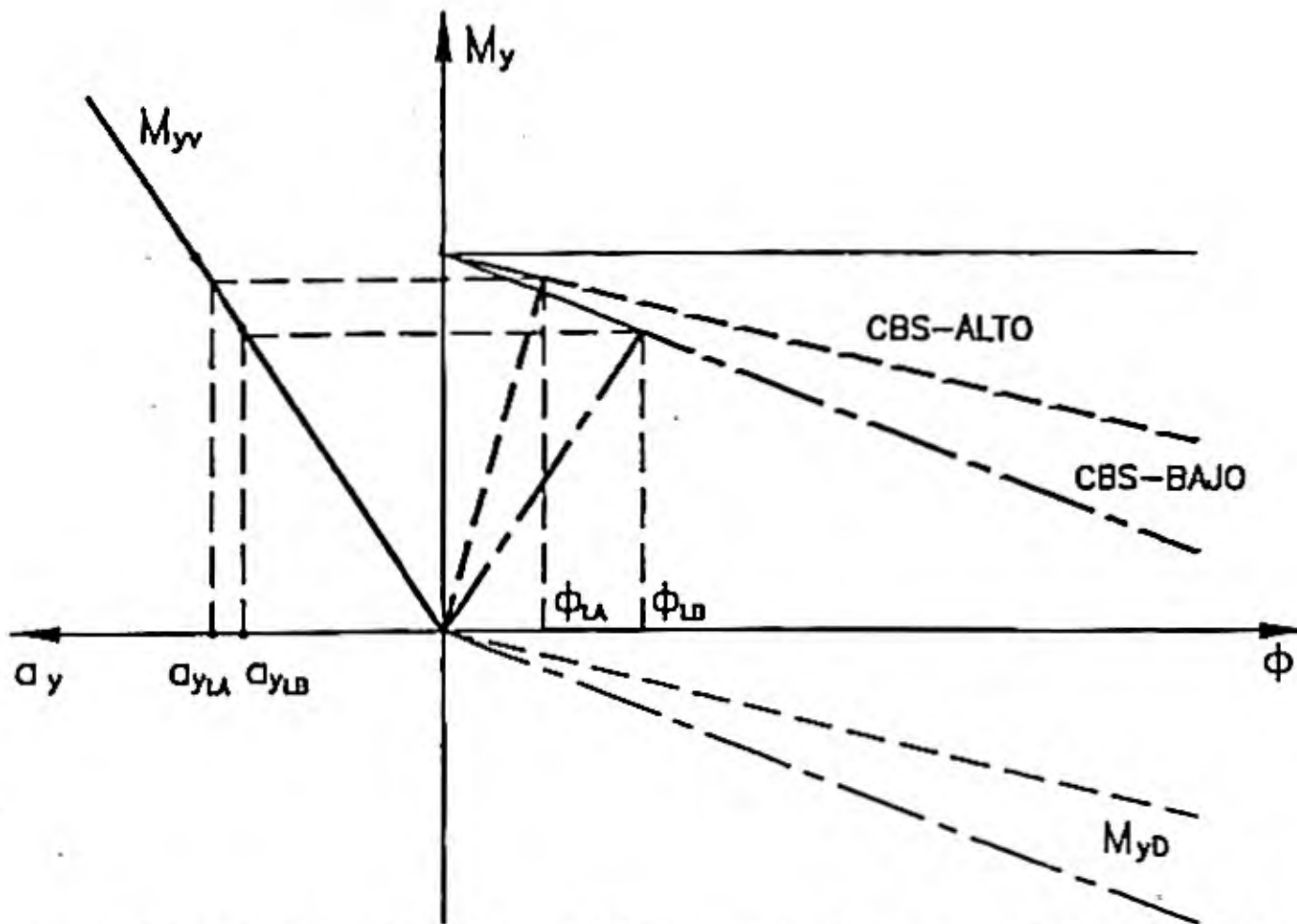


Figura 6.22. Efecto de la altura del centro de balanceo de la suspensión.

Del anterior análisis se deduce claramente, (figura 6.22), que cuanto más alto es el CBS, es decir, mayor es h_1 , mayor será el valor de la aceleración lateral en el umbral de estabilidad y, por tanto, el comportamiento del vehículo mejorará desde el punto de vista del vuelco.

La localización del centro de balanceo de la suspensión puede revestir alguna dificultad. En algunos casos, este punto se encuentra, aproximadamente, a la misma altura que los puntos de enlace de la suspensión a la estructura de la masa suspendida.

6.4.4.4. Respuesta de vehículos con varios ejes.

En los puntos anteriores han sido analizados los principales conceptos relacionados con el balanceo y vuelco, suponiendo que el conjunto del vehículo puede quedar representado en el plano, y que todas sus masas gravitan sobre un único eje y suspensión. La realidad, obviamente, no es ésta. En un vehículo, cada eje soporta una cierta masa y dispone de una suspensión que otorga de una rigidez de balanceo distinta a cada una de ellos, siendo distintas, también, las alturas correspondientes de los centros de balanceo.

Considerando como ejemplo, un vehículo articulado tractor-semirremolque y suponiendo que la rigidez de balanceo de la suspensión, en cada eje, es de menor a mayor: eje delantero del tractor-eje trasero del tractor-eje del semirremolque, cada uno de estos ejes ofrecerá un momento máximo de reacción distinto ($P_1B_1/2$, $P_2B_2/2$ y $P_3B_3/3$) y diferentes ángulos límite de balanceo (ϕ_{L1} , ϕ_{L2} , ϕ_{L3}) como se ha representado en la figura 6.23.

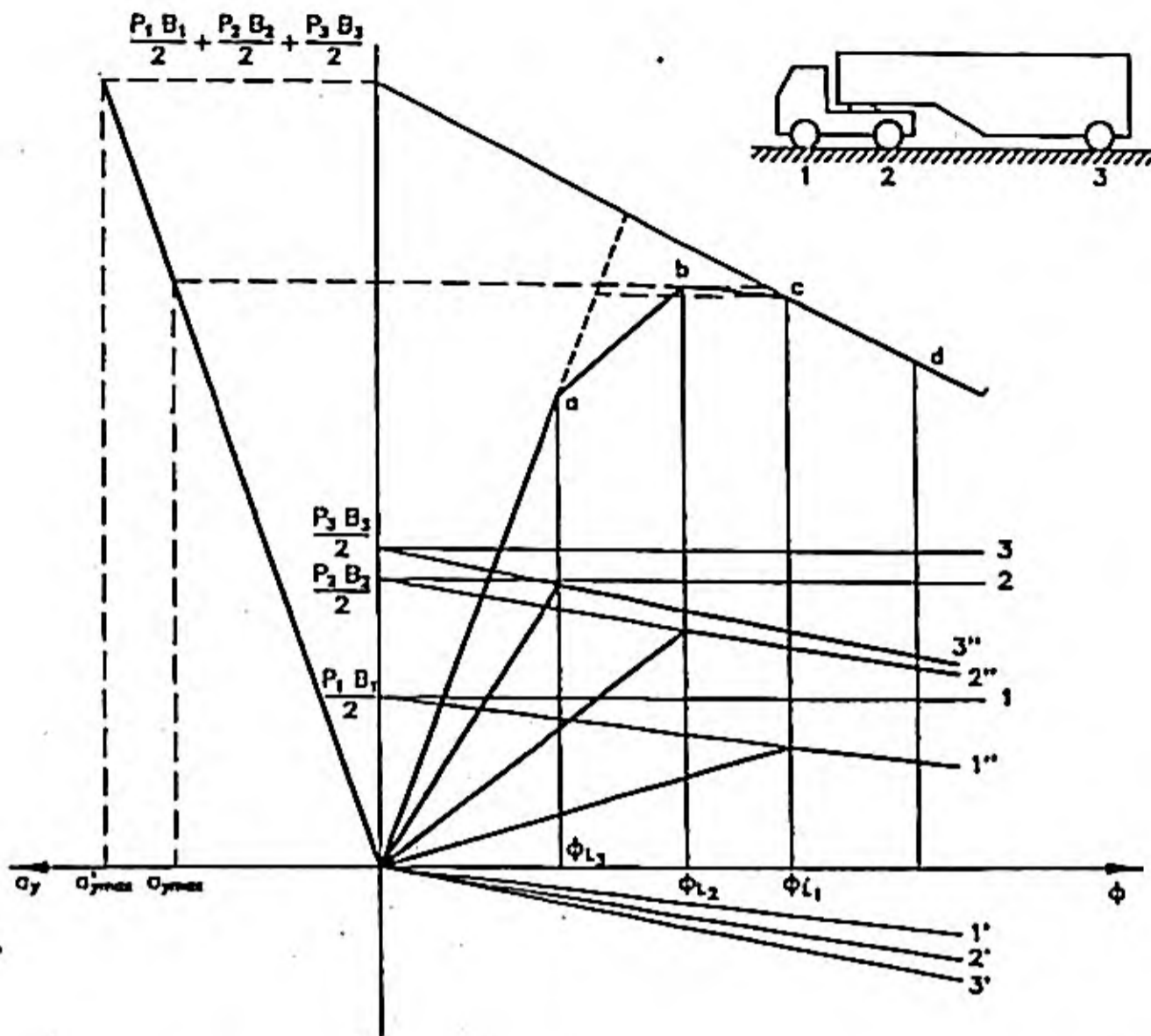


Figura 6.23. Respuesta al vuelco de un vehículo tractor-semirremolque.

Si consideramos las masas suspendidas, del tractor y semirremolque, como una unidad a los efectos del vuelco, se puede obtener la curva resultante, $a b c d$, que representa el momento neto de reacción, sumando las correspondientes ordenadas de las tres curvas $1''$, $2''$ y $3''$ que representan los momentos netos opuestos al vuelco en los ejes delantero, trasero del tractor y del semirremolque, respectivamente. En la figura, las líneas 1 , 2 y 3 corresponden a los valores de los momentos primarios de vuelco y las $1'$, $2'$ y $3'$ a los momentos de desplazamiento lateral del centro de gravedad.

En el ejemplo representado en la figura 6.23, puede considerarse que el umbral de vuelco corresponde al punto b , lo cual permite calcular la $a_{y\max}$ admisible. El valor $a'_{y\max}$ corresponderá a un vehículo completamente rígido.

La construcción gráfica de la figura permite analizar la influencia que tienen, sobre el umbral de vuelco, modificaciones de rigidez en la suspensión de cada uno de los ejes.

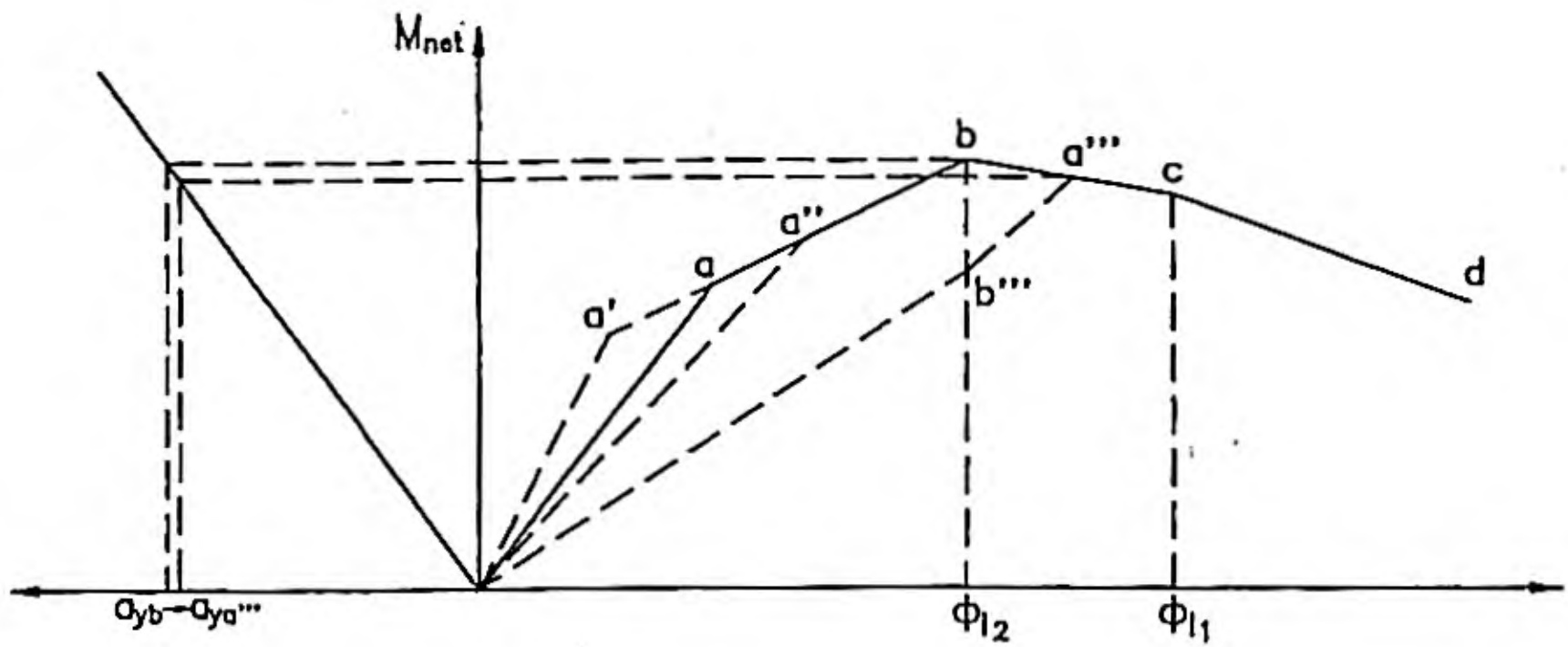


Figura 6.24. Influencia de la rigidez de la suspensión del eje del semirremolque (Rigidez: $a' > a > a'' > a'''$).

En el caso considerado en la figura, puede comprobarse que ligeros cambios en la rigidez de la suspensión del eje del semirremolque no afecta a la posición de b , y, en consecuencia, al umbral de vuelco. Solo en el caso de que se reduzca tanto la rigidez, que la rueda interior del semirremolque se descargue completamente después que las del tractor (trasera, delantera, según el caso) tal umbral se vería afectado, descendiendo su valor. (Figura 6.24, punto a''').

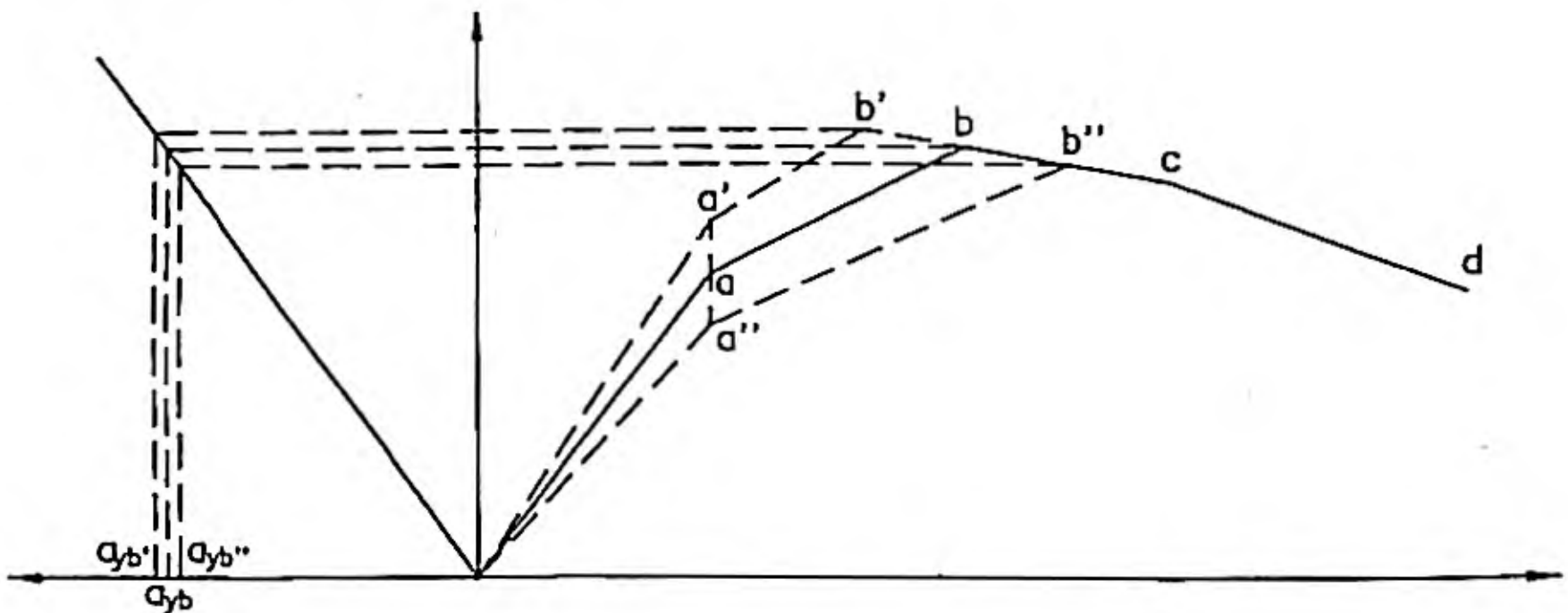


Figura 6.25. Influencia de la rigidez de la suspensión del eje trasero del tractor (Rigidez: $b' > b > b''$).

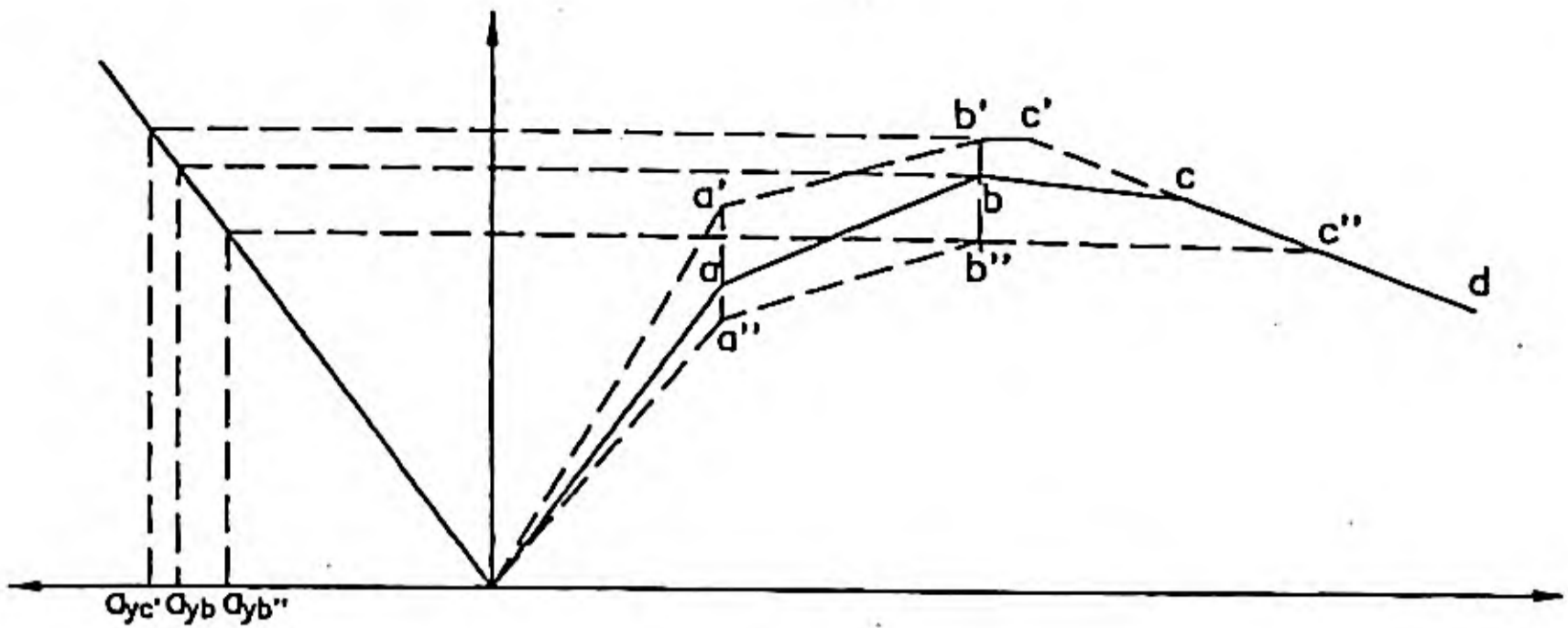


Figura 6.26. *Influencia de la rigidez de la suspensión del eje delantero del tractor (Rigidez: $c' > c > c''$).*

El cambio en la rigidez de la suspensión del eje trasero del tractor tiene una influencia directa en el umbral de vuelco si la línea bc tiene pendiente negativa, en ese caso, un aumento de la rigidez hace aumentar el valor de $a_{y \max}$. (Figura 6.25, punto b').

Por último, el incremento de rigidez de la suspensión en el eje delantero del tractor mejora el comportamiento al vuelco del conjunto. (Figura 6.26, punto c').

6.4.4.5. Otras variables que influyen en el vuelco de vehículos.

En el presente tema constituye una introducción al estudio del vuelco en condiciones estacionarias. Un análisis más completo debe contemplar la influencia de otras variables tales como:

- Deformaciones laterales de los neumáticos.
- Rigidez torsional de las estructuras.
- Situación de las masas y desplazamiento de la carga en el caso singular de transporte de líquidos.
- Situación de la quinta rueda.
- Angulo de articulación, etc.

6.5. COMPORTAMIENTO DIRECCIONAL DEL VEHÍCULO EN RÉGIMEN ESTACIONARIO.

6.5.1. Introducción.

En el presente apartado se inicia el análisis del comportamiento direccional de los vehículos, es decir, el estudio de su respuesta ante acciones de la dirección y otras que puedan modificar su trayectoria, así como de los principales parámetros o variables de control que influyen en dicho comportamiento.

En este aspecto de la dinámica vehicular, más que en otros, el control del vehículo goza de una naturaleza subjetiva. Como se indicó en el capítulo primero, el conductor interactúa con el vehículo, formando un sistema cerrado de control. Acciones y reacciones de ambos elementos del sistema ejercen una influencia recíproca cuyo análisis es complejo. De hecho, un comportamiento direccional del vehículo que puede resultar adecuado para un conductor, o tipo de conductores, puede no serlo para otros. Cuando se diseña un vehículo, los ingenieros deben considerar a qué grupo de conductores se dirige y tratar de imaginar o predecir, de algún modo, un conjunto de características representativas del mismo.

Nuestro análisis será más restringido. En éste y los siguientes apartados se considerará el vehículo aislado, es decir, será analizado como un sistema de control abierto, y se estudiará cómo responde direccionalmente ante excitaciones definidas objetivamente. Ello simplificará la tarea notablemente.

Aún con la simplificación indicada, el problema sigue siendo complejo por el gran número de variables que intervienen. Las dos variables principales de control del comportamiento direccional del vehículo son: los ángulos girados por las ruedas directrices, (δ_j), cuando el conductor hace girar al volante un ángulo δ_v , y los ángulos de deriva de los neumáticos.

La primera variable normalmente viene controlada por el conductor, como medio de mantener o modificar la trayectoria del vehículo.

En cuanto a los ángulos de deriva de los neumáticos, éstos adquieren valores distintos de cero, siempre que sobre el vehículo actúe una fuerza lateral, que debe ser compensada mediante fuerzas de adherencia entre el neumático y la calzada.

Visto el fenómeno como acabamos de enunciarlo, el problema no es excesivamente complejo, sin embargo, existe un número elevado de factores que, influyendo sobre las anteriores variables, actúan, de hecho, como parámetros adicionales de control. Así, δ_j y α_j se ven influenciados, además de por las acciones citadas (conductor y fuerzas laterales respectivamente) por:

Angulo de guiado δ_j :

- . Balanceo de la masa suspendida.
- . Deformaciones causadas por la fuerza lateral.
- . Deformaciones causadas por las fuerzas longitudinales.
- . Deformaciones causadas por los pares de autoalineación.
- . Deformaciones causadas por las cargas verticales dinámicas.

Comportamiento a la deriva del neumático α_j :

- . Angulo de caída.
- . Par de balanceo y su distribución entre los diferentes ejes.
- . Esfuerzos longitudinales.
- . Pares autoalineantes, etc.

Los anteriores parámetros de control se ven influenciados, a su vez, por los siguientes factores:

- Masa suspendida y su distribución por eje.
- Masa no suspendida (o semisuspendida) y su distribución.
- Posición del centro de gravedad.
- Batalla.
- Centros de balanceo.
- Distribución de los pares de balanceo.
- Coeficientes de guiado por balanceo.
- Angulos de caída y su variación con el balanceo.
- Rigidez de la dirección frente a esfuerzos laterales, longitudinales y de autoalineación.
- Rigidez de deriva.
- Rigidez de caída.
- Características aerodinámicas (C_y , C_{mx} , C_{mz} ...)

Tan elevado número de factores conduce a modelos de gran complejidad, cuando se

desea predecir con gran precisión el comportamiento direccional del vehículo. Su consideración conjunta y completa desborda los límites impuestos a este trabajo. Por otra parte, no es necesaria para adquirir un conocimiento fundamental de dicho comportamiento y los conceptos básicos asociados a él.

De hecho, un modelo simple de vehículo, como el que será descrito en el punto siguiente, y el estudio de giros en régimen estacionario, permitirá analizar aspectos de gran interés asociados al comportamiento direccional del vehículo y estudiar la influencia de los principales factores que lo condicionan. Más tarde, en el punto 6.6, el modelo será ligeramente ampliado para analizar aspectos relacionados con el régimen transitorio y la estabilidad direccional, aunque sin perder su simplicidad.

6.5.2. Modelo lineal simplificado de un vehículo para el estudio de giros estacionarios.

Un primer paso, para entender el comportamiento direccional de los vehículos automóviles, es estudiar los giros en régimen estacionario, es decir, en condiciones no variables con el tiempo. Estas condiciones se traducen, en nuestro caso, en el movimiento del vehículo a velocidad constante, recorriendo una curva de radio constante.

En las condiciones descritas, el vehículo describe una trayectoria circular respecto a un eje de rotación fijo y velocidad angular constante. Como consecuencia, su centro de gravedad se ve sometido a una fuerza centrífuga (PV^2/gR), la cual es compensada por fuerzas laterales de adherencia en los neumáticos. Estas fuerzas producen deformación lateral (deriva) mostrando el vehículo una configuración como la representada en la figura 6.14.

Aparte de la simplificación que introduce la consideración de régimen estacionario, se va a construir un modelo que contiene otras simplificaciones:

- a) Se prescinde de la transferencia de carga entre las ruedas interiores y las exteriores.
- b) Se prescinde de todas las influencias que, la deformación de la suspensión, de los elementos de la dirección y el ángulo de calda, puede ejercer sobre el ángulo geométrico de guiado de cada rueda.
- c) En consecuencia, se supone que entre el ángulo de giro del volante y el de guiado de las ruedas existe una relación del tipo

$$\delta = \delta_v \sqrt{\xi_d} \quad 6.44$$

Siendo ξ_d la relación de transmisión de la dirección.

- d) Como consecuencia de las simplificaciones anteriores, las únicas variables de control son variables geométricas: δ y α , y es posible considerar que las dos ruedas de un eje quedan representadas por una sola, cuyo centro está situado en el plano longitudinal

(X, Z) del vehículo.

- e) Se supondrá que el comportamiento de la deriva de los neumáticos es lineal, lo cual solo será aceptable si la aceleración lateral a_y no supera un cierto valor ($\approx 0.3 g$ a $0.4 g$).
- f) Por último, se considerará que el vehículo describe curvas de radio muy superior a su batalla, de modo que queden justificadas ciertas simplificaciones geométricas.

Teniendo en cuenta todo lo anterior puede construirse el modelo de vehículo de dos ruedas que se representa en la figura 6.27.

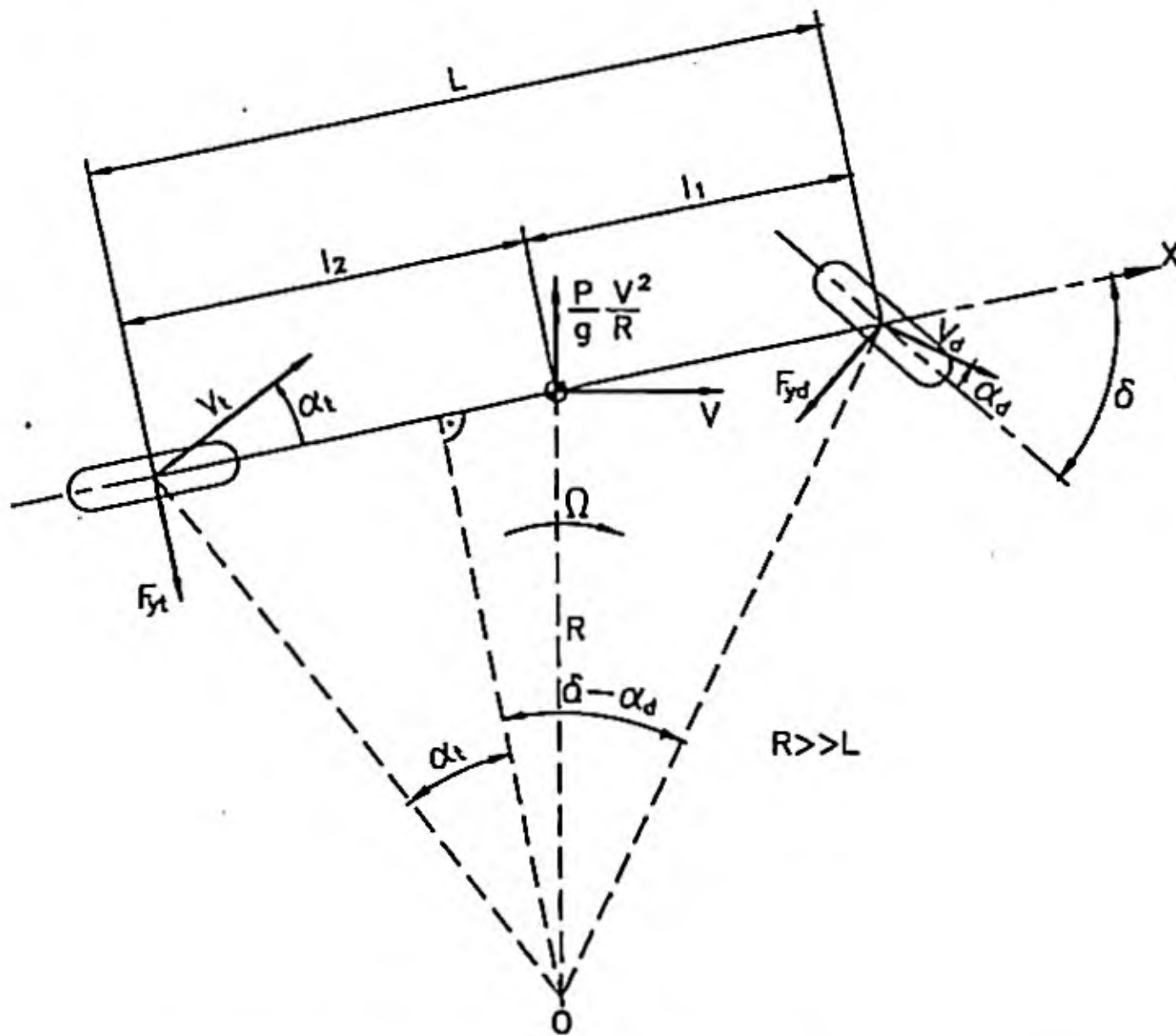


Figura 6.27. Modelo de vehículo de dos ejes para el estudio del comportamiento direccional en giros estacionarios.

De la figura 6.27 y de la hipótesis f se deduce directamente:

$$\delta \approx \alpha_d + \alpha_t \approx \frac{L}{R} \quad 6.45$$

y por tanto:

$$\delta \approx \frac{L}{R} + \alpha_d - \alpha_t \quad 6.46$$

Para pequeños ángulos de dirección y suponiendo que la fuerza centrífuga actúa aproximadamente en dirección perpendicular al plano longitudinal del vehículo:

$$F_{yd} \approx \frac{P}{g} \frac{V^2}{R} \frac{l_2}{L} \quad 6.47$$

$$F_{yt} \approx \frac{P}{g} \frac{V^2}{R} \frac{l_1}{L} \quad 6.48$$

Debe tenerse en cuenta que, cuando R es mucho mayor que L , F_{yd} y F_{yt} son prácticamente paralelas entre sí y a la fuerza centrífuga, por lo que la compensación de ésta última por las fuerzas laterales de adherencia se produce de forma que éstas adquieren los valores expresado en 6.47 y 6.48.

Haciendo en las anteriores:

$$P_d = \frac{Pl_2}{2L} ; \quad P_t = \frac{Pl_1}{2L} \quad 6.49$$

donde P_d y P_t son los pesos por rueda delantera y trasera, respectivamente, cuando el vehículo se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal.

$$F_{yd} = 2 P_d \frac{V^2}{gR} \quad 6.50$$

$$F_{yt} = 2 P_t \frac{V^2}{gR} \quad 6.51$$

Teniendo en cuenta que $\alpha = F_y/K_\alpha$, siendo K_α la rigidez de deriva de un neumático, sustituyendo en (6.50) y (6.51) y considerando que cada rueda del modelo tiene rigidez doble que cada una de las dos que representa:

$$\alpha_d = \frac{F_{yd}}{2 K_{\alpha d}} = \frac{V^2}{gR} \frac{P_d}{K_{\alpha d}} \quad 6.52$$

$$\alpha_i = \frac{F_{yt}}{2K_{at}} = \frac{V^2}{gR} \frac{P_t}{K_{at}} \quad 6.53$$

Sustituyendo las anteriores en (6.46):

$$\delta = \frac{L}{R} + \left(\frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_t}{K_{at}} \right) \frac{V^2}{gR} \quad 6.54$$

ó también:

$$\delta = \frac{L}{R} + K_v \frac{V^2}{gR} \quad 6.55$$

Donde:

$$K_v = \frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_t}{K_{at}} \quad 6.56$$

K_v , es denominado coeficiente de viraje y su valor tiene una gran influencia en el comportamiento direccional del vehículo, como se verá a continuación.

6.5.3. Respuesta direccional. Vehículos neutros, subviradores y sobreviradores.

El comportamiento direccional del vehículo viene condicionado, en primer término, por el signo del coeficiente de viraje (K_v). De la ecuación 6.53 se deduce que el ángulo de dirección requerido para negociar una curva de radio constante variará con la velocidad, o será independiente de ella, en función del valor que adquiere K_v ; ello da lugar a respuestas diferentes que han sido denominadas como viraje neutro, subviraje y sobreviraje, con el siguiente criterio. Considerando $R = \text{cte}$:

Vehículo neutro: $K_v = 0$
 $\delta = \frac{L}{R}$ (δ independiente de V)

Vehículo subvirador: $K_v > 0$
 $\delta = \frac{L}{R} + K_v \frac{V^2}{gR}$ (δ crece al hacerlo V)

Vehículo sobrevirador: $K_v < 0$

$$\delta = \frac{L}{R} - |K_v| \frac{V^2}{gR} \quad (\delta \text{ decrece al aumentar } V)$$

Estos comportamientos han sido representados en la figura 6.28.

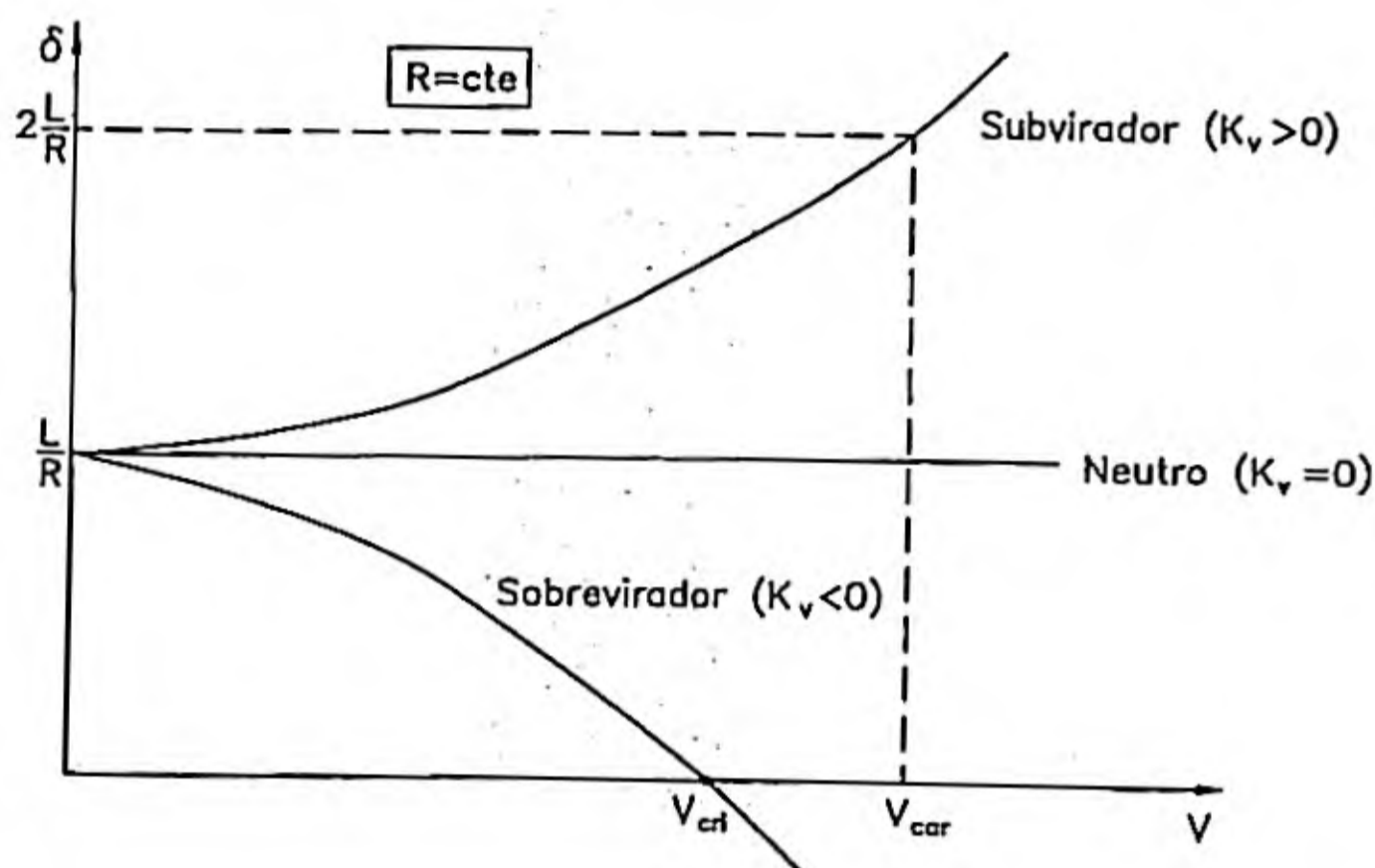


Figura 6.28. Variación del ángulo de dirección con la velocidad en vehículos neutros subviradores y sobreviradores, al describir una trayectoria de radio constante.

Como puede observarse, en vehículos sobreviradores el ángulo de guiado puede hacerse negativo a partir de un cierto valor de V , denominado **velocidad crítica**, este es:

$$V_{cri} = \sqrt{\frac{gL}{|K_v|}} \quad 6.57$$

A partir de este valor es preciso girar el volante en sentido opuesto al de giro del vehículo y, además, como se demostrará en puntos posteriores, el vehículo mostrará **inestabilidad direccional**, situación ésta de gran riesgo, que debe ser evitada.

En el caso de un vehículo subvirador, el volante debe ser girado en el sentido de giro del vehículo en todo el intervalo de velocidades, debiendo aumentar δ con el incremento de velocidad. Un parámetro que permite hacer comparaciones del grado de subviraje de los vehículos es la denominada velocidad característica, definida como el valor de V que requiere un giro de volante doble del correspondiente a viraje neutro ($\delta=2L/R$), de (6.55):

$$V_{car} = \sqrt{\frac{gL}{K_v}} \quad 6.58$$

Como se observa, las velocidades característica y crítica presentan una formulación similar.

Si comparamos (6.46) y (6.55):

$$\alpha_d - \alpha_1 = K_v \frac{V^2}{gR} \quad 6.59$$

El signo de K_v coincide con el de la diferencia $\alpha_d - \alpha_1$, es decir:

Vehículos neutros: $\alpha_d = \alpha_1$

Vehículos subviradores: $\alpha_d > \alpha_1$

Vehículos sobreviradores: $\alpha_d < \alpha_1$

Debe observarse que esta relación simple, entre comportamiento en viraje y ángulo de deriva, solo es válida a la luz del modelo simple que se ha utilizado. Considerando modelos más complejos entran en juego otras variables. Por ejemplo, para aceleraciones laterales elevadas, el comportamiento lateral de los neumáticos es no lineal y bajo esas condiciones K_v , que modificará su valor en función de la no linealidad, es más difícil de predecir.

Teniendo en cuenta lo anterior se comprenderán los comportamientos de los vehículos al acelerar manteniendo invariable el ángulo de dirección, (figura 6.29), o al sufrir la acción de un esfuerzo lateral en su centro de gravedad, mientras circula en línea recta, sin modificar el ángulo de guiado (figura 6.30).

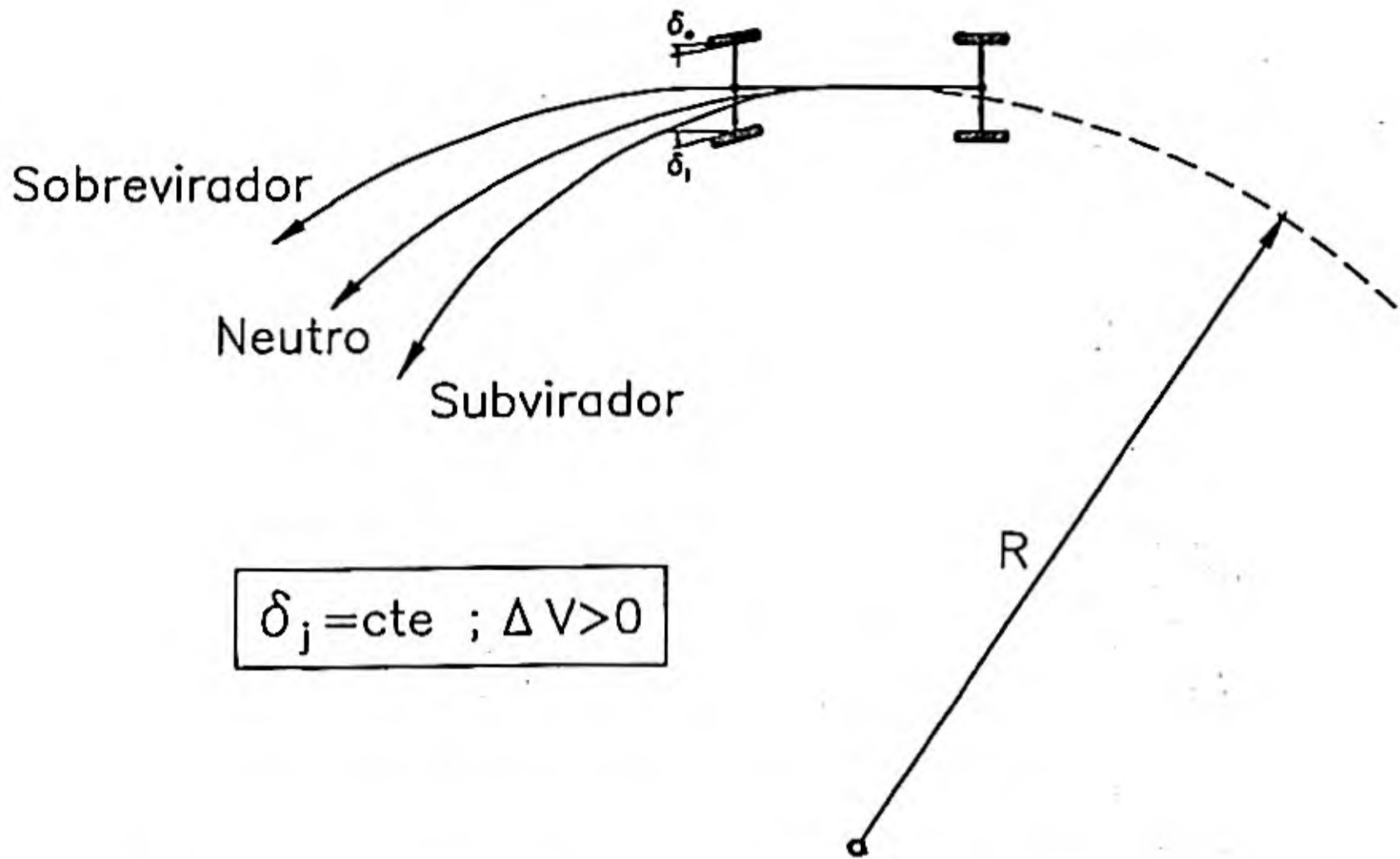


Figura 6.29. Respuesta direccional de un vehículo neutro, subvirador o sobrevirador, al acelerar en curva, manteniendo constante el ángulo de dirección.

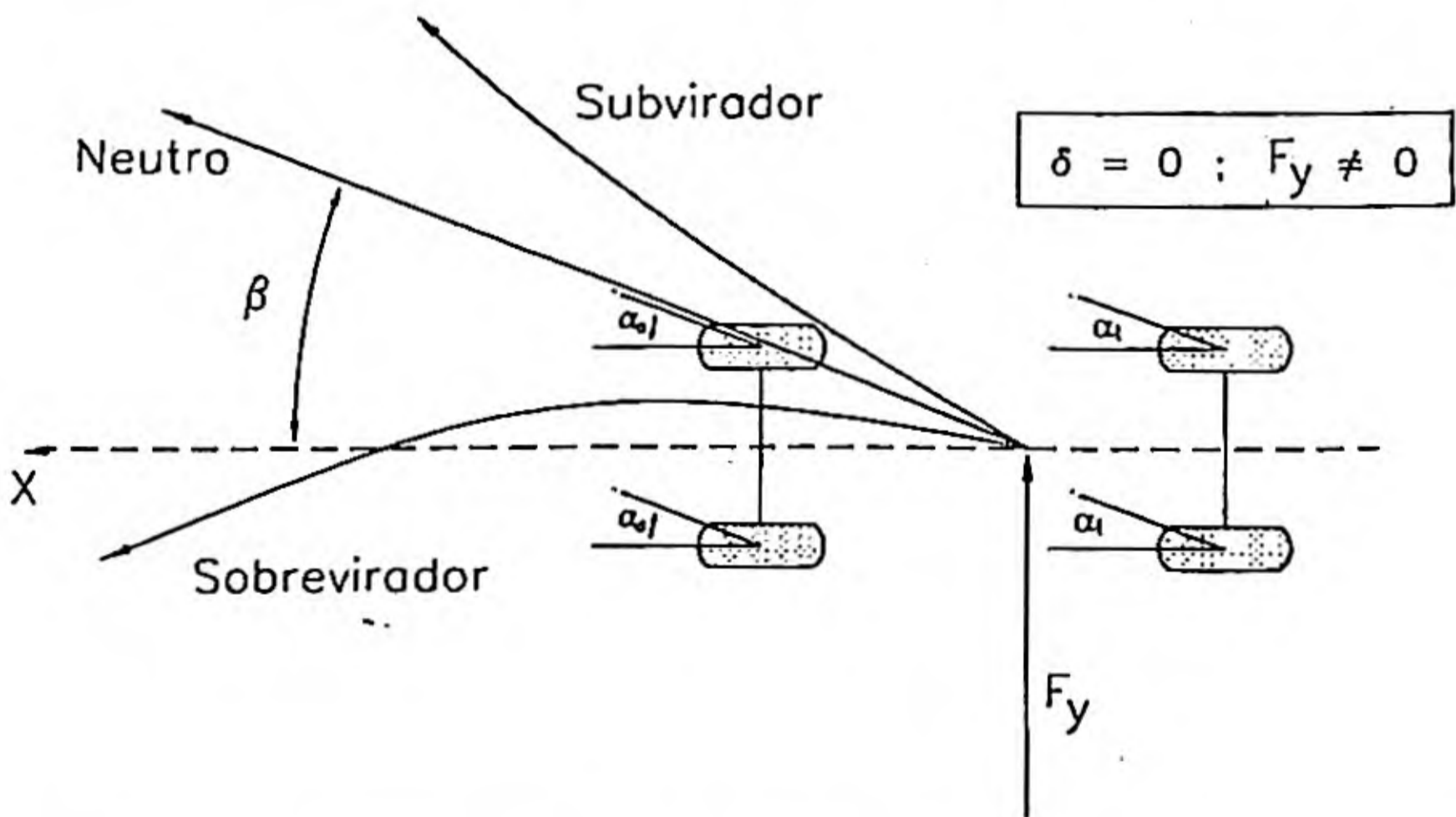


Figura 6.30. Respuesta direccional de un vehículo neutro, subvirador y sobrevirador bajo la influencia de una acción lateral y con ángulo de guiado $\delta = 0$

En el primer caso ($\delta = \text{cte. } \Delta V > 0$) un vehículo neutro describirá una trayectoria de radio constante (R); un vehículo sobrevirador describirá una trayectoria de radio variable, según aumenta V , e inferior a R , y un vehículo subvirador circulará siguiendo una trayectoria de radios superiores a R .

En cuanto al supuesto de empuje lateral y $\delta = 0$, (figura 6.30), el vehículo neutro seguirá una trayectoria recta pero desviada respecto al eje longitudinal del vehículo en su posición de referencia. El ángulo de desviación será, precisamente, $\beta = \alpha_d = \alpha_r$. Un vehículo subvirador ($\alpha_d > \alpha_r$) seguirá una trayectoria no recta, con un ángulo de desviación creciente respecto a la trayectoria recta de referencia y en el sentido del empuje lateral. El sobrevirador tiene un comportamiento análogo, pero el sentido de su trayectoria es contrario al del empuje.

Conocida la respuesta de los diferentes tipos de vehículos, respecto a su comportamiento virador, debemos analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.

Los vehículos sobreviradores proporcionan una respuesta direccional más "sensitiva" que los otros, como veremos en el apartado siguiente, pero presentan dos problemas fundamentales, el primero, la inestabilidad a velocidades superiores a la crítica y el segundo, requerimientos de corrección del ángulo de dirección al acelerar en curva, o bajo acciones laterales, diferentes a los que intuitivamente puede predecir un conductor normal. Debido a estas razones, es indeseable este tipo de comportamiento para condiciones normales de conducción.

Los vehículos subviradores presentan un comportamiento contrario al anterior. Su dificultad es una respuesta lenta y menos "sensitiva", especialmente con grados elevados de subviraje. En cualquier caso, un ligero subvirado, es un comportamiento deseable en conducción normal.

En cuanto a los vehículos neutros, su único problema es que cambios en las características de los vehículos, o sus condiciones operativas, pueden hacer que su comportamiento sea sobrevirador.

Por las razones anteriores, en general los vehículos modernos son diseñados para que muestren un comportamiento ligeramente subvirador, verificando que únicamente bajo condiciones excepcionales puede resultar sobrevirador.

Debe tenerse en cuenta, atendiendo a las ecuaciones (6.54) y (6.56), que circunstancias como: incrementos del peso sobre el eje trasero, disminución de la presión de inflado sobre el mismo eje (decremento de K_d) o lo contrario en el delantero y el cambio de una de las parejas de neumáticos, haciendo que varíe K_{ad} ó K_{ar} de forma inapropiada, pueden hacer que un vehículo subvirador modifique su comportamiento por otro sobrevirador. Esta circunstancia, si ya es negativa en sí misma, lo es más si consideramos que un conductor, habituado a un tipo de comportamiento de su vehículo, puede reaccionar de manera inapropiada, ante emergencias o situaciones más o menos límites, si tal vehículo modifica su

respuesta habitual, por alguna de las razones expuestas en los ejemplos anteriores.

6.5.4. Respuesta direccional estacionaria frente a acciones sobre el volante.

En el apartado anterior se ha definido la velocidad característica para vehículos subviradores y la velocidad crítica para los sobreviradores. Ambos valores sirven, como se indicó, para comparar diferentes vehículos respecto a su comportamiento direccional. Con este mismo propósito interesa valorar la respuesta del vehículo ante acciones ejercidas sobre el volante de dirección. Para realizar tal valoración se pueden utilizar las siguientes características:

- Ganancia de aceleración lateral.
- Ganancia de velocidad de guiñada.
- Ganancia de curvatura.

En cada caso se considera una variable asociada a la respuesta del sistema (vehículo): aceleración lateral, velocidad de guiñada o curvatura de la trayectoria y se analiza la relación entre ésta y el giro del volante o de las ruedas directrices (recuérdese la hipótesis C, ecuación 6.44) en régimen estacionario. A continuación se analizan las tres ganancias indicadas.

6.5.4.1. Ganancia de aceleración lateral.

Se define como:

$$G_{a_y} = \frac{a_y/g}{\delta} \quad 6.60$$

Teniendo en cuenta que $a_y = V^2/R$ y la ecuación (6.55):

$$G_{a_y} = \frac{V^2}{gL + K_v V^2} \quad 6.61$$

Si el vehículo presenta una respuesta neutra ($K_v = 0$):

$$G_{a_y} = \frac{V^2}{gL} \quad 6.62$$

que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen de un sistema de referencia G_{a_y} , V , (figura 6.31). En la misma figura se representan las curvas de ganancia correspondientes a vehículos sobre y subviradores.

Como se observa en la figura 6.31, y puede demostrarse fácilmente, la curva correspondiente a un vehículo sobrevirador presenta una asíntota para el valor de la velocidad crítica; para un vehículo neutro, $G_{ay} = 1/k_v$ para $V = V_{cr}$ para un vehículo subvirador la curva pasa por el punto de coordenadas $(V_{cor}, 1/2K_v)$. Esto permite un trazado aproximado sencillo.

La ganancia de aceleración lateral de un vehículo es pequeña a velocidades muy bajas, y crece con V , siendo mucho mayor este crecimiento para los vehículos sobreviradores e inferior en los subviradores. Ello muestra la mayor "sensibilidad" direccional de los primeros, que ya fue indicada.

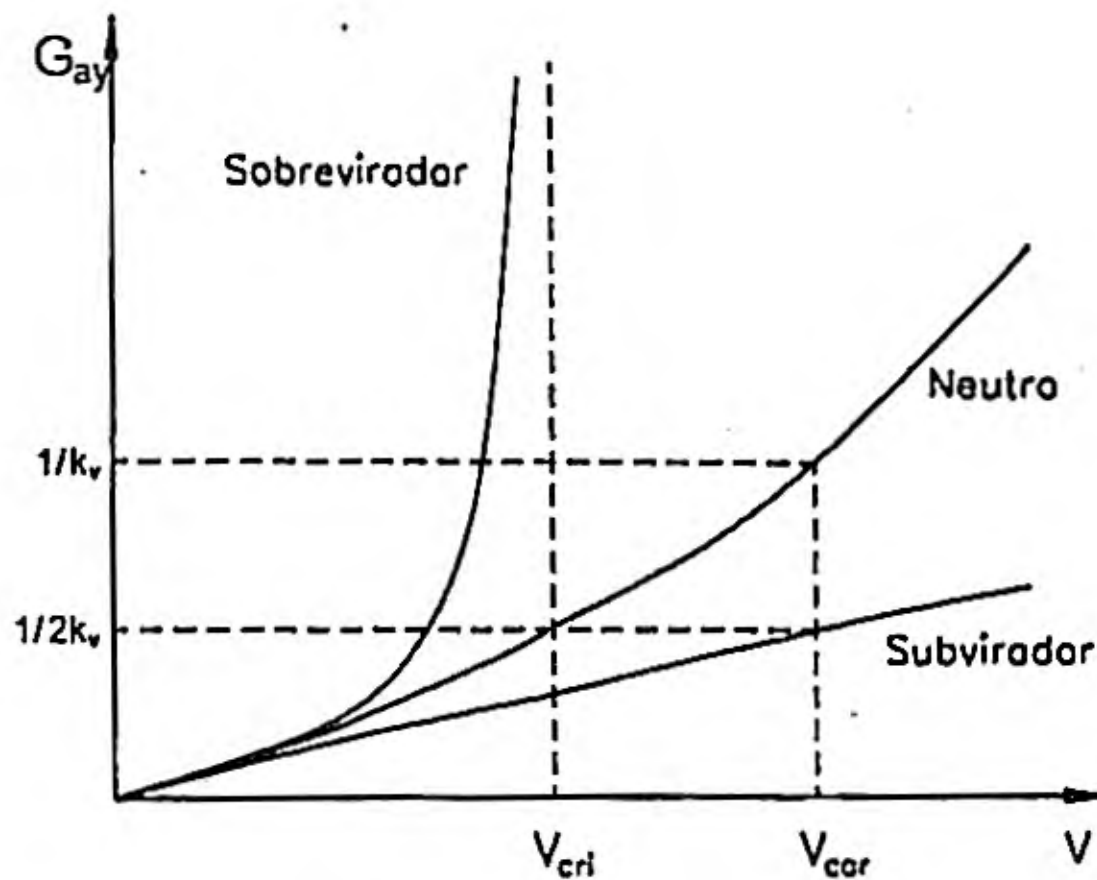


Figura 6.31. Ganancia de aceleración lateral en función de la velocidad. (Se ha considerado $L = 2,5 \text{ m}$; $K_v = 0,02$ para subvirador y $K_v = -0,04$ para sobrevirador).

6.5.4.2. Ganancia de velocidad de guiñada.

De manera análoga al caso anterior, se define esta ganancia mediante la relación:

$$G_{\Omega_z} = \frac{\Omega_z}{\delta} \tag{6.63}$$

Teniendo en cuenta que $\Omega_z = V/R$ y (6.55):

$$G_{\Omega z} = \frac{V}{L + K_v \frac{V^2}{g}} \quad 6.64$$

Esta ecuación puede representarse, para los tres tipos de vehículos, como se ha hecho en la figura 6.32. En este caso, la curva de ganancia de un vehículo neutro es una recta de ecuación $G_{\Omega z} = V/L$. De nuevo puede apreciarse que para cualquier velocidad, un vehículo sobrevirador es más "sensitivo" que uno neutro y este que uno subvirador; las respectivas ganancias decrecen en ese mismo orden.

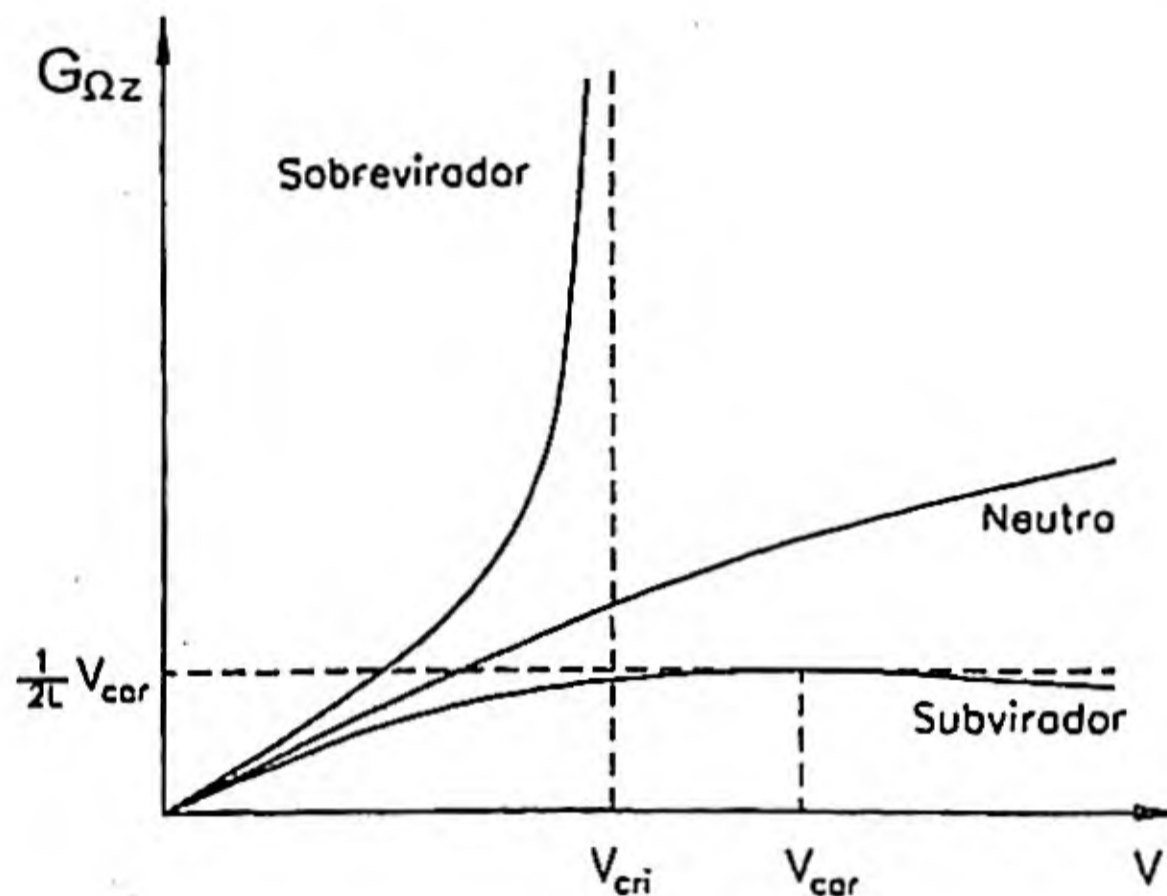


Figura 6.32. Ganancia de velocidad de guiñada en función de la velocidad ($L = 2.5m$; subvirador: $K_v = 0.02$; sobrevirador: $K_v = -0.04$)

6.5.4.3. Ganancia de curvatura.

La tercera ganancia considerada es la de curvatura, definida por la relación entre ésta ($1/R$) y el ángulo girado por el volante, o por las ruedas directrices, así:

$$G_c = \frac{1/R}{\delta} = \frac{1}{L + K_v \frac{V^2}{g}} \quad 6.65$$

La representación de (6.65) para los tres tipos de vehículos proporciona un gráfico como el de la figura 6.33.

Como en los casos anteriores, con la ganancia de curvatura se pone de nuevo de manifiesto la mayor "sensibilidad" direccional de los vehículos sobreviradores.

En los tres casos, para el valor crítico de la velocidad se produce un valor infinito de la ganancia correspondiente. En este caso, el radio de la trayectoria tiende a cero con un ángulo de dirección finito. El vehículo tiende a girar sobre su propio eje, perdiendo el control debido a la inestabilidad direccional.

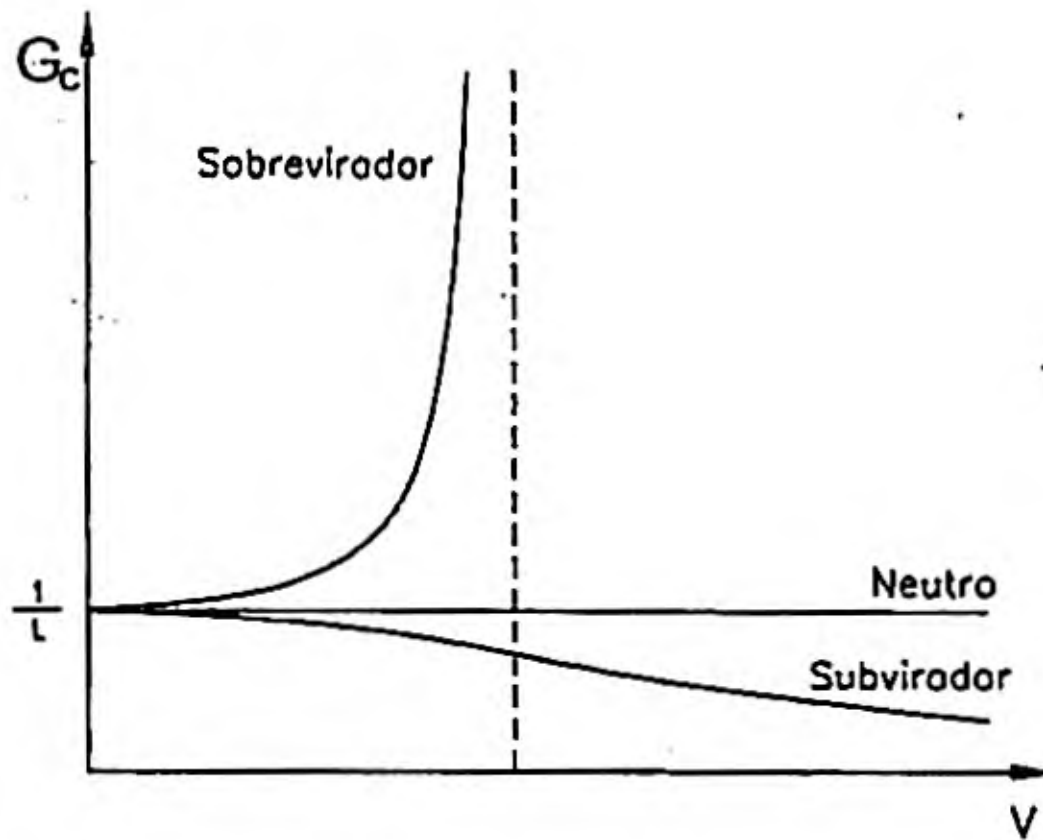


Figura 6.33. Ganancia de curvatura en función de la velocidad (se han considerado los mismos valores que en las figuras anteriores).

6.5.5. Ensayos para el estudio de las características direccionales en régimen estacionario.

La utilización de pistas de ensayos apropiadas, ha hecho posible un importante progreso en la determinación experimental del comportamiento direccional de los automóviles. Los ensayos más comunes se realizan;

- A radio constante.
- A velocidad constante.
- A ángulo de dirección constante.

Con estos ensayos puede verificarse el comportamiento direccional del vehículo a diferentes velocidades y sus resultados no coincidirán, para todas ellas, con las proporcionadas por el modelo estudiado en puntos anteriores. Téngase en cuenta que en él se ha considerado K_v como constante, y en la práctica, el coeficiente de viraje es afectado por factores como la fuerza centrífuga y el reparto de pares de balanceo entre los ejes del vehículo, deformaciones de la suspensión, etc.

6.5.5.1. Ensayos a radio constante.

Si se hace circular el vehículo manteniendo el radio constante, a diferentes velocidades, midiendo éstas o la aceleración lateral $a_y = V^2/R$, y controlando el ángulo de dirección, mediante medida del ángulo de giro del volante δ_v , lo cual permite conocer el giro de las ruedas directrices por (6.44), se puede obtener un gráfico como el de la figura 6.34.

De (6.55) se deduce que:

$$\frac{d\delta}{d \frac{v^2}{gR}} = K_v \quad 6.66$$

Es decir, el coeficiente de viraje coincide con la pendiente de la curva. Conocido K_v se puede evaluar el comportamiento virador del vehículo.

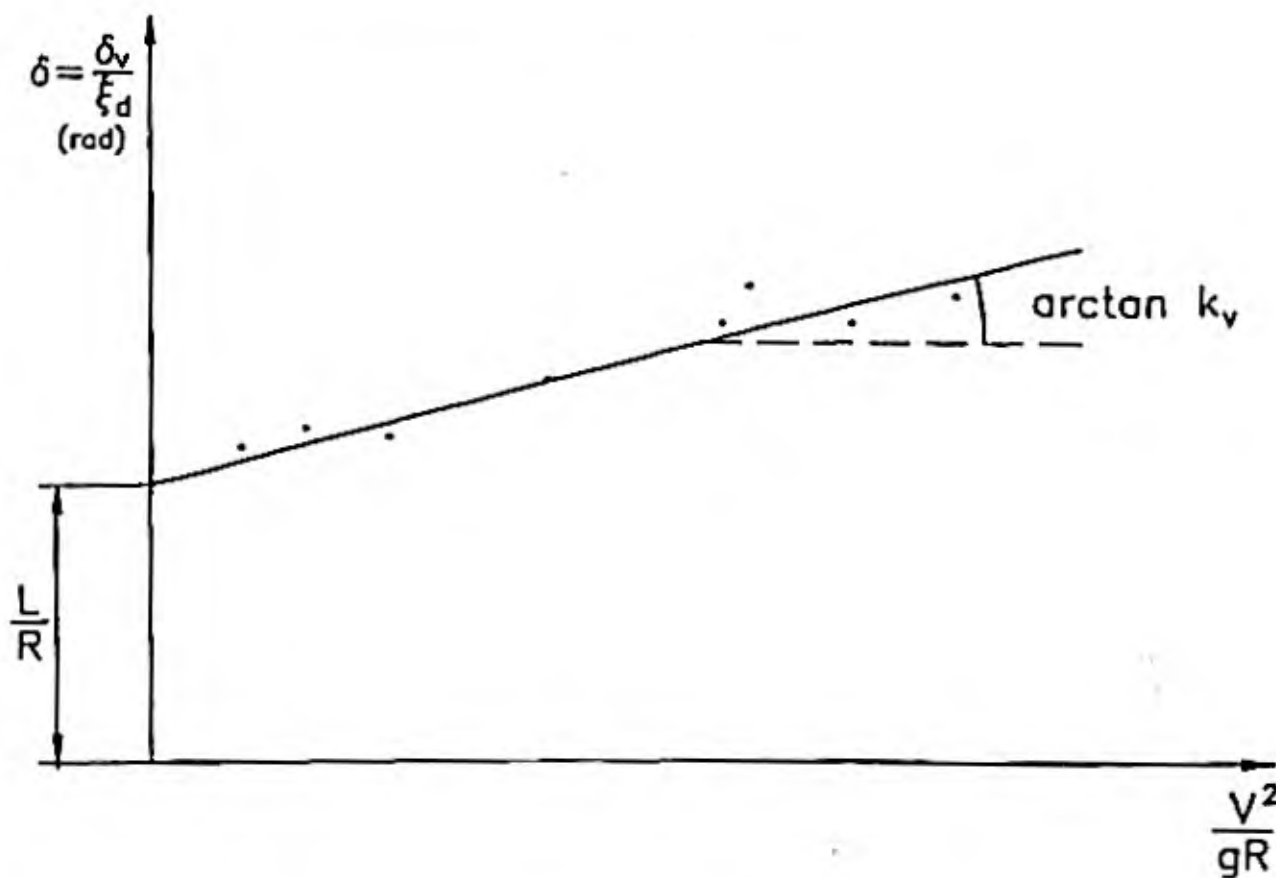


Figura 6.34. Curva experimental en ensayos a radio constante en vehículos con $K_v = cte$.

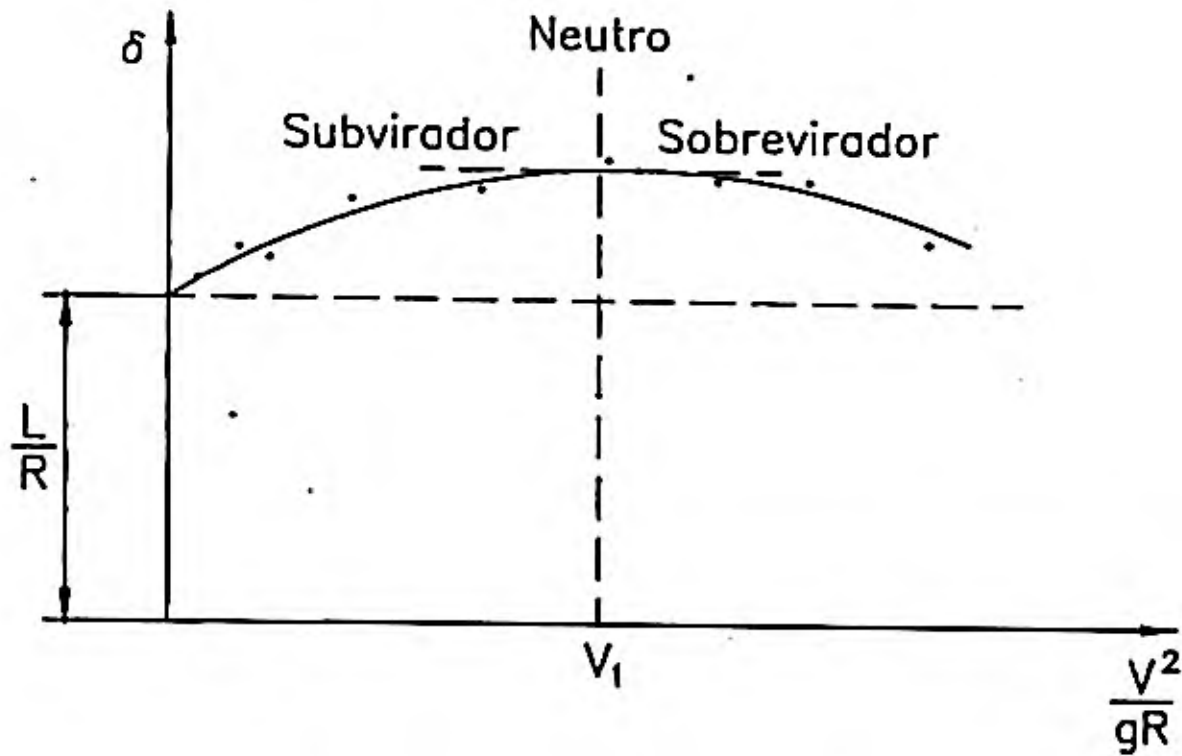


Figura 6.35. Curva experimental en ensayos a radio constante para un vehículo con diferentes comportamientos viradores. ($R = \text{cte}$; $K_v \neq \text{cte}$).

En la figura 6.34 se han representado los resultados correspondientes a un vehículo, que mantiene constante sus características direccionales a distintas velocidades. Si este no es el caso, la curva experimental (δ , V^2/gR) puede presentar otras formas, por ejemplo, la representada en la figura 6.35.

Como puede observarse de la figura 6.35, a la velocidad V_1 , en que la curva presenta un máximo, el vehículo se comporta como neutro. Por debajo de dicha velocidad, la pendiente de la curva es positiva, por lo que el comportamiento del vehículo es subvirador y lo contrario sucede para velocidades superiores a V_1 , comportándose como sobrevirador.

6.5.5.2. Ensayos a velocidad constante.

Si ahora se efectúan giros manteniendo la velocidad constante y haciendo variar el ángulo de dirección, las trayectorias seguidas tendrán diferentes radios y el vehículo estará sometido, también, a diferentes aceleraciones laterales (V^2/gR), pudiendo obtenerse una curva experimental como la representada en la figura 6.36.

De (6.55):

$$\frac{d\delta}{d\frac{V^2}{gR}} = \frac{\frac{d\delta}{d(1/R)}}{\frac{d(V^2/gR)}{d(1/R)}} = \frac{L + K_v \frac{V^2}{g}}{\frac{V^2}{g}} = \frac{gL}{V^2} + K_v \quad 6.67$$

Si el vehículo es neutro, $K_v = 0$

$$\frac{d\delta}{d\frac{V^2}{gR}} = \frac{gL}{V^2} \quad 6.68$$

En la figura 6.36, todo punto de la curva experimental que presente una pendiente mayor a la expresada en (6.68), expresará un comportamiento subvirador del vehículo, y lo contrario cuando la pendiente sea inferior al valor indicado.

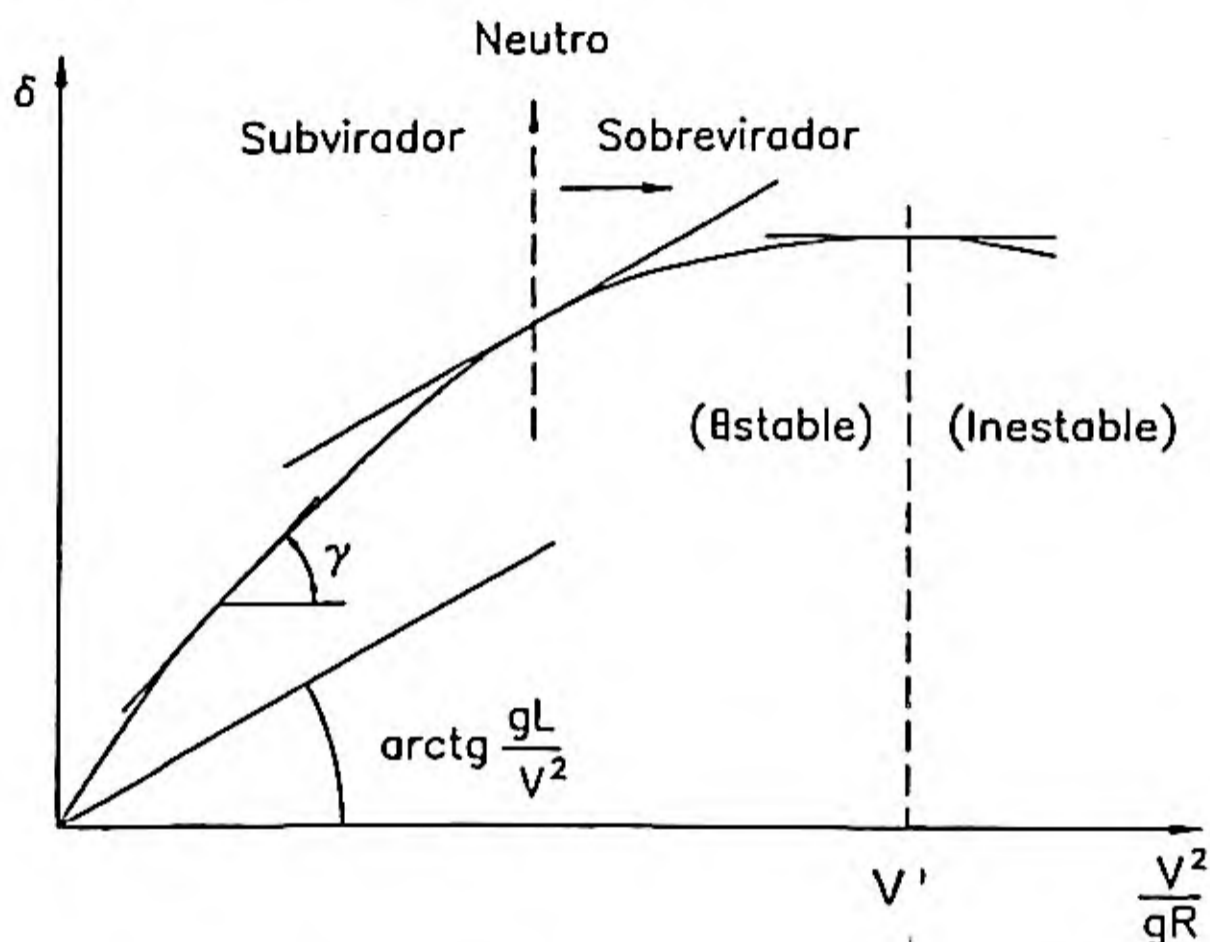


Figura 6.36. Curva experimental en ensayos a velocidad constante. ($V = \text{cte.}$)

Por otra parte, la curva de la figura (6.36) puede presentar un máximo para una velocidad.

$$V' = \sqrt{\frac{gl}{-K_v}} \quad 6.69$$

Este valor será real si $K_v < 0$, es decir, se presenta el máximo en un punto del intervalo sobrevirador, lo cual sucederá en la práctica. En este caso, $V_N = V_{\text{cri}}$, y a partir de este valor el vehículo mostrará un comportamiento inestable.

En este caso K_v puede ser determinado, para cada velocidad, midiendo la pendiente de la curva y utilizando (6.67). Debe notarse, que el valor inverso de la pendiente indicada expresa

la variación de la aceleración lateral, en unidades de g, con el ángulo de dirección; este valor se toma como una medida de la "sensibilidad" direccional del vehículo.

$$\text{Sensibilidad de control} = \text{Cotg } \gamma = \frac{1}{\frac{d\delta}{d(V^2/gR)}} \quad 6.70$$

6.5.5.3. Ensayos con ángulo de dirección constante.

En este caso, manteniendo constante δ_v , al circular a diferentes velocidades se obtendrán, previsiblemente, trayectorias de diferentes curvaturas y distintas aceleraciones laterales. En este caso, si se mide a_y , y la velocidad V , la curvatura puede calcularse mediante:

$$\frac{1}{R} = \frac{a_y}{V^2} \quad 6.71$$

Representando, ahora, los resultados en un gráfico ($1/R, V^2/gR$) se obtiene una curva experimental como la de la figura 6.37.

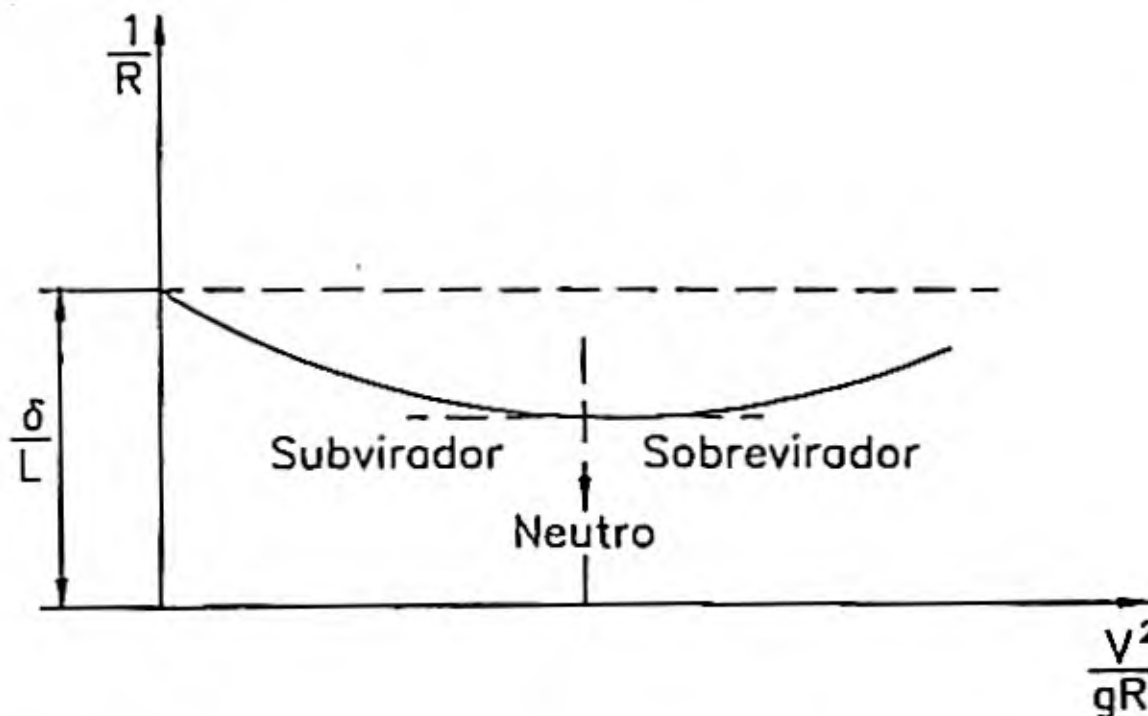


Figura 6.37. Curva experimental de ensayos con ángulo de dirección constante ($\delta = \text{cte}$).

Considerando de (6.55) que:

$$\frac{1}{R} = \frac{\delta}{L} - \frac{K_v}{L} \frac{V^2}{gR} \quad 6.72$$

$$\frac{d(1/R)}{d(V^2/gR)} = - \frac{K_v}{L} \quad 6.73$$

Si el vehículo muestra un comportamiento neutro, la anterior expresión se anula ($K_v = 0$) lo cual significa que la pendiente de la curva ha de ser nula también (punto mínimo en la figura). Cuando la pendiente sea positiva, el vehículo se comportará como sobrevirador ($K_v < 0$) y lo contrario señalará una respuesta subviradora.

De los tres métodos de ensayo descritos pueden hacerse las siguientes consideraciones:

- El método más simple es el de radio constante. Para ejecutarlo bastaría con medir el ángulo de giro de volante y la velocidad de desplazamiento del vehículo.
- El método de la velocidad constante es el que representa mejor la circulación normal, ya que los conductores tienden a mantener la velocidad inalterable en giros. Este método, como el anterior, requiere un conocimiento preciso de la relación de transmisión global del mecanismo de dirección y se verá afectado por la variación dinámica de ξ_d .
- El método del ángulo constante de la dirección es fácil de ejecutar y tiene la ventaja de no requerir la valoración de ξ_d , ni quedar afectado por los errores que introduce obtener este ángulo a través del ángulo de volante.
- Los dos últimos métodos requieren medir la aceleración lateral o la velocidad de guiñada $\left(a_y = \frac{V^2}{R} = \Omega_z \cdot V \right)$ lo cual hace preciso una instrumentación más compleja.

6.6. MODELO LINEALIZADO PARA EL ESTUDIO DE LA DINAMICA LATERAL

6.6.1. Introducción.

En los apartados anteriores se ha analizado el comportamiento direccional de vehículos automóviles, considerando su movimiento en régimen estacionario. Se definió una relación entre el ángulo de giro de las ruedas directrices, la velocidad, el radio de la trayectoria y algunos parámetros del vehículo y neumáticos.

Aquí se estudiará un modelo que permite analizar el comportamiento del vehículo en régimen transitorio, es decir, en el período transcurrido desde que una acción externa modifica

las condiciones direccionales (se considerará un giro del volante), hasta que alcanza una nueva trayectoria estable.

Se tendrán en cuenta, así mismo, algunos factores que fueron despreciados en el estudio anterior, como es el caso de ciertas acciones aerodinámicas y se mantendrá la hipótesis de linealidad de los neumáticos.

Se analizarán, finalmente, las condiciones que producen inestabilidad y los factores que influyen en la misma.

6.6.2. Modelo de vehículo linealizado

Este modelo se basa, principalmente, en los trabajos de Riekert y S'chunk. Las simplificaciones fundamentales formuladas son:

- Considerar que no se produce transferencia de carga entre las ruedas de un mismo eje.
- Considerar las dos ruedas de cada eje como una sola, situada en el plano longitudinal medio del vehículo.
- Admitir que los ángulos de deriva de los neumáticos adquieren valores suficientemente pequeños, como para que las relaciones entre éstos y las fuerzas laterales que actúan sobre las ruedas, puedan considerarse lineales. Estas relaciones son:

$$F_{Td} = K_{\alpha d} \cdot \alpha_d \quad 6.74$$

$$F_{Ti} = K_{\alpha i} \cdot \alpha_i$$

siendo $K_{\alpha d}$ $K_{\alpha i}$ las rigideces de deriva de los neumáticos delanteros y traseros respectivamente.

En la figura 6.38 se representan los principales valores que serán considerados en el modelo:

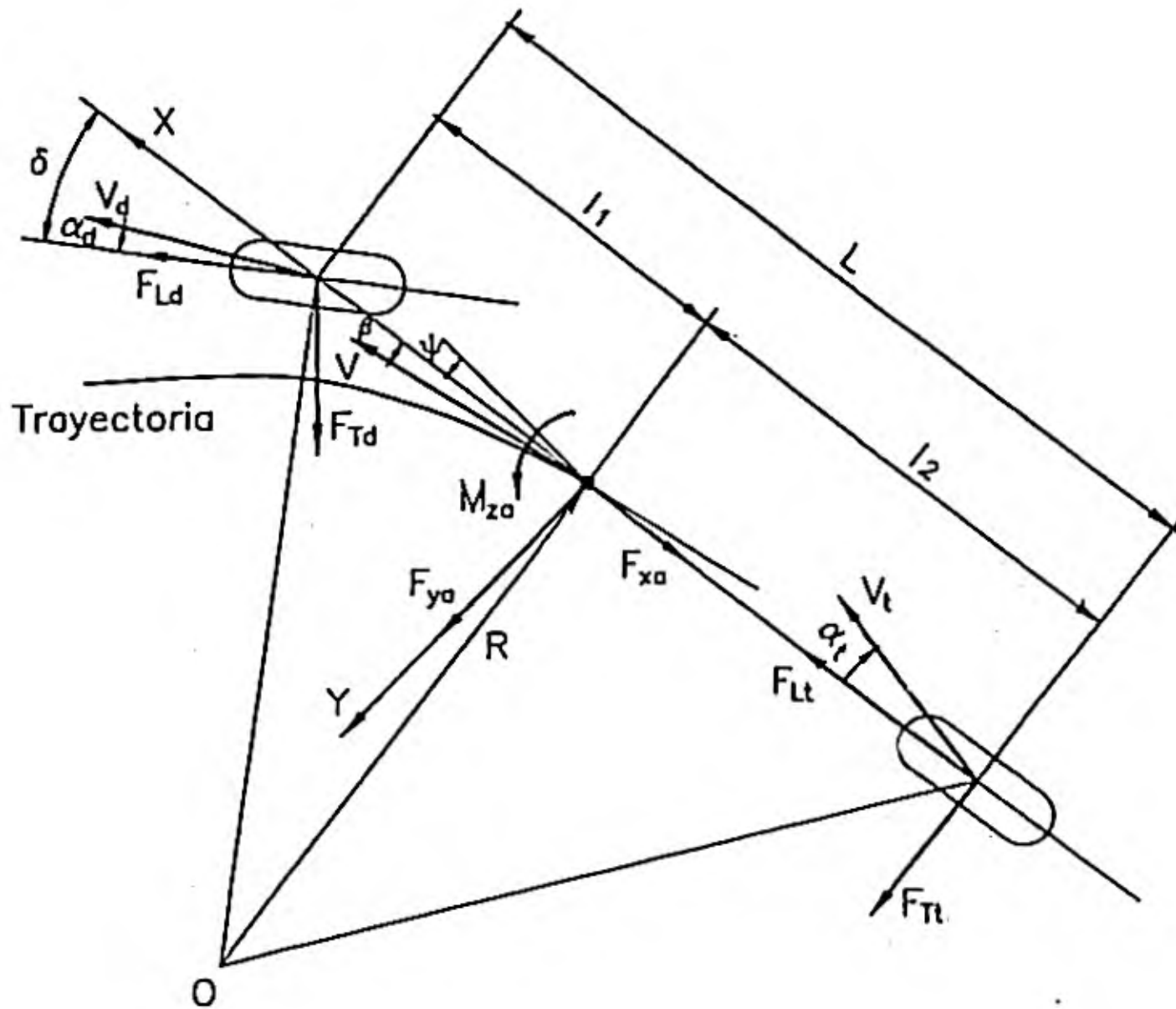


Figura 6.38. Modelo para el estudio de la dinámica lateral.

- δ Angulo de guiado de las ruedas directrices.
- F_L Fuerza longitudinal de adherencia.
- F_T Fuerza transversal de adherencia.
- β Angulo de deriva del vehículo.
- ψ Angulo de guiñada.
- R Radio de la trayectoria del c.d.g.
- V Velocidad instantánea del c.d.g.
- V_d Velocidad instantánea de traslación de las ruedas delanteras.
- V_t Velocidad instantánea de traslación de las ruedas traseras.

[Dinámica lateral del vehículo.]

- F_{ya} Fuerza aerodinámica lateral aplicada en el c.d.g.
- F_{xa} Fuerza aerodinámica longitudinal aplicada en el c.d.g.
- M_{za} Momento aerodinámico de guiñada, respecto al eje Z.

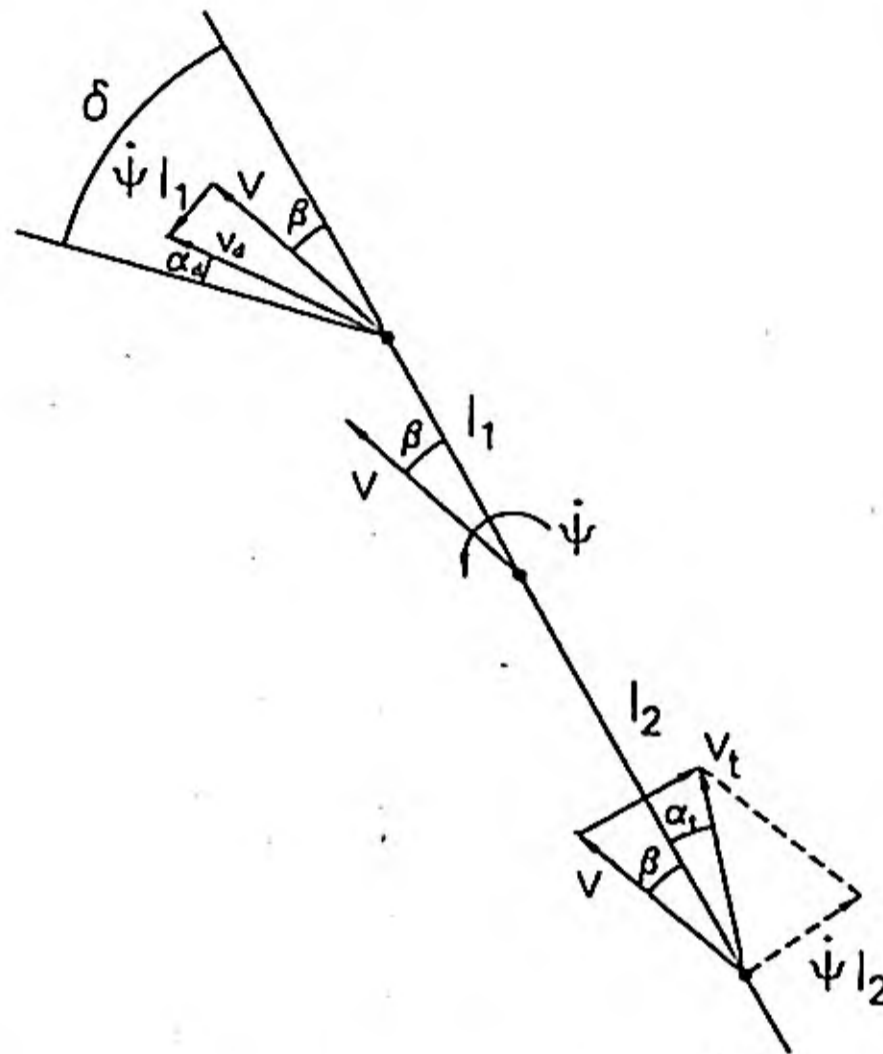


Figura. 6.39. Relaciones entre los ángulos de deriva.

El ángulo de deriva de cada rueda puede expresarse en función del ángulo de deriva del vehículo (β), de acuerdo con la figura 6.39:

$$\alpha_d = \delta - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{V}$$

6.75

$$\alpha_t = -\beta + \frac{l_2 \cdot \dot{\psi}}{V}$$

Por otra parte, el ángulo δ de giro de las ruedas directrices, puede expresarse en función del ángulo δ_v de giro del volante. Considerando una relación de transmisión de la dirección ξ_d , el ángulo teórico de giro de las ruedas es δ_v / ξ_d . Sin embargo, la existencia de un par sobre el mecanismo de la dirección, como consecuencia de los avances de neumático y pivote, hacen que el ángulo real δ sea diferente a este valor. Considerando que la rigidez del

mecanismo de dirección es K_d :

$$K_d \cdot \left[\frac{\delta_v}{\xi_d} - \delta \right] = (d_n + d_p) \cdot F_{Td} \quad 6.76$$

d_n = avance de neumático

d_p = avance de pivote de la rueda.

Haciendo, en 6.76, $\delta_v / \xi_d = \delta^*$:

$$\delta = \delta^* - \frac{d_n + d_p}{K_d} F_{Td}$$

Considerando (6.74) y (6.75):

$$F_{Td} = K_{ad} \left[\delta^* - \frac{d_n + d_p}{K_d} F_{Td} - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{v} \right]$$

$$F_{Td} = -K_{ad} \frac{d_n + d_p}{K_d} F_{Td} + K_{ad} \left[\delta^* - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{v} \right]$$

$$F_{Td} = \frac{K_{ad}}{1 + \frac{d_n + d_p}{K_d} K_{ad}} \left[\delta^* - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{v} \right]$$

Haciendo:

$$K_{ad}^* = \frac{K_{ad}}{1 + \frac{d_n + d_p}{K_d} K_{ad}} \quad 6.77$$

$$F_{Td} = K_{ad}^* \left[\delta^* - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{v} \right] \quad 6.78$$

De 6.74 y 6.75, para la rueda trasera:

$$F_{T1} = K_{\alpha 1} \left[-\beta + \frac{l_2 \cdot \dot{\psi}}{V} \right] \quad 6.79$$

En cuanto a las acciones aerodinámicas, refiriendo estas acciones al c.d.g., y suponiendo el aire en calma, el ángulo de incidencia $i = \beta$.

$$\begin{aligned} F_{ya} &= -C_y \cdot \beta \cdot v^2 \\ M_{za} &= -C_{m1} \cdot \beta \cdot v^2 \end{aligned} \quad 6.80$$

Aplicando la ley de Newton a las acciones y movimientos en las direcciones X e Y, y la ecuación de Euler a los momentos y giros respecto al eje Z, y despreciando términos de menor influencia, se tienen:

$$m \cdot \beta \cdot (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \cdot V = F_{L1} + F_{Ld} - F_{xa} - F_{Td} \cdot \delta \quad 6.81$$

$$m \cdot (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \cdot V = F_{Td} + F_{T1} + F_{ya} + F_{Ld} \cdot \delta \quad 6.82$$

$$I_z \cdot \ddot{\psi} = (F_{Td} + F_{Ld} \cdot \delta) \cdot l_1 - F_{T1} \cdot l_2 + M_{za} \quad 6.83$$

Para la formulación de estas ecuaciones se ha tenido en cuenta lo siguiente:

- F_{Td} F_{T1} representan los esfuerzos laterales sobre las dos ruedas de cada uno de los ejes.
- Los signos reales de F_{ya} y M_{za} quedan considerados en (6.80).
- La expresión de las componentes de la aceleración, suponiendo que el vehículo se desplaza con velocidad $V = \text{cte}$, tienen en consideración la variación del ángulo de guiñada ψ y la variación del ángulo de deriva β , como se indica a continuación (ver figura 6.40).

$$\bar{a} = \bar{w} \cdot \bar{V}$$

$$a = w \cdot V$$

$$w = \dot{\psi} + \dot{\beta}$$

$$a_x = (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \cdot \beta \cdot V \quad 6.84$$

$$a_y = (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \cdot V \quad 6.85$$

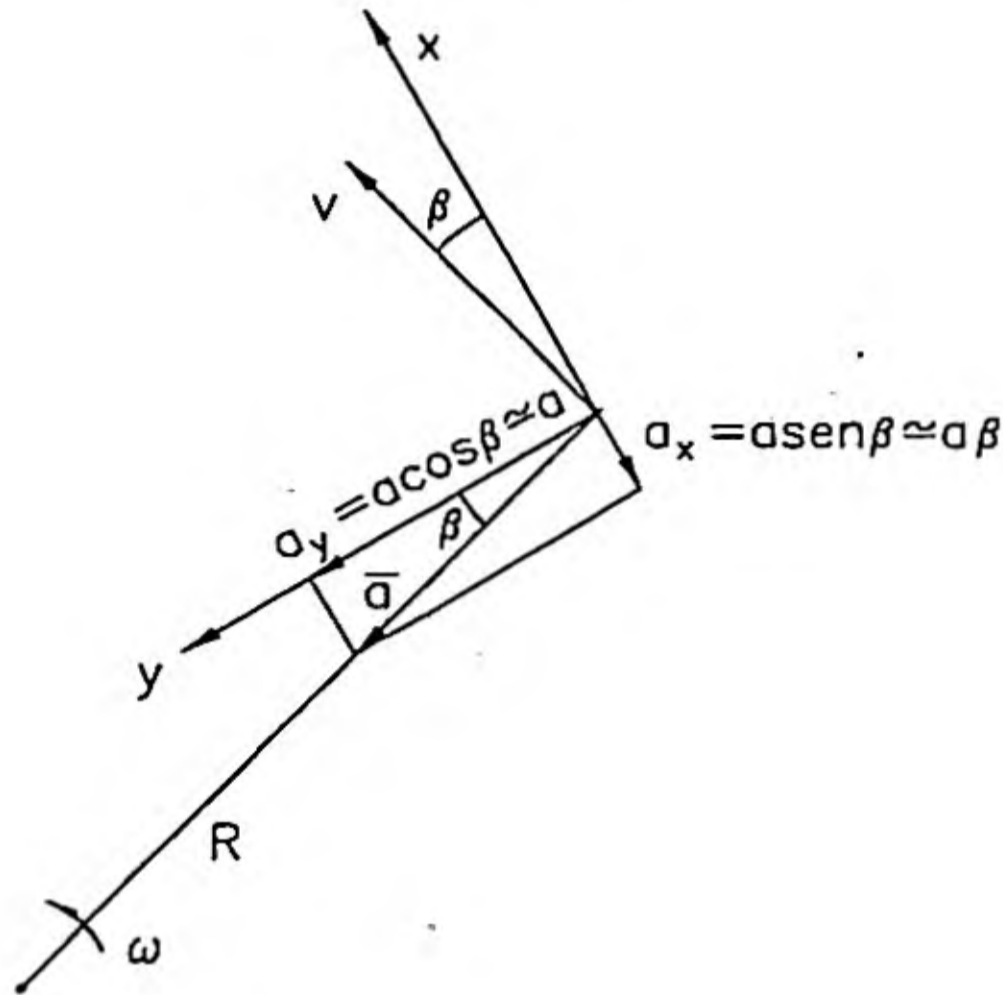


Figura 6.40. Componentes de la aceleración del centro de gravedad.

La ecuación de Euler en la dirección OZ se expresa como:

$$M_z = I_3 \cdot \dot{w}_z - (I_1 - I_2) \cdot w_y \cdot w_x \quad 6.86$$

Considerando $w_x = 0$ (cabeceo), $w_y = 0$ (balanceo) y $I_2 = I_3$ eje principal de inercia.

$$M_z = I_3 \cdot \dot{w}_z = I_3 \cdot \dot{w} \quad 6.87$$

Despreciando $\ddot{\beta}$ frente a $\ddot{\psi}$:

$$\dot{w}_z = \ddot{\psi}$$

Para pequeños valores de los ángulos, los movimientos longitudinales y transversales se consideran desacoplados, por lo que se prescindirá en lo que sigue de la ecuación 6.81.

Sustituyendo (6.78), (6.79) y (6.80) en (6.82) y (6.83):

$$m(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \cdot V = K_{ad} \left[\delta' - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{V} \right] + \quad 6.88$$

$$+ K_{at} \left[-\beta + \frac{l_2 \cdot \dot{\psi}}{V} \right] - C_y \cdot \beta \cdot V^2 + F_{Ld} \cdot \delta$$

$$I_z \cdot \ddot{\psi} = K_{ad} \left[\delta' - \beta - \frac{l_1 \cdot \dot{\psi}}{V} \right] l_1 + F_{Ld} \cdot \delta \cdot l_1 - \quad 6.89$$

$$- K_{at} \left[-\beta + \frac{l_2 \cdot \dot{\psi}}{V} \right] l_2 - C_{mz} \cdot \beta \cdot V^2$$

considerando β y δ suficientemente pequeños:

$$C_y \cdot \beta \cdot V^2 \approx 0; \quad F_{Ld} \cdot \delta \approx 0; \quad F_{Ld} \cdot \delta \cdot l_1 \approx 0 \quad 6.90$$

$$\left[m \cdot V + \frac{K_{ad} l_1 - K_{at} l_2}{V} \right] \cdot \dot{\psi} + mV\dot{\beta} + (K_{ad} + K_{at})\beta = K_{ad} \delta' \quad 6.91$$

$$I_z \cdot \ddot{\psi} + \frac{K_{ad} l_1^2 + K_{at} l_2^2}{V} \cdot \dot{\psi} + (K_{ad} l_1 - K_{at} l_2 + C_{mz} V^2) \beta = K_{ad} \cdot \delta' \cdot l_1 \quad 6.92$$

Ecuaciones diferenciales acopladas en β y ψ . Haciendo en (6.91) y (6.92):

$$A = m \cdot V + \frac{K_{ad} l_1 - K_{at} l_2}{V} \quad B = \frac{K_{ad} l_1^2 + K_{at} l_2^2}{V}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{mV}{A} \dot{\beta} - \frac{K_{ad} + K_{at}}{A} \beta + \frac{K_{ad} \cdot \delta'}{A}$$

derivando:

$$\ddot{\psi} = -\frac{mV}{A} \ddot{\beta} - \frac{K_{ad} + K_{at}}{A} \dot{\beta} + \frac{K_{ad}}{A} \cdot \dot{\delta}' \quad 6.93$$

sustituyendo en (6.92):

$$I_z \left[-\frac{mV}{A} \ddot{\beta} - \frac{K_{ad} + K_{at}}{A} \dot{\beta} + \frac{k_{ad}}{A} \dot{\delta} \right] - \frac{B}{A} mV \dot{\beta} -$$

$$-\frac{B}{A} (K_{ad} + K_{at}) \beta + \frac{B}{A} K_{ad} \delta + (K_{ad} l_1 - K_{at} l_2 + C_{mz} V^2) \beta =$$

$$= K_{ad} \delta l_1$$

6.94

multiplicando por A, dividiendo por $I_z mV$ y cambiando de signo:

$$\ddot{\beta} + \left[\frac{K_{ad} + K_{at}}{mV} + \frac{B}{I_z} \right] \dot{\beta} + \left[\frac{B}{I_z mV} (K_{ad} + K_{at}) - \frac{A}{I_z mV} (K_{ad} l_1 - K_{at} l_2 + C_{mz} V^2) \right] \beta =$$

$$= \frac{K_{ad}}{mV} \dot{\delta} + \left[\frac{B}{I_z mV} K_{ad} - \frac{A}{I_z mV} K_{ad} l_1 \right] \delta$$

6.95

Haciendo:

$$2K_1 = \frac{K_{ad} + k_{at}}{mV} + \frac{B}{I_z} = \frac{K_{ad} + K_{at}}{mV} + \frac{K_{ad} l_1^2 + K_{at} l_2^2}{I_z V} =$$

$$2K_1 = \frac{I_z (K_{ad} + K_{at}) + m (K_{ad} l_1^2 + K_{at} l_2^2)}{I_z mV}$$

6.96

$$K_2 = \frac{B}{I_z mV} (K_{ad} + K_{at}) - \frac{A}{I_z mV} (K_{ad} l_1 - K_{at} l_2 + C_{mz} V^2)$$

6.97

$$K_2 = \frac{L^2 K_{ad} \cdot K_{at} + (K_{at} l_2 - K_{ad} l_1) mV^2 - mC_{mz} V^4}{I_z mV^2}$$

$$K_3 = \frac{B}{I_z mV} K_{ad} - \frac{A}{I_z mV} K_{ad} l_1$$

6.98

sustituyendo A y B:

$$K_3 = - \frac{K_{ad} (l_1 m V^2 - K_{at} l_2 L)}{I_z m V^2} \quad 6.99$$

sustituyendo (6.96), (6.97) y (6.99) en (6.95):

$$\ddot{\beta} + 2 K_1 \dot{\beta} + K_2 \beta = \frac{K_{ad}}{mV} \dot{\delta} + K_3 \delta \quad 6.100$$

Para formular una ecuación diferencial que relacione Ψ y sus derivadas, seguiremos un proceso análogo.

Sea:

$$K_{ad} l_1 - K_{at} l_2 + C_{mz} V^2 = C$$

Sustituyendo en (6.92):

$$\beta = -\frac{I_z}{C} \ddot{\psi} - \frac{B}{C} \dot{\psi} + \frac{K_{ad} l_1}{C} \delta \quad 6.101$$

$$\dot{\beta} = -\frac{I_z}{C} \ddot{\psi} - \frac{B}{C} \dot{\psi} + \frac{K_{ad} l_1}{C} \dot{\delta}$$

sustituyendo en (6.91):

$$A \cdot \dot{\psi} - \frac{mV I_z}{C} \ddot{\psi} - \frac{mVB}{C} \dot{\psi} + \frac{mV K_{at} l_1}{C} \dot{\delta} + \quad 6.102$$

$$+ (K_{ad} + K_{at}) \left[-\frac{I_z}{C} \ddot{\psi} - \frac{B}{C} \dot{\psi} + \frac{l_1 K_{ad}}{C} \delta \right] = K_{ad} \delta$$

multiplicando por $\frac{C}{mVl_z}$ y cambiando de signo:

$$\ddot{\psi} + \left[\frac{B}{I_z} + \frac{K_{ad} + K_{at}}{mV} \right] \cdot \dot{\psi} + \left[\frac{B}{I_z mV} (K_{ad} + K_{at}) - \frac{AC}{I_z mV} \right] \cdot \psi =$$

$$= \frac{l_1 K_{ad}}{I_z} \cdot \dot{\delta} + \left[(K_{ad} + K_{at}) \frac{K_{ad} l_1}{I_z mV} - \frac{CK_{ad}}{I_z mV} \right] \cdot \delta \tag{6.103}$$

$$\frac{B}{I_z} + \frac{K_{ad} + K_{at}}{mV} = \frac{K_{ad}^2 l_1^2 + K_{at}^2 l_2^2}{V I_z} + \frac{K_{at} + K_{ad}}{mV} =$$

$$= \frac{m(K_{ad}^2 l_1^2 + K_{at}^2 l_2^2) + I_z (K_{ad} + K_{at})}{I_z mV} = 2K_1 \tag{6.104}$$

$$\frac{B}{I_z mV} (K_{ad} + K_{at}) - \frac{AC}{I_z mV} = K_2 \tag{6.105}$$

$$(K_{ad} + K_{at}) \frac{K_{ad} l_1}{I_z mV} - \frac{K_{ad}^2 l_1 - K_{at} \cdot K_{ad} l_2 + K_{ad} C_{mz} V^2}{I_z mV} =$$

$$\frac{I}{I_z mV} (K_{ad} \cdot K_{at} \cdot L + K_{ad} \cdot C_m \cdot V^2) \tag{6.106}$$

sustituyendo (6.104), (6.105) y (6.106) en (6.103):

$$\ddot{\psi} + 2K_1 \cdot \dot{\psi} + K_2 \cdot \psi = \frac{l_1 K_{ad}}{I_z} \cdot \dot{\delta} + K_4 \delta \tag{6.107}$$

Las expresiones (6.101) y (6.107) constituyen las ecuaciones diferenciales linealizadas

y desacopladas que permiten definir los valores de β y Ψ en función del ángulo real de giro de las ruedas y su variación (γ) con el tiempo.

$$\ddot{\beta} + 2K_1\dot{\beta} + K_2\beta = \frac{K_{ad}^*}{mV} \dot{\delta}^* + K_3\delta^* \quad 6.108$$

$$\frac{d}{dt}(\ddot{\Psi} + 2K_1\dot{\Psi} + K_2\Psi) = \frac{I_1 K_{ad}^*}{I_z} \dot{\delta}^* + K_4\delta^*$$

$$2K_1 = \frac{I_z(K_{ad}^* + K_{at}) + m(K_{ad}^* l_1^2 + K_{at} l_2^2)}{I_z mV} \quad 6.109$$

$$K_2 = \frac{L^2 K_{ad}^* K_{at} + (K_{at} l_2 - K_{ad}^* l_1) mV^2 - mC_{mz} V^4}{I_z mV^2} \quad 6.110$$

$$K_3 = -\frac{K_{ad}^* (l_1 mV^2 - K_{at} l_2 L)}{I_z mV^2} \quad 6.111$$

$$K_4 = \frac{K_{ad}^* K_{at} L + K_{ad}^* C_{mz} V^2}{I_z mV} \quad 6.112$$

Este modelo solo proporciona resultados cuantitativos aceptables para pequeños valores de la aceleración lateral ($a_y < 0,4 \text{ g}$). Si se desprecia la elasticidad del sistema de dirección, se hace en las anteriores ecuaciones $\delta^* = \delta$ y $K_{ad}^* = K_{ad}$.

6.6.3. Periodo transitorio de la respuesta a una variación brusca del ángulo de giro.

Resolviendo las ecuaciones diferenciales anteriores (6.108), dando valores a $\delta(t)$ y $\dot{\delta}(t)$, puede determinarse la variación de β y Ψ con el tiempo, así como sus derivadas, y la aceleración lateral a_y . Considerando una variación de δ en forma de escalón, variando desde el valor 0 a δ_1 de forma rápida, la respuesta del vehículo es como se representa en las figuras 6.41 y 6.42, para un tipo de vehículo determinado.

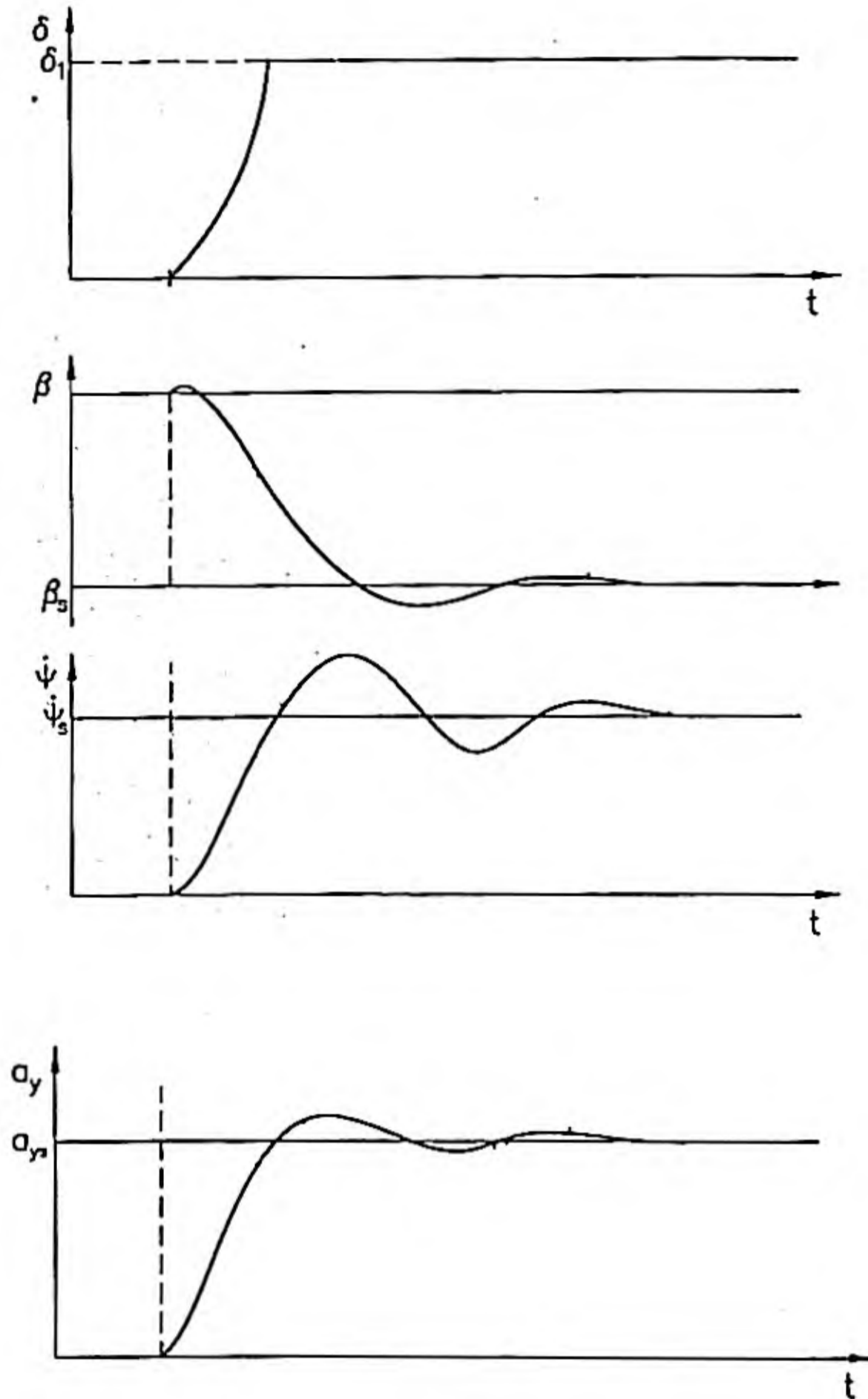


Figura 6.41. Respuesta transitoria a un giro de volante en forma de escalón.

Durante el tiempo que transcurre desde que se actúa sobre la dirección, hasta que se alcanza el estado estacionario, el vehículo se encuentra en estado transitorio respecto al giro. El comportamiento en este periodo define las características de respuesta transitoria, y el comportamiento direccional y la percepción que de él tiene el conductor, depende, en gran medida, de estas características. Lo deseable es que esta respuesta sea rápida y con oscilaciones de pequeña amplitud.

6.6.4. Aplicación al caso de giros estacionarios

Si las ecuaciones (6.108) se aplican a giros estacionarios:

$$\begin{aligned} \beta = \dot{\beta} = \ddot{\psi} = \dot{\psi} = \dot{\delta} = 0 \\ w = \dot{\psi} = \frac{V}{R} \quad a_y = V \cdot \dot{\psi} = \frac{V^2}{R} \end{aligned} \quad 6.113$$

Considerando los valores de δ y β para velocidad prácticamente nula (ver figura 6.42).

$$\delta_0 \approx \frac{L}{R} \quad \beta_0 \approx \frac{l_2}{R}$$

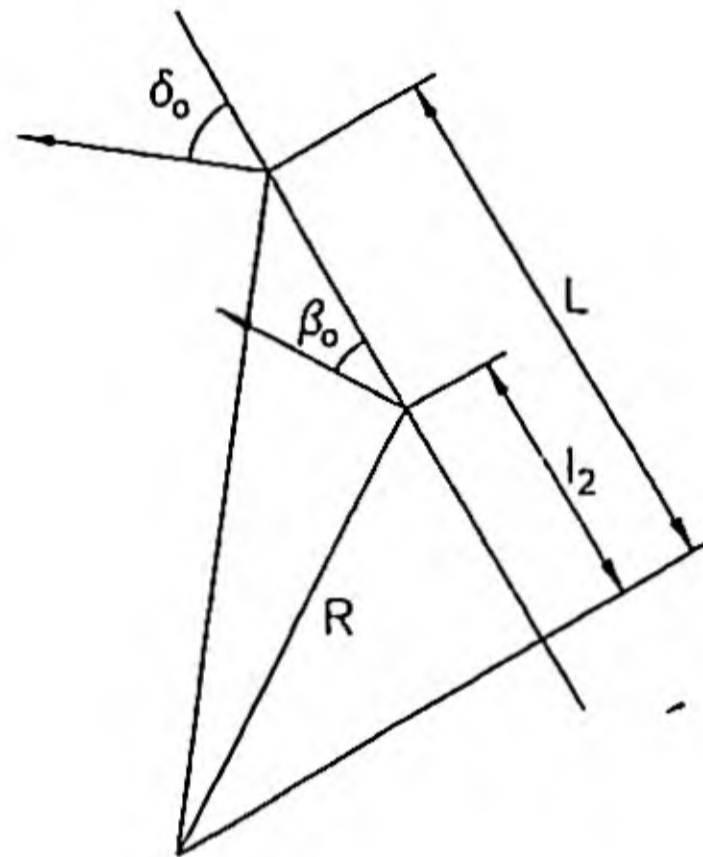


Figura 6.42. Geometría del giro estacionario a velocidad nula.

de (6.108),

$$K_2 \beta = K_3 \delta \quad 6.114$$

$$K_2 \cdot \dot{\psi} = K_4 \dot{\delta} \quad 6.115$$

Despreciando en K_4 el término:

$$K_{ad}^* \cdot C_{mz} \cdot V^2$$

frente a:

$$K_{ad}^* \cdot K_{at} \cdot L$$

y sustituyendo valores en 6.115

$$\frac{L^2 K_{ad}^* K_{at} + (K_{at} l_2 - K_{ad}^* l_1) m V^2 - m \cdot C_{mz} \cdot V^4}{I_2 m V^2} \frac{V}{R} = \frac{K_{ad}^*}{I_2 m V} \delta^*$$

$$\frac{\delta^*}{L/R} = 1 + \frac{K_{at} l_2 - K_{ad}^* l_1}{K_{ad}^* \cdot K_{at} \cdot L^2} m V^2 - \frac{C_{mz}}{K_{ad}^* \cdot K_{at} \cdot L^2} m V^4 = \left[\frac{\delta^*}{\delta_0} \right]_s \quad 6.116$$

de (6.114) y (6.115):

$$\delta^* = \frac{K_2}{K_4} \cdot \dot{\psi}$$

$$K_2 \cdot \beta = K_3 \frac{K_2}{K_4} \cdot \dot{\psi}$$

$$\beta = -\frac{l_1 m V^2}{K_{at} \cdot L \cdot R} + \frac{L_2}{R}$$

$$\frac{\beta}{l_2/R} = \left[\frac{\beta}{\beta_0} \right]_s = 1 - \frac{l_1}{k_{at} \cdot l_2 \cdot L} m V^2 \quad 6.117$$

Si se desprecian las acciones aerodinámicas, de (6.116)

$$\begin{aligned} \delta^* &= \frac{L}{R} + \left[\frac{l_2}{K_{ad}^*} - \frac{l_1}{K_{at}} \right] \frac{mV^2}{L \cdot R} = \\ &= \frac{L}{R} + \left[\frac{m \cdot g \cdot l_2 / L}{K_{ad}^*} - \frac{m \cdot g \cdot l_1 / L}{K_{at}} \right] \frac{V^2}{g \cdot R} = \\ &= \frac{L}{R} + \left[\frac{P_d}{K_{ad}^*} - \frac{P_l}{K_{at}} \right] \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{L}{R} + K_v^* \frac{V^2}{g \cdot R} \end{aligned} \quad 6.118$$

Expresión análoga a la 6.55.

El término $\frac{C_{mz}}{K_{ad}^* \cdot K_{at} \cdot L^2} mV^4 > 0$ disminuye siempre el efecto subvirador o aumenta el sobrevirador, en su caso, aunque su influencia suele ser pequeña en turismos de tipo medio o pequeños y valores operativos normales de la velocidad.

Las variaciones de δ^*/δ_0 y β/β_0 en función de V^2/R se representan en las figuras 6.43 y 6.44. La figura 6.43 es equivalente a la 6.28.

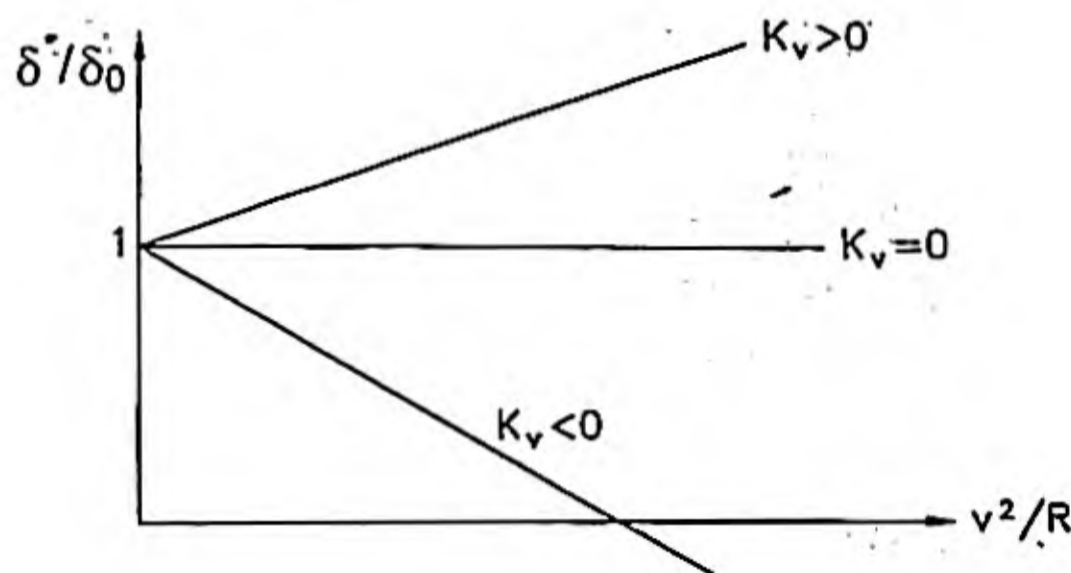


Figura 6.43. Variación de δ^*/δ_0 en función de la aceleración lateral.

El ángulo de deriva del vehículo disminuye al aumentar la velocidad V y la aceleración lateral V^2/R . A baja velocidad, la parte delantera del vehículo se mantiene desviada, hacia fuera, respecto de la trayectoria que sigue su centro de gravedad. Cuando aumenta v , el efecto es contrario. Este comportamiento es independiente de que el vehículo sea sobrevirante, neutro o subvirante.

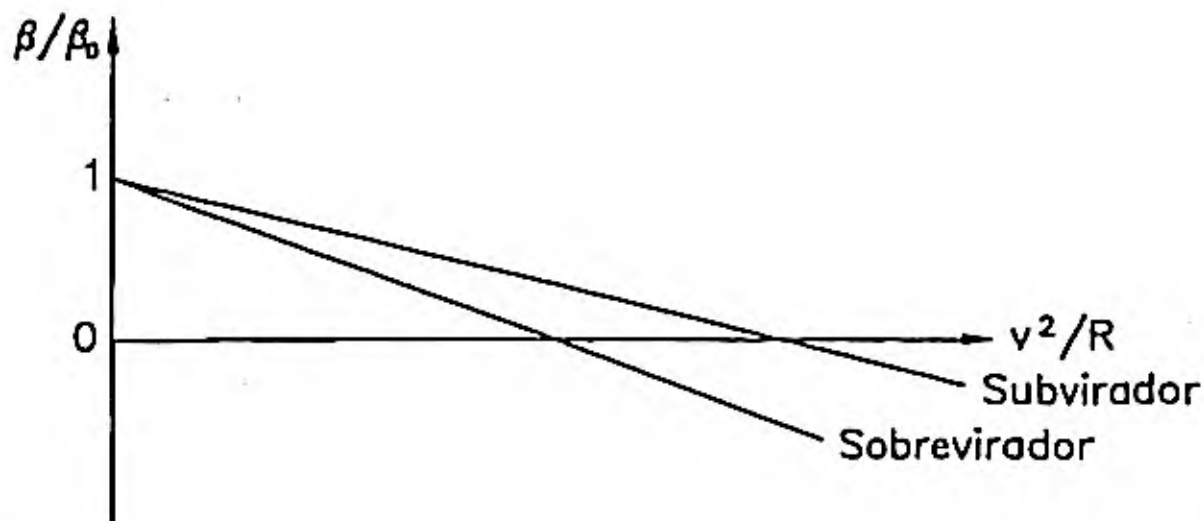


Figura 6.44. Variación del ángulo de deriva con la aceleración lateral.

6.6.5. Condiciones de estabilidad.

Considerando las ecuaciones (6.108), la estabilidad del vehículo, en su trayectoria, puede analizarse a partir de las soluciones de la ecuación homogénea, cuyo polinomio característico es:

$$\lambda^2 + 2K_1 \cdot \lambda + K_2 = 0$$

Siendo las soluciones:

$$\lambda_{1,2} = -K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - K_2} \quad 6.119$$

y la solución general de la ecuación homogénea en β :

$$\beta = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

según (6.96), $K_1 > 0$ en todos los casos:

Si $K_2 > 0$; $\lambda_{1,2} < 0$; β converge hacia su valor estacionario.

Si $K_2 < 0$; λ_1 ó $\lambda_2 > 0$; el valor de β se incrementa continuamente en forma exponencial (INESTABILIDAD).

de (6.97) y (6.116):

$$K_2 = \frac{L_2 \cdot K_{ad} \cdot K_{at}}{I_z m V^2} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \delta_0 \end{bmatrix} \quad 6.120$$

con lo que el signo de K_2 cambia cuando lo hace el de $\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \delta_0 \end{bmatrix}$. Por tanto, existirá inestabilidad cuando se requiera un ángulo de guiado δ^* negativo.

La velocidad crítica tendrá como valor:

$$V_{cri}^2 = \frac{K_{at} l_2 - K_{ad} l_1}{2 C_{mz}} \pm \sqrt{\left[\frac{K_{at} l_2 - K_{ad} l_1}{2 C_{mz}} \right]^2 + \frac{L^2 \cdot K_{ad} \cdot K_{at}}{m \cdot C_{mz}}} \quad 6.121$$

si se desprecian los efectos aerodinámicos, haciendo $C_m = 0$ en (6.116):

$$V_{cri} = \sqrt{-\frac{L^2 \cdot K_{ad} \cdot K_{at}}{(K_{at} l_2 - K_{ad} l_1) \cdot m}} = \quad 6.122$$

$$= \sqrt{-\frac{L}{\frac{l_2 \cdot m/L}{K_{ad}} - \frac{l_1 \cdot m/L}{K_{at}}}} = \sqrt{\frac{L \cdot g}{\frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_l}{K_{at}}}}$$

$$V_{cri} = \sqrt{-\frac{L \cdot g}{K_v}} \quad 6.123$$

Valor de la velocidad crítica en un vehículo sobrevirante, calculado en el punto 6.5.3.

Ejemplo numérico:

Un vehículo sobrevirante de las siguientes características:

$l_1 = 1,44 \text{ m.}$	$m = 1900 \text{ kg.}$	$K_{ad} = 90.000 \text{ N/rad.}$
$l_2 = 1,36 \text{ m.}$	$C_{mz} = 1,16 \text{ N.s}^2/\text{m}$	$K_{at} = 80.000 \text{ N/rad.}$
$L = 2,8 \text{ m.}$		(ambos neumáticos de un eje.)

Según la expresión (6.121):

$$V_{cr} = 36,47 \text{ m/s} = 131 \text{ km/h.}$$

Valor obtenido considerando el momento aerodinámico de guiñada.

Según la expresión (6.122):

$$V_{cr} = 38 \text{ m/s} = 136,87 \text{ km/h.}$$

Como se observa, el error cometido al despreciar el momento aerodinámico de guiñada es pequeño, en este caso, y lo es para muchos vehículos de turismo.

6.6.6. Factores que influyen en la estabilidad direccional.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.116), (6.121) y (6.123)

$$\frac{\delta^{\circ}}{L/R} = 1 + \frac{K_{at} l_2 - K_{ad} l_1}{K_{ad} \cdot K_{at} \cdot L^2} m V^2 - \frac{C_{mz}}{K_{ad} \cdot K_{at} \cdot L^2} m V^4 \quad 6.124$$

y a igualdad de otros parámetros, la influencia de los principales factores se analiza a continuación.

a) Distribución de cargas.

Una mayor carga sobre el eje delantero ($\Delta l_1 < 0$) disminuye el riesgo de inestabilidad.

$$\begin{array}{l} \Delta l_1 < 0 \\ \Delta l_2 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta K_{ad} < 0 \\ \Delta K_{at} < 0 \end{array} \Rightarrow \Delta(K_{at} l_2 - K_{ad} l_1) > 0 \quad 6.125$$

Lo cual hace aumentar la tendencia subviradora. Sucederá lo contrario si el centro de gravedad se desplaza hacia el eje trasero.

b) Aplicación de esfuerzos tractores.

La tracción delantera hace disminuir K_{ad} y mejora la estabilidad. Lo contrario sucederá si los esfuerzos tractores son aplicados en el eje trasero.

c) **Distribución de rigideces de los neumáticos.**

En general, al disminuir K_{ad}^* respecto a K_{at} , aumenta el valor de V_{car} o disminuye la V_{crit} , a igualdad de otros valores, es decir, se acentuará el carácter subvirante o disminuirá el sobrevirante según sea el caso.

Para analizar este efecto puede recurrirse a la representación de la mayor parte real de las soluciones λ_1 y λ_2 en función de K_{ad}^*/K_{at} . Denominando R_e a dicha parte real.

En la figura 6.45 se representa dicha variación para tres valores distintos de l_1/L ($a < b < c$) y dos velocidades distintas ($V_1 > V_2$ m/s).

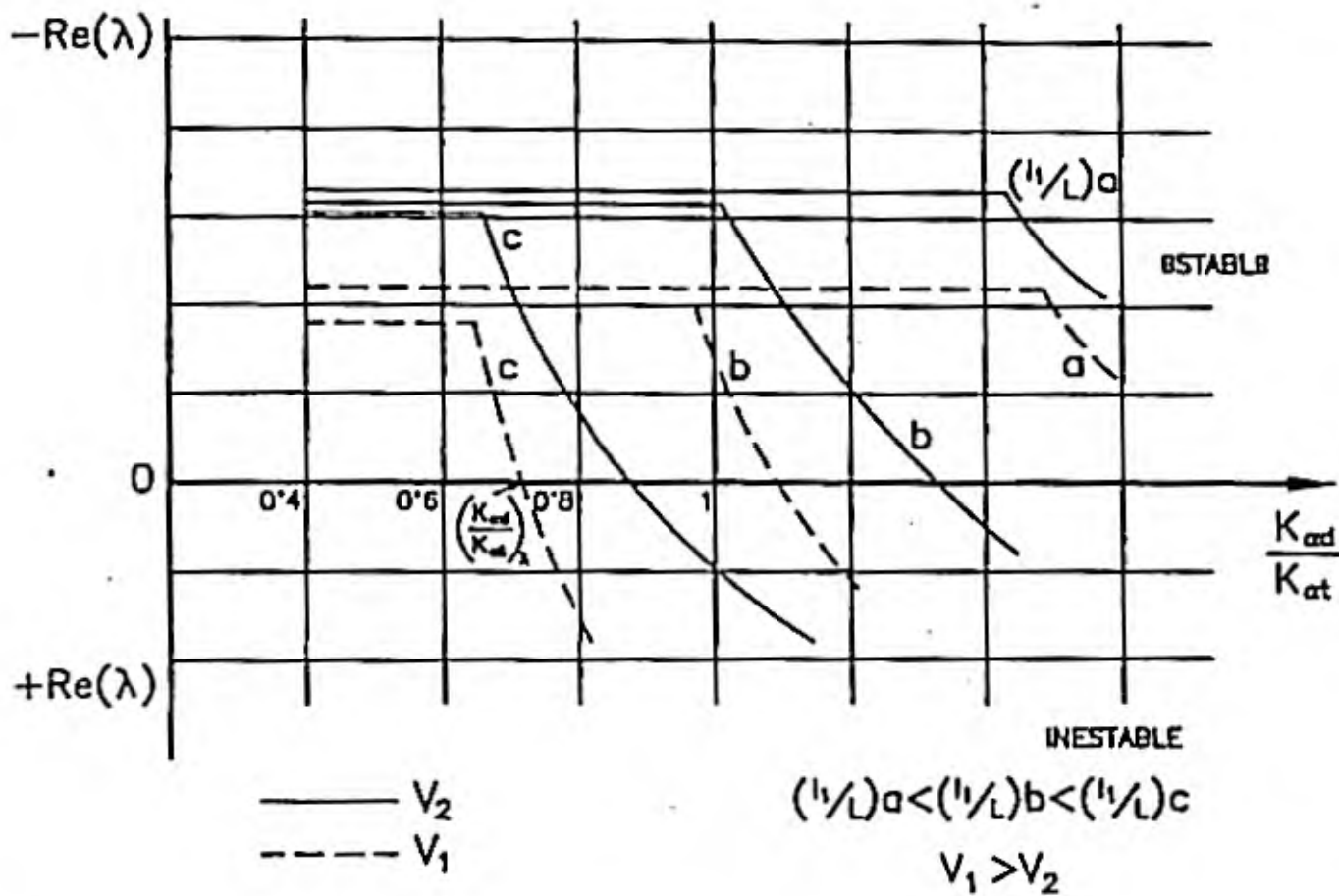


Figura. 6.45. Variación de la parte real de la solución compleja en función del reparto de fuerzas de frenado para diferentes supuestos.

Puede observarse lo siguiente;

- R_e permanece prácticamente constante hasta un cierto valor de K_{ad}^*/K_{at} , si esta relación sigue aumentando R_e crece rápidamente.
- Cuando $R_e > 0$ se produce inestabilidad.
- Al aumentar l_1/L , es decir, desplazarse el c.d.g. hacia la parte trasera del vehículo, disminuye el valor de K_{ad}^*/K_{at} para el que el vehículo puede ser inestable.
- Un incremento de velocidad también conduce a reducir el valor K_{ad}^*/K_{at} para el que el vehículo se hace inestable.

Los valores representados en la figura suelen calcularse considerando que $K_{ad} + K_{at} = \text{cte}$, debido a que estos valores no se pueden aumentar o disminuir a voluntad. Puede observarse que, en el caso representado, si se desea asegurar la estabilidad, hasta una velocidad máxima V_1 y en las peores condiciones de carga (c), la relación K_{ad}/K_{at} debe ser inferior a 0,7.

Sin considerar la conducción en situaciones extremas, la estabilidad direccional de los coches actuales, con barras estabilizadoras, cuyo efecto analizaremos después, no representa problema dentro de los límites normales de velocidad.

6.6.7. Influencia de la suspensión en el comportamiento virador del vehículo

En puntos anteriores ha sido calculado el coeficiente de viraje $K_v = P_d/K_{ad} - P_r/K_{at}$. En la determinación de este coeficiente solo ha sido tomada en cuenta la fuerza lateral aplicada en el c.d.g del vehículo, la cual se supone que se distribuye entre los ejes en igual proporción que la masa que gravita sobre cada uno de ellos. Al mismo tiempo, el único efecto considerado, por acción de dicha fuerza lateral, ha sido la elasticidad lateral de los neumáticos, representada por la rigidez de deriva de éstos. Sin embargo, en el comportamiento virador intervienen otros efectos, en mayor o menor grado, como son:

- Distribución de momentos de balanceo
- Angulo de caída de las ruedas
- Variación del guiado de las ruedas con el balanceo
- Variación del guiado de las ruedas con las fuerzas laterales
- Fuerzas de tracción.

Todos estos efectos están relacionados con el sistema de suspensión y acoplamiento entre las ruedas y el cuerpo del vehículo. En el punto siguiente será analizado el primero de los efectos citados.

6.6.7.1. Efecto de la distribución de momentos de balanceo. Influencia de las barras estabilizadoras.

Es conocida la influencia de la transferencia lateral de carga sobre la pareja de neumáticos de un mismo eje (ver punto 2.4.1.). Cuando aumenta el par de balanceo, como consecuencia de la aplicación de una fuerza lateral sobre el cuerpo del vehículo, la rigidez de deriva del par de neumáticos de un mismo eje disminuye, lo que se traduce en un aumento del ángulo de deriva para una fuerza lateral dada. Un aumento de dicho ángulo en las ruedas delanteras hace el vehículo más subvirador, o menos sobrevirador, y lo contrario sucede si el incremento se refiere al ángulo de deriva de las ruedas traseras.

El efecto del par de balanceo es especialmente importante para valores de la aceleración transversal superiores a 0,3 ó 0,4 g. Para dichos valores de a_y , el comportamiento del neumático es no lineal y esto hace que el estudio sea difícil desde el punto de vista

cuantitativo.

Dependiendo del momento de balanceo compensado en cada eje, existirá una mayor o menor pérdida de rigidez de deriva de las ruedas del mismo, pudiéndose modificar el valor de K_v . Para cuantificar esta influencia es preciso calcular la distribución de momentos, en función de la rigidez de balanceo de la suspensión de las ruedas de cada eje.

En la figura 6.46, aparece un modelo representativo de la suspensión de un eje de un vehículo de eje rígido. En él se representa el centro de balanceo correspondiente al eje considerado, así como los principales esfuerzos que intervienen lateralmente y el ángulo ϕ de balanceo de la masa suspendida.

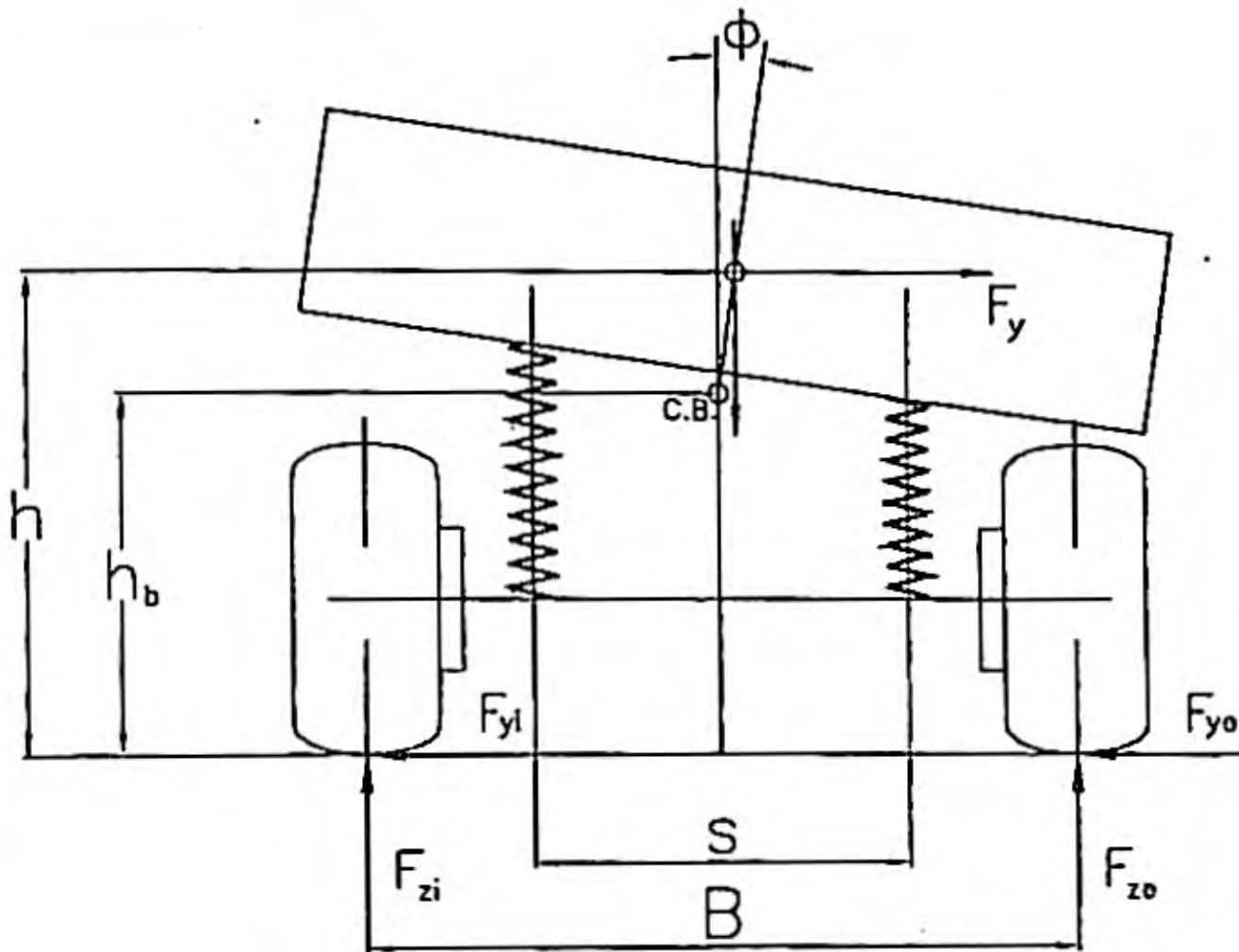


Figura 6.46. Modelo simplificado de la suspensión de un vehículo.

Los resortes se deformarán una cantidad:

$$\Delta Z = \frac{1}{2} s \tan \phi \approx \frac{1}{2} s \phi \quad 6.126$$

esta deformación corresponde a fuerzas iguales y de sentido contrario, cuyo momento es:

$$M'_\phi = K_s \Delta Z s = \frac{1}{2} K_s s^2 \phi = K_\phi \cdot \phi \quad 6.127$$

siendo:

K_s = Rigidez vertical del resorte equivalente

K_ϕ = Rigidez de balanceo de la suspensión del eje.

En el caso de que exista barra estabilizadora en el eje considerado, la rigidez de balanceo de dicha barra se sumará a la rigidez K_ϕ , calculada en (6.127).

El centro de balanceo es un punto ideal en el cual, de ser aplicada la fuerza lateral F_y , no se produciría balanceo de la masa suspendida. Los centros de balanceo de ambos ejes definen el eje de balanceo de la masa suspendida y respecto a este eje se producirá el movimiento de la masa suspendida, cuando éste es producido, exclusivamente, por el momento de balanceo.

La transferencia de esfuerzos entre las masas suspendida y no suspendida, correspondiente a cada eje, puede calcularse considerando aplicados en el centro de balanceo la fuerza lateral F_y y el momento de balanceo calculado antes M'_ϕ . Ambas son causas de la transferencia de carga ΔF_z entre las ruedas. Tomando momentos respecto al punto medio de la proyección del eje sobre la superficie de rodadura; el momento de balanceo en un eje es:

$$M_\phi = (F_{z_e} - F_{z_i}) \frac{B}{2} = F_y h_b + K_\phi \phi \quad 6.128$$

$$F_{z_e} - F_{z_i} = 2\Delta F_z = 2(F_y h_b + K_\phi \phi) / B \quad 6.129$$

La transferencia de carga depende, como se deduce de (6.129), de la fuerza lateral aplicable a cada eje, la cual es influenciada por la posición longitudinal, del centro de gravedad; de la altura del centro de balanceo y del momento de balanceo, el cual depende, a su vez, de la distribución de rigideces de balanceo entre los ejes.

Si se consideran ambos ejes del vehículo, como en la figura 6.47 y el eje de balanceo antes definido, se puede calcular el momento de balanceo total respecto a dicho eje por la expresión:

$$M_\phi = \left[P h_1 \sin \phi + \frac{P}{g} \frac{V^2}{R} h_1 \cos \phi \right] \cos \epsilon \quad 6.130$$

siendo h_1 , la diferencia de alturas entre el centro de gravedad y el eje de balanceo, en el plano

transversal que contienen a aquel, y γ el ángulo que forma dicho eje con la superficie de rodadura.

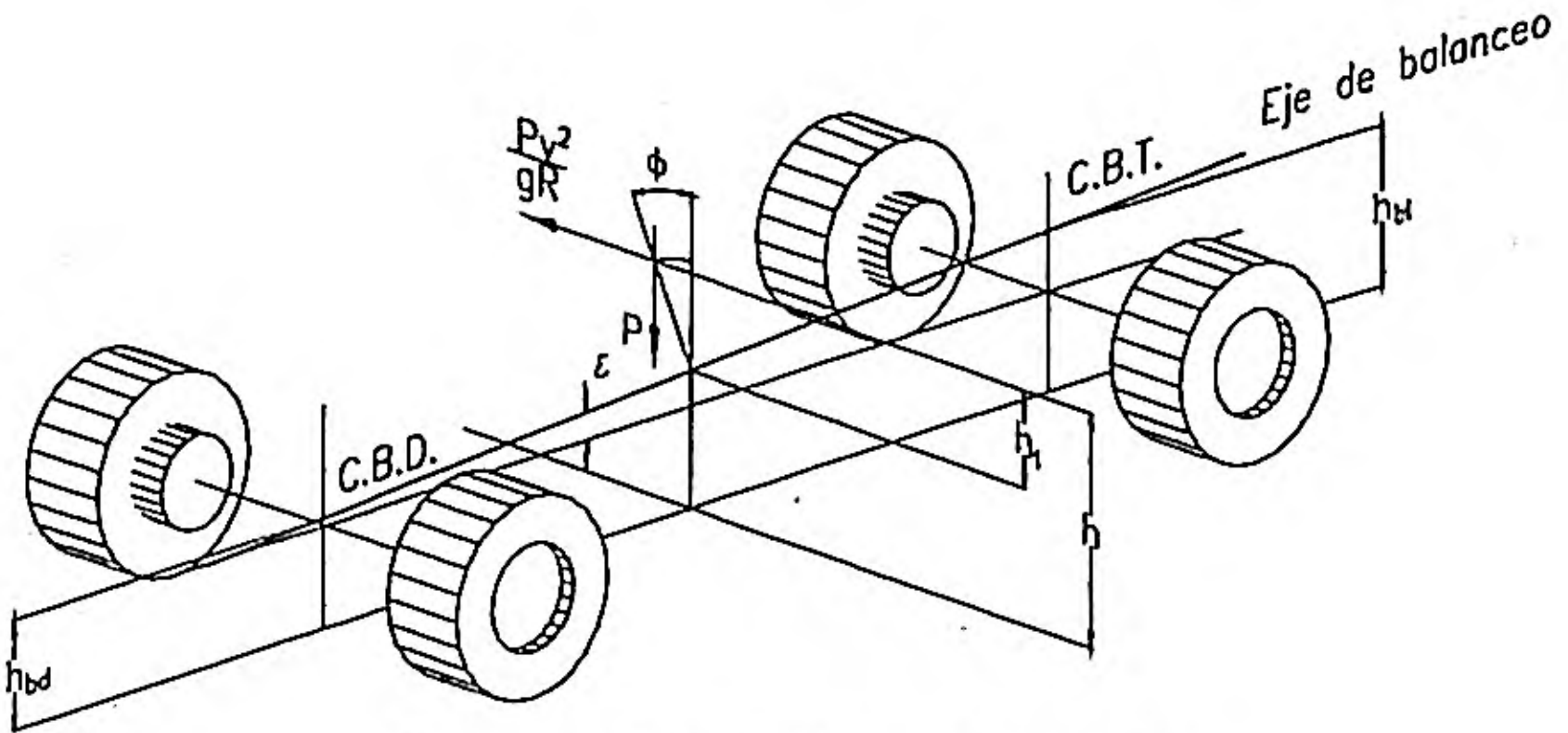


Figura 6.47. Posición del centro de balanceo.

Considerando en (6.130) pequeños valores de ϕ y γ :

$$M_{\phi} \approx P h_1 \left(\phi + \frac{V^2}{gR} \right) \quad 6.131$$

Por otra parte, considerando que las rigideces de balanceo en los ejes delantero y trasero son, respectivamente, $K_{\phi d}$ y $K_{\phi t}$.

$$M_{\phi} = M_{\phi d} + M_{\phi t} = (K_{\phi d} + K_{\phi t}) \phi \quad 6.132$$

Igualando (6.131) y (6.132) y despejando ϕ :

$$\phi = \frac{P h_1 \frac{V^2}{gR}}{K_{\phi d} + K_{\phi t} - P h_1} \quad 6.133$$

derivando:

$$R_{\phi} = \frac{d\phi}{da_y} = \frac{d\phi}{d\left(\frac{V^2}{gR}\right)} = \frac{P h_1}{K_{\phi d} + K_{\phi t} - P h_1} \quad 6.134$$

R_ϕ se denomina relación de balanceo y expresa la variación del ángulo de balanceo, con la aceleración lateral en unidades de g. Este parámetro adquiere normalmente valores comprendidos entre 3 y 7 grados/g para vehículos de turismo.

Conocido ϕ de (6.133) y considerando (6.128), se obtiene para cada eje:

$$M_{\phi d} = K_{\phi d} \frac{P h_i \frac{V^2}{gR}}{K_{\phi d} + K_{\phi t} - P h_i} + P_d h_{bd} \frac{V^2}{gR} = \Delta F_{Zd} B_d \quad 6.135$$

$$M_{\phi t} = K_{\phi t} \frac{P h_i \frac{V^2}{gR}}{K_{\phi d} + K_{\phi t} - P h_i} + P_t H_{bt} \frac{V^2}{gR} = \Delta F_{Zt} B_t \quad 6.136$$

Siendo ΔF_{Zd} y ΔF_{Zt} , las cargas transferidas desde las ruedas interiores a las exteriores, en los ejes delantero y trasero, respectivamente.

Si, por ejemplo, $M_{\phi d} > M_{\phi t}$, la influencia de la transferencia de carga sobre las ruedas delanteras será superior a las traseras, en lo que se refiere a la reducción de $K_{\alpha d}$ respecto a $K_{\alpha t}$, lo cual tenderá a modificar el comportamiento virador hacia el subvirado.

Conocidos los momentos de balanceo en ambos ejes y la transferencia de cargas entre sus ruedas (Ec. 6.135 y 6.136).

Se podrían determinar los nuevos valores de $K_{\alpha d}$ y $K_{\alpha t}$ recurriendo a las curvas características de los neumáticos, $F_{y\alpha}$ (F_Z) para $\alpha = \text{cte}$. Estas curvas se pueden expresar en forma analítica, mediante polinomios de segundo orden o superior, para una rueda:

$$F'_{y\alpha} = K'_\alpha \alpha = (a F_Z - b F_Z^2) \alpha \quad 6.137$$

a, b, coeficientes dimensionales.

Considerando ambas ruedas de un eje:

$$F_{y\alpha} = (a F_{Zc} - b F_{Zc}^2 + a F_{Zi} - b F_{Zi}^2) \alpha \quad 6.138$$

Puesto que:

$$F_{Zi} = F_Z - \Delta F_Z \text{ y } F_{Ze} = F_Z + \Delta F_Z$$

$$F_{y\alpha} = \left[a(F_Z + \Delta F_Z) - b(F_Z + \Delta F_Z)^2 + a(F_Z - \Delta F_Z) - b(F_Z - \Delta F_Z)^2 \right] \alpha$$

$$F_{y\alpha} = \left[2a F_Z - 2b F_Z^2 - 2b \Delta F_Z^2 \right] \alpha \quad 6.139$$

Como los dos primeros términos entre corchetes representan la suma de las rigideces de ambos neumáticos, sometidos cada uno a la carga estática F_Z , es decir, $K_\alpha = 2K'_\omega$ (6.139) puede expresarse por:

$$F_{y\alpha} = (K_\alpha - 2b \Delta F_Z^2) \alpha \quad 6.140$$

y para ambos ejes puede escribirse:

$$F_{y\alpha d} = (K_{\alpha d} - 2b \Delta F_{Zd}^2) \alpha_d = \frac{P_d}{g} \frac{V^2}{R} \quad 6.141$$

$$F_{y\alpha i} = (K_{\alpha i} - 2b \Delta F_{Zi}^2) \alpha_i = \frac{P_i}{g} \frac{V^2}{R} \quad 6.142$$

de donde:

$$\alpha_d = \frac{P_d V^2 / gR}{K_{\alpha d} - 2b \Delta F_{Zd}^2} \quad 6.143$$

$$\alpha_i = \frac{P_i V^2 / gR}{K_{\alpha i} - 2b \Delta F_{Zi}^2}$$

Sustituyendo en $\delta = L/R + \alpha_d - \alpha_i$

$$\delta = \frac{L}{R} + \left[\frac{P_d}{K_{\alpha d} - 2b \Delta F_{Zd}^2} - \frac{P_i}{K_{\alpha i} - 2b \Delta F_{Zi}^2} \right] \quad 6.144$$

Considerando que K_{ad} y $K_{at} \gg 2b\Delta F_z^2$ puede aceptarse:

$$\frac{1}{K_a - 2b\Delta F_z^2} = \frac{1}{K_a \left(1 - \frac{2b\Delta F_z^2}{K_a}\right)} \approx \frac{1}{K_a} \left(1 + \frac{2b\Delta F_z^2}{K_a}\right) \quad 6.145$$

Sustituyendo en (6.144):

$$\delta = \frac{L}{R} + \left[\frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_t}{K_{at}} + \frac{P_d 2b\Delta F_{zd}^2}{K_{ad}^2} - \frac{P_t 2b\Delta F_{zt}^2}{K_{at}^2} \right] \frac{V^2}{gR}$$

$$\delta = \frac{L}{R} + [K_v + K_b] \frac{V^2}{gR} \quad 6.146$$

siendo:

$$K_b = \frac{2P_d b\Delta F_{zd}^2}{K_{ad}^2} - \frac{2P_t b\Delta F_{zt}^2}{K_{at}^2} \quad 6.147$$

Representando K_b el coeficiente de viraje debido a transferencia lateral de carga entre las ruedas de cada eje. Puesto que todas las variables en (6.147) son positivas, el primer sumando del segundo miembro, correspondiente al eje delantero, tiene siempre efecto subvirador, mientras que el correspondiente a las ruedas traseras lo tiene sobrevirador. El efecto global dependerá de la relación $\Delta F_{zd}/\Delta F_{zt}$ y ésta de K_{pd}/K_{pt} como se indicó antes.

Por consideraciones de confort, los resortes delanteros son generalmente más elásticos que los traseros. Como consecuencia, la rigidez de balanceo de los muelles delanteros es normalmente menor que la de los traseros, esto implica un incremento del par de balanceo sobre el eje trasero y posible tendencia sobreviradora. Para compensar este efecto se instala en el eje delantero una "barra antibalanceo" o "estabilizadora".

La barra estabilizadora, (figura 6.48) se monta, fijando los extremos a cada uno de los brazos inferiores de la suspensión de cada rueda.

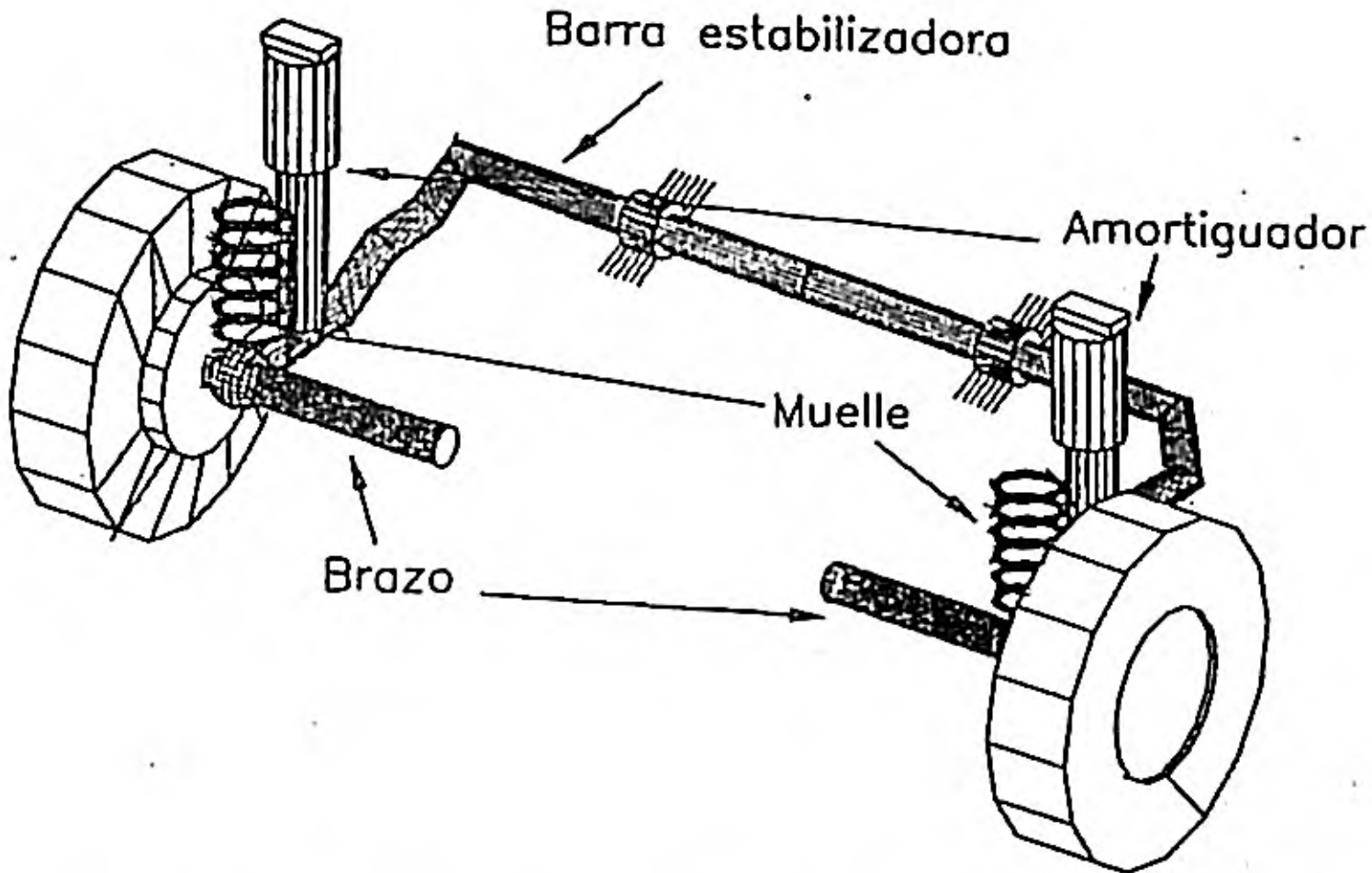


Figura 6.48. Esquema de la instalación de una barra estabilizadora.

Cuando ambas ruedas experimentan idéntico desplazamiento en relación a la masa suspendida, es decir, en oscilaciones verticales puras de dicha masa respecto a la no suspendida, la barra únicamente gira, no oponiendo resistencia y no afectando a la rigidez de la suspensión.

En cambio, cuando se produce balanceo, una rueda se mueve acercándose y la otra alejándose de la carrocería. La barra se torsiona y actúa incrementando la rigidez de balanceo del conjunto de la suspensión. Al aumentar el radio de la barra dicha rigidez aumenta.

Si la barra es instalada en el eje delantero, o se incrementa su diámetro, la proporción de par de balanceo en este eje aumenta, la rigidez de deriva de sus dos neumáticos, en conjunto, disminuye, el ángulo de deriva aumenta y el vehículo se hace más subvirador. La instalación de una barra antibalanceo en el eje trasero tiene efecto opuesto.

Puede recurrirse a instalar barras antibalanceo en ambos ejes, con el objeto de reducir el ángulo ϕ de balanceo, sin alterar la rigidez de los muelles, diseñados, éstos últimos, para que la frecuencia natural de vibración vertical de la masa suspendida sea algo superior a 1 Hz, como se justificará en el capítulo siguiente. En este caso el incremento de rigidez de balanceo que introduce cada barra debe ser tal que se obtenga el carácter virador deseado para el vehículo. Esto supone, por lo indicado antes, que a igualdad de otros factores la barra delantera tendrá una mayor rigidez que la trasera en relación a los esfuerzos laterales que deben soportar cada eje.

Ejercicio 6.1

Un turismo se encuentra equipado con sistema ABS a las cuatro ruedas, por control independiente en las traseras y por selección inferior en las delanteras. Sus características generales son las siguientes:

Batalla: 2,6 m.

Vía: 1,25 m.

Distancia de c.d.g. al eje delantero (proyección sobre el plano de rodadura): 1,2m.

Altura del c.d.g.: 0,5 m.

Peso total: 18 KN

Neumáticos: 165 R 13 (82S) P3, presión 2 bars. (Figura 6.47).

Circulando en recta sobre una calzada de adherencia $\mu = 0,9$, con hielo en su parte exterior ($\mu = 0,1$), el conductor frena hasta el límite de posibilidades del sistema y gira el volante logrando que el vehículo, tras un breve período transitorio, se desplace en línea recta. En estas condiciones, calcular:

1. La deceleración lograda en la frenada.
2. Carga dinámica sobre cada rueda.
3. Esfuerzos longitudinal y lateral sobre las ruedas, durante el frenado.
4. Giro de cada rueda directriz, suponiendo que el sistema de dirección cumple la Ley de Ackerman.
5. Valor medio de los ángulos de deriva de cada pareja de ruedas (traseras y delanteras).

Puede suponerse lo siguiente:

- Los ángulos de deriva son suficientemente pequeños como para considerar un comportamiento elástico de los neumáticos.
- Los ángulos de giro de las ruedas directrices también son muy pequeños.

[Dinámica lateral del vehículo.]

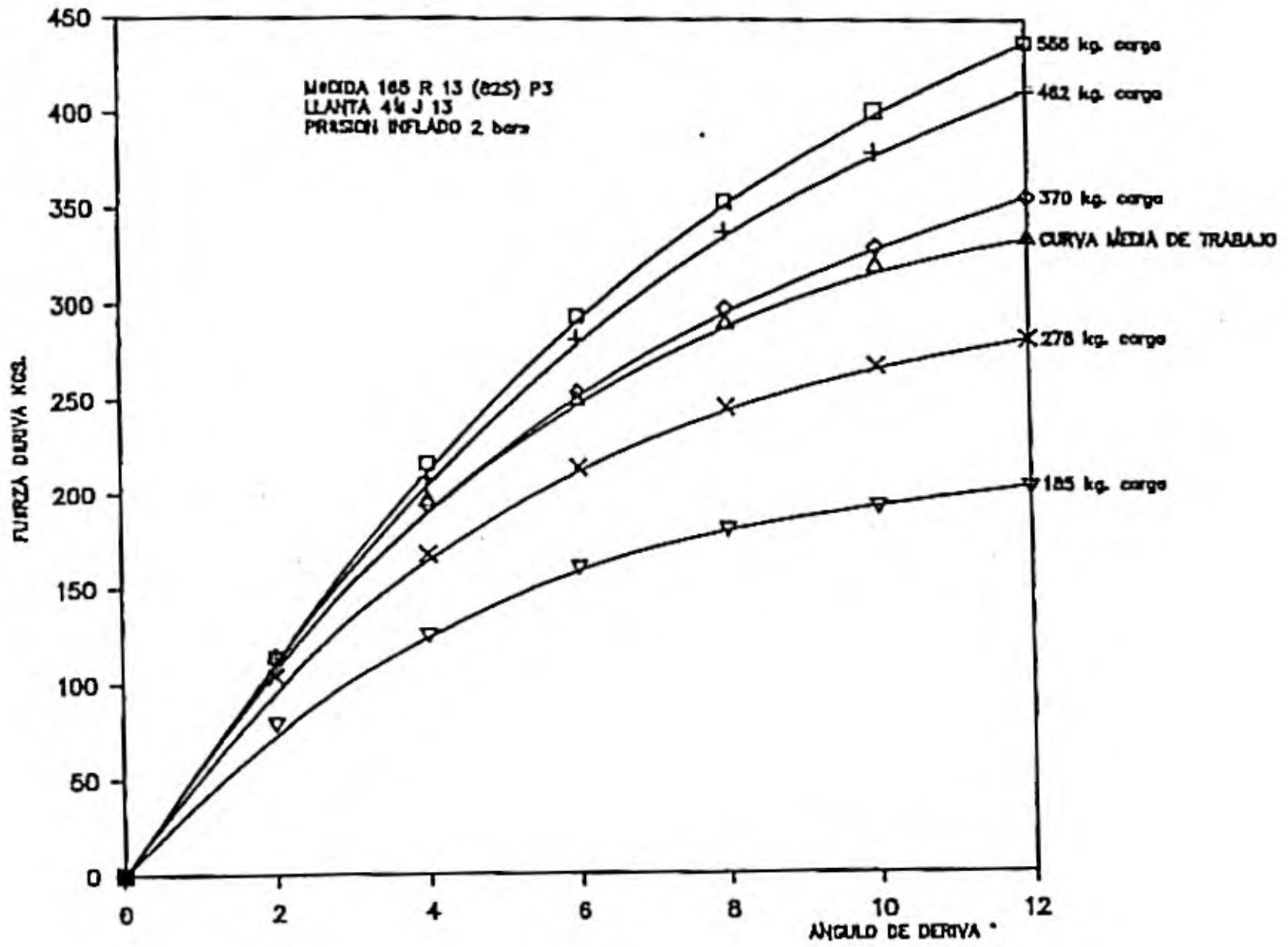


Figura 6.49. Curvas $F_{y\alpha}(\alpha, P)$ para un neumático 165 R13 82S P3

SOLUCION:

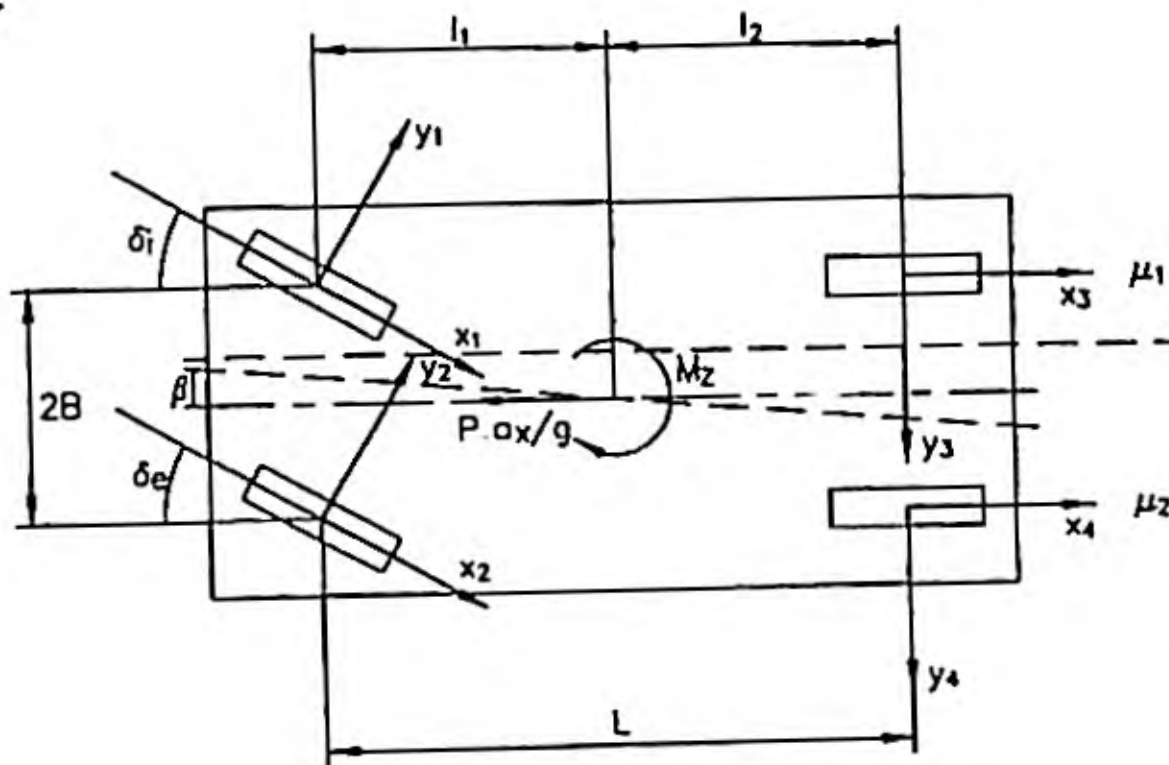


Figura 6.50. Vehículo maniobrando.

Para resolver este ejercicio se supone que:

- No existe transferencia de carga debido a balanceo.
- Se desprecian acciones aerodinámicas.

Estableciendo las condiciones de equilibrio en el movimiento estacionario:

$$(\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma M = 0)$$

$$x_3 + x_4 + x_1 \cos \delta_i + x_2 \cos \delta_e + y_1 \sin \delta_i + y_2 \sin \delta_e = \frac{P}{g} a_x \quad (1)$$

$$y_1 \cos \delta_i + y_2 \cos \delta_e - x_1 \sin \delta_i - x_2 \sin \delta_e - y_3 - y_4 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (x_3 - x_4) B + (y_3 + y_4) l_2 + (x_1 \cos \delta_i - x_2 \cos \delta_e) B - \\ & - (x_1 \sin \delta_i + x_2 \sin \delta_e) l_1 + (y_1 \cos \delta_i + y_2 \cos \delta_e) l_1 + \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ (y_1 \sin \delta_i - y_2 \sin \delta_e) B = 0$$

1) Deceleración de frenada

Considerando δ_i, δ_e pequeños:

$$\cos \delta_i \approx \cos \delta_e \approx 1$$

$$\sin \delta_i \approx \sin \delta_e \approx 0$$

la condición (1) quedaría:

$$x_3 + x_4 + x_1 + x_2 = \frac{P}{g} a_x \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que el sistema ABS tiene control por selección inferior en las ruedas delanteras e independiente en las traseras:

[Dinámica lateral del vehículo.]

$$x_1 = x_2 = \mu_1 P_1$$

$$x_3 = \mu_1 P_3$$

$$x_4 = \mu_2 P_4$$

la carga dinámica sobre cada rueda es:

$$F_{z1} = F_{z2} = \frac{1}{2} \left(P \frac{l_2}{L} + \frac{P}{g} a_x \frac{h}{L} \right) = \frac{P}{2L} \left(l_2 + \frac{a_x}{g} h \right)$$

$$F_{z3} = F_{z4} = \frac{P}{2L} \left(l_1 - \frac{a_x}{g} h \right) \quad (5)$$

Por lo tanto, sustituyendo en (4):

$$(\mu_1 + \mu_2) \frac{P}{2L} \left(l_1 - \frac{a_x}{g} h \right) + \mu_1 \frac{P}{L} \left(l_2 + \frac{a_x}{g} h \right) = \frac{P}{g} a_x$$

$$(\mu_1 + \mu_2) \frac{l_1}{2L} + \mu_1 \frac{l_2}{L} = \frac{a_x}{g} \left(1 + \frac{(\mu_1 + \mu_2) h}{2L} - \frac{\mu_1 h}{L} \right)$$

$$(\mu_1 + \mu_2) \frac{l_1}{2} + \mu_1 l_2 = \frac{a_x}{g} \left[L + (\mu_2 - \mu_1) \frac{h}{2} \right]$$

$$\frac{a_x}{g} = \frac{(\mu_1 + \mu_2) \frac{l_1}{2} + \mu_1 l_2}{L + (\mu_2 - \mu_1) \frac{h}{2}} = 0,264 \quad (6)$$

luego el valor de la deceleración lograda en la frenada es: $a_x = 2,592 \text{ m/s}^2$.

2) Cargas dinámicas.

Sustituyendo (6) en (5)

$$F_{z1} = F_{z2} = \frac{18}{2 \cdot 2,6} (1,4 + 0,264 \cdot 0,5) = 5,3 \text{ kN.}$$

$$F_{z3} = F_{z4} = \frac{18}{2 \cdot 2,6} (1,2 - 0,264 \cdot 0,5) = 3,7 \text{ kN.}$$

3) **Esfuerzos longitudinales de frenado.**

De las condiciones de equilibrio (2) y (3), suponiendo δ_i y δ_e muy pequeños:

$$y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0$$

$$(x_3 - x_4) B + (y_3 + y_4) l_2 + (y_1 + y_2) l_1 = 0$$

sustituyendo (y_1+y_2) la primera expresión en la segunda:

$$(x_3 - x_4) B + (y_3 + y_4) L = 0$$

Entonces:

$$x_1 = x_2 = F_{z1} \cdot \mu_1 = 0,53 \text{ kN}$$

$$x_3 = F_{z3} \mu_1 = 0,37 \text{ kN}$$

$$x_4 = F_{z4} \mu_2 = 3,33 \text{ kN}$$

$$y_3 + y_4 = \frac{(x_4 - x_3) B}{L} = 0,71 \text{ kN}$$

$$y_1 + y_2 = y_3 + y_4$$

4) **Giro de cada rueda directriz.**

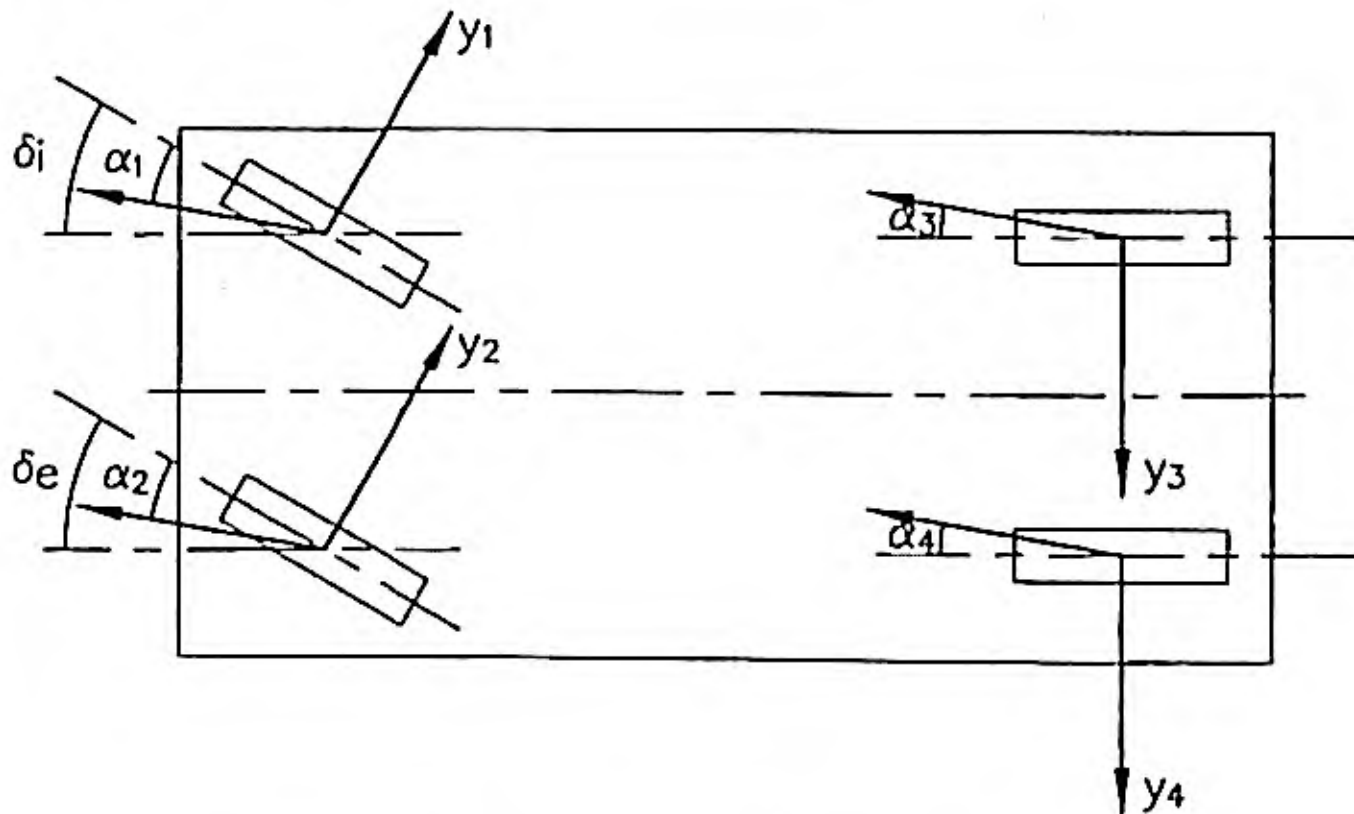


Figura 6.51. Giro de cada rueda directriz

[Dinámica lateral del vehículo.]

Suponiendo que el vehículo se desplaza en línea recta:

$$\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = \frac{\delta_i - \alpha_1 + \delta_e - \alpha_2}{2} = \frac{\delta_i + \delta_e - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \quad (7)$$

por otra parte,

$$K_{ai} (\alpha_3 + \alpha_4) = y_3 + y_4 \approx 710 \text{ N} \quad (8)$$

$$K_{ad} (\alpha_1 + \alpha_2) = y_1 + y_2 \approx 710 \text{ N} \quad (9)$$

sustituyendo en la expresión (7):

$$(\delta_i + \delta_e) = 710 \left(\frac{1}{K_{ai}} + \frac{1}{K_{ad}} \right) \quad (10)$$

Suponiendo unos ángulos de deriva de valores pequeños, inferiores a 2° y siendo la carga vertical:

$$F_{z1} = F_{z2} = 5,3 \text{ kN} \approx 540 \text{ kg.}$$

$$F_{z3} = F_{z4} = 3,7 \text{ kN} \approx 377 \text{ kg.}$$

Del gráfico de la fuerza de deriva, $F_{y\alpha} (\alpha, P)$, se obtiene la rigidez de deriva en el origen, para las ruedas delanteras y traseras, ésta es, aproximadamente:

$$K_{ad} \approx \frac{117 \cdot 9,81}{2 \cdot \frac{\pi}{180}} = 32881,19 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$$

$$K_{ai} \approx \frac{105 \cdot 9,81}{2 \cdot \frac{\pi}{180}} = 29508,76 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (10) y aplicando la condición de Ackerman, se obtienen las expresiones:

$$\delta_i + \delta_e = 0,046 \text{ rad} = 2,64^\circ$$

$$\cot \delta_e - \cot \delta_i = \frac{2B}{L} = \frac{1,25}{2,6} = 0,48$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones:

$$\delta_e \approx 1,31^\circ$$

$$\delta_i = 1,33^\circ$$

5) Valor medio de los ángulos de deriva.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{y_1 + y_2}{K_{\alpha d}} = \frac{710}{32881,19} = 0,022 \text{ rad} \approx 1,24^\circ$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{y_3 + y_4}{K_{\alpha i}} = \frac{710}{29508,76} = 0,024 \text{ rad} \approx 1,38^\circ$$

Ejercicio 6.2

Un chasis para autobús debe ser carrozado de forma que cumpla el Reglamento N° 36 de Ginebra en lo que se refiere a maniobrabilidad. Según lo prescrito en dicho Reglamento debe poder evolucionar dentro de una corona circular de radios R_1 y R_2 , (figura 6.52), y cuando describe una trayectoria circular de forma que el punto más exterior se mueva coincidiendo con la circunferencia de radio R_2 , la distancia h , adquiera un valor igual ó inferior a un valor h_{\max} .

Considerando que la carrocería tenga en planta forma rectangular, calcular:

1. La longitud máxima que admitirá el carrozado en el voladizo delantero.
2. Adoptando el valor de voladizo delantero calculado en el punto anterior, la longitud máxima del voladizo trasero, sin tener en cuenta limitaciones en la longitud total del vehículo.

Puede suponerse:

- Que la vía del vehículo no se altera como consecuencia del giro de las ruedas directrices.
- Que se cumple la condición de Ackerman.

Datos:

Vía: $B = 2,2$ m. Batalla: $L = 5,85$ m.

Ancho total del vehículo $B_T = 2,5$ m.

[Dinámica lateral del vehículo.]

Angulo máximo de giro de la rueda directriz interior: $\delta_0 = 54^\circ$
 $R_1 = 5,3 \text{ m}$. $R_2 = 12 \text{ m}$. $h_{\text{máx}} = 0,8 \text{ m}$.

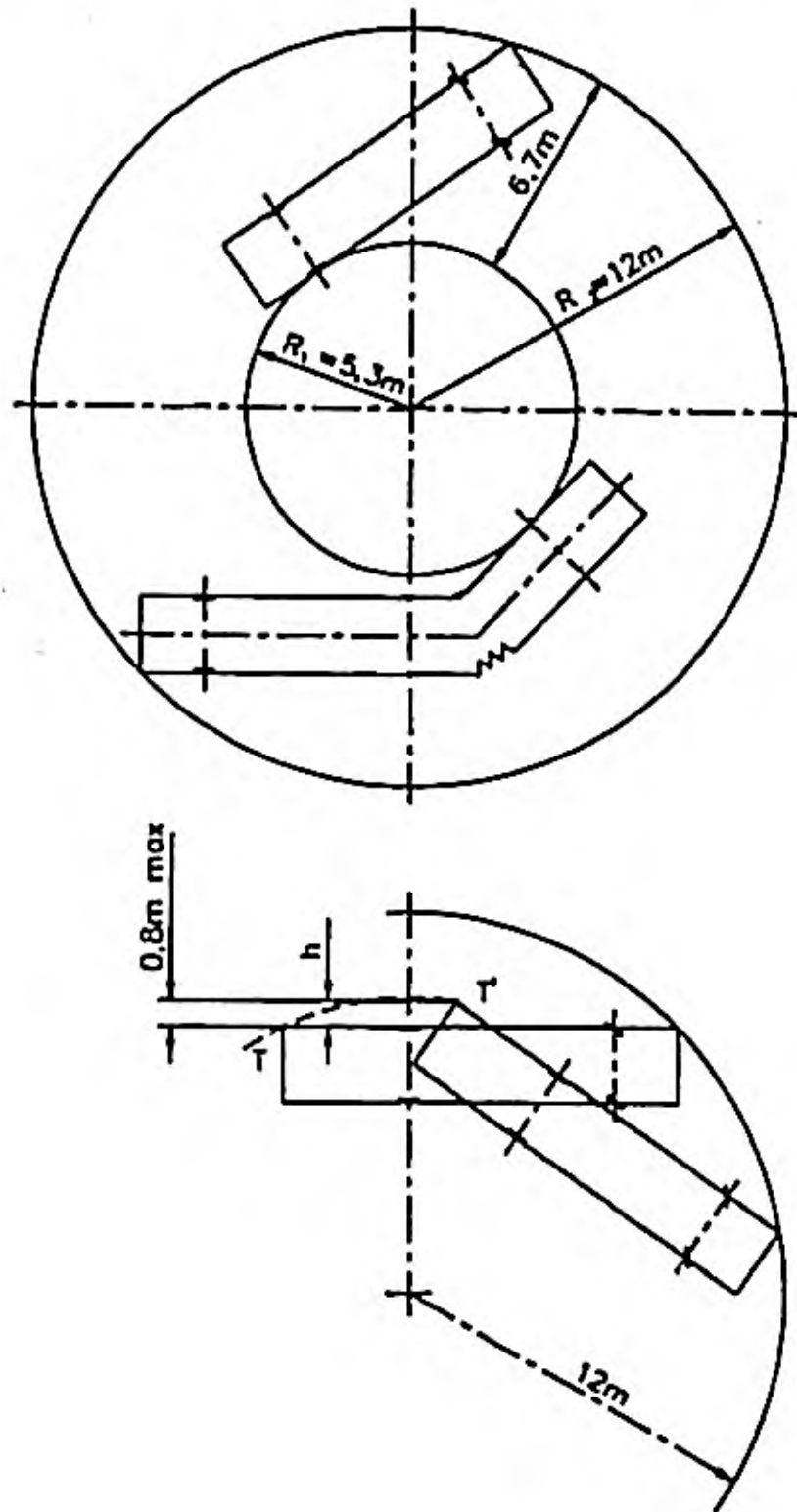


Figura 6.52. Maniobrabilidad de un autobús según R36 de Ginebra.¹

SOLUCION:

1. La máxima longitud de voladizo se logrará si la dirección permite que el lateral interior del vehículo, considerando su proyección sobre la superficie de rodadura, se desplace

(1) Recientemente el citado R. 36 ha sido modificado pasando a ser $R_1 = 5,8 \text{ m}$ $R_2 = 12,5 \text{ m}$

tangente al círculo interior, mientras el ángulo exterior delantero describe una circunferencia de 12 m. En ese caso, (figura 6.52 y 6.53):

$$R_2^2 = (R_1 + CF)^2 + (L + l_1)^2$$

$$12^2 = (5,3 + 2,5)^2 + (5,85 + l_1)^2$$

Despejando:

$$l_1 = 3,269 \text{ m.}$$

Comprobemos si es compatible con las condiciones de la dirección:

$$\delta_i = \text{Arctg} \frac{L}{R_1 + (B_T - B)/2}$$

$$\delta_i = \text{Arctg} \frac{5,85}{5,3 + \frac{2,5 - 2,2}{2}} = 47,03^\circ < 54^\circ$$

Si es compatible

2. En las condiciones anteriores (Figura 6.54), al girar el autobús, su lateral interior es tangente al cilindro de 5,3 m de radio; O es el centro de rotación del conjunto, y el máximo valor del desplazamiento lateral de su vértice exterior trasero se conseguirá cuando E ocupe la posición G, es decir:

$$\cos \alpha_{\max} = OF/OE_{\max}$$

como,

$$OE_{\max} = OF + h_{\max}$$

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{OF}{OF + h_{\max}} = 0,907$$

Luego:

$$\alpha_{\max} = 24,91^\circ$$

$$l_2 = OF \operatorname{tg} \alpha_{\max} = 7,8 \operatorname{tg} 24,91$$

$$l_2 = 3,622 \text{ m.}$$

[Dinámica lateral del vehículo.]

O también, (figura 6.54):

$$y = OF \cos \alpha + l_2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$x = -OF \operatorname{sen} \alpha + l_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{\max} = l_2 / OF$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$y_{\max} = OF + h_{\max} = OF (\cos \alpha_{\max} + \operatorname{tg} \alpha_{\max} \operatorname{sen} \alpha_{\max}) = \frac{OF}{\cos \alpha_{\max}}$$

luego:

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{OF}{OF + h_{\max}}$$

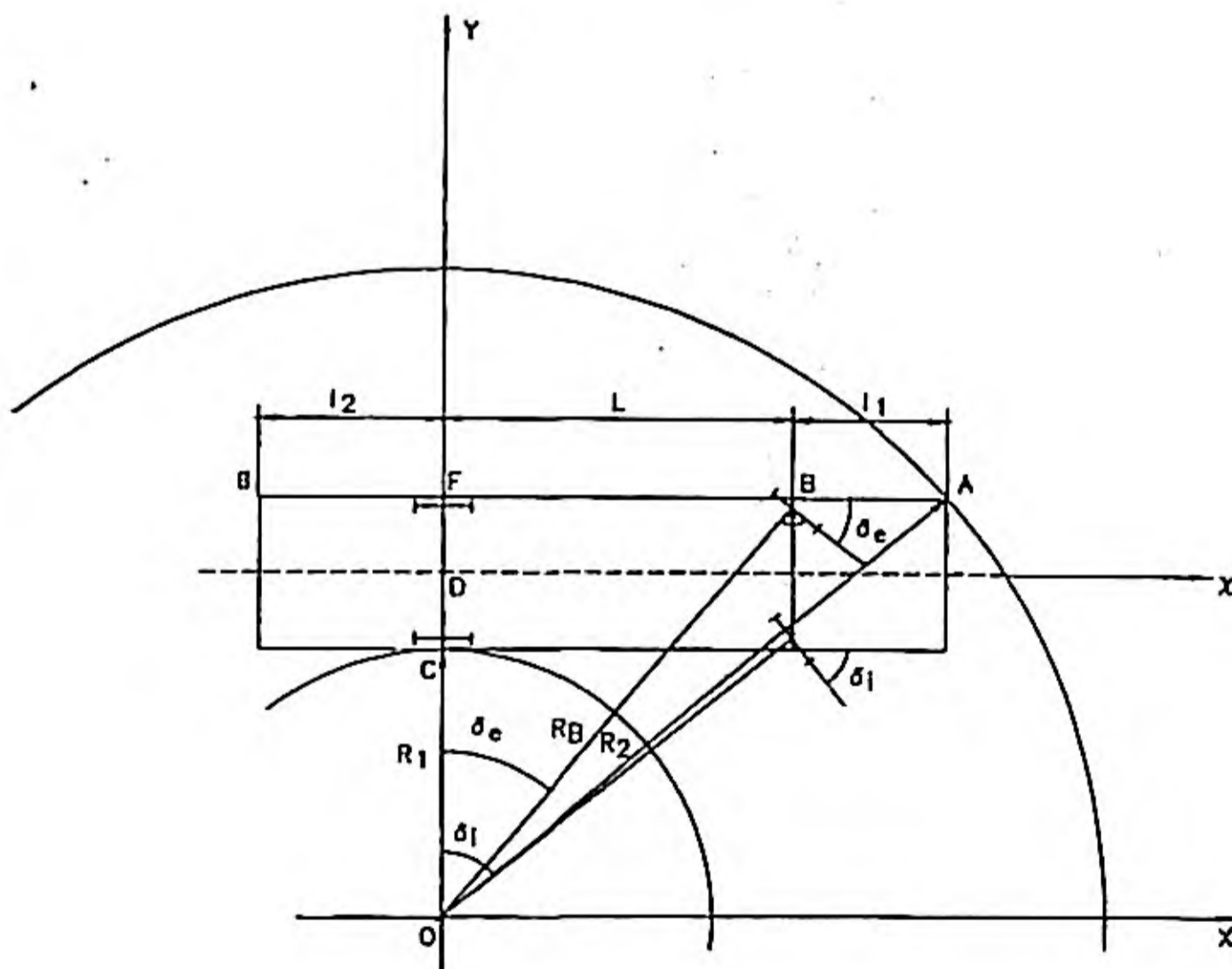


Figura 6.53. Tangencia del lateral interior del vehículo. Radio del círculo exterior = 12m.

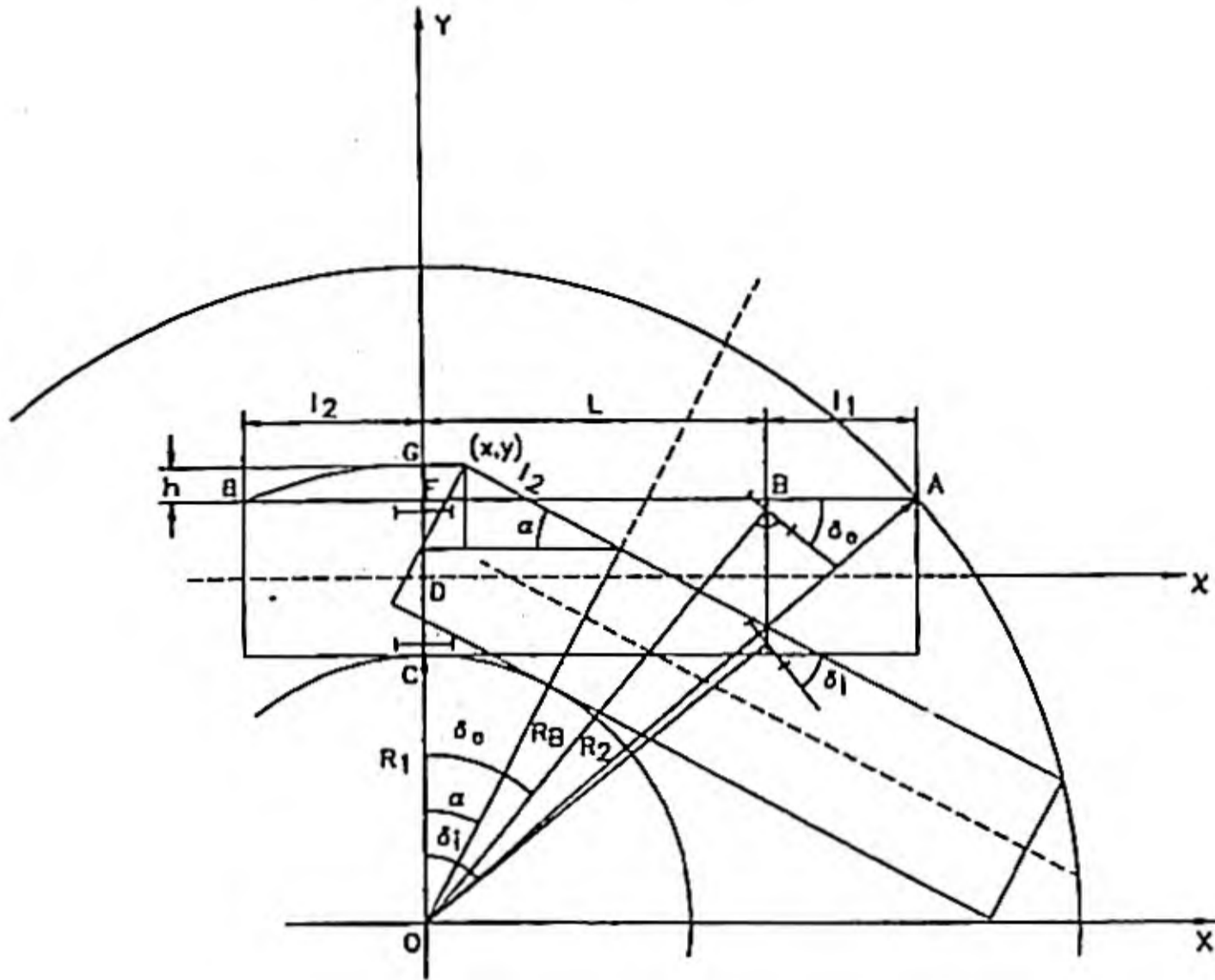


Figura 6.54. Inscripción en curva sin considerar limitaciones en la longitud total del vehículo.

Ejercicio 6.3

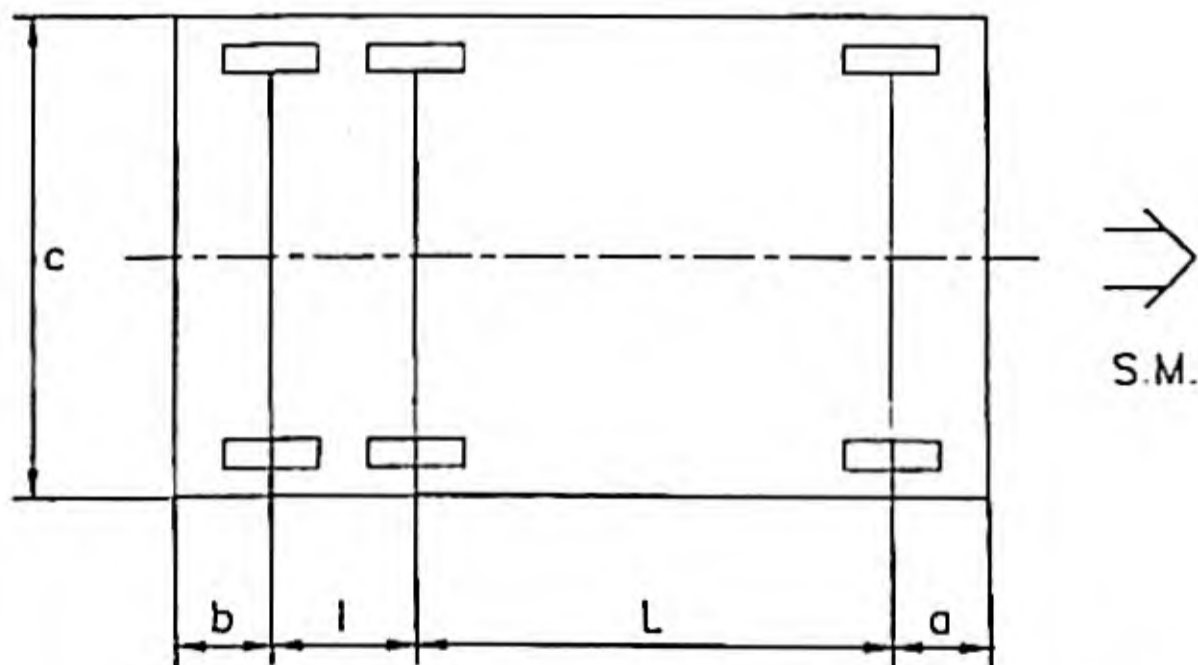


Figura 6.55. Vehículo de tres ejes.

[Dinámica lateral del vehículo.]

El vehículo de tres ejes de la figura se supone equipado de neumáticos de idéntica rigidez de deriva en cada una de las ruedas. Estimar, utilizando un modelo simplificado de tres ruedas, los radios de las superficies cilíndricas interior y exterior, entre las que quedará inscrito cualquier punto del vehículo, cuando circula a velocidad prácticamente nula con ángulo medio de giro de las ruedas directrices de valor 35°

Datos:

- $L = 3,90 \text{ m.}$
- $l = 1,30 \text{ m.}$
- $a = 1,325 \text{ m.}$
- $b = 2,50 \text{ m.}$
- $c = 2,50 \text{ m.}$

SOLUCION:

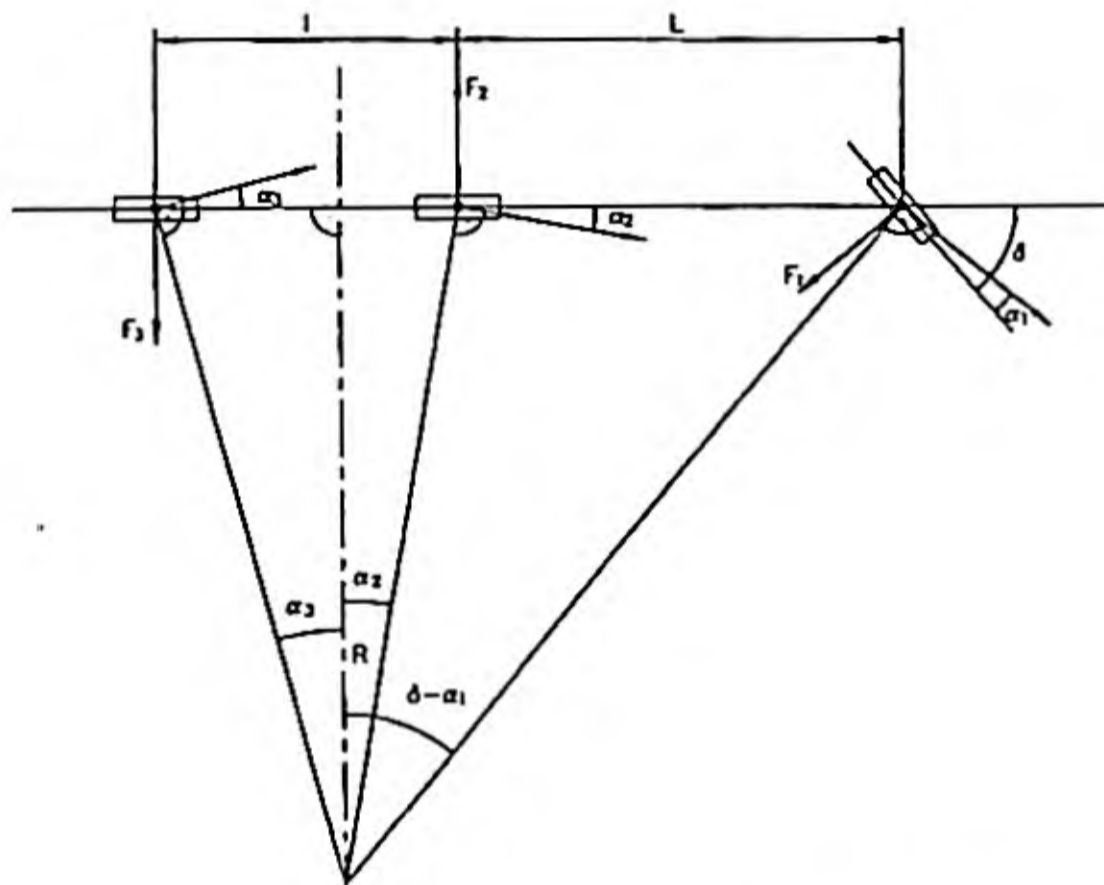


Figura 6.56. Modelo simplificado de tres ruedas.

$$F_1 = K_\alpha \cdot \alpha_1 ; F_2 = K_\alpha \cdot \alpha_2 ; F_3 = K_\alpha \cdot \alpha_3 \quad (1)$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot \cos \delta - F_2 + F_3 &= 0 \\ F_1 \cdot \cos \delta \cdot L - F_3 \cdot l &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Condiciones geométricas:

$$\begin{aligned} R \cdot (\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3) &= l \\ R \cdot (\operatorname{tg}(\delta - \alpha_1) + \operatorname{tg} \alpha_3) &= L + l \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2) y simplificando:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \cos \delta - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 \cdot L \cdot \cos \delta - \alpha_3 \cdot l &= 0 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{l}{R} \\ \operatorname{tg}(\delta - \alpha_1) + \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{(L + l)}{R} \end{aligned}$$

Sustituyendo y operando:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{tg}(\delta - \alpha_1) + \operatorname{tg} \alpha_3} &= \frac{l}{L + l} \\ \alpha_3 &= \left(\frac{L}{l} \cdot \cos \delta\right) \cdot \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \cos \delta \cdot \left(1 + \frac{L}{l}\right) \cdot \alpha_1 \\ \frac{\operatorname{tg}\left(\cos \delta \cdot \left(1 + \frac{L}{l}\right) \cdot \alpha_1\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{L}{l} \cdot \cos \delta \cdot \alpha_1\right)}{\operatorname{tg}(\delta - \alpha_1) + \operatorname{tg}\left(\frac{L}{l} \cdot \cos \delta \cdot \alpha_1\right)} &= \frac{l}{L + l} \end{aligned}$$

sustituyendo valores numéricos:

$$\begin{aligned} \frac{l}{L + l} &= \frac{1,3}{3,9 + 1,3} = 0,250 \\ \frac{L}{l} \cos \delta &= \frac{3,9}{1,3} \cos 35^\circ = 2,46 \\ \cos \delta \cdot \left(1 + \frac{L}{l}\right) &= \cos 35^\circ \cdot \left(1 + \frac{3,9}{1,3}\right) = 3,28 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\frac{\operatorname{tg}(3,28 \cdot \alpha_1) + \operatorname{tg}(2,46 \cdot \alpha_1)}{\operatorname{tg}(35 - \alpha_1) + \operatorname{tg}(2,46 \cdot \alpha_1)} = 0,25 \quad (1)$$

Calculando en forma iterativa:

α	Ec.(1)
3"	0,402
2"	0,273
1,8"	0,247
1,9"	0,260
1,85"	0,254
1,83"	0,251
1,82"	0,250

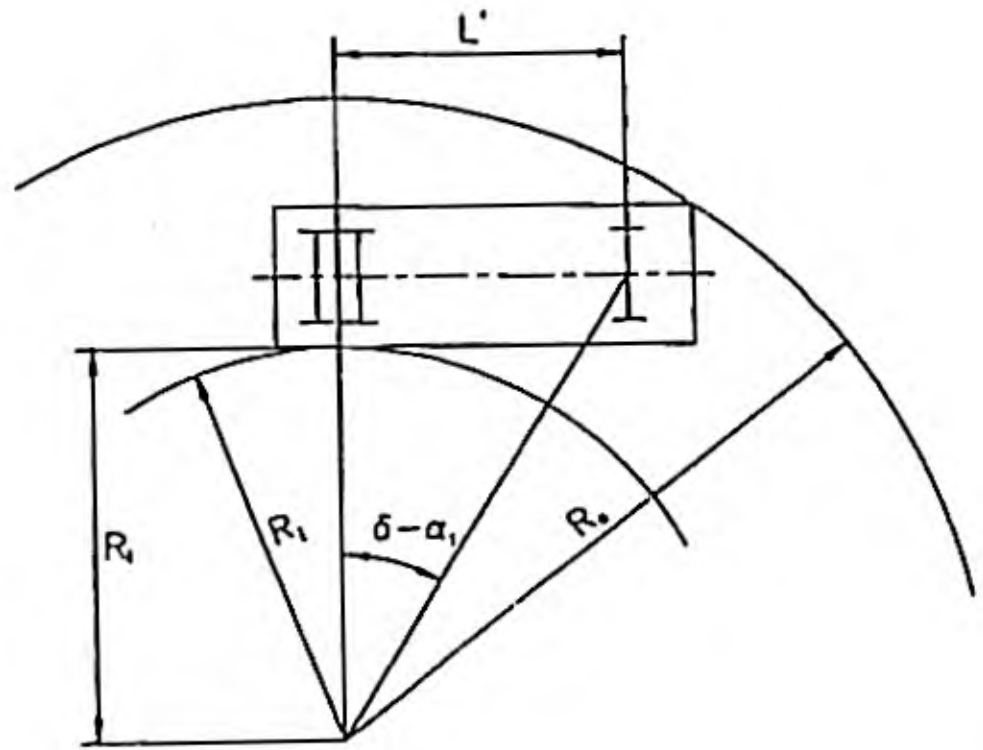


Figura 6.57. Esquema de vehículo en planta.

luego:

$$\alpha_1 = 1,82^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{L}{l} \cdot \cos \delta \cdot \alpha_1 = 4,48^\circ$$

$$\alpha_2 = \cos \delta \cdot \alpha_1 + \alpha_3 = 5,97^\circ$$

$$R = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3} = 7,11 \text{ m.}$$

$$L' = L + R \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 4,64 \text{ m} > \left(3,9 + \frac{1,3}{2}\right) = 4,55$$

$$R_i = R - \frac{c}{2}$$

$$R_i = 5,86 \text{ m.}$$

$$R_e^2 = \left(R + \frac{c}{2}\right)^2 + (L' + a)^2$$

$$R_e = 10,30 \text{ m.}$$

Ejercicio 6.4

Un vehículo tractor-semirremolque presenta la configuración y dimensiones generales que se indican en la figura. Se desea analizar su maniobrabilidad en régimen estacionario y velocidad prácticamente nula. Calcular:

1. Angulos de deriva de las ruedas del tractor.
2. Angulos de deriva de las ruedas del semirremolque.
3. Radio mínimo de giro del plano longitudinal medio del semirremolque.

Considérense las siguientes simplificaciones:

- Deformación lineal de los neumáticos
- Igual rigidez de deriva para los neumáticos de los cinco ejes. (K_a)
- Modelo de cinco ruedas

Datos adicionales:

- Considerar un ángulo de dirección $\delta = 15^\circ$
- Para el anterior ángulo de dirección, la quinta rueda describe una trayectoria circular de $R = 10 \text{ m}$.

$$L_1 = 325 \text{ cm.}$$

$$d_1 = 85 \text{ cm.}$$

$$L_2 = 750 \text{ cm.}$$

$$d = 135 \text{ cm.}$$

De la figura, las ecuaciones de equilibrio y geométricas son:

- Tractor:

$$F_1 \cos \delta + F_2 - F \operatorname{sen} \gamma = 0 \quad (1)$$

$$F_1 L_1 \cos \delta - F d_1 \operatorname{sen} \gamma = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} (\delta - \alpha_1) = \frac{L_1}{R_1} \quad (3)$$

F es la fuerza que ejerce el tractor sobre el semirremolque, a través de la quinta rueda

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{l_1}{R_1} \quad (4)$$

$$R^2 = R_1^2 + (l_1 - d_1)^2 \quad (5)$$

- Semirremolque:

$$F_3 + F_4 - F_5 - F \operatorname{sen} (\beta + \gamma) = 0 \quad (6)$$

$$F_3 d + F_5 d - F L_2 \operatorname{sen} (\beta + \gamma) = 0 \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{L_2}{R_2} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{d - l_2}{R_2} \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{2 \cdot d - l_2}{R_2} \quad (10)$$

$$R_2^2 + (L_2 + d - l_2)^2 = R^2 \quad (11)$$

Suponiendo que los neumáticos se comportan linealmente, las fuerzas de deriva se pueden expresar:

$$F_1 = K \alpha_1$$

$$F_2 = K \alpha_2$$

$$F_3 = K\alpha_3$$

$$F_4 = K\alpha_4$$

$$F_5 = K\alpha_5$$

1/ TRACTOR

Sustituyendo F_1 y F_2 en (1) y (2):

$$K \cdot \alpha_1 \cdot \cos \delta + K \cdot \alpha_2 - F \cdot \operatorname{sen} \gamma = 0$$

$$K \cdot \alpha_1 \cdot L_1 \cos \delta - F \cdot d_1 \cdot \operatorname{sen} \gamma = 0$$

Despejando $F \operatorname{sen} \gamma$ en la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera se llega a la expresión:

$$\alpha_1 \cos \delta \left(1 - \frac{L_1}{d_1}\right) + \alpha_2 = 0 ; \alpha_1 = -\frac{\alpha_2}{\cos \delta \cdot \left(1 - \frac{L_1}{d_1}\right)} \quad (12)$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (4) en la (3), se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\delta - \alpha_1) = \frac{L_1 - l_1}{R_1} ; \alpha_1 = \delta - \operatorname{arctg} \frac{L_1 - l_1}{R_1} \quad (13)$$

igualando (12) y (13):

$$\alpha_2 = \cos \delta \cdot \left(1 - \frac{L_1}{d_1}\right) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{L_1 - l_1}{R_1} - \delta\right)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{l_1}{R_1} = \cos \delta \cdot \left(1 - \frac{L_1}{d_1}\right) \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{L_1 - l_1}{R_1} - \delta\right) \quad (\text{de la ecuación 4}).$$

$$R_1 = \sqrt{R^2 - (l_1 - d_1)^2} \quad (\text{de la ecuación 5}).$$

sustituyendo los datos numéricos:

$$\delta = 15^\circ; R = 10 \text{ m}; L_1 = 3,25 \text{ m}; d_1 = 0,85 \text{ m}.$$

$$\operatorname{arctg} \frac{l_1}{R_1} = -2,73 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{325 - l_1}{R_1} - 15 \right)$$

$$R_1 = \sqrt{10^2 - (l_1 - 85)^2}$$

La solución a este sistema de ecuaciones es:

$$l_1 = 0,93 \text{ m}.$$

$$R_1 = 9,999 \text{ m} \approx 10 \text{ m}.$$

Los valores de los ángulos de deriva de las ruedas del tractor se obtienen sustituyendo en las expresiones (4) y (12):

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} (93,25/1000) \approx 5,33^\circ$$

$$\alpha_1 = 5,33/2,73 \approx 1,96^\circ$$

2/ SEMIRREMOLQUE

Sustituyendo F_3 , F_4 y F_5 en las ec. (6) y (7), despejando de ellas $F \equiv \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$ e igualándolas:

$$K \cdot \alpha_3 + K \cdot \alpha_4 - K \cdot \alpha_5 - K \cdot \alpha_3 \cdot \frac{d}{L_2} - K \cdot \alpha_5 \cdot \frac{d}{L_2} = 0$$

operando:

$$\alpha_3 \cdot \left(1 - \frac{d}{L_2} \right) + \alpha_4 - \alpha_5 \cdot \left(1 + \frac{d}{L_2} \right) = 0$$

además:

$$\alpha_5 = \operatorname{arctg} \frac{l_2}{R_2} \text{ (de la ecuación (6.4.8))}$$

$$\alpha_4 = \operatorname{arctg} \frac{d - l_2}{R_2} \text{ (de la ecuación (6.4.9))}$$

$$\alpha_3 = \operatorname{arctg} \frac{2d - l_2}{R_2} \text{ (de la ecuación (6.4.10))}$$

$$R_2 = \sqrt{R^2 - (L_2 + d - l_2)^2} \text{ (de la ecuación (6.4.11))}$$

Sustituyendo los datos numéricos del enunciado:

$$\alpha_3 = \left(1 - \frac{135}{750}\right) + \alpha_4 - \alpha_5 \cdot \left(1 + \frac{135}{750}\right) = 0$$

$$\alpha_3 = \text{Arctg} \frac{265 - l_2}{R_2}$$

$$\alpha_4 = \text{Arctg} \frac{135 - l_2}{R_2}$$

$$\alpha_5 = \text{Arctg} \frac{l_2}{R_2}$$

$$R_2 = \sqrt{10^6 - (885 - l_2)^2}$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de los ángulos de deriva de las ruedas del semirremolque:

$$\alpha_3 \approx 12,99^\circ$$

$$\alpha_4 \approx 1,59^\circ$$

$$\alpha_5 \approx 10,37^\circ$$

3/ Del sistema anterior se obtiene el valor del radio de giro del semirremolque:

$$R_2 \approx 640,74 \text{ cm.}$$

Ejercicio 6.5

6.5.1. Demostrar que un eje equipado con ruedas gemelas ofrece una resistencia al giro, por cada una de las parejas de ruedas, de valor :

$$M_z = -2 K_x \frac{D^2}{R}$$

siendo:

- Z : Eje de referencia de acuerdo con la terminología SAE
- K_x : Rigidez longitudinal del neumático.
- D : Semidistancia entre los planos longitudinales medios de cada una de las ruedas gemelas.

- R : Radio de la trayectoria que describe un punto del eje, equidistante de cada una de las ruedas gemelas de una pareja.

6.5.2. Un semirremolque está equipado con dos ejes tandem y cada eje con ruedas gemelas.

Calcular los valores de las componentes longitudinal y transversal de la fuerza de arrastre, aplicada por el tractor en la 5ª rueda, que es necesaria para producir el giro del semirremolque, en función de los siguientes parámetros:

- K_y : Rigidez de deriva del conjunto de las cuatro ruedas de un eje.
- L : Distancia de la 5ª rueda al primer eje del tandem.
- l : Distancia entre ejes del tandem.
- f_r : Resistencia a la rodadura de las ruedas, supuesta igual para todas ellas.
- P_s : Peso sobre el conjunto de los dos ejes tandem.
- R : Radio mínimo de giro medido en el plano longitudinal medio del vehículo.
- M_z : Momento de guiñada de cada pareja de ruedas gemelas.

Se supone que el giro es a velocidad reducida y constante, y que puede aplicarse un modelo lineal de ruedas condensadas en el plano longitudinal medio del vehículo.

SOLUCION

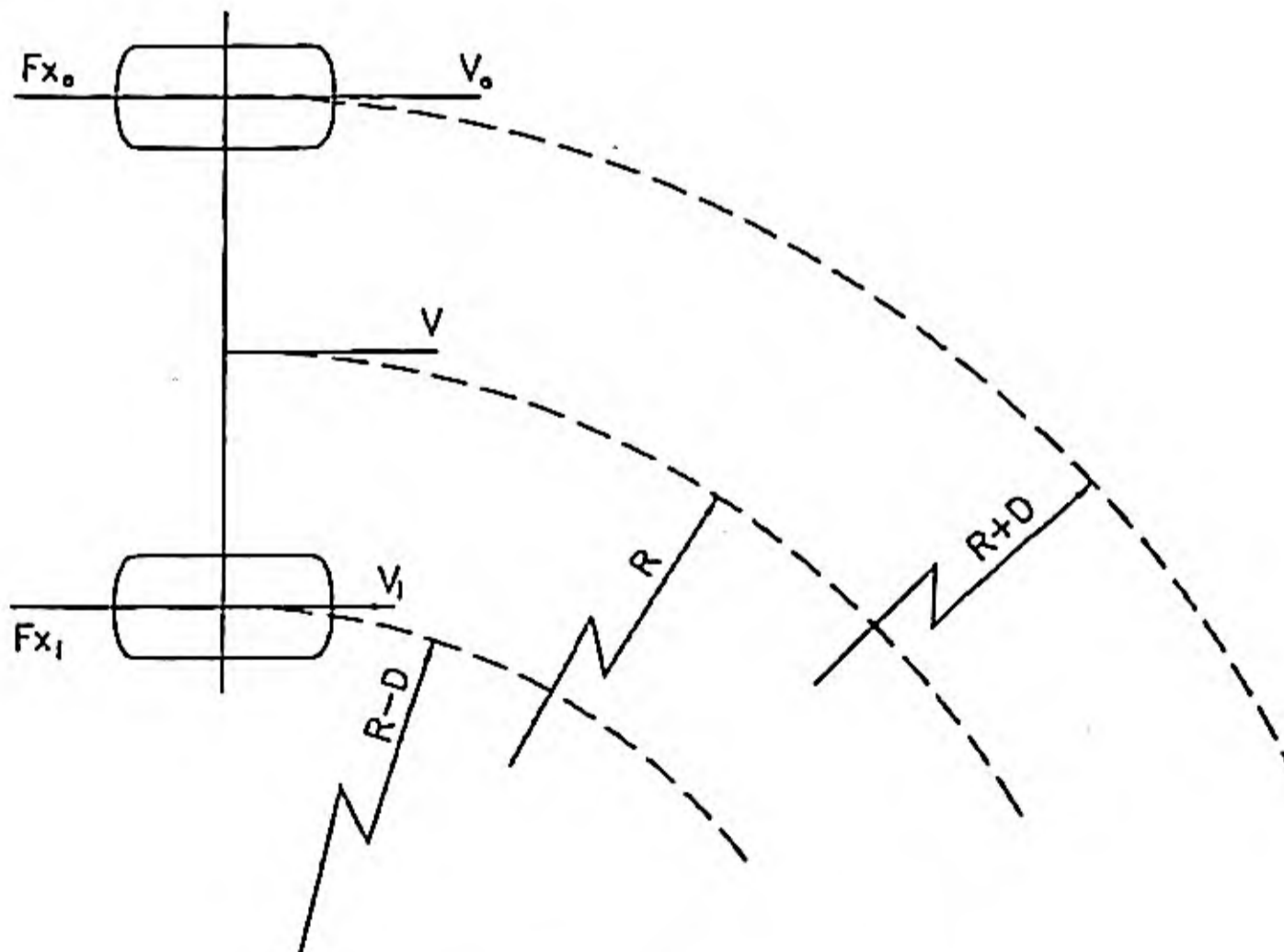


Figura 6.60. Efecto de las ruedas gemelas.

6-A/ De la figura 6.60:

$$V = \omega R = \Omega \cdot r$$

$$V_e = \omega (R + D)$$

$$V_i = \omega (R - D)$$

siendo:

r	=	Radio equivalente de la rueda
Ω	=	Velocidad angular de giro de la rueda
ω	=	La velocidad de giro del vehículo respecto a su eje instantáneo de rotación.

En las anteriores condiciones se producen deslizamientos, ya que las ruedas están obligadas a describir trayectorias de diferentes radios, mientras que la velocidad de rotación, Ω , es idéntica para todas ellas. Por tanto:

$$S_e = 1 - \frac{\Omega \cdot r}{V_e} = 1 - \frac{R}{R + D}$$

$$S_i = 1 - \frac{\Omega \cdot r}{V_i} = 1 - \frac{R}{R - D}$$

Los esfuerzos longitudinales que deben soportar son:

$$F_{xe} = - S_e \cdot K_x = - K_x \cdot \left(1 - \frac{R}{R + D} \right) \quad (1)$$

$$F_{xi} = - S_i \cdot K_x = - K_x \cdot \left(1 - \frac{R}{R - D} \right)$$

La resistencia al giro de la pareja de ruedas gemelas, respecto al centro teórico de ambas será:

$$M_z = F_{xe} \cdot D + F_{xi} \cdot D$$

$$M_z = - k_x \cdot D \cdot \left[1 - \frac{R}{R + D} - \left(1 - \frac{R}{R - D} \right) \right] =$$

$$= - k_x \cdot D \cdot \left[\frac{R}{R - D} - \frac{R}{R + D} \right] = - k_x \cdot D \cdot R \cdot \left[\frac{R + D - R + D}{(R + D)(R - D)} \right] =$$

$$= - k_x \cdot D \cdot R \frac{2D}{R^2 - D^2}$$

Como $D^2 \ll R^2$, entonces:

$$M_z = -2 \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R}$$

6.5.2. Cálculo de las fuerzas de arrastre en la 5ª rueda.

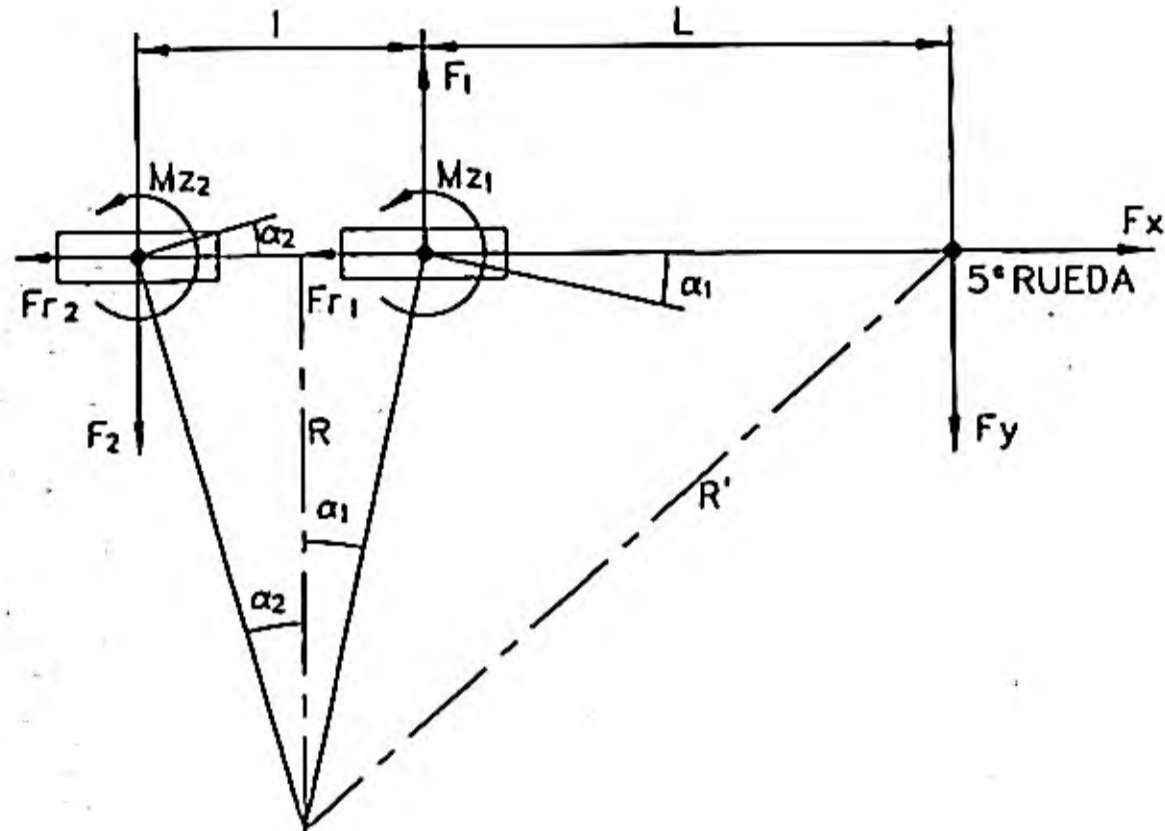


Figura 6.61. Modelo simplificado del semirremolque.

De la figura se obtienen las siguientes relaciones geométricas y las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{l}{R} \\ F_y - F_1 + F_2 &= 0 \\ F_x - F_r1 - F_r2 &= 0 \\ F_y \cdot L - F_2 \cdot l + M_{z1} + M_{z2} &= 0 \end{aligned}$$

los signos negativos de los momentos se consideran implícitos.

Aproximando las tangentes a los ángulos y teniendo en cuenta:

[Dinámica lateral del vehículo.]

$$F_1 = k_1 \cdot \alpha_1 = k \cdot \alpha_1$$

$$F_2 = k_2 \cdot \alpha_2 = k \cdot \alpha_2$$

$$M_{z1} = M_{z2} = -4 \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R}$$

$$F_{r1} + F_{r2} = P_s \cdot f_r$$

entonces quedan las siguientes expresiones:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{R} \quad (1)$$

$$k \cdot \alpha_1 - k \cdot \alpha_2 - F_y = 0 \quad (2)$$

$$F_x = P_s \cdot f_r \quad (3)$$

$$F_y \cdot L - k \cdot \alpha_2 l - 8 \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} = 0 \quad (4)$$

sustituyendo y operando se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{1}{R} - \alpha_2$$

Sustituyendo en (2):

$$k \left(\frac{1}{R} - 2\alpha_2 \right) - F_y = 0$$

$$F_y = -k \left(2\alpha_2 - \frac{1}{R} \right)$$

De (4):

$$\alpha_2 = \frac{1}{k \cdot l} \cdot \left(-8 \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} + F_y \cdot L \right)$$

Sustituyendo en (5):

$$F_y = -k \cdot \left[\frac{2}{k \cdot l} \left(F_y \cdot L - 8 \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} \right) - \frac{l}{R} \right]$$

$$F_y \left(1 + \frac{2L}{l} \right) = \frac{16}{l} \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} + \frac{k \cdot l}{R}$$

$$F_y = \frac{l}{l + 2L} \cdot \left[\frac{16}{l} \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} + \frac{k \cdot l}{R} \right]$$

Entonces las expresiones de las componentes longitudinal y transversal de la fuerza de arrastre, aplicada por el tractor en la 5ª rueda, necesarias para producir el giro del semirremolque son:

$$F_x = P_s \cdot f_r$$

$$F_y = \frac{l}{l + 2L} \cdot \left[\frac{16}{l} \cdot k_x \cdot \frac{D^2}{R} + \frac{k \cdot l}{R} \right]$$

Ejercicio 6.6

Un vehículo automóvil presenta las siguientes características:

Peso sobre el eje delantero	$P_d = 9,5 \text{ kN}$
Peso sobre el eje trasero	$P_t = 8,5 \text{ kN}$
Batalla	$L = 2,7 \text{ m}$
Vía delantera $B_1 = 1,25 \text{ m}$.	Vía trasera $B_2 = 1,30 \text{ m}$.
Altura del c.d.g.	$h = 0,5 \text{ m}$.
Rigidez de deriva de los neumáticos delanteros = 45 kN/rad .	
Rigidez de deriva de los neumáticos traseros = 40 kN/rad .	

- Analícese, realizando los cálculos necesarios, cual de estas situaciones puede resultar potencialmente más peligrosa, desde el punto de vista del comportamiento lateral del vehículo:
 - Reventón de una rueda delantera
 - Reventón de una rueda trasera
- Razonar sobre esquemas, cuales serían las trayectorias previsibles, en ambos casos, si, permaneciendo constante el ángulo de dirección:
 - El conductor frena severamente cuando circula en línea recta.
 - El vehículo circula en curva.

[Dinámica lateral del vehículo.]

3. Suponiendo que, circulando en recta y tras un reventón de la rueda posterior izquierda, el conductor frena de modo que se utilice completamente la fuerza adherente disponible en cada una de las tres ruedas útiles, estimar la dirección de la trayectoria del centro de gravedad del vehículo, en el instante inicial de la frenada.

Considérese como hipótesis que, después del reventón, todo el peso correspondiente al eje trasero gravita sobre la rueda derecha de dicho eje. Valor del coeficiente de adherencia $\mu = 0,8$

SOLUCION

1. Estudio de la estabilidad

Aplicando un modelo lineal de dos ruedas:

Coeficiente de viraje:

$$K_v = \frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_t}{K_{at}} = -0,0007$$

El vehículo es ligeramente sobrevirante, prácticamente neutro.

Velocidad crítica:

$$V_{crit} = \sqrt{\frac{L \cdot g}{-K_v}} = \sqrt{\frac{2,7 \cdot 9,81}{0,0007}} \approx 195 \text{ m/s}$$

$V_{crit} \approx 700 \text{ km/h}$

- 1.1/ Reventón en una rueda trasera

Suponiendo, en el modelo antes utilizado, $K'_{at} = 0$ en la rueda reventada:

$$K_{va} = \frac{9,5}{2,45} - \frac{8,5}{40} = -0,1069$$

El vehículo es sobrevirante y la velocidad crítica, por encima de la cual es inestable:

$$V_{cn} = \sqrt{\frac{2,7 \cdot 9,81}{0,1069}} \approx 15,74 \text{ m/s} = 56,67 \text{ km/h}$$

1.2/ Reventón de una rueda delantera

$$K_{vb} = \frac{9,5}{45} - \frac{8,5}{2,40} = 0,1049$$

El vehículo muestra comportamiento subvirador, y, por tanto, estabilidad en todo el rango de velocidades.

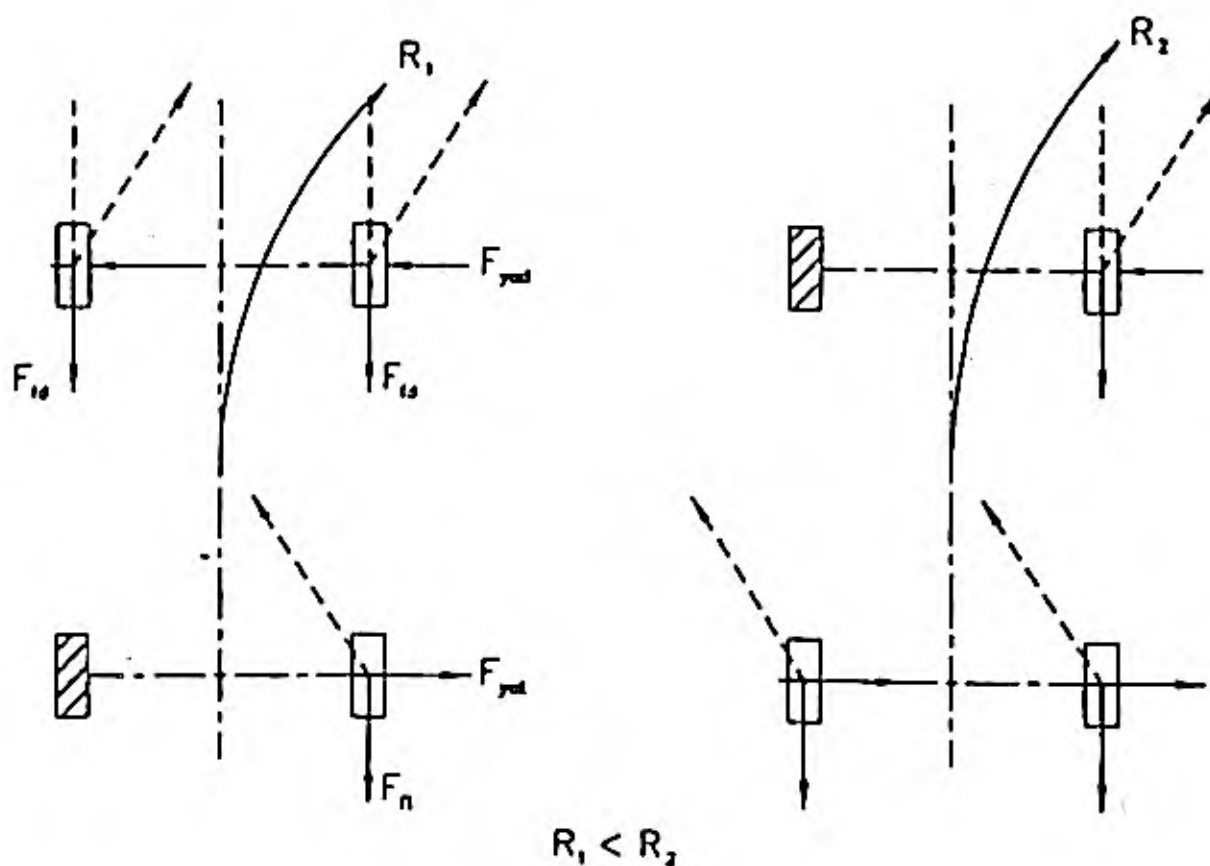
La inestabilidad direccional del vehículo, que se presenta en el caso de reventón de una rueda trasera, genera unas condiciones potenciales de mayor inseguridad, si bien el que pudiese sobrevenir un accidente y la gravedad de éste, depende de otros factores como son: control direccional, acción del conductor, tráfico y vía.

2. Trayectorias previsibles en los supuestos indicados

2.1/ Frenada severa circulando en recta.

a) Reventón de rueda trasera

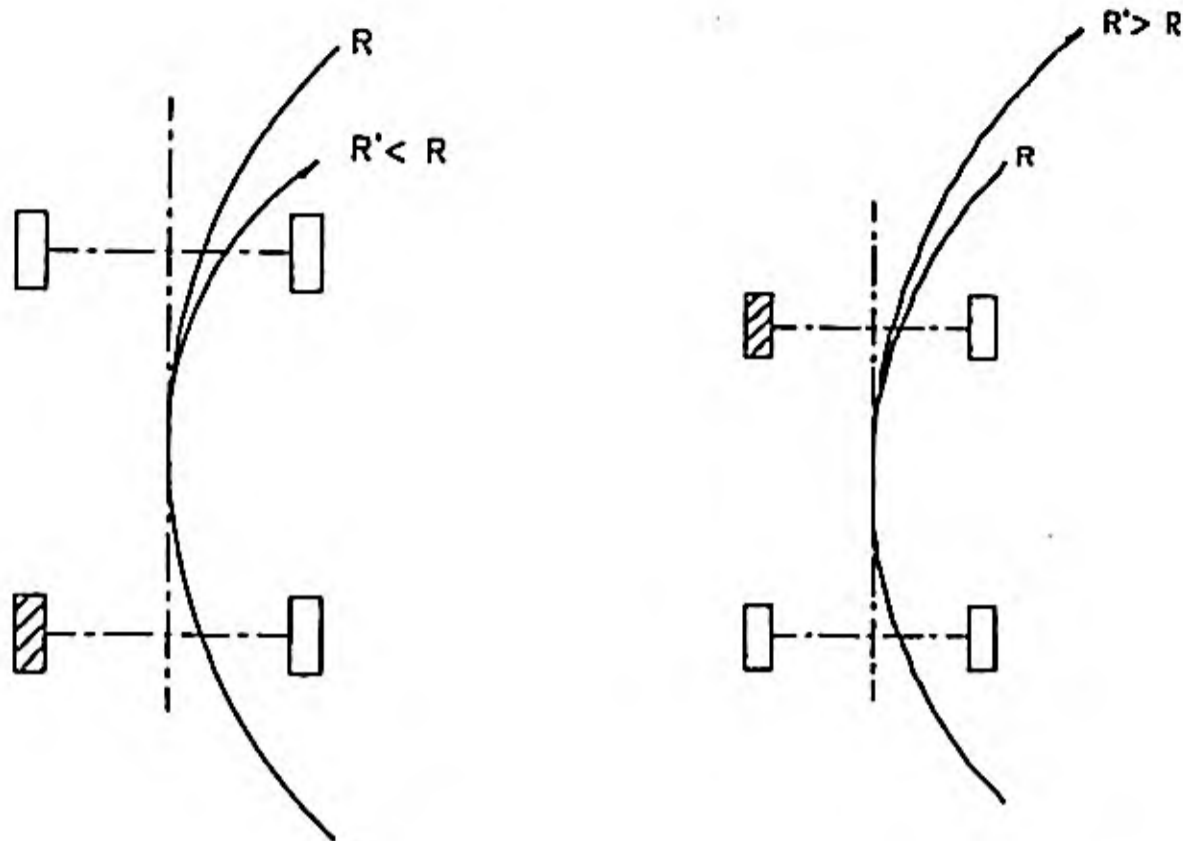
b) Reventón en rueda delantera



2.2/ El vehículo circula en curva

a) Reventón de rueda trasera

b) Reventón en rueda delantera



3. Cálculo de la dirección de la trayectoria

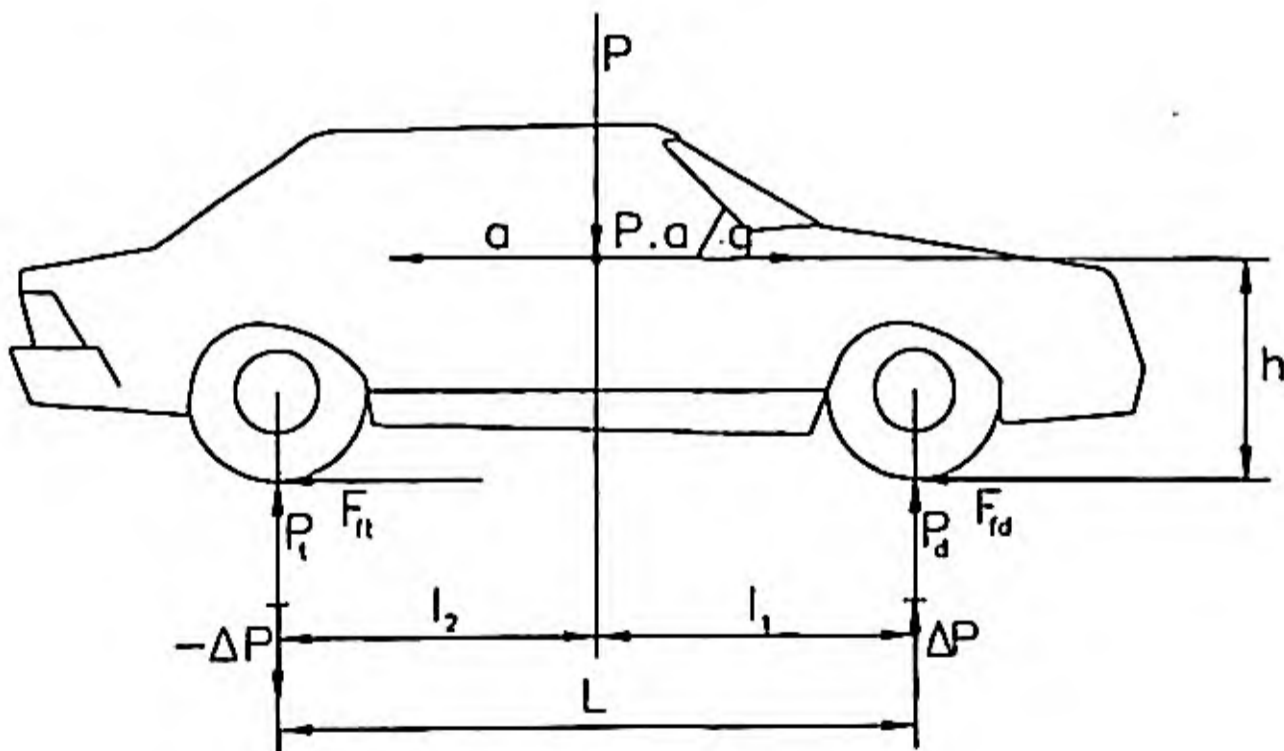


Figura 6.62. Modelo simplificado

Considerando un máximo aprovechamiento de la adherencia durante el frenado, la deceleración comunicada al vehículo será:

$$F_{rd} + F_n = P \cdot \mu = \frac{P}{g} a ; a = g \cdot \mu \approx 7,85 \text{ m/s}^2$$

y la transferencia de carga entre ejes:

$$\frac{P}{g} a \cdot h = \Delta P \cdot L$$

$$\Delta P = \frac{P \cdot \mu \cdot h}{L} = \frac{18 \cdot 0,8 \cdot 0,5}{2,7} = 2,67 \text{ kN}$$

$$F_{zd} = 9,5 + 2,67 = 12,17 \text{ kN} ; F_{rd} = F_{zd} \cdot \mu = 9,74 \text{ kN}$$

$$F_{zt} = 8,5 - 2,67 = 5,83 \text{ kN} ; F_{nt} = F_{zt} \cdot \mu = 4,66 \text{ kN}$$

$$P \cdot l_1 = P_t \cdot L$$

$$l_1 = \frac{8,5 \cdot 2,7}{18} = 1,275 \text{ m}$$

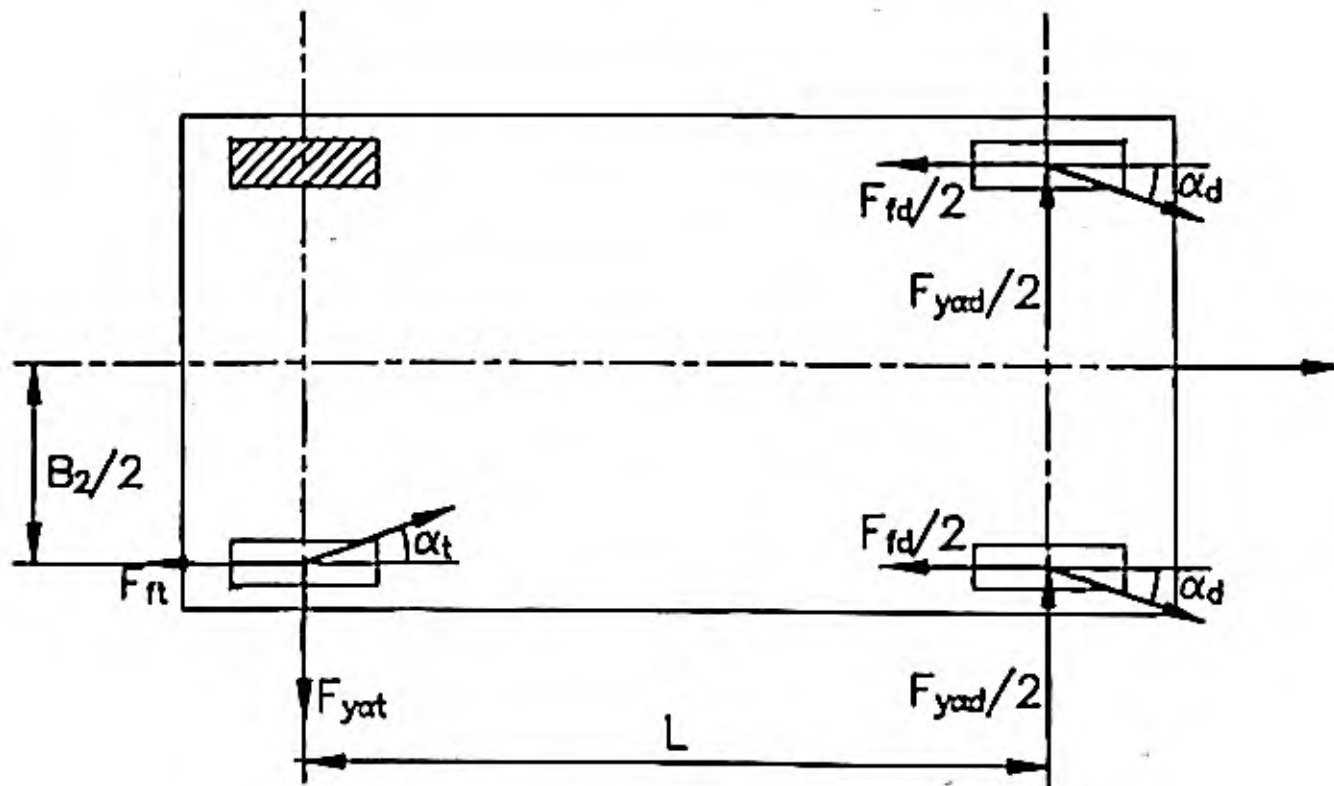


Figura 6.63. Vehículo en planta.

La diferencia de fuerzas de frenado en el eje trasero produce un momento de guiñada que tiende a equilibrarse con esfuerzos laterales de rozamiento:

$$F_{y_{a1}} = F_{y_{a2}} = F_{y_{\alpha}}$$

$$F_{y_{\alpha}} = \frac{4,66 \cdot \frac{1,3}{2}}{2,7} = 1,12 \text{ kN}$$

$$\alpha_d = \frac{1,12}{2,45} = 0,0124 \text{ rad} \quad \alpha_d = 0,71^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{1,12}{40} = 0,0280 \text{ rad} \quad \alpha_1 = 1,60^\circ$$

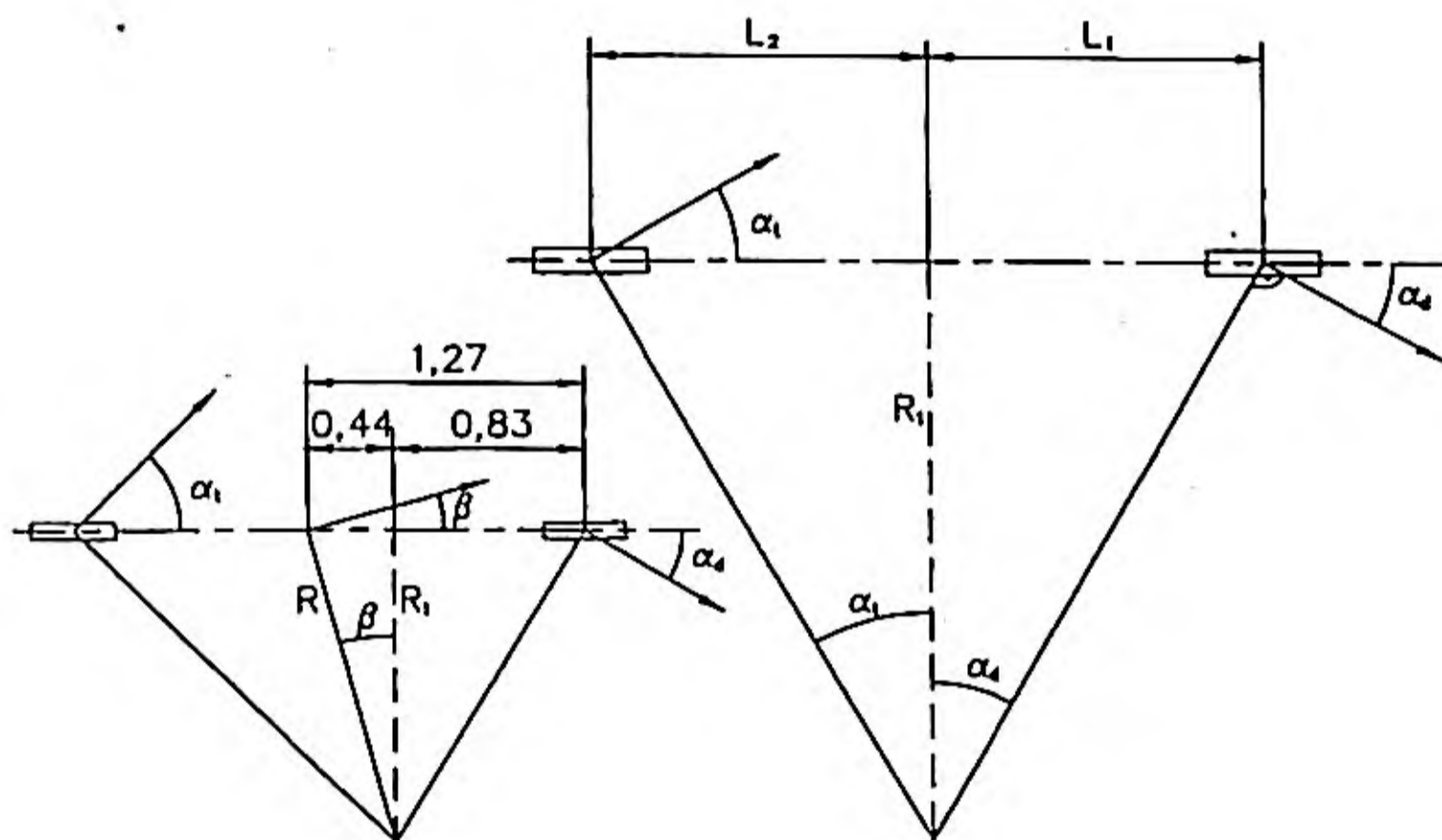


Figura 6.64. Método lineal de dos ruedas.

$$R_1 = \cotg \alpha_1 \cdot L_2 = \cotg \alpha_d L_1 = \cotg \alpha_1 (L - L_1)$$

Siendo:

$$L_1 = \frac{L \cotg \alpha_1}{\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_d} = \frac{2,7 \cotg 1,6^\circ}{\cotg 1,6^\circ + \cotg 0,71^\circ} = 0,830 \text{ m.}$$

Entonces:

$$R_1 = \cotg \alpha_d L_1 = 0,83 \cotg 0,71 = 66,976 \text{ m}$$

$$\beta = \arctg \frac{0,44}{66,976} = 0,38^\circ$$

$$R = \frac{R_1}{\cos \beta} = R_1$$

Ejercicio 6.7

Un circuito de ensayos cuenta con una pista de velocidad, con varios carriles de diferentes peraltes y radios constantes. Uno de dichos carriles tiene un peralte del 84% y 100 m. de radio en su línea media.

Sobre el carril indicado circula un vehículo cuyas características fundamentales son las siguientes:

- Peso Total: 1400 daN.
- Batalla: 2,7 m.
- Distancia del eje delantero al plano transversal que contiene al centro de gravedad: 1,2 m.

Está equipado de neumáticos de tamaño 7.6-15, cuyas características laterales se indican en la figura 6.63.

Calcular:

1. Velocidad a la que el vehículo circulará por el referido carril siguiendo una trayectoria estable sobre su línea media, sin necesidad de aplicar un par de dirección. Estimar, para esta situación, el ángulo medio de giro de las ruedas directrices.
2. Si el vehículo circula a 161 Km/h, estimar los ángulos de deriva de las ruedas y el ángulo de giro de las ruedas directrices.

Para resolver los cálculos aproximados que se solicitan, utilizar un modelo lineal de vehículo de dos ruedas.

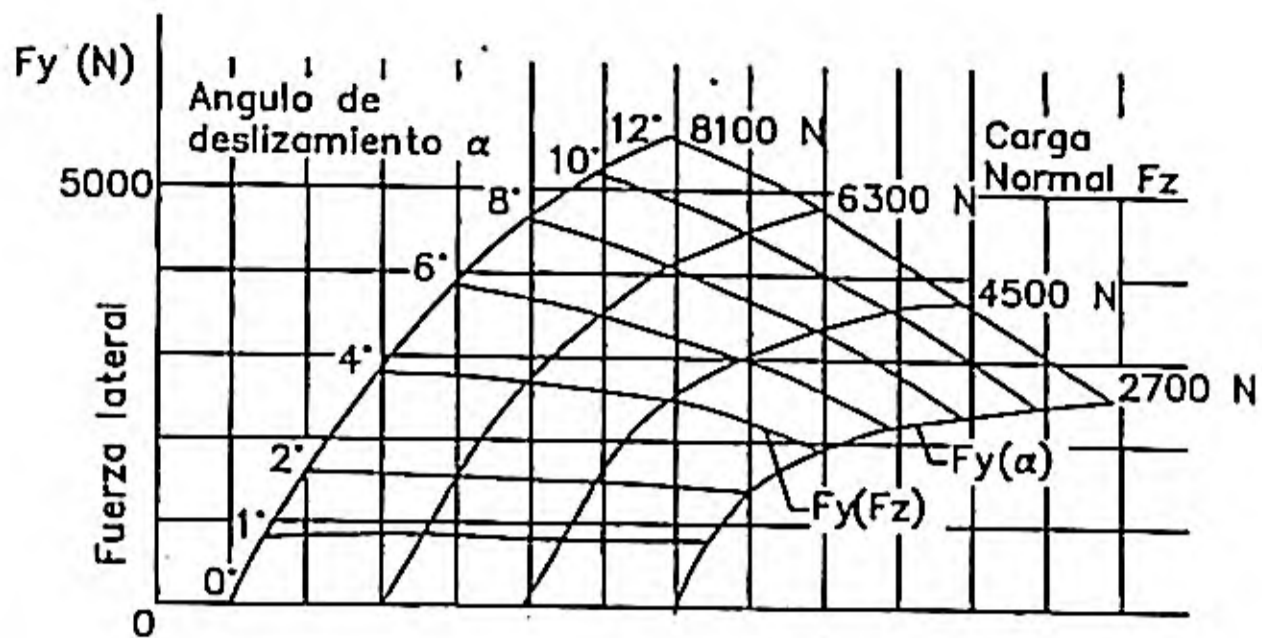


Figura 6.65. Características laterales del un neumático 7.6-15.

SOLUCION

Las fuerzas que actúan sobre el c.d.g. del vehículo, representadas sobre una sección transversal de la pista son las que se representan en la figura 6.64:

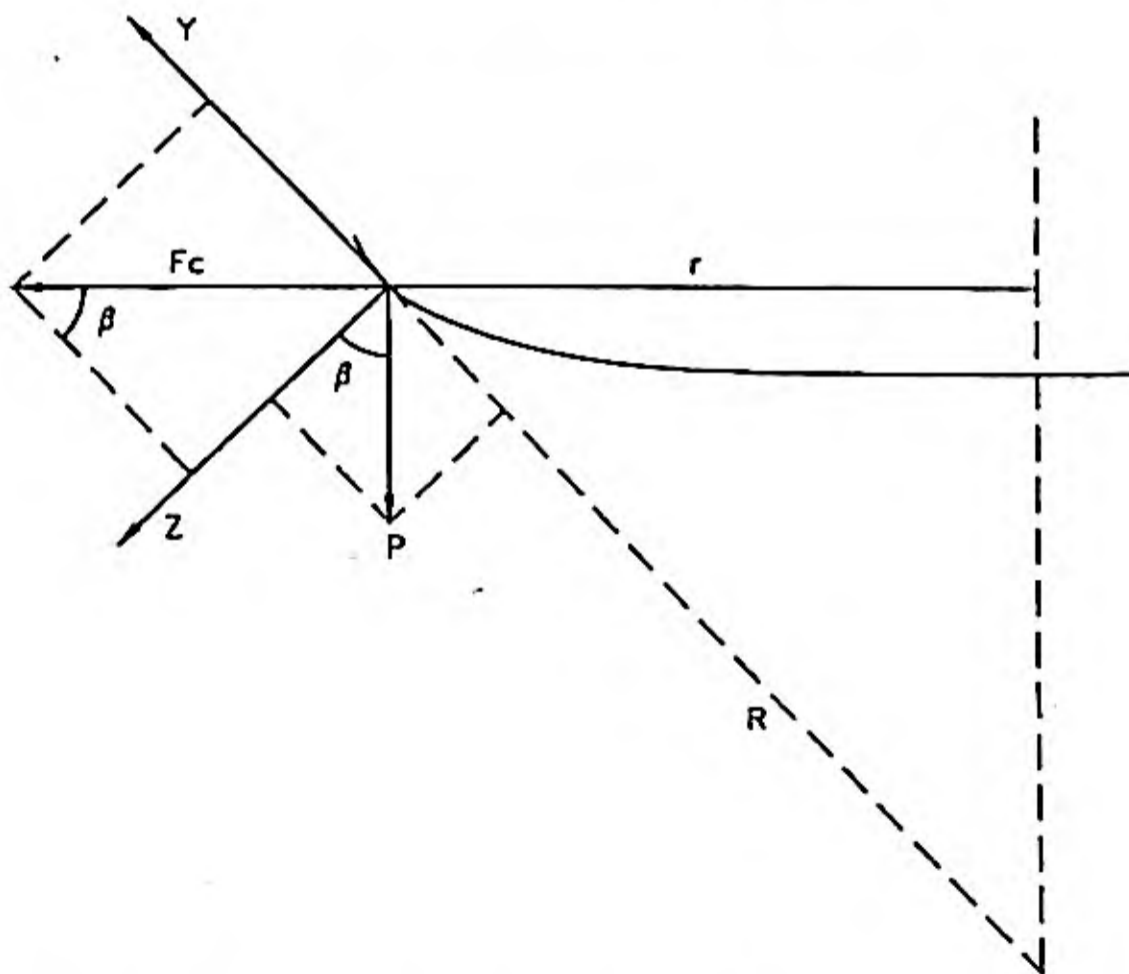


Figura 6.66. Fuerzas sobre una sección transversal de la pista.

El valor de la fuerza centrífuga es:

$$F_c = \frac{v^2 \cdot P}{r \cdot g}$$

Ecuaciones de equilibrio en las direcciones Y y Z:

$$F_y = F_c A \cos \beta - P A \sin \beta$$

$$F_z = F_c A \sin \beta + P A \cos \beta$$

Esfuerzos transversales en los neumáticos:

$$F_{yd} = F_y \cdot \frac{l_2}{L} = P \cdot \frac{l_2}{L} \cdot \left[\frac{v^2 \cos \beta}{r \cdot g} - \sin \beta \right] = P_d \cdot \left[\frac{v^2 \cdot \cos \beta}{r \cdot g} - \sin \beta \right]$$

$$F_{yt} = F_y \cdot \frac{l_1}{L} = P \cdot \frac{l_1}{L} \cdot \left[\frac{v^2 \cdot \cos \beta}{r \cdot g} - \sin \beta \right] = P_t \cdot \left[\frac{v^2 \cdot \cos \beta}{r \cdot g} - \sin \beta \right]$$

Fuerzas en los neumáticos, perpendiculares a la superficie de rodadura:

$$F_{zd} = F_z \cdot \frac{l_2}{L} = P_d \cdot \left[\frac{v^2 \cdot \sin \beta}{r \cdot g} + \cos \beta \right]$$

$$F_{zt} = F_z \cdot \frac{l_1}{L} = P_t \cdot \left[\frac{v^2 \cdot \sin \beta}{r \cdot g} + \cos \beta \right]$$

La circulación sin actuación sobre el volante, se produce cuando $F_{yd} = 0$, lo cual implica, a su vez, que $F_{yt} = 0$.

por tanto:

$$\frac{v^2 \cdot \cos \beta}{r \cdot g} - \sin \beta = 0$$

$$v^2 = r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \beta$$

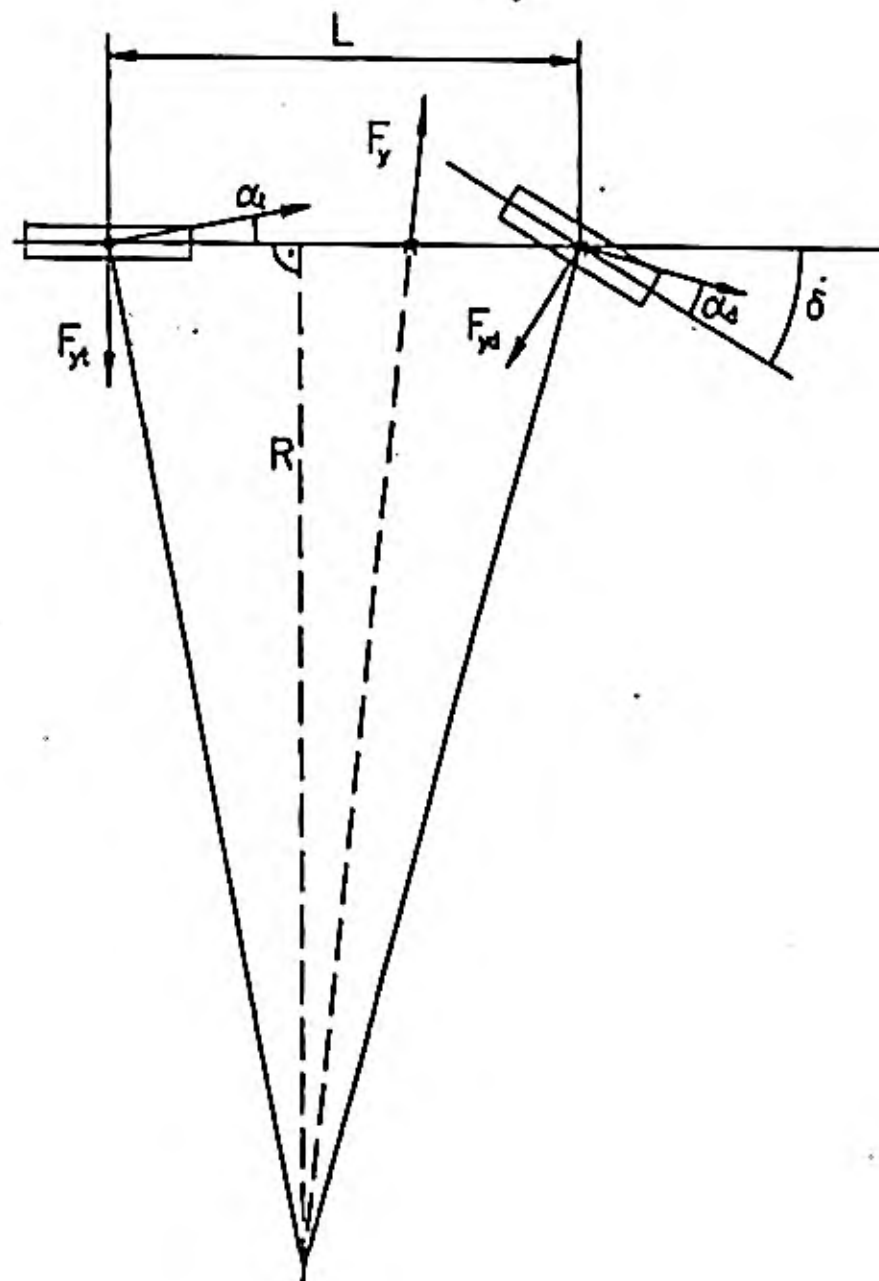


Figura 6.67. Modelo de dos ruedas.

El ángulo medio de giro de las ruedas directrices será:

$$\delta = L/R + \alpha_d - \alpha_t.$$

$$R = r/\cos \beta$$

Como: $F_y = 0$; entonces: $\alpha_d = \alpha_t = 0$

$$\delta = L/R = L/r \text{ A } \cos \beta$$

1. Cálculo de la velocidad del vehículo sin aplicar un par de dirección.

Sustituyendo los valores numéricos del enunciado y operando:

[Teoría de los vehículos automóviles.]

$$V = \sqrt{r \cdot g \cdot \operatorname{tg} \beta} = 28,71 \text{ m/s} \approx 103,3 \text{ km/h}$$

$$\delta = \cos \beta \cdot \frac{L}{r} = 0,021 \text{ rad.} \approx 1,19^\circ$$

2. Vehículo circulando a $V = 161 \text{ km/h}$.

$$V = 161 \text{ km/h} = 44,72 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en las expresiones obtenidas en el apartado anterior los siguientes valores:

$$F_y) \quad \frac{V^2 \cdot \cos \beta}{r \cdot g} - \operatorname{sen} \beta = 0,92$$

$$F_z) \quad \frac{V^2 \cdot \operatorname{sen} \beta}{r \cdot g} + \cos \beta = 2,08$$

$$P_d = 777,8 \text{ daN}$$

$$P_i = 622,2 \text{ daN}$$

entonces:

$$F_{yd} = 715,6 \text{ daN} \quad F_{yi} = 572,4 \text{ daN}$$

$$F_{zd} = 1617,8 \text{ daN} \quad F_{zi} = 1294,2 \text{ daN}$$

los esfuerzos medios por rueda:

$$F_{yd}^r = 3578 \text{ N} \quad F_{yi}^r = 2862 \text{ N}$$

$$F_{zd}^r = 8089 \text{ N} \quad F_{zi}^r = 6471 \text{ N}$$

de las curvas $F_y = f(F_z \alpha)$:

$$\alpha_d = 5,5^\circ$$

$$\alpha_i = 4,5^\circ$$

$$\delta = L/r \text{ A } \cos \beta + \alpha_d - \alpha_i = 1,19^\circ + 5,5^\circ - 4,5^\circ = 2,19^\circ$$

Ejercicio 6.8.

Considerando un vehículo de eje delantero directriz y dos ejes en tandem traseros. Deducir una expresión equivalente a la siguiente:

$$\delta = \frac{L}{R} + K_v \cdot \frac{V^2}{(g \cdot R)}$$

para el análisis del comportamiento direccional del vehículo.

Puede aplicarse un modelo lineal simplificado de una rueda por eje y considerar los siguientes parámetros:

- P = Peso total del vehículo
- K_1 = Rigidez de deriva de la rueda equivalente del eje delantero (eje 1).
- K_2 = Rigidez de deriva de la rueda equivalente del eje más adelantado del tandem (eje 2).
- K_3 = Rigidez de deriva de la rueda equivalente del eje más retrasado del tandem (eje 3).
- L = Distancia entre los ejes 1 y 2.
- L' = Distancia entre los ejes 2 y 3.
- l_1 = Distancia del centro de gravedad al eje 1 (proyección horizontal).
- l_2 = Distancia del centro de gravedad al eje 2 (proyección horizontal).

Se supone que todos los ángulos (dirección y deriva) son muy pequeños a los efectos de realizar las simplificaciones usuales, o lo que es lo mismo, que R es mucho mayor que L y que la fuerza lateral es relativamente pequeña.

SOLUCION

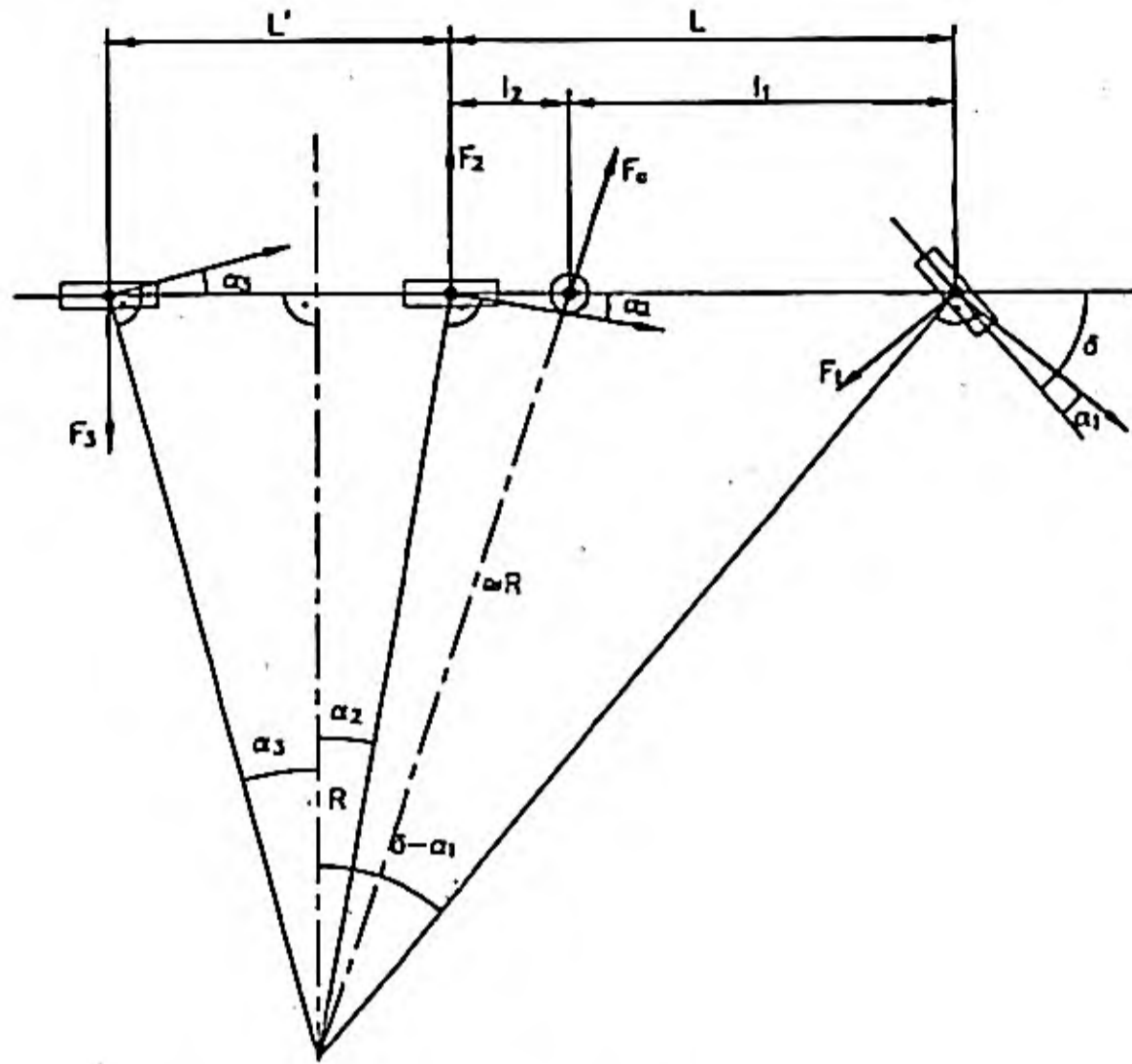


Figura 6.68. Modelo de tres ruedas.

Suponiendo que $L \ll R$ y $\delta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, muy pequeños:

$$\delta - \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{L + L'}{R} \quad (1)$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{L'}{R} \quad (2)$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$F_c + F_2 - F_1 - F_3 = 0 \quad (3)$$

$$F_1 \cdot L - F_c \cdot l_2 - F_3 \cdot L' = 0 \quad (4)$$

siendo:

$$F_c = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$F_1 = K_1 \cdot \alpha_1$$

$$F_2 = K_2 \cdot \alpha_2$$

$$F_3 = K_3 \cdot \alpha_3$$

sustituyendo en (3) y (4):

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} + K_2 \cdot \alpha_2 - K_3 \cdot \alpha_3 - K_1 \cdot \alpha_1 = 0 \quad (5)$$

$$K_1 \cdot \alpha_1 \cdot L - \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} l_2 - K_3 \cdot \alpha_3 \cdot L' = 0 \quad (6)$$

De la expresión (5):

$$\alpha_1 = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{K_1} + \frac{K_2}{K_1} \cdot \alpha_2 - \frac{K_3}{K_1} \cdot \alpha_3 \quad (7)$$

De la expresión (6):

$$\alpha_3 = \frac{K_1 \cdot L}{K_3 \cdot L'} \cdot \alpha_1 - \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'} \quad (8)$$

De la expresión (2):

$$\alpha_2 = \frac{L'}{R} \cdot \alpha_3 = \frac{L'}{R} \cdot \frac{K_1 \cdot L}{K_3 \cdot L'} \cdot \alpha_1 + \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'} \quad (9)$$

sustituyendo (8) y (9) en (7):

$$\alpha_1 = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{K_1} + \frac{K_2}{K_1} \cdot \left[\frac{L'}{R} \cdot \frac{K_1 \cdot L}{K_3 \cdot L'} \cdot \alpha_1 + \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'} \right] - \frac{K_3}{K_1} \cdot \left[\frac{K_1 \cdot L}{K_3 \cdot L'} \cdot \alpha_1 - \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'} \right]$$

$$\alpha_1 \cdot \left[1 + \frac{K_2}{K_3} \cdot \frac{L}{L'} + \frac{L}{L'} \right] = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \left[\frac{1}{K_1} + \frac{K_2 \cdot l_2}{K_1 \cdot K_3 \cdot L'} + \frac{l_2}{K_1 \cdot L'} \right] + \frac{K_2 \cdot L'}{K_1 \cdot R}$$

$$\alpha_1 \cdot \frac{L}{L'} \left[1 + \frac{L'}{L} + \frac{K_2}{K_3} \right] = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_1 \cdot L'} \left[1 + \frac{L'}{l_2} + \frac{K_2}{K_3} \right] + \frac{K_2 \cdot L'}{K_1 \cdot R} \quad (10)$$

considerando:

$$\frac{K_2 \cdot L'}{K_1 \cdot R} \approx 0$$

llamando:

$$A = 1 + \frac{L'}{L} + \frac{K_2}{K_3}$$

$$B = 1 + \frac{L'}{l_2} + \frac{K_2}{K_3}$$

De la expresión (10) se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L} \cdot \frac{1}{K_1} \cdot \frac{B}{A} \quad (11)$$

haciendo:

$$K'_1 = K_1 \cdot \frac{A}{B}$$

$$P'_1 = P \cdot \frac{l_2}{L}$$

resulta:

$$\alpha_1 = \frac{V^2}{g \cdot R} \cdot \frac{P'_1}{K'_1} \quad (12)$$

sustituyendo la expresión (11) en (8):

$$\alpha_3 = \frac{K_1 \cdot L}{K_3 \cdot L'} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L} \cdot \frac{1}{K_1} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'}$$

$$\alpha_3 = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L'} \cdot \frac{1}{K_3} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{K_3 \cdot L'}$$

$$\alpha_3 = \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L' \cdot K_3} \cdot \left[\frac{B}{A} - 1 \right]$$

haciendo:

$$P'_3 = P \cdot \frac{l_2}{L'}$$

$$K'_3 = \frac{K_3}{\frac{B}{A} - 1}$$

resulta:

$$\alpha_3 = \frac{V^2}{g \cdot R} \cdot \frac{P'_3}{K'_3} \quad (13)$$

sustituyendo (12) y (13) en (1):

$$\delta = \frac{L + L'}{R} + \frac{V^2}{g \cdot R} \left[\frac{P'_1}{K'_1} - \frac{P'_3}{K'_3} \right]$$

$$\delta = \frac{L + L'}{R} + K'_v \cdot \frac{V^2}{g \cdot R}$$

donde:

$$K'_v = \frac{P'_1}{K'_1} - \frac{P'_3}{K'_3} \text{ coeficiente de viraje}$$

ó también:

$$K'_v = \frac{P \cdot l_2}{A} \cdot \left[\frac{B}{L \cdot K_1} - \frac{B - A}{L' \cdot K_3} \right]$$

<u>Valor de K'_v</u>	<u>comportamiento direccional</u>
Si:	
$K'_v = 0$	Neutro
$K'_v < 0$	Sobrevirante
$K'_v > 0$	Subvirante

Ejercicio 6.9.

Un vehículo automóvil presenta las siguientes características generales:

- Batalla = 2,5 m.
- Peso total = 15 kN.
- Momento de inercia respecto al eje vertical que pasa por el centro de gravedad = 2.200 kg . m².
- Rigidez de deriva media de cada neumático = 40 kN/Rad
- Coeficiente aerodinámico de momento de guiñada $C_{mz} = 1'12 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$

Las diferentes condiciones de carga pueden hacer variar la posición del centro de gravedad de manera que l_1/L adquiera los valores límite 0,4 ó 0,6.

Estudiar las características direccionales y condiciones de estabilidad para la variación de la posición de carga indicada y para un intervalo de variación $K' = K'_{ad}/K'_{st}$ entre 0,4 y 1,4.

Considérese la máxima velocidad del vehículo $V_{max} = 180 \text{ Km/h}$ (50 m/s).

Utilícese la aproximación que proporciona el modelo lineal de dos ruedas. La distancia l_1 es la medida desde el eje delantero al plano transversal que contiene al c.d.g.

SOLUCION:

$$\text{Caso 1: } \frac{l_1}{L} = 0,4; l_1 = 1 \text{ m}; l_2 = 1,5 \text{ m.}$$

$$\text{Caso 2: } \frac{l_1}{L} = 0,6; l_1 = 1,5 \text{ m}; l_2 = 1 \text{ m.}$$

[Dinámica lateral del vehículo.]

Al ser la rigidez de deriva media de cada neumático $K_{\alpha} = 40 \text{ kN/rad}$, se considera una rigidez de deriva total:

$$K_{\alpha d}^* + K_{\alpha t} = 160 \text{ kN/rad} = 160.000 \text{ N/rad.}$$

como $K' = K_{\alpha d}^*/K_{\alpha t}$; sustituyendo se obtiene:

$$K_{\alpha t} = \frac{160.000}{K' + 1}$$

Si se consideran los valores extremos de K' se obtienen dos posibilidades para cada uno de los casos indicados.

a/ $K' = 0,4$ $K_{\alpha t} = 114.286 \text{ N/rad}$
 $K_{\alpha d}^* = 45.714 \text{ N/rad}$

b/ $K' = 1,4$ $K_{\alpha t} = 66.667 \text{ N/rad}$
 $K_{\alpha d}^* = 93.333 \text{ N/rad}$

CARACTERISTICAS DIRECCIONALES EN REGIMEN ESTACIONARIO

Situaciones extremas:

(I) CASO (2,b):

$$K_{\alpha t} A l_2 - K_{\alpha d}^* A l_1 = -73.333 \text{ N A m/rad}$$

(II) CASO (1,a)

$$K_{\alpha t} A l_2 - K_{\alpha d}^* A l_1 = 125.715 \text{ N A m/rad}$$

Variación de δ/δ_0 y β/β_0

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 + \frac{K_{\alpha t} \cdot l_2 - K_{\alpha d}^* \cdot l_1}{K_{\alpha t} \cdot K_{\alpha d}^* \cdot L^2} \cdot M \cdot V^2 - \frac{C_{mz}}{K_{\alpha t} \cdot K_{\alpha d}^* \cdot L^2} \cdot V^4$$

$$\frac{\beta}{\beta_0} = 1 - \frac{l_1}{K_{\alpha t} \cdot l_2 \cdot L} \cdot M \cdot V^2$$

$$(I) \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)_I = 1 + \frac{-73333}{66667 \cdot 93333 \cdot 2,5^2} \cdot \frac{15000}{9,81} V^2 - \frac{1,12}{66667 \cdot 93333 \cdot 2,5^2}$$

$$V^4 = 1 - 2,88 \cdot 10^{-3} V^2 - 2,88 \cdot 10^{-11} V^4$$

$$\left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)_I = 1 - 13,76 \cdot 10^{-3} \cdot V^2$$

$$(II) \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)_{II} = 1 + 5,89 \cdot 10^{-3} \cdot V^2 - 3,43 \cdot 10^{-11} \cdot V^4$$

$$\left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)_{II} = 1 - 3,57 \cdot 10^{-3} \cdot V^2$$

Particularizando para algunos valores de V se obtienen los resultados que se indican en la tabla siguiente:

		I		II	
V (m/s)	V(km/h)	δ/δ_0	β/β_0	δ/δ_0	β/β_0
10	36	0,71	-0,37	1,58	0,64
30	108	-1,59	-11,38	6,30	-2,21
50	180	-6,20	-33,4	15,73	-7,90

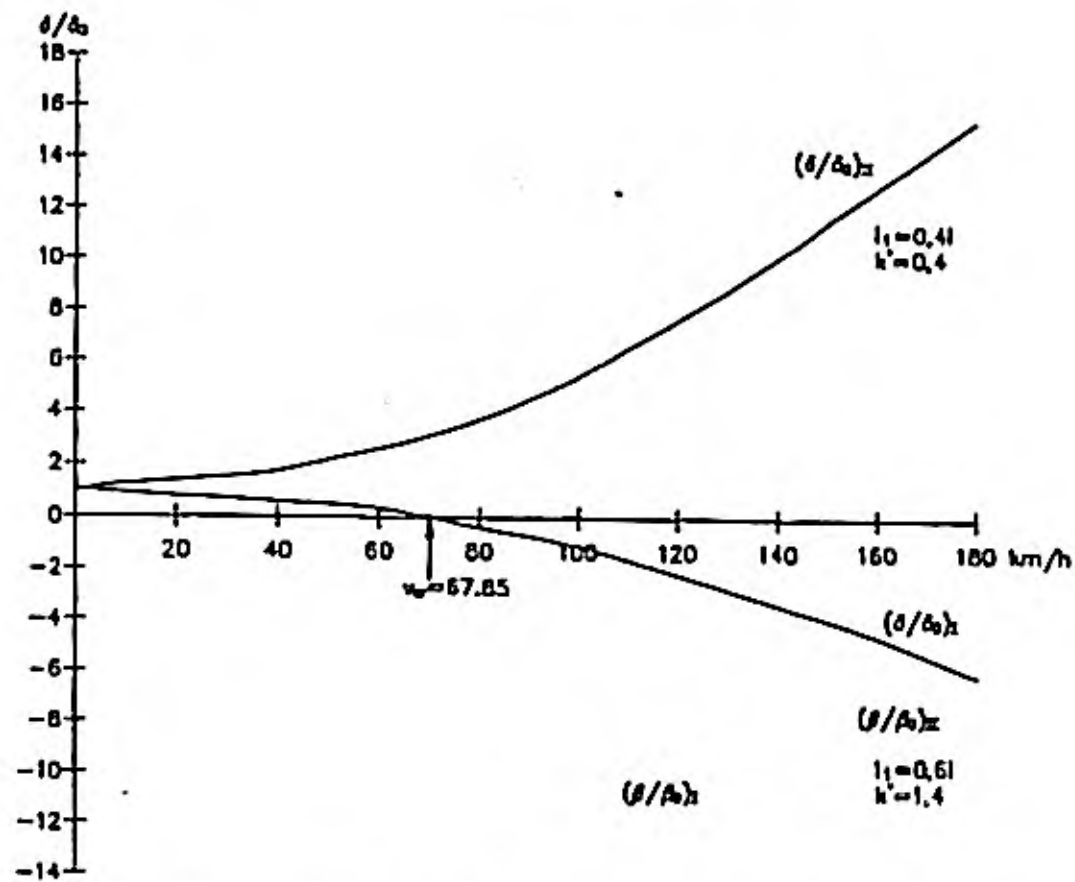
En el caso I el vehículo se comporta como SOBREVIRANTE a partir de una velocidad superior a 36 km/h e inferior a 108 km/h.

En la figura 6.69 se representan los valores de la tabla.

El límite entre el comportamiento estable e inestable se obtiene para $\delta/\delta_0 = 0$, lo que ocurre a:

$$V \approx 18,71 \text{ m/s} \approx 67,36 \text{ km/h.}$$

[Dinámica lateral del vehículo.]



VARIACION DE $(\psi/\alpha)_z$ (---) Y $(\delta/\alpha)_z$ (—) CON LA VELOCIDAD PARA DOS CASOS:
 I-VEHICULO SOBREVIRANTE A PARTIR DE 67.85 km/h
 II-VEHICULO SUBVIRANTE

Figura 6.69. Resultados para los dos tipos de comportamiento direccional.

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD

La solución de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea del movimiento, utilizada para el estudio de la estabilidad es:

$$\lambda_{1,2} = -K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - K_2}$$

siendo:

$$K_1 = \frac{I_2 \cdot (K_{at} + K_{ad}^{\circ}) + M \cdot (K_{ad}^{\circ} l_1^2 + K_{at} l_2^2)}{2 \cdot I_2 \cdot M \cdot V}$$

$$K_2 = \frac{L^2 \cdot K_{at} \cdot K_{ad}^{\circ} + (K_{at} \cdot l_2 - K_{ad}^{\circ} \cdot l_1) \cdot M \cdot V^2 - M \cdot C_M \cdot V^4}{I_2 \cdot M \cdot V^2}$$

Sustituyendo $K' = K_{ad}^{\circ} / K_{at}$ y operando:

$$K_1 = \frac{1}{2 \cdot M \cdot V} \cdot (K_{ad} + K_{at}) + \frac{l_1^2}{2 \cdot I_z \cdot V} \cdot \left(K' + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right) \cdot \frac{K_{at} + K_{ad}}{K' + 1} =$$

$$= \frac{160000}{2 \cdot \frac{15000}{9,81} \cdot 50} + \frac{l_1^2}{2 \cdot 2200 \cdot 50} \left(K' + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right) \cdot \frac{160000}{K' + 1}$$

$$K_1 = 1,05 + 0,73 \left(K' + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right) \frac{l_1^2}{K' + 1}$$

Operando para K_2 :

$$K_2 = \frac{L^2}{I_z \cdot M \cdot V^2} \cdot \frac{(K_{ad} + K_{at})^2 \cdot K'}{(1 + K')^2} + \frac{l_1 \left(\frac{l_2}{l_1} - K' \right) \cdot (K_{ad} + K_{at})}{I_z \cdot (1 + K')} - \frac{C_M}{I_z} \cdot V^2$$

$$K_2 = \frac{2,5^2}{2200 \cdot \frac{15000}{9,81} \cdot 50^2} \cdot \frac{160000^2 \cdot K'}{(1 + K')^2} + \frac{160000}{2200} \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} - K' \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1 + K'} - \frac{1,12}{2200} \cdot 2500$$

$$K_2 = 19,06 \frac{K'}{(1 + K')^2} + 72,73 l_1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} - K' \right) \cdot \frac{1}{1 + K'} - 1,27$$

CASO 1

$$\frac{l_1}{L} = 0,4 \quad l_1 = 1 \quad \frac{l_2}{l_1} = 1,5$$

$$K_{11} = 1,05 + 0,73 (K' + 2,25) \frac{1}{1 + K'}$$

$$K_{21} = \frac{19,06 K'}{(1 + K')^2} + 72,73 \cdot \frac{1,5 - K'}{1 + K'} - 1,27$$

CASO 2

$$\frac{l_1}{L} = 0,6 \quad l_1 = 1,5 \quad \frac{l_2}{l_1} = 0,67$$

$$K_{12} = 1,05 + 1,64 (K' + 0,44) \frac{1}{1 + K'}$$

$$K_{22} = \frac{19,06 K'}{(1 + K')^2} + 109,10 \cdot \frac{0,67 - K'}{1 + K'} - 1,27$$

Para diferentes valores de K' se obtienen los valores de K₁, K₂, y con ellos la parte real de las soluciones λ_{1,2} (R_c) que se representan en las tablas siguientes:

CASO 1

l ₁ /L = 0,4	K'						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4
K ₁₁	2,43	2,35	2,29	2,24	2,19	1,18	2,16
K ₂₁	59,76	44,11	31,72	21,68	13,37	9,74	6,39
R _{c1}	-2,43	-2,35	-2,29	-2,24	-2,19	-2,18	-2,16

CASO 2

l ₁ /L = 0,6	K'						
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4
K ₁₂	2,03	2,12	2,18	2,23	2,27	2,29	2,31
K ₂₂	23,66	7,97	-4,44	-14,51	-22,83	-26,47	-29,82
R _{c2}	-2,03	-2,12	0,85	2,18	3,02	3,34	3,62

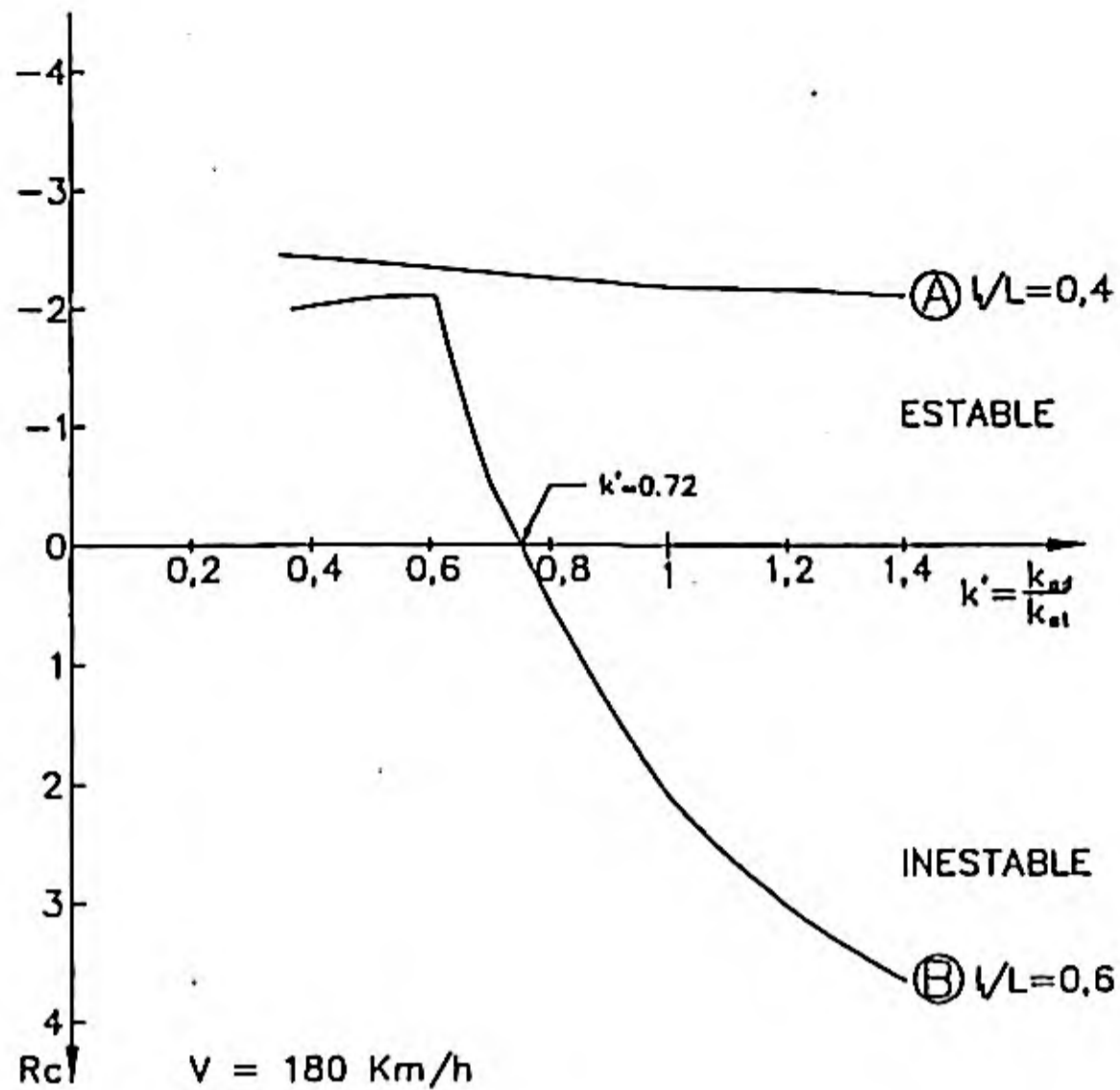


Figura 6.70. Resultados para un comportamiento estable e inestable del vehículo circulando a 180 km/h.

Estos valores se representan en la figura 6.70. Puede observarse lo siguiente teniendo en cuenta que:

Si: $K_2 \geq 0$ $R_c < 0 \Rightarrow$ Estabilidad
 $K_2 \leq 0$ $R_c > 0 \Rightarrow$ Inestabilidad

A/ En el caso 1, ($l_1/L = 0,4$) el vehículo se comporta con estabilidad direccional en todo el intervalo de variación de K' analizado, y para $V < 180 \text{ km/h}$.

B/ En el caso 2, ($l_2/L = 0,6$), se produce inestabilidad para $K' = K_{ad}^*/K_{at} < 0,72$ a la velocidad de 180 km/h.

Para este valor:

$$K_{at} = \frac{160000}{K'+1} 93023 \text{ N/rad} \quad K_{ad}^* = 66977 \text{ N/rad}$$

$$P_i = 9000 \text{ N} \quad P_d = 6000 \text{ N (Caso 2)}$$

Por lo que:

$$K_{sv} = \frac{P_d}{K_{ad}} - \frac{P_l}{K_{at}} = -7,17 \cdot 10^{-3}$$

Por lo tanto:

$$V_{crit} \approx \sqrt{\frac{-g \cdot l}{K_{sv}}} = \sqrt{\frac{2,5 \cdot 9,81}{7,17 \cdot 10^{-3}}} = 5,49 \text{ m/s}$$

Ejercicio 6.10.

Un vehículo automóvil dispone de dirección a las cuatro ruedas. Utilizando un modelo simple de vehículo de dos ruedas, considerando un comportamiento elástico de los neumáticos y despreciando las acciones aerodinámicas:

- 1) Determinar la relación entre el ángulo de dirección de las ruedas delanteras, la velocidad y el conjunto de parámetros que influyen en el comportamiento direccional, de acuerdo con las hipótesis antes indicadas:

$$\delta_d = f_l(V, L, R, K_w, q)$$

q , expresa la relación entre los ángulos de dirección de la rueda delantera y trasera:

$$\delta_t = q \cdot \delta_d$$

El resto de los parámetros son los mismos que los utilizados en un vehículo de dirección en el eje delantero.

- 2) Determinar la relación $q = q(V)$, con la condición de que el plano longitudinal del vehículo permanezca tangente a la trayectoria del centro de gravedad, y representarla en el plano (q, V) .
- 3) Determinar los valores mínimo y máximo de q , considerando los siguientes valores numéricos:

Peso total del vehículo: 20 kN

Distancia entre ejes: 2,85 m

Distancia, en proyección sobre el plano de rodadura, entre el centro de gravedad y el eje delantero: 1,3 m

Rigidez de deriva de los neumáticos:

Delanteros: 40 kN/rad

Traseros: 36 kN/rad

SOLUCION:

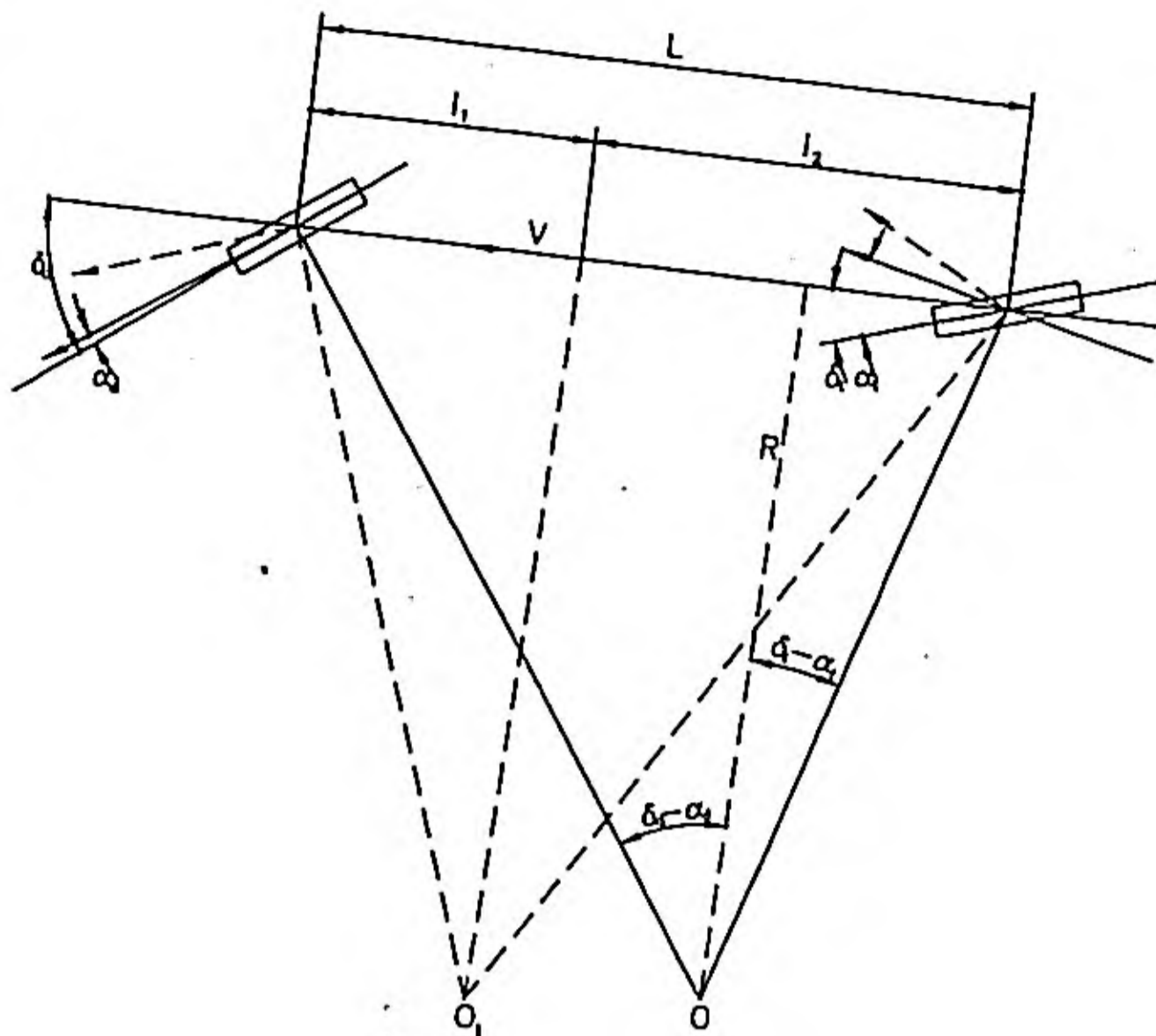


Figura 6.71. Modelo simplificado de dos ruedas.

I. Angulo de dirección de las ruedas delanteras:

De la figura 6.71:

$$\frac{L}{R} = \delta_d - \alpha_d - (\delta_r - \alpha_r) = \delta_d - \delta_r + \alpha_r - \alpha_d$$

$$\delta_r = q \cdot \delta_d$$

$$\delta_d = \frac{\left(\frac{L}{R} + \alpha_d - \alpha_r \right)}{(1 - q)}$$

siendo:

$$\alpha_d = \frac{1}{K_{\alpha d}} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_2}{L} = \frac{P_d}{K_{\alpha d}} \cdot \frac{V^2}{g \cdot R} \quad (1)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{K_{\alpha i}} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{l_1}{L} = \frac{P_i}{K_{\alpha i}} \cdot \frac{V^2}{g \cdot R} \quad (2)$$

sustituyendo:

$$\delta_d = \frac{\frac{L}{R} + \left(\frac{P_d}{K_{\alpha d}} - \frac{P_i}{K_{\alpha i}} \right) \cdot \frac{V^2}{g \cdot R}}{(1-q)}$$

por lo tanto,

$$\delta_d = \frac{\left(\frac{L}{R} + K_v \cdot \frac{V^2}{g \cdot R} \right)}{(1-q)}$$

2. Para que la condición impuesta en el enunciado pueda cumplirse, el centro instantáneo de rotación debe encontrarse en la posición O_1 (figura 6.71), en este caso:

como:

$$\begin{aligned} \delta_d - \alpha_d &= \frac{l_1}{R} & \delta_d &= \frac{l_1}{R} + \alpha_d \\ \delta_i - \alpha_i &= -\frac{l_2}{R} & \delta_i &= -\frac{l_2}{R} + \alpha_i \end{aligned}$$

Entonces:

$$q = \frac{\delta_i}{\delta_d} = \frac{-\frac{l_2}{R} + \alpha_i}{\frac{l_1}{R} + \alpha_d}$$

Sustituyendo α_i y α_d según las ec. (1) y (2):

$$q = \frac{-l_2 + \left(\frac{P_i}{K_{\alpha i}} \right) \cdot \left(\frac{V^2}{g} \right)}{l_1 + \left(\frac{P_d}{K_{\alpha d}} \right) \cdot \left(\frac{V^2}{g} \right)}$$

Gráficamente:

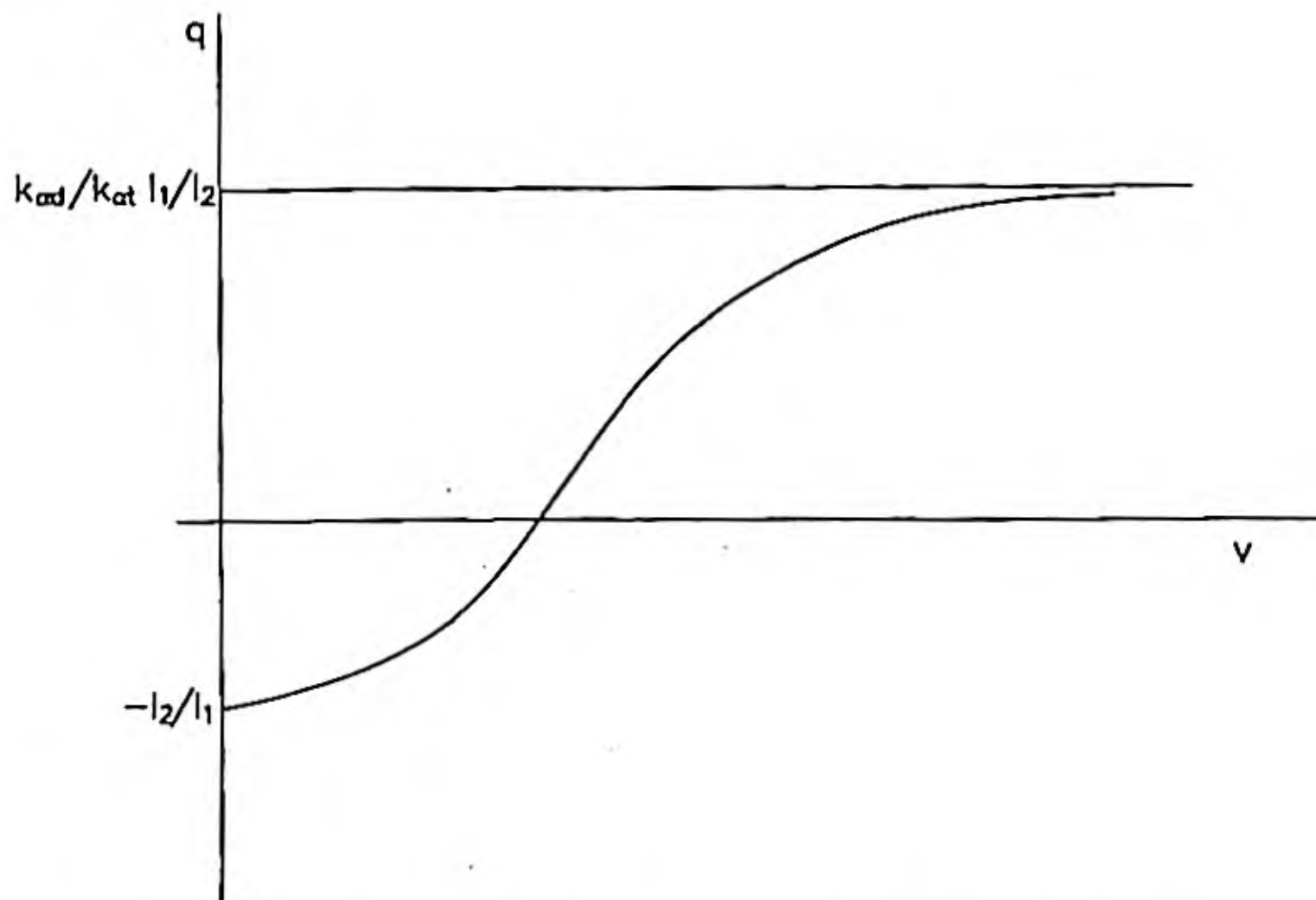


Figura 6.72. Relación entre los ángulos de dirección de las ruedas delantera y trasera con la velocidad del vehículo.

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} q = \frac{\frac{2 \cdot P_f \cdot V}{K_{at} \cdot g}}{\frac{2 \cdot P_d \cdot V}{K_{ad} \cdot g}} = \frac{K_{ad}}{K_{at}} \cdot \frac{P_f}{P_d} = \frac{K_{ad}}{K_{at}} \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

3. Los valores máximo y mínimo de q se calculan,

$$q_{\min} = -l_2/l_1 \quad (V = 0) \quad q_{\max} = K_{ad}/K_{at} \cdot l_1/l_2 \quad (V \rightarrow \infty)$$

$$K_{ad} = 2 \times 40 = 80 \text{ kN/rad}$$

$$K_{at} = 2 \times 36 = 72 \text{ kN/rad}$$

[Dinámica lateral del vehículo.]

$$q_{\min} = \frac{-1,55}{1,3} = -1,19$$

$$q_{\max} = \frac{80}{72} \cdot \frac{1,3}{1,55} = 0,93$$

Ejercicio 6.11.

Un motorista circula por una curva de radio constante, peraltada, a velocidad igualmente constante.

1. Suponiendo que el motorista no se inclina lateralmente respecto a la moto, calcular:
 - 1.1. Velocidad máxima a la que puede circular.
 - 1.2. Angulo máximo de balanceo del conjunto motocicleta-motorista. (Respecto al plano longitudinal medio vertical).
2. Calcular los ángulos que debe girar el manillar para describir la curva indicada a la velocidad de 50 km/h. Indicar cual es el comportamiento virador a esa velocidad.

DATOS

Radio de curva: 50 m.

Peralte: 20%

Coefficiente de rozamiento lateral: 0.8

Peso de la motocicleta con motorista: 307 kg.

Reparto de pesos en los ejes: 43% delantero y 57% trasero.

Batalla: 1.50 m.

Rigidez de deriva en el eje delantero: 18.500 N/rad.

Rigidez de deriva en el eje trasero: 25.000 N/rad.

SOLUCION:

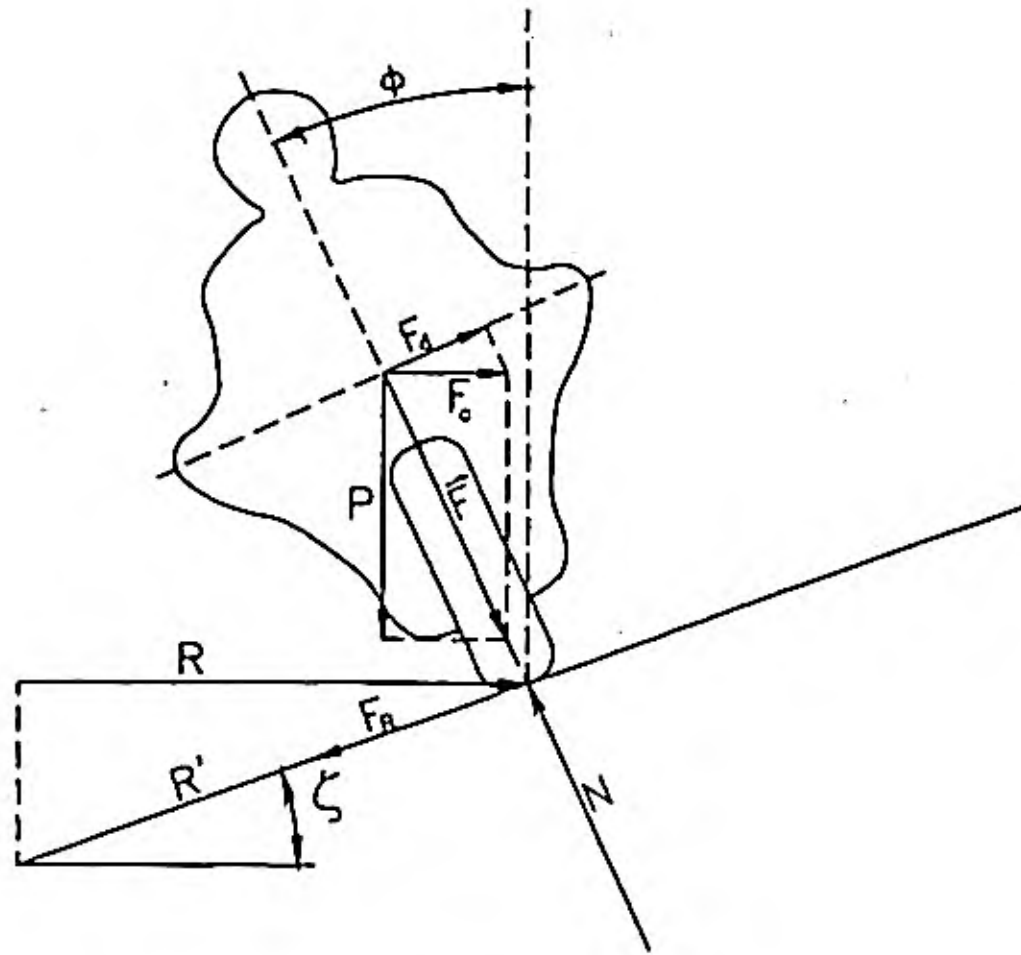


Figura 6.73. Modelo de motocicleta-conductor.

$$\tan \phi = \frac{F_c}{m \cdot g} = \frac{V^2}{R \cdot g}$$

$$\phi = \arctan \frac{V^2}{R \cdot g}$$

(1)

$$\zeta = \arctan 0.2 = 11,3^\circ$$

$$F_c \cdot \cos \zeta - P \cdot \operatorname{sen} \zeta = F_r = \mu \cdot F$$

$$F_c \cdot \operatorname{sen} \zeta + P \cdot \cos \alpha = F$$

(2)

Sustituyendo (2) en (1):

$$F_c - P \cdot \tan \zeta = \mu \cdot [F_c \tan \alpha + P]$$

(3)

Despejando F_c de (3)

$$F_c = \frac{V^2}{R} m = m \cdot g \frac{\tan \zeta + \mu}{1 - \tan \zeta \mu}$$

Despejando V y haciendo $\mu = \mu_{\max}$

$$V_{\max} = \sqrt{R \cdot g \frac{\tan \zeta + \mu_{\max}}{1 - \tan \zeta \cdot \mu_{\max}}}$$

Sustituyendo valores:

$$V_{\max} = \sqrt{9,81 \cdot 50 \frac{0,2 + 0,8}{1 - 0,2 \cdot 0,8}} = 24,16 \text{ m/s} = 86,91 \text{ km/h}$$

$$\phi_{\max} = \arctan \frac{V_{\max}^2}{R \cdot g} = \arctan \frac{24,16^2}{50 \cdot 9,81} = 49,95^\circ$$

2°

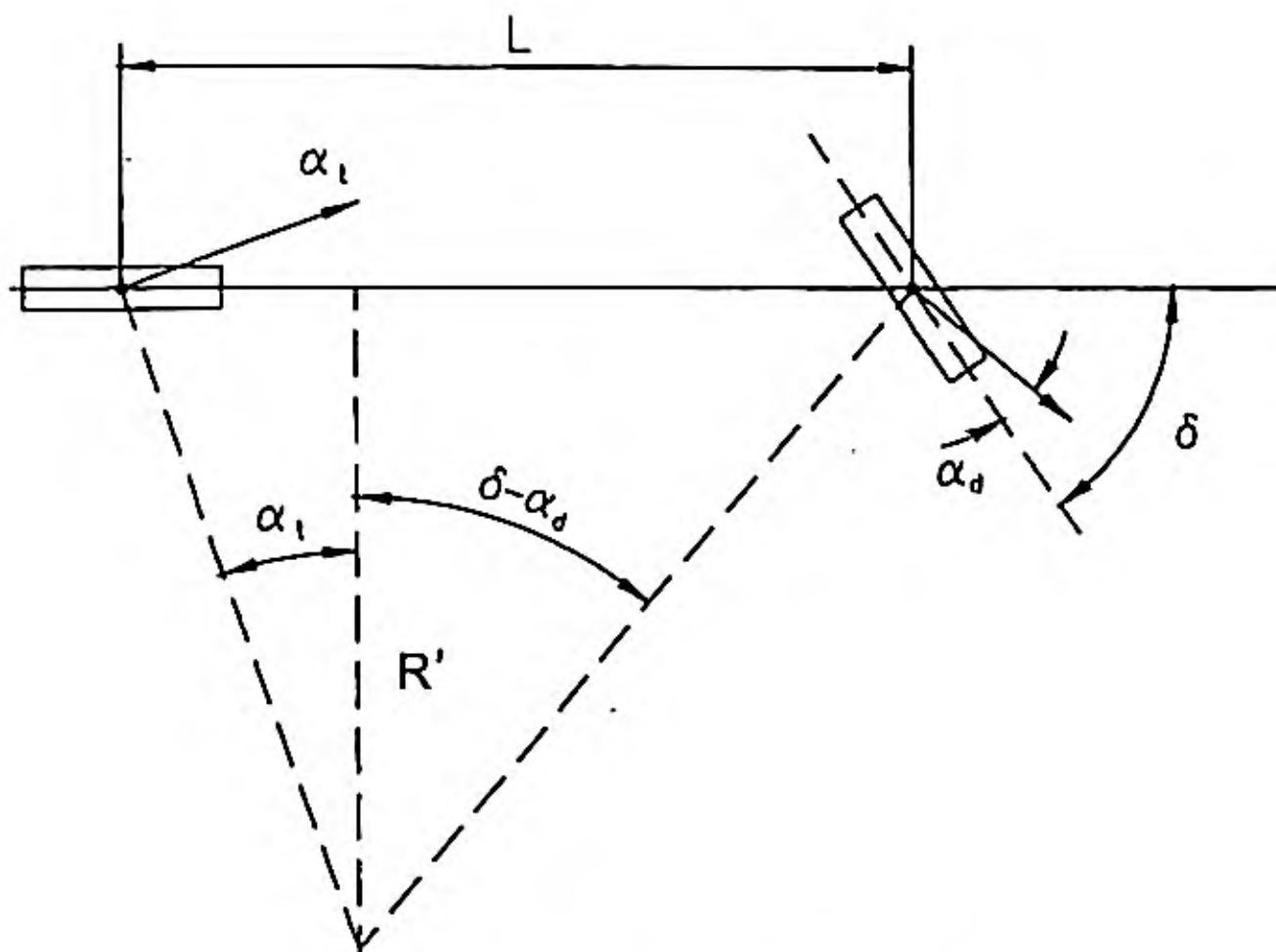


Figura 6.74. Inscripción en curva.

$$\frac{L}{R'} = \delta - \alpha_d + \alpha_1$$

$$\delta = \frac{L}{R'} + \alpha_d - \alpha_t$$

La fuerza lateral que soportan los neumáticos es:

$$F_y = F_c \cdot \cos\zeta - P \cdot \operatorname{sen}\zeta = \frac{m \cdot V^2}{R} \cos\zeta - P \cdot \operatorname{sen}\zeta$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$F_y = 568,95 \text{ N}$$

$$F_{yd} = \frac{l_2}{L} \cdot F_y ; \alpha_d = \frac{F_{yd}}{K_{\alpha d}} = \frac{l_2 \cdot F_y}{L \cdot K_{\alpha d}} = 0,0132$$

$$F_{yt} = \frac{l_1}{L} \cdot F_y ; \alpha_t = \frac{F_{yt}}{K_{\alpha t}} = 0,0129$$

$$\alpha_d - \alpha_t = 3,24 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\delta = \frac{L}{R'} + \frac{F_{yd}}{K_{\alpha d}} - \frac{F_{yt}}{K_{\alpha t}} = 0,0297 \text{ rad}$$

$$R' = \frac{R}{\cos\zeta} = \frac{50}{0,98} = 51,02 \text{ m.}$$

$$\delta = 1,7^\circ$$

La motocicleta tiene un comportamiento direccional prácticamente neutro. En todo caso, ligeramente subvirante.

* BIBLIOGRAFIA

Referencias: [2], [5], [6], [9], [20], [25], [26], [35], [43], [52], [53] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

7.

DINÁMICA DE UN VEHÍCULO DOTADO DE SUSPENSIÓN

7.1. INTRODUCCION

El comportamiento dinámico vertical del vehículo está íntimamente relacionado con el confort de los pasajeros, por la influencia en éste de las vibraciones mecánicas, y con la estabilidad, por cuantos, desplazamientos en esta dirección, pueden originar descargas considerables de las ruedas, afectando al valor de la fuerza adherente entre éstas y la calzada.

Las vibraciones en el vehículo son excitadas, fundamentalmente, por tres tipos de acciones: irregularidades de la calzada, acción de las masas giratorias, especialmente motor y transmisión, y aerodinámicas. Las dos primeras, más importantes, son, respectivamente, de naturaleza fundamentalmente aleatoria y periódica.

El control de los movimientos vibratorios: frecuencia, amplitud, aceleración, etc., se realiza a través del sistema de suspensión que, intercalado entre las masas unidas a las ruedas (masas no suspendidas, o semisuspendidas si se tiene en cuenta que el neumático es su medio elástico) y el cuerpo del vehículo (masa suspendida), permite el desplazamiento entre ambos mediante elementos elásticos (resortes) y produce una disipación de energía, mediante elementos amortiguadores. En algunos casos ambas funciones pueden ser realizadas por un único elemento (ballestas).

En cuanto al confort o incomodidad de los pasajeros, éste es una sensación subjetiva, dependiente del grado de sensibilidad de las personas, que se ve influenciado por los parámetros de la vibración antes citados. La disminución del confort debido a las vibraciones mecánicas se denominará en adelante Incomodidad Cinética Vibratoria (ICV). Atendiendo a lo indicado anteriormente, en la figura 7.1 se representan los principales elementos que influyen en la ICV.



Figura 7.1. Principales elementos que influyen en la ICV.

El objetivo de éste y de los siguientes apartados es analizar los principios sobre los que se basa el control de las vibraciones en los vehículos automóviles, de manera que la ICV por parte de los viajeros no exceda determinados valores.

7.1.1. Respuesta humana a las vibraciones.

Los límites de ICV son difíciles de establecer por depender, como ya se indicó, del nivel de sensibilidad de cada persona. Han sido realizadas numerosas investigaciones de naturaleza experimental para analizar la respuesta humana a las vibraciones. Todas ellas pretenden encontrar correlaciones entre la respuesta de los sujetos expuestos a vibraciones, en términos cualitativos (incómodo, muy incómodo, etc.), con diferentes parámetros de la vibración: frecuencia, valores máximos de desplazamiento, velocidad, aceleración, sobreaceleración primera, etc. Los métodos de ensayo empleados afectan, a su vez, a los resultados, dado el carácter subjetivo de las respuestas, lo cual añade una cierta dificultad al problema.

Uno de los criterios utilizados para valorar el ICV fue sugerido por la Society of Automotive Engineers en su Ride and Vibration Data Manual JGa (1965). Los límites, recomendados por Janeway, se refieren a las amplitudes de la velocidad, aceleración y sobreaceleración, cuya influencia en el ICV toma diferente criterio, en cada uno de los tres intervalos de frecuencias siguientes:

20 a 60 Hz; 6 a 20 Hz y 1 a 6 Hz

Considerando la oscilación $Z = A \sin \omega t$ y sus derivadas \dot{Z} , \ddot{Z} y \dddot{Z}

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

	Intervalo	Valor límite
a)	f = 1 a 6 Hz	$\ddot{a} = A\omega^3 \# 12.6 \text{ m/s}^3$
b)	f = 6 a 20 Hz	$a = A\omega^2 \# 0.33 \text{ m/s}^2$
c)	f = 20 a 60	$V = A\omega \exists 0.0027 \text{ m/s}$

siendo V, a y \ddot{a} los valores máximos de la velocidad, aceleración y sobreaceleración primera, respectivamente. En función de estos valores límites, se puede definir la variación de la amplitud tolerable de la oscilación, con la frecuencia.

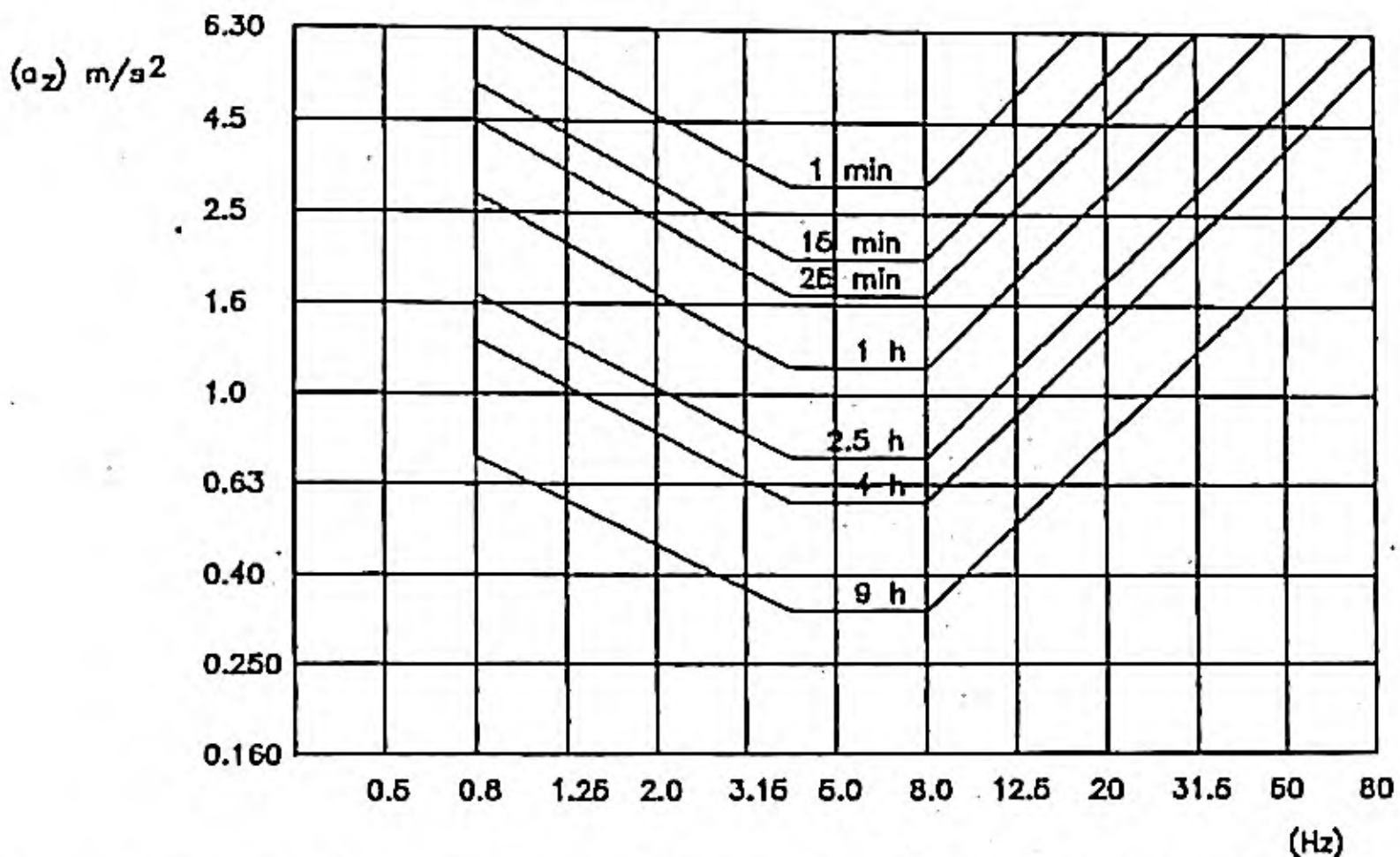


Figura 7.2. Límite de capacidad reducida por fatiga en vibraciones verticales (ISO 2631).

En 1974 la International Standard Organization (ISO) publicó su norma 2631, que constituye una guía general para definir la tolerancia humana a las vibraciones, de utilización tanto en vehículos de transporte como en la industria. Se definen en ella tres límites para el conjunto del cuerpo humano, abarcando un intervalo de frecuencias de 1 a 80 Hz. Estos límites son:

Límite de exposición. Se refiere a valores por encima de los cuales existe riesgo para la salud. No debe ser sobrepasado excepto en casos excepcionales.

Límite de capacidad reducida por fatiga. Expresa la frontera a partir de la cual se produce un decrecimiento de capacidades para la realización eficaz de un trabajo (conducir un vehículo, por ejemplo).

Límite de confort reducido. En vehículos de transporte está relacionado con la posibilidad de realizar funciones tales como lectura, escritura, comer, etc.

En las figuras 7.2 y 7.3 se representan las curvas de tiempos límite de fatiga, correspondientes, respectivamente, a vibraciones verticales (Z) y horizontales (X,Y), referidas a un sistema de referencia asociado al cuerpo humano, en el que el eje OZ tiene la dirección pies (o pélvis)/cabeza; el eje OX: espalda/pecho y el eje OY: derecha/izquierda.

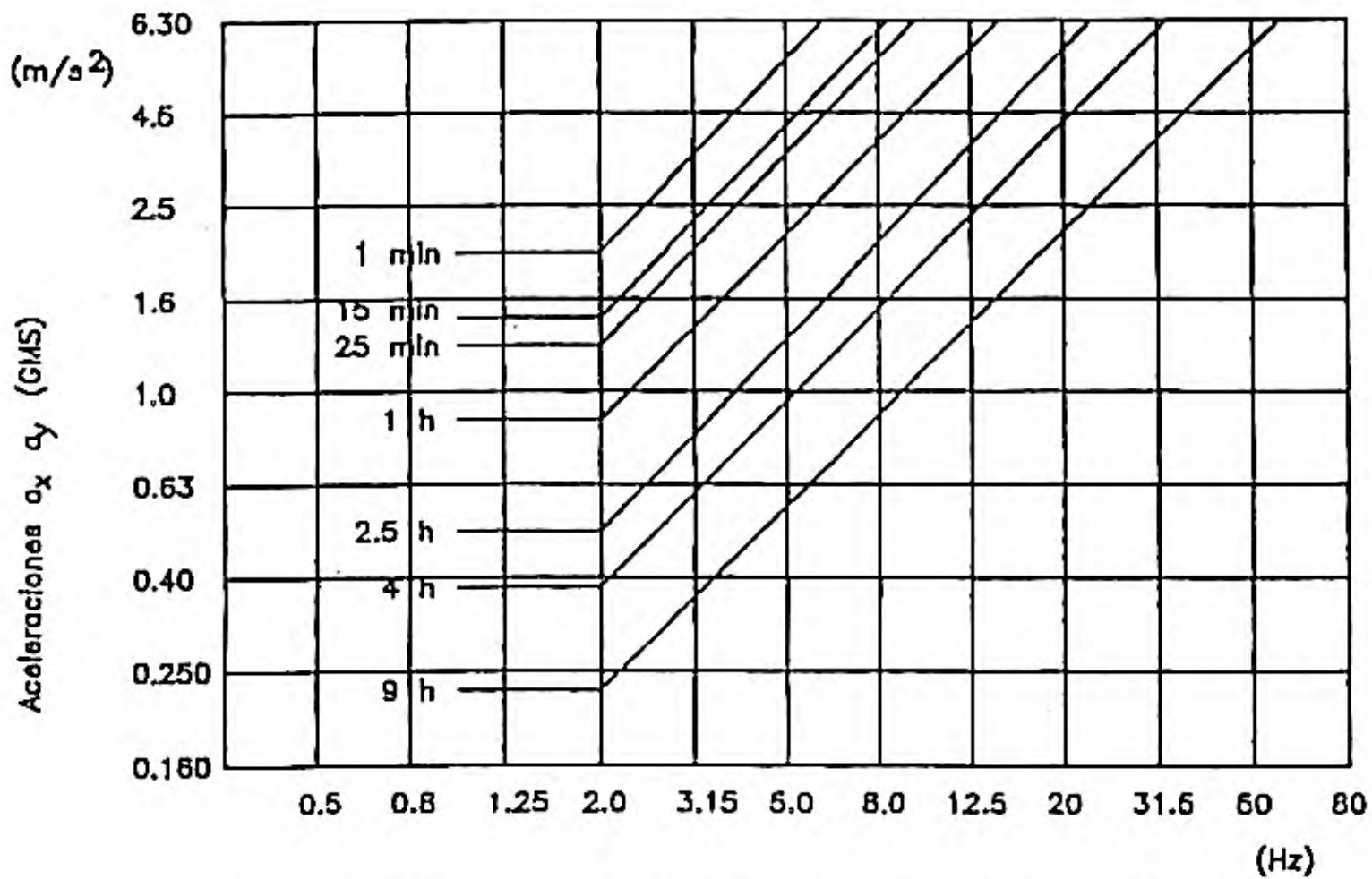


Figura 7.3. Límite de capacidad reducida por fatiga en vibraciones horizontales (ISO 2631).

Las ordenadas de las curvas expresan el valor medio cuadrático de la aceleración de la vibración (rms), es decir:

$$A_{rms} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt \right]^{1/2}$$

en función de la frecuencia:

Los tiempos límites de fatiga representados en las figuras anteriores se refieren al límite de capacidad reducida por fatiga. De él se pueden deducir los otros dos límites. El tiempo límite de exposición se obtiene multiplicando por dos el tiempo de capacidad reducida y el de confort reducido dividiendo por tres dicho valor.

Como puede observarse, la tolerancia humana a las vibraciones depende de la dirección de éstas en relación al cuerpo humano. En dirección vertical la mayor sensibilidad se

presenta para frecuencias comprendidas entre 4 y 8 Hz, mientras que en direcciones transversales dicho intervalo se reduce a frecuencias comprendidas entre 1 y 2 Hz. Por otra parte, los efectos sobre diferentes puntos del cuerpo también varían con la frecuencia.

7.1.2. Las vibraciones en los vehículos automóviles. Influencia de la suspensión.

Como se indicó en la introducción, sobre el vehículo actúa un conjunto de acciones que excitan movimientos vibratorios. Estas acciones pueden ser clasificadas, de una forma general en dos grupos: acciones directas y acciones indirectas.

Las acciones directas son ejercidas sobre la masa suspendida por elementos contenidos o apoyados en ella: motor y transmisión fundamentalmente. Son de carácter periódico, con modos fundamentales armónicos y posibilidad de originar fenómenos de resonancia.

Las acciones indirectas son las que se transmiten a la masa suspendida, a través de la suspensión, por acciones sobre las masas semisuspendidas. Estas pueden ser de naturaleza diferente. El paso de ruedas sobre irregularidades de la calzada origina una excitación de tipo normalmente aleatorio; en algunos casos se producen choques o percusiones motivadas por irregularidades aisladas (baches, etc.). Existen otras acciones indirectas que tienen carácter periódico y son las debidas a desequilibrios en las masas semisuspendidas rotativas.

Cada una de estas acciones excita vibraciones situadas en intervalos diferentes de frecuencias, que afectan a las masas suspendida y semisuspendida. Es frecuente que los modos de baja frecuencia de la carrocería se sitúen algo por encima de 1 Hz, mientras que los modos medios del conjunto de las masas suspendida y no suspendida y los modos de ésta última se sitúen entre 10 y 20 Hz.

Si la calzada presentase un perfil ondulado, para determinada velocidad de circulación podría existir una excitación indirecta, de frecuencia próxima a la natural de vibración de la masa suspendida, lo cual originaría desplazamientos muy elevados con riesgo de pérdida excesiva de peso adherente sobre la rueda. La suspensión debe evitar el rebote de las ruedas y su pérdida de fuerza adherente con el suelo. No obstante, los firmes actuales no presentan, en general, irregularidades que produzcan estos efectos, en condiciones normales de circulación.

Desde hace muchos años se ha considerado que los pasajeros soportan bien vibraciones de frecuencias próximas a 1 Hz, esto puede ser debido a que las oscilaciones verticales a que se somete el cuerpo humano al caminar varían entre 1 y 1.2 Hz, estando, por tanto, el hombre bien dotado y habituado a estas frecuencias.

En la tabla 7.1 se ofrece un resumen de las frecuencias características que pueden presentarse en los vehículos y sus efectos sobre el cuerpo humano.

FRECUENCIAS en Hz		EFECTOS PRODUCIDOS		
		sobre las personas	sobre los automóviles actuales	
MUY BAJAS	< 0'5		Sensación de mareo con grandes amplitudes	
BAJAS 0'5 a 4	1 a 3	1'2 a 2	Frecuencia del movimiento vertical del paso humano	
		1 a 2	Resonancia de la cabeza en movimientos horizontales	
		1 a 3	Umbral mínimo de la ICV en movimientos horizontales	
MEDIAS 4 a 20	4 a 8	4 a 6	Resonancia del cuerpo en movimientos verticales y horizontales	
		4 a 8	Mínimo umbral de incomodidad en movimientos verticales	
	10 a 20	10 a 20		Frecuencia natural de masas semisuspendida y frecuencias medias del conjunto (m.s y m.s.s) Frecuencia de rotación de ruedas en circulación a velocidades medias o altas Oscilaciones localizadas en zonas de la carrocería y otros sistema o de deformación del bastidor a flexión o torsión.
		11 a 15	Poca resonancia en el cuerpo ante movimientos verticales.	
		15 a 20	Resonancia de la cabeza con vibraciones verticales.	
ALTAS > 20	20 a 200	20 a 200		Vibraciones provocadas por acciones directas
		60 a 90	Resonancia del globo ocular	
		80 a 95		Vibraciones propias de neumáticos radiales
		100 a 200	Resonancia mandíbulas	
		170 a 200		Vibraciones propias de neumáticos diagonales

TABLA 7.1. Frecuencias características de movimientos vibratorios en vehículos y sus efectos (V. de Buen, 1980).

En el valor de las frecuencias naturales de vibración, la rigidez de los resortes de la suspensión ejerce la mayor influencia. En la amplitud de la vibración y duración de los transitorios influye de manera importante la disipación de energía que producen los elementos amortiguadores.

El amortiguamiento (consideraremos amortiguamiento subcrítico) en la suspensión del automóvil, tiene los mismos efectos que en cualquier otro sistema mecánico, estos son, fundamentalmente:

- Extinguir en un tiempo relativamente corto las vibraciones libres.
- Reducir la elongación de las vibraciones forzadas y acotarlas a valores finitos en el caso de resonancia.
- Reducir la frecuencia natural de vibración, aunque de forma poco apreciable.

En vehículos industriales siguen utilizándose en muchos casos resortes de ballestas, que incorporan, como se señaló antes, las características elásticas y de amortiguamiento, en este caso por rozamiento entre las láminas. Cuando se utilizan otros tipos de resortes, que no incorporan elementos de disipación de energía, la función amortiguadora se realiza incorporando elementos específicos (amortiguadores), que normalmente hacen pasar un fluido por orificios o canales calibrados al producirse el desplazamiento relativo de dos elementos (cilindro y émbolo) unidos respectivamente a la masa suspendida y a la semisuspendida. Cuando el paso del fluido se realiza en régimen laminar, la fuerza necesaria es proporcional a la velocidad ($F_s = R \cdot V$) y cuando el régimen es turbulento, la fuerza es proporcional a una potencia n de la velocidad ($F_s = R \cdot V^n$), n puede tener un valor próximo a 2. Normalmente se tiende a diseñar amortiguadores que operen en régimen laminar y de doble efecto.

7.2. EL SISTEMA DE SUSPENSION

En el estudio de la suspensión de un vehículo es útil comenzar analizando separadamente los diferentes movimientos entre masas suspendida y semisuspendida: vertical, cabeceo y balanceo, con el objeto de facilitar la comprensión de los fenómenos asociados a cada uno de ellos.

Cuando se quiere dimensionar el sistema de suspensión, pensando en los movimientos verticales del vehículo, puede comenzarse estudiando un modelo de un solo grado de libertad, el cual, aunque cuantitativamente no sirva para el dimensionamiento definitivo del sistema, va a permitir observar los principales fenómenos que se producen en el movimiento vertical y, por lo tanto, establecer los criterios fundamentales para su diseño o prediseño.

En la figura 7.4, se muestra un modelo de un grado de libertad que podría representar la suspensión independiente de un cuarto del vehículo. Consta de una masa M , suspendida por un elemento elástico de rigidez K , y un elemento amortiguador de coeficiente R . Se considera una fuerza variable en el tiempo, $F(t)$, que actúa sobre dicha masa.

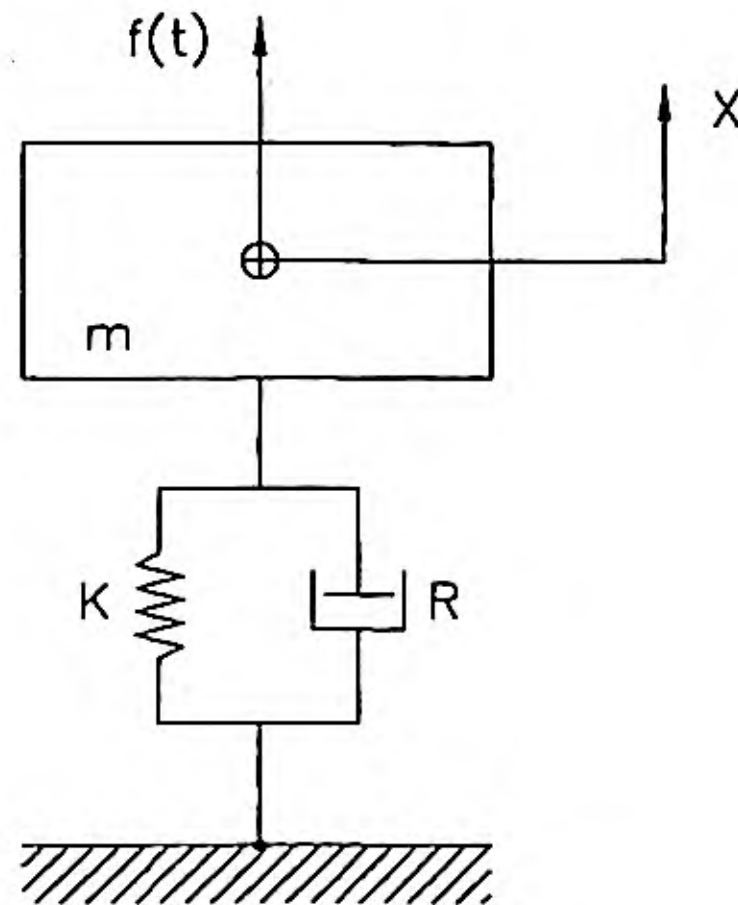


Figura 7.4. Modelo de un grado de libertad para representar la suspensión de un cuarto de vehículo.

La ecuación de movimiento del sistema es:

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = F(t) \quad 7.1$$

Anulando la excitación, es decir haciendo $F(t) = 0$, la ecuación (7.1) queda en forma homogénea y puede resolverse:

$$M\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0 \quad 7.2$$

Partiendo de la teoría de ecuaciones diferenciales, puede asumirse que la solución de la ecuación (7.2) es del tipo $x = X \cdot e^{\omega t}$, donde ω es una constante que es necesario determinar. Obteniendo las derivadas \dot{x} , \ddot{x} , y sustituyendo en (7.2), se tiene:

$$(M \cdot \omega^2 + R \cdot \omega + K) \cdot X \cdot e^{\omega t} = 0 \quad 7.3$$

La solución no trivial de esta ecuación se obtendrá haciendo:

$$M \cdot \omega^2 + R \cdot \omega + K = 0 \quad 7.4$$

o lo que es lo mismo:

$$\omega^2 + \omega \cdot \frac{R}{M} + \frac{K}{M} = 0 \quad 7.5$$

A esta ecuación se la denomina ecuación característica del sistema y sus soluciones ω_1 y ω_2 son:

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}} \quad 7.6$$

Por otra parte, la solución de la ecuación (7.2) es:

$$x(t) = A \cdot e^{\omega_1 t} + B \cdot e^{\omega_2 t} \quad 7.7$$

donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales impuestas para $t=0$.

La ecuación (7.6) proporciona la frecuencias fundamentales del sistema y para el caso de que el amortiguamiento fuera nulo, es decir $R = 0$, se tendría:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{K}{M}} \quad 7.8$$

que es un número complejo con parte real nula.

Por otra parte si se sustituyen en la ecuación (7.7) los valores de ω_1 y ω_2 obtenidos en (7.6), se obtiene:

$$x(t) = e^{-(R/2M)t} [A e^{It} + B e^{-It}] \quad 7.9$$

siendo:

$$I = \sqrt{(R/2M)^2 - K/M}$$

El primer término, $e^{-(R/2M)t}$, es una función decreciente exponencialmente con el tiempo y el valor de I depende de que los valores numéricos dentro del radical sean positivos, nulos o negativos. Es sabido que cuando estos valores son positivos o nulos el exponente del número e, es real, mientras que en el caso contrario es imaginario.

En la figura 7.5, se representa la respuesta del modelo en estudio, para un desplazamiento inicial x_0 , y diferentes valores de I.

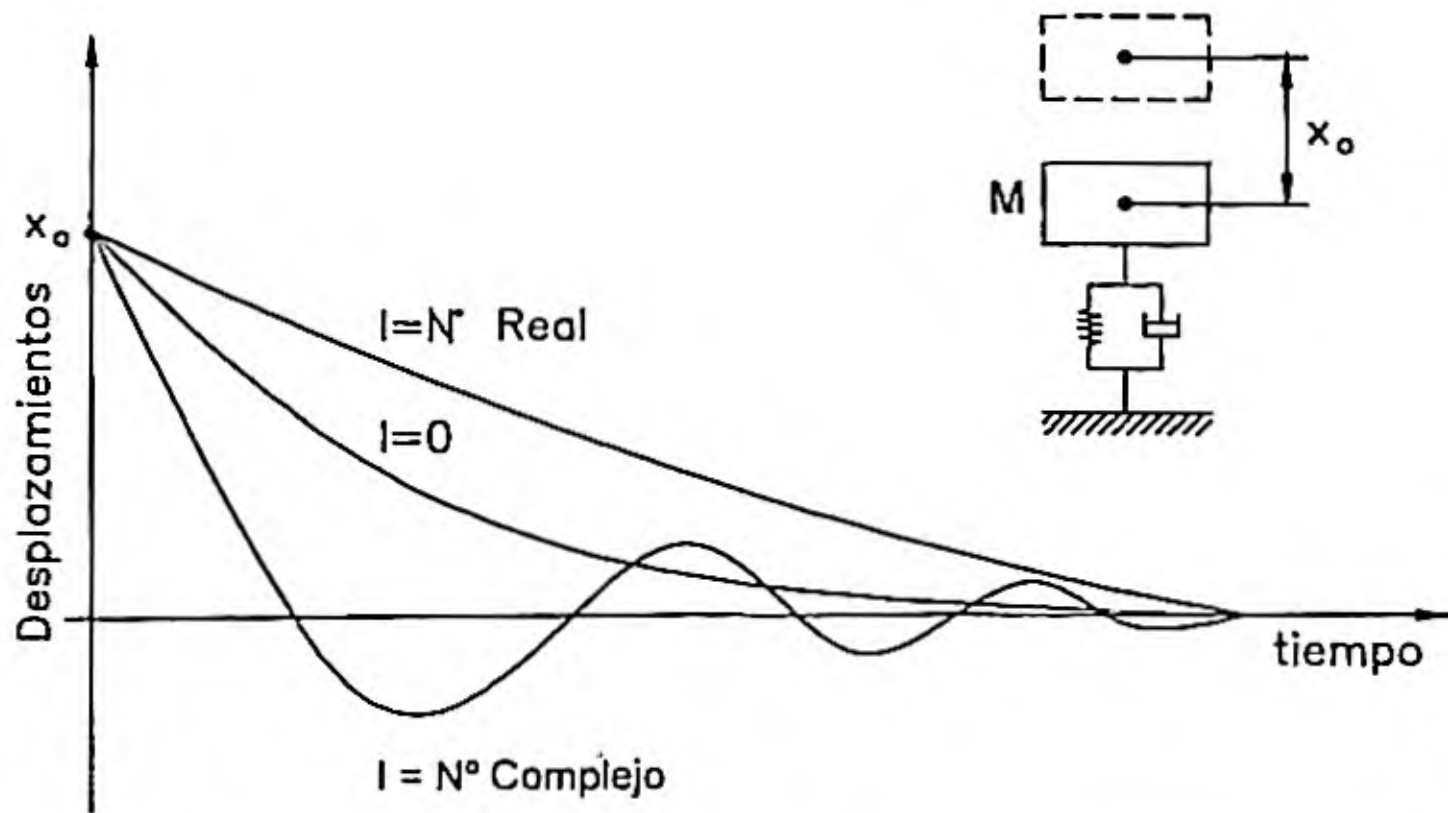


Figura 7.5. Variación del desplazamiento en función del tiempo para diferentes valores del amortiguamiento

Como se observa en la figura, en todos los casos la masa M parte de la posición x_0 , y en función del valor de I realiza su movimiento vertical de una forma u otra. Cuando I es un número real el movimiento vertical no es oscilatorio y la masa M desciende lentamente hasta anularse el valor del desplazamiento.

Si $I = 0$, el movimiento vertical tampoco es oscilatorio y la masa M , desciende hasta el valor cero, un poco más rápidamente.

Por último, cuando I es un número imaginario, la masa M realiza el movimiento vertical de una forma oscilatoria hasta alcanzar la posición de equilibrio.

En definitiva, para que el movimiento del sistema sea oscilatorio, es necesario que I sea un número imaginario.

Para que I sea imaginario se debe cumplir que:

$$(R/2 \cdot M)^2 < K/M \quad 7.10$$

En el caso especial de que $I = 0$ se tiene:

$$(R/2 \cdot M)^2 = K/M \quad 7.11$$

y el sistema tiene amortiguamiento crítico.

Despejando de (7.11) el valor de R, se tiene:

$$R = 2M \cdot \sqrt{K/M} = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M^2/M} = 2 \cdot \sqrt{K \cdot M} \quad 7.12$$

a este valor de R se le denomina crítico y en adelante se escribirá R_{CRU} .

Como en los vehículos R siempre debe ser menor que R_{CRU} , los valores de ω_1 y ω_2 serán siempre números complejos.

$$\omega_{1,2} = \sigma + i \cdot \omega_n \quad 7.13$$

en donde:

$$\sigma = -R/2 \cdot M \quad 7.14$$

$$\omega_n = \sqrt{K/M - (R/2 \cdot M)^2} \quad 7.15$$

ω_n es la frecuencia fundamental de vibración del sistema amortiguado y σ el factor de amortiguamiento.

Si se define ξ como el cociente entre R y su valor crítico R_{CRU} , el factor de amortiguamiento puede expresarse como:

$$\sigma = -R/R_{CRU} \cdot \omega = -\xi \cdot \omega \quad 7.16$$

en donde ω es la frecuencia fundamental del sistema no amortiguado, es decir:

$$\omega = \sqrt{K/M} \quad 7.17$$

Sustituyendo en la ecuación (7.16) se obtiene:

$$\sigma = (-R/2 \sqrt{K \cdot M}) \cdot \sqrt{K/M} = -R/2 \cdot M$$

7.2.1. Predimensionamiento de la suspensión

Por numerosos estudios realizados sobre el confort, y los datos expuestos en el punto 7.1.1., es conocido que la frecuencia fundamental de un sistema de suspensión debe encontrarse

alrededor de 1 Hz y que su amortiguamiento debe tener un valor de ξ del orden de 0,25.

Teniendo en cuenta que el amortiguamiento modifica poco el valor de la frecuencia fundamental de vibración vertical, considerando una masa suspendida por rueda de valor M y expresando ω en Hz se tiene:

$$\omega = \frac{\sqrt{K/M}}{2\pi}$$

haciendo $\omega = 1$ Hz y despejando K :

$$K = 4 \cdot \pi^2 \cdot M \quad 7.18$$

Una vez predimensionado el valor de K , considerando un valor inicial de $\xi=0,25$:

$$\xi = R/R_{CRI} = 0,25$$

$$R = 0,25 \cdot R_{CRI} = 0,25 \times 2 \sqrt{K \cdot M} \quad 7.19$$

Conocidos K y R puede calcularse la frecuencia del sistema amortiguado que en Hertzios es:

$$\omega_n = 1/2\pi \sqrt{K/M - (R/2 \cdot M)^2} \quad 7.20$$

Por ejemplo, considerando $M = 4000$ Kg, que puede corresponder al caso de un camión, sustituyendo este valor en 7.18, 7.19 y 7.20, se obtiene:

$$K = 157913,4 \text{ N/m}$$

$$R = 12566,36 \text{ N.s/m}$$

$$\omega_n = 0,9682 \text{ Hz}$$

Como se observa en este ejemplo, la frecuencia real del sistema se diferencia muy poco de la frecuencia que se obtiene considerando el sistema sin amortiguamiento, como se había indicado antes.

Una vez predimensionados los valores característicos del sistema, se pasa a simular su comportamiento resolviendo la ecuación diferencial (7.1) para los valores de K y R elegidos.

Como primera etapa de simulación, se considera sometido al sistema, simplemente, a

su peso propio, es decir se resuelve la ecuación:

$$M \cdot \ddot{x} + R \cdot \dot{x} + K \cdot x = -M \cdot g \quad 7.21$$

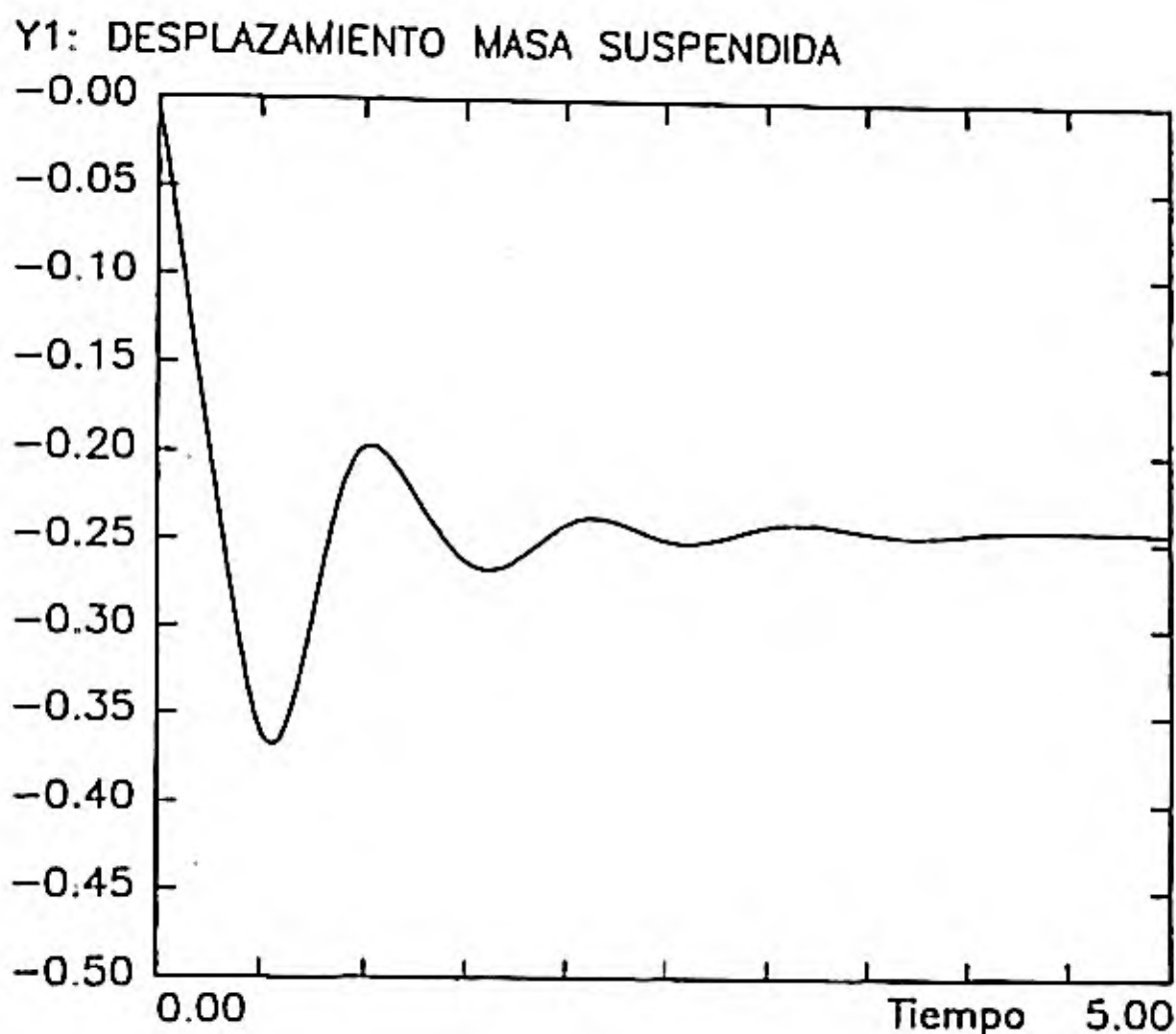


Figura 7.6. Desplazamiento vertical de la masa suspendida $x(t)$, considerando un modelo simple de un grado de libertad con $f_n = 1$ Hz y $\xi = 0.25$.

En la figura 7.6, se representa el desplazamiento vertical de la masa M , es decir, la solución $x(t)$ suponiendo que la masa se suelta instantáneamente desde la posición correspondiente a deformación nula del resorte.

La respuesta del sistema puede dividirse en dos partes, la transitoria y la permanente. La primera dura aproximadamente 3 segundos y tiene su pico máximo a los 0,5 segundos, con un valor de -0,36 m de caída de la masa M .

Entre los 3 y los 5 segundos, no hay prácticamente movimiento y se considera que los valores son permanentes. En este caso el desplazamiento permanente alcanza un valor de 0,25 m. Este desplazamiento es, lógicamente, la deformación estática de la suspensión debido al peso suspendido.

La figura 7.6, muestra una respuesta que se ajusta bastante bien a lo que suele medirse en el comportamiento de los vehículos reales, en los cuales el amortiguamiento puede ser un

poco mayor. Las diferencias, entre diferentes tipos de vehículos, se encuentran en la frecuencia del sistema, ya que aunque en los vehículos destinados al transporte de pasajeros su valor está siempre en el entorno de 1 Hz, en los de mercancías esta frecuencia puede llegar a los 2Hz.

En la figura 7.7 se muestra la respuesta del mismo sistema tomando $\xi = 0,3$ y por lo tanto un valor de $R = 15079,63 \text{ N.s/m}$.

El comportamiento mostrado en la figura 7.7, se aproxima al óptimo del comportamiento vertical de una suspensión.

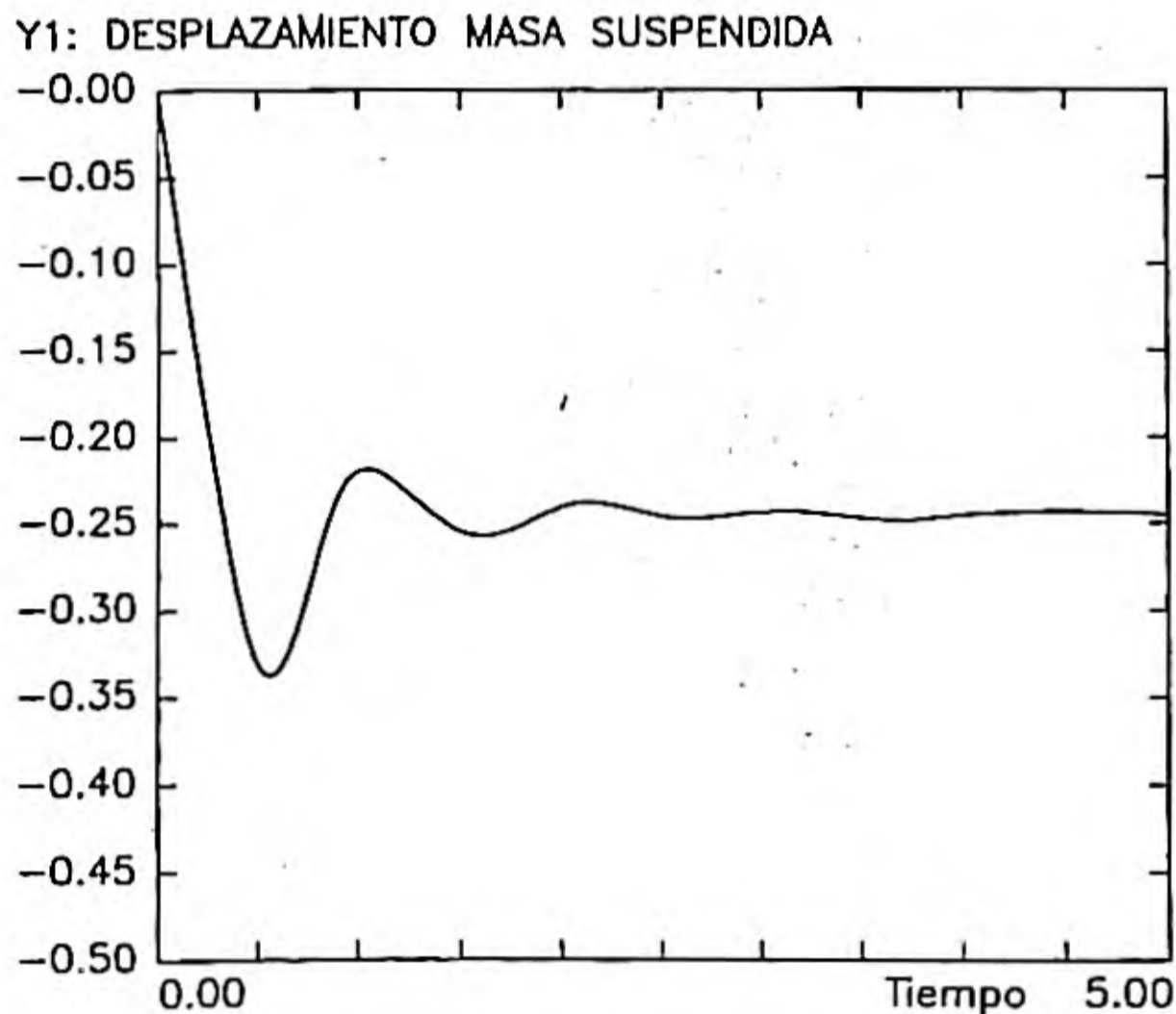


Figura 7.7. Desplazamiento vertical de la masa suspendida con $\xi = 0.30$

En la figura 7.8 se muestran la aceleración y la velocidad vertical de la masa M para el caso de $R = 12566,36 \text{ N . s/m}$.

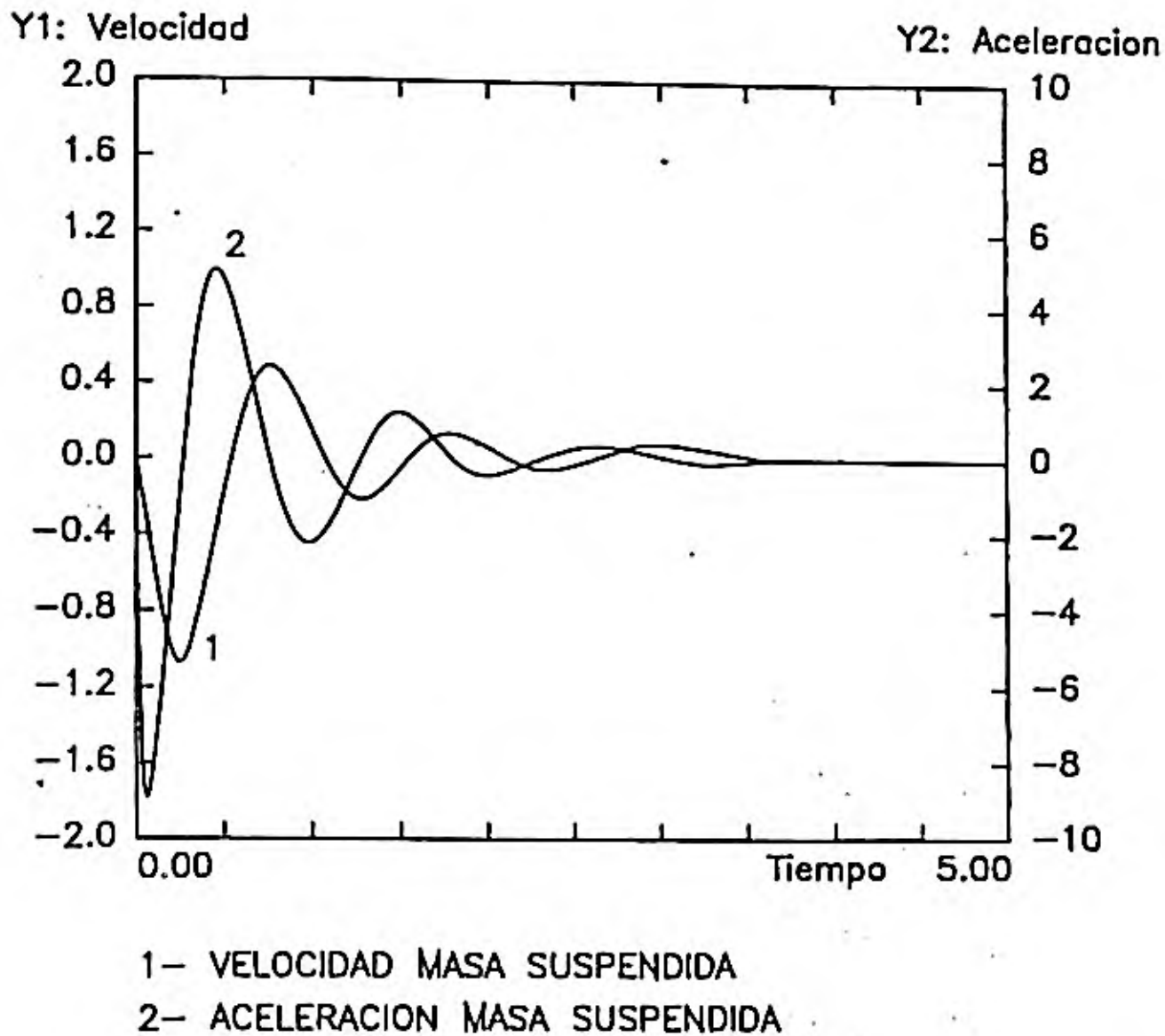


Figura 7.8. Variación con el tiempo de la velocidad y aceleración de la masa suspendida.

Como se observa en esta figura, la aceleración alcanza en un primer instante un valor muy cercano al de la aceleración de la gravedad y queda reflejado claramente el desfase existente entre la aceleración y la velocidad del sistema, cumpliéndose que, cuando la aceleración se anula, la velocidad presenta un máximo positivo o negativo y, al mismo tiempo, cuando la aceleración es máxima la velocidad se anula.

En la figura 7.9, se muestran, para este caso, las tres respuestas: aceleración, velocidad y desplazamiento, en función del tiempo.

Por último en la figura 7.10, se muestra el desplazamiento de la masa M para el caso de que el amortiguamiento fuera el crítico, que en este ejemplo tiene un valor de $R_{CRI}=50265,44 \text{ N.s/m}$, y para valores de $R > R_{CRI}$.

En esta figura puede observarse lo que se había presentado en la figura 7.5. Así mismo, cuando R incrementa su valor, el sistema tarda más tiempo en llegar al valor permanente de $-0,25 \text{ m}$.

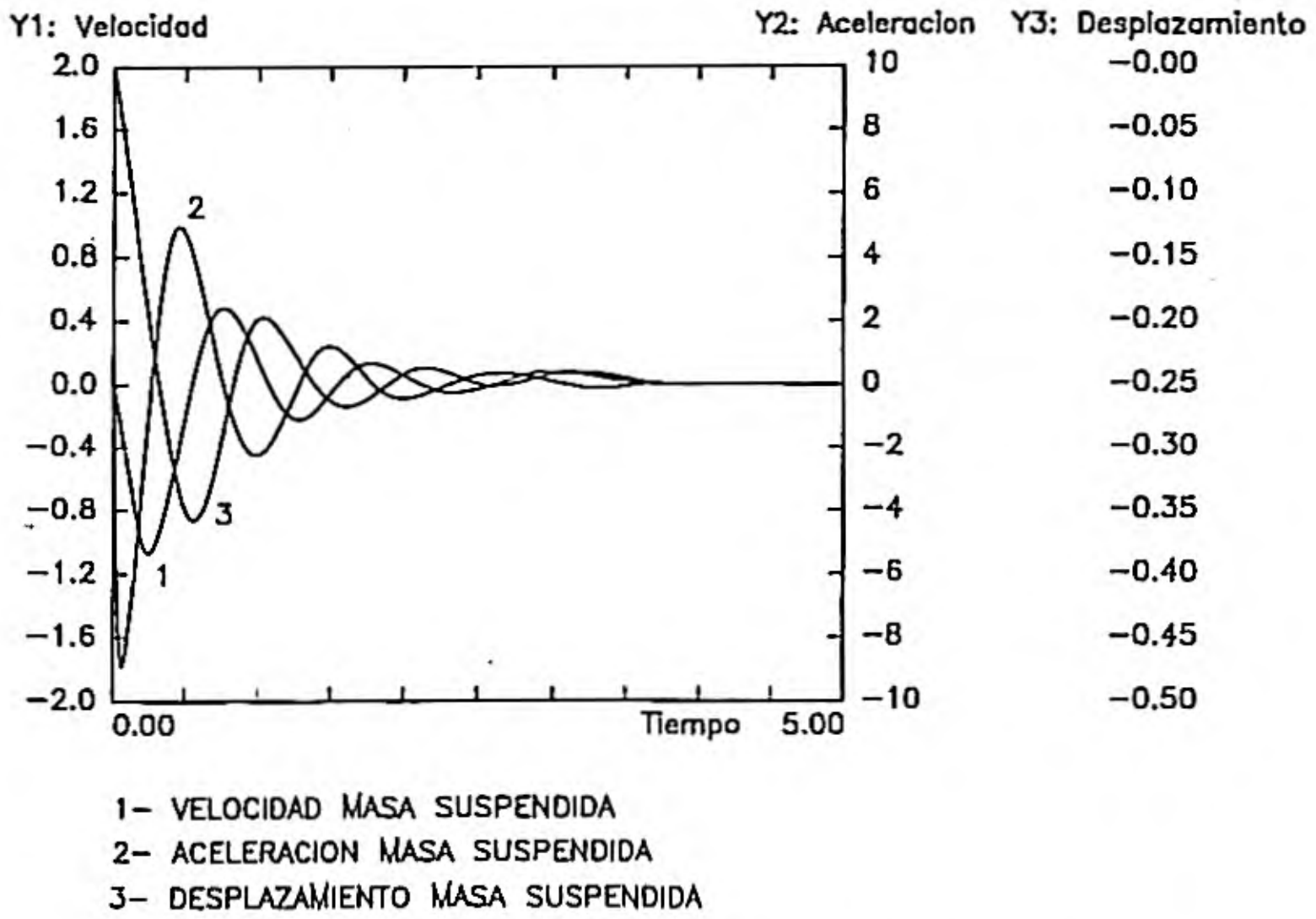


Figura 7.9. Variación con el tiempo de v , a y x de la masa suspendida.

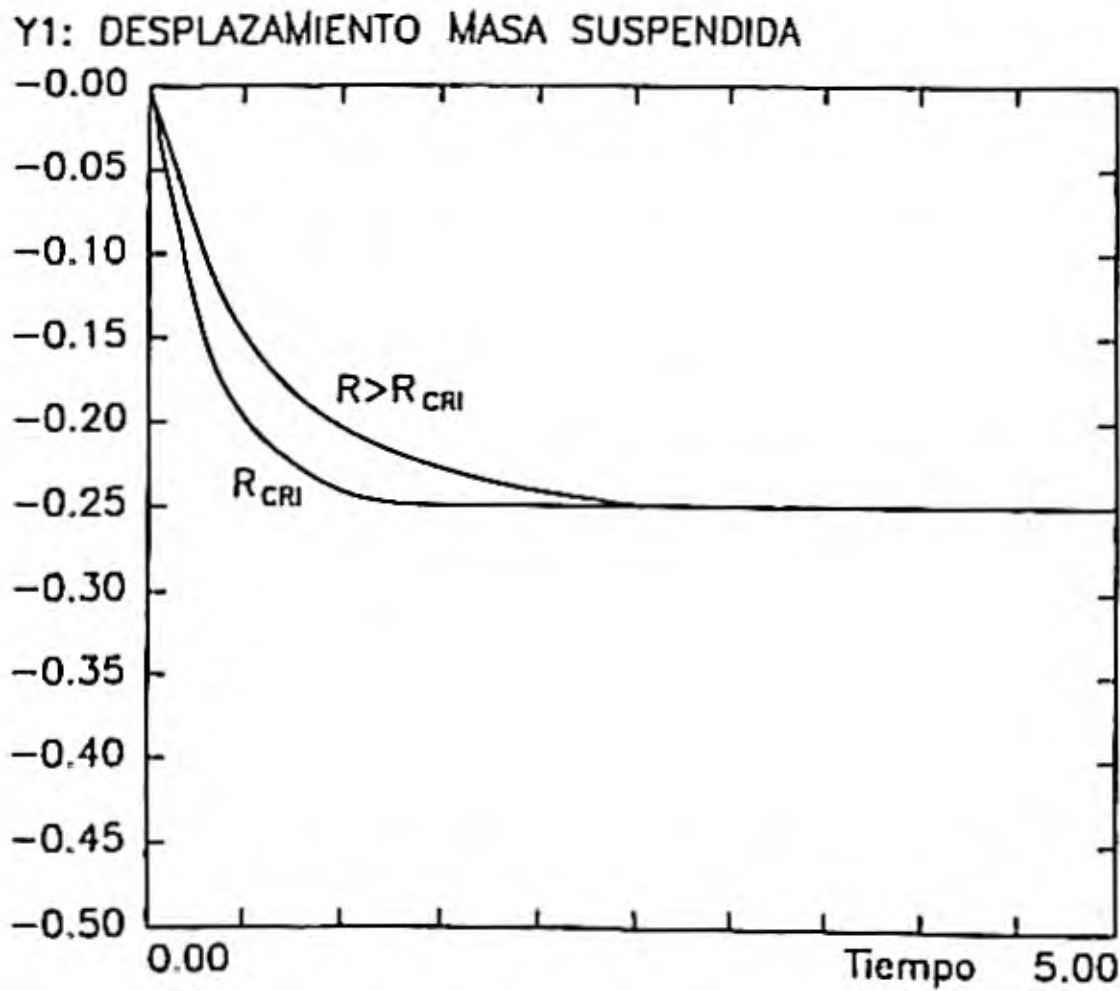


Figura 7.10. Variación con el tiempo del desplazamiento vertical de la masa suspendida con $R \geq R_{cri}$

7.2.2. Introducción a la función de transferencia

La ecuación (7.1) es la representación, en el dominio del tiempo, del modelo de un grado de libertad mostrado en la figura 7.4.

Una ecuación equivalente a la (7.1) puede determinarse en el dominio de la frecuencia mediante la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial en una algebraica: la primera representa al modelo en el dominio del tiempo, y la segunda lo hace en el dominio de la frecuencia. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (7.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [M \cdot \ddot{x} + R \cdot \dot{x} + K \cdot x] &= M \cdot [s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)] + \\ &+ R [s \cdot X(s) - x(0)] + K \cdot X(s) = (M \cdot s^2 + R \cdot s + K) \cdot X(s) - \\ &- M \cdot s \cdot x(0) - M \cdot \dot{x}(0) - R \cdot x(0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} [F(t)] = F(s) \tag{7.22}$$

De esta forma la ecuación (7.1), se transforma en:

$$[M \cdot s^2 + R \cdot s + K] \cdot X(s) = F(s) + (M \cdot s + R) \cdot x(0) + M \cdot \dot{x}(0) \tag{7.23}$$

siendo $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ el desplazamiento y la velocidad en el instante inicial $t = 0$.

Considerando que las condiciones iniciales son todas nulas la ecuación (7.23) queda:

$$(M \cdot s^2 + R \cdot s + K) \cdot X(s) = F(s) \tag{7.24}$$

Suponiendo que no existiese fuerza exterior, es decir $F(s) = 0$, la ecuación (7.24) coincide con la (7.4), sin más que hacer constar que los valores de s en (7.24), son las frecuencias fundamentales del sistema.

Haciendo:

$$B(s) = M \cdot s^2 + R \cdot s + K$$

la ecuación (7.24) puede escribirse como:

$$B(s) \cdot X(s) = F(s) \tag{7.25}$$

Como se ha comentado anteriormente, al aplicar la transformada de Laplace, se pasa del dominio del tiempo al de la frecuencia y, por lo tanto, los términos de la ecuación (7.25) pueden ser definidos de la forma siguiente:

$F(s)$ = Representa, en el dominio de la frecuencia, la función de fuerza $F(t)$.

$X(s)$ = Representa, en el dominio de la frecuencia, la respuesta del sistema $x(t)$.

De la ecuación (7.25) se deduce que la respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia, puede definirse como:

$$X(s) = F(s) / B(s) \quad 7.26$$

Se define como función de transferencia del sistema $H(s)$:

$$H(s) = 1 / B(s) \quad 7.27$$

utilizando esta expresión, la respuesta del sistema, en el dominio de la frecuencia, puede obtenerse como producto de la función de transferencia y de la excitación, es decir:

$$X(s) = H(s) \cdot F(s) \quad 7.28$$

En otras palabras, la función de transferencia relaciona la transformada de Laplace de la respuesta del sistema, con la transformada de Laplace de una excitación del sistema, cuando las condiciones iniciales son todas nulas y no existe ninguna otra excitación externa.

$$H(s) = X(s) / F(s) \quad 7.29$$

Volviendo a la ecuación (7.24), se puede escribir la función de transferencia como:

$$H(s) = 1 / B(s) = 1 / (M \cdot s^2 + R \cdot s + K) \quad 7.30$$

que puede también expresarse como:

$$H(s) = (1 / M) / (s^2 + s \cdot R / M + K / M) \quad 7.31$$

El denominador no es otra cosa que la ecuación característica del sistema, cuyas raíces ya se habían calculado. (7.6).

$$s_{1,2} = -R / 2 \cdot M \pm \sqrt{(R / 2M)^2 - K / M} \quad 7.32$$

7.2.3. Aplicación de la función de transferencia en el diseño de la suspensión

Una de las excitaciones exteriores de la suspensión es la irregularidad del camino de rodadura, que puede simularse como una entrada de velocidad, $\dot{x}_0(t)$, en la parte inferior del modelo, tal y como se representa en la figura 7.11.

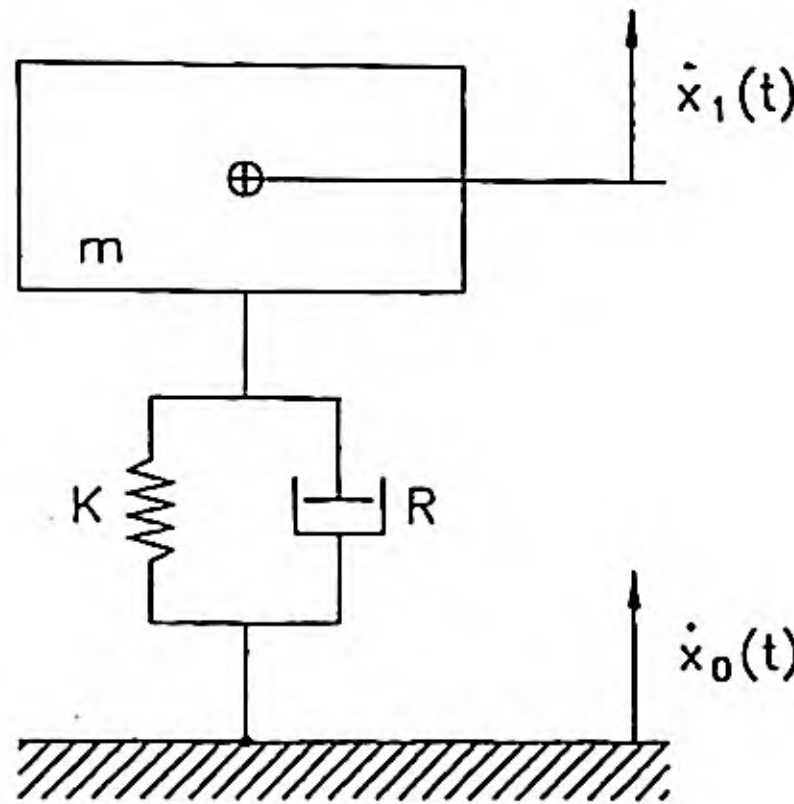


Figura 7.11. Modelo de un grado de libertad.

La ecuación diferencial del modelo presentado en la figura 7.11, es:

$$m \cdot \ddot{x}_1 + R(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k(x_1 - x_0) = -m \cdot g \quad 7.33$$

Para determinar la transferencia entre la respuesta $x_1(t)$ y la excitación $x_0(t)$, hay que recordar que la función de transferencia es única entre una respuesta y una excitación, cuando todas las demás excitaciones son nulas, y, además, las condiciones iniciales deben ser todas nulas.

Luego, en este caso, hay que anular la excitación exterior debida al peso propio, con lo que la ecuación diferencial queda:

$$m \cdot \ddot{x}_1 + R(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K(x_1 - x_0) = 0 \quad 7.34$$

y aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$m[s^2 \cdot x_1(s) - s \cdot x_1(0) + \dot{x}_1(0)] + R[s \cdot x_1(s) - x_1(0)] - \\ - R[s \cdot x_0(s) - x_0(0)] + k \cdot x_1(s) - k \cdot x_0(s) = 0$$

y como todas las condiciones iniciales deben ser nulas, la ecuación queda:

$$ms^2 \cdot x_1(s) + R \cdot s \cdot x_1(s) - R \cdot s \cdot x_0(s) + k \cdot x_1(s) - k \cdot x_0(s) = 0 \quad 7.35$$

$$(m s^2 + R s + k) \cdot x_1(s) - (R \cdot s + k) \cdot x_0(s) = 0$$

y definitivamente la función de transferencia entre $x_1(s)$ y $x_0(s)$ valdrá:

$$H(s) = x_1(s) / x_0(s) = (R s + k) / (m s^2 + R s + k) \quad 7.36$$

La función de transferencia es un número complejo, cuyo módulo es la relación entre las amplitudes de la respuesta y la excitación; su argumento es el desfase existente entre ambas señales.

Es decir, si el modelo de la figura 7.11, se supone excitado por una irregularidad de carretera de forma senoidal, de amplitud X_0 y frecuencia ω_1 , la respuesta del sistema es otro desplazamiento senoidal de la misma frecuencia ω_1 , y con una amplitud X_1 , tal que, siendo la función de transferencia de la forma:

$$H(\omega_1) = A + B \cdot i \quad 7.37$$

la amplitud de la respuesta vale:

$$X_1 = \left(\sqrt{A^2 + B^2} \right) \cdot X_0$$

y además existirá un desfase entre la respuesta y la excitación de valor:

$$\phi = \text{arctag } B/A$$

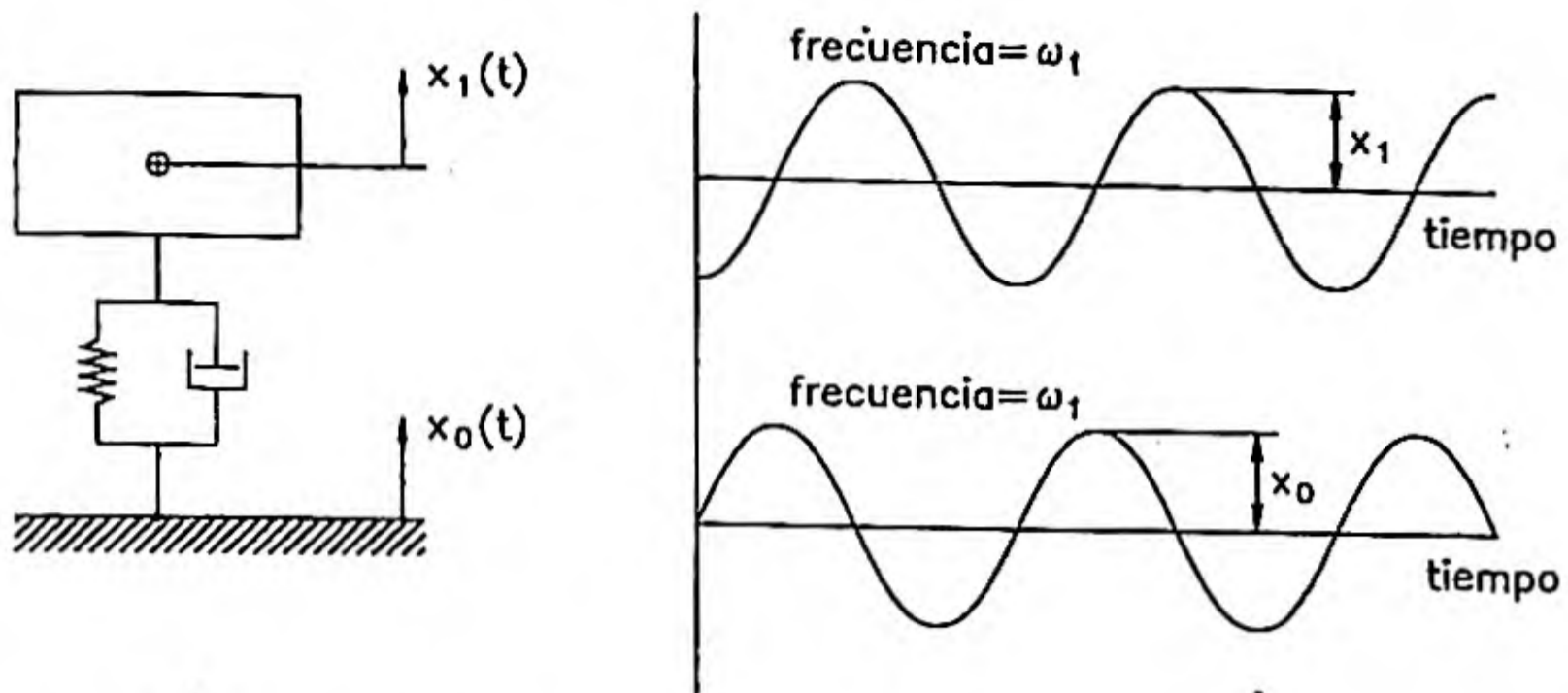


Figura 7.12. Respuesta del modelo de un grado de libertad ante una excitación senoidal.

7.2.4. Uso y aplicación de la función de transferencia

Para estudiar la aplicación de la función de transferencia se comenzará hallando la $H(s)$, definida en el apartado anterior, aplicada al ejemplo que se estaba utilizando.

La gráfica que se obtiene se muestra en la figura 7.14, en donde se representa el módulo de $H(s)$, tanto para el amortiguamiento de $R = 12566,36 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ como para un valor superior de $R = 20000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

Observando la figura 7.13, se ve cómo el valor del módulo la función de transferencia es máximo para excitaciones de la misma frecuencia que la fundamental del sistema. Conforme la frecuencia de la excitación se separa de la fundamental, la función de transferencia disminuye.

Por otra parte, al aumentar el valor del amortiguamiento, la función de transferencia se hace menor, en el entorno de la frecuencia fundamental, pero es mayor a frecuencias más altas. Este hecho hace que, en el dimensionamiento del amortiguador de los sistemas de suspensión, haya que tomar una decisión de compromiso ya que valores del amortiguamiento que mejoran la respuesta con excitaciones de determinadas frecuencias, empeoran aquellas para otros valores de éstas.

Este hecho se verá más claramente cuando se analicen modelos de más grados de libertad, cuyo comportamiento se acerca más a la realidad.

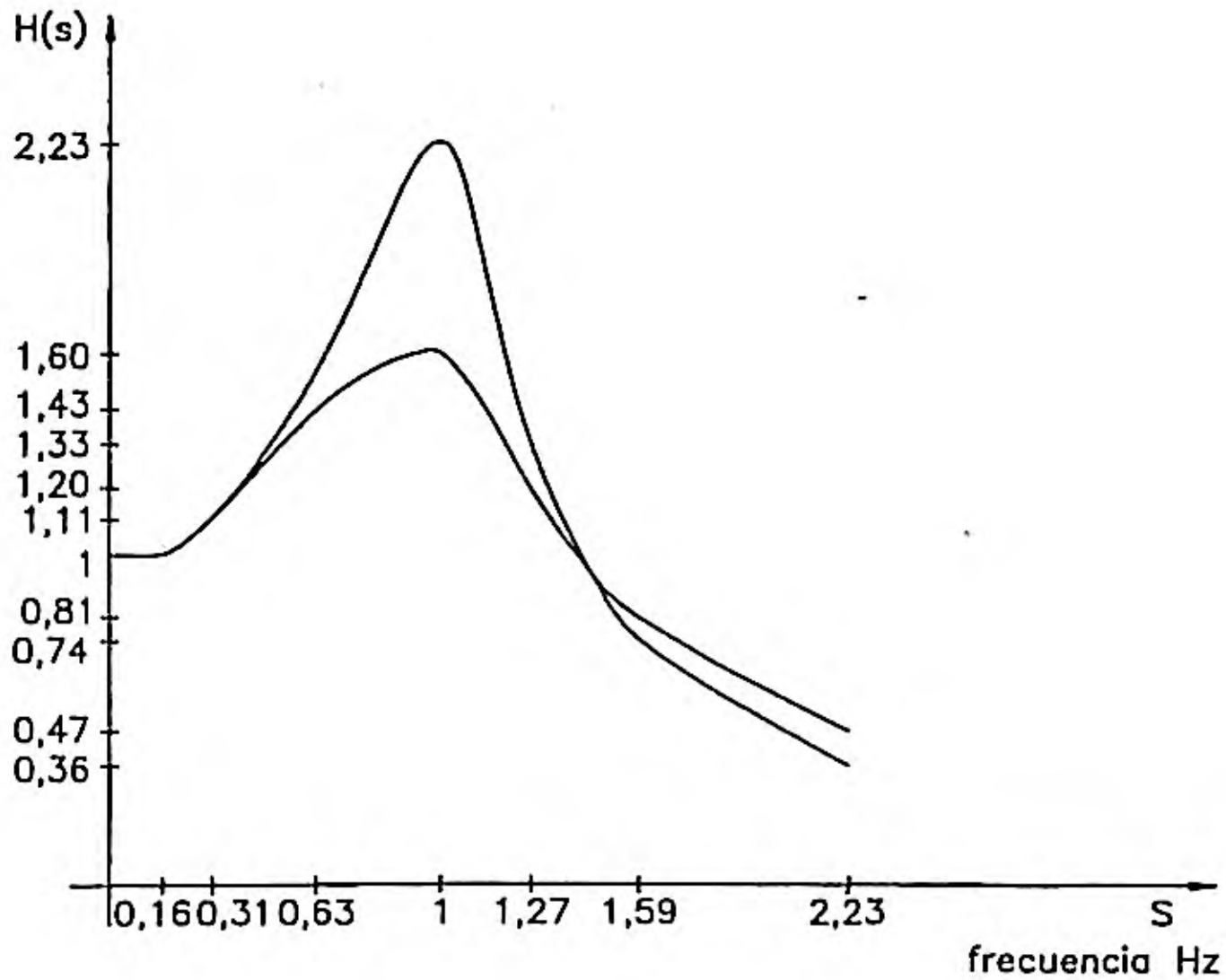


Figura 7.13. Función de transferencia.

7.2.5. Modelo de 2 grados de libertad (2 G.D.L.)

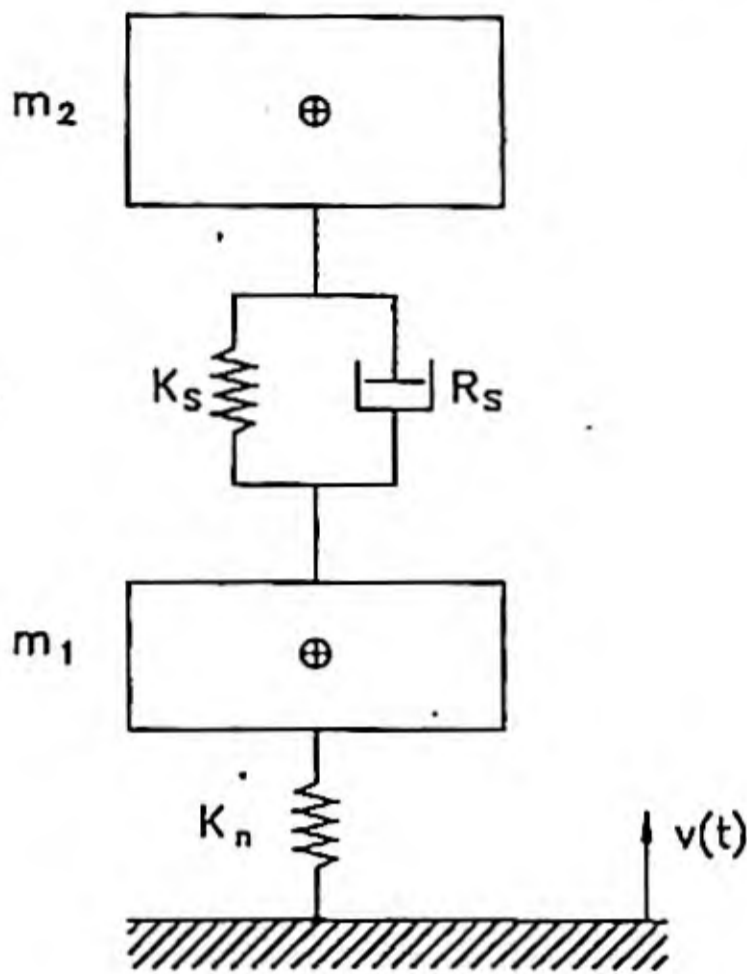
El modelo de la figura 7.4 se planteó para el análisis de la suspensión, es de 1 G.D.L. y en él se despreció la masa no suspendida o semisuspendida y la rigidez del neumático.

Cuando se considera la masa semisuspendida, y la rigidez del neumático, es necesario utilizar el modelo representado en la figura 7.14, que correspondería a un cuarto del vehículo.

Utilizando el modelo de la figura 7.14, se puede calcular sus frecuencias fundamentales aproximadas, despreciando el amortiguamiento y empleando dos simplificaciones. La primera consiste en suponer que la masa suspendida es mucho más grande que la no suspendida, es decir $m_2 \gg m_1$ y, en consecuencia, puede despreciarse el valor de m_1 .

En estas condiciones el modelo queda reducido al representado en la figura 7.15.

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]



- $m_2 =$ Masa suspendida
- $K_s =$ Rigidez de la suspensión
- $R_s =$ Coeficiente de amortiguamiento de la suspensión
- $K_n =$ Rigidez del neumático
- $m_1 =$ Masa del neumático y de los elementos mecánicos por debajo de la suspensión. Se denomina "masa no suspendida".

Figura 7.14. Modelo de dos grados de libertad.

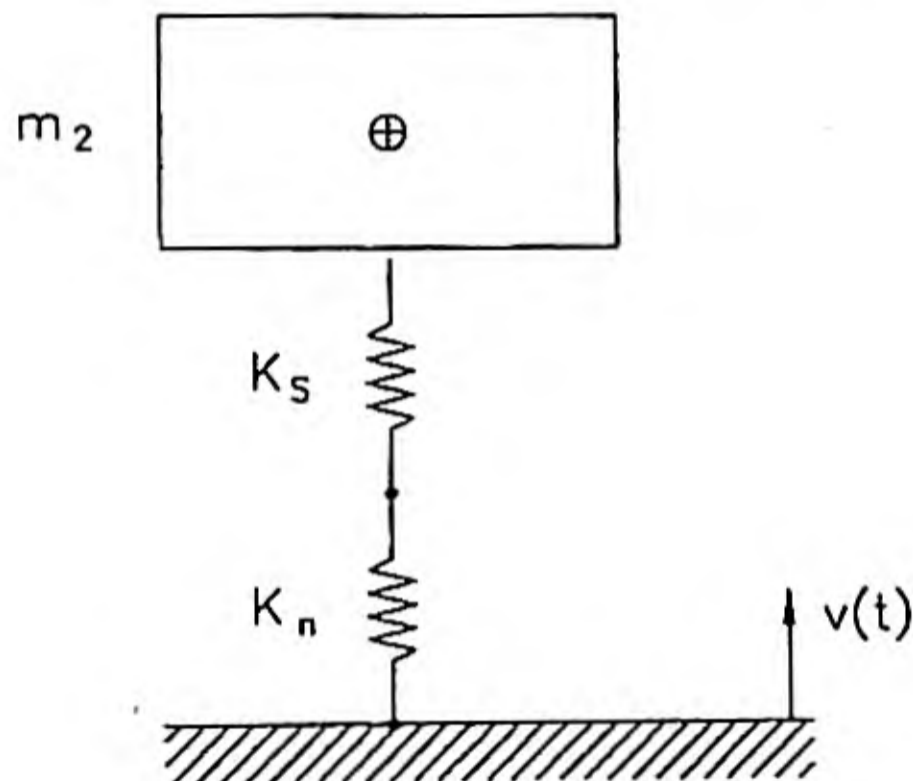


Figura 7.15. Reducción a un modelo de un grado de libertad.

En definitiva se trata de una masa suspendida por dos resortes en serie. Recordando que la rigidez equivalente de dos resortes en serie viene dada por:

$$K_c = K_s \cdot K_n / (K_s + K_n)$$

la frecuencia fundamental del modelo sería:

$$\omega_{m_2} = 1/2\pi \cdot \sqrt{K_s \cdot K_n / (K_s + K_n) \cdot m_2} \quad 7.38$$

Una vez predimensionada la suspensión con el modelo de 1 G.D.L., como se hizo en el apartado 7.2.1., y elegido el neumático, es necesario calcular, mediante esta expresión, la frecuencia fundamental de la masa suspendida, considerando la rigidez del neumático. El hecho de no considerar el amortiguador, es porque, como ya se ha indicado, influye poco en el valor de dicha frecuencia.

La otra simplificación que puede hacerse del modelo de la figura 7.15, consiste en suponer que m_2 es muy superior a m_1 y, en consecuencia, que m_2 permanece inmóvil cuando oscila m_1 ; hipótesis razonable con el supuesto de que $m_2 \gg m_1$, y la frecuencia natural de oscilación de m_2 está suficientemente alejada de la de m_1 .

En estas circunstancias, el modelo puede representarse como se muestra en la figura 7.16, y queda reducido a 1G.D.L.

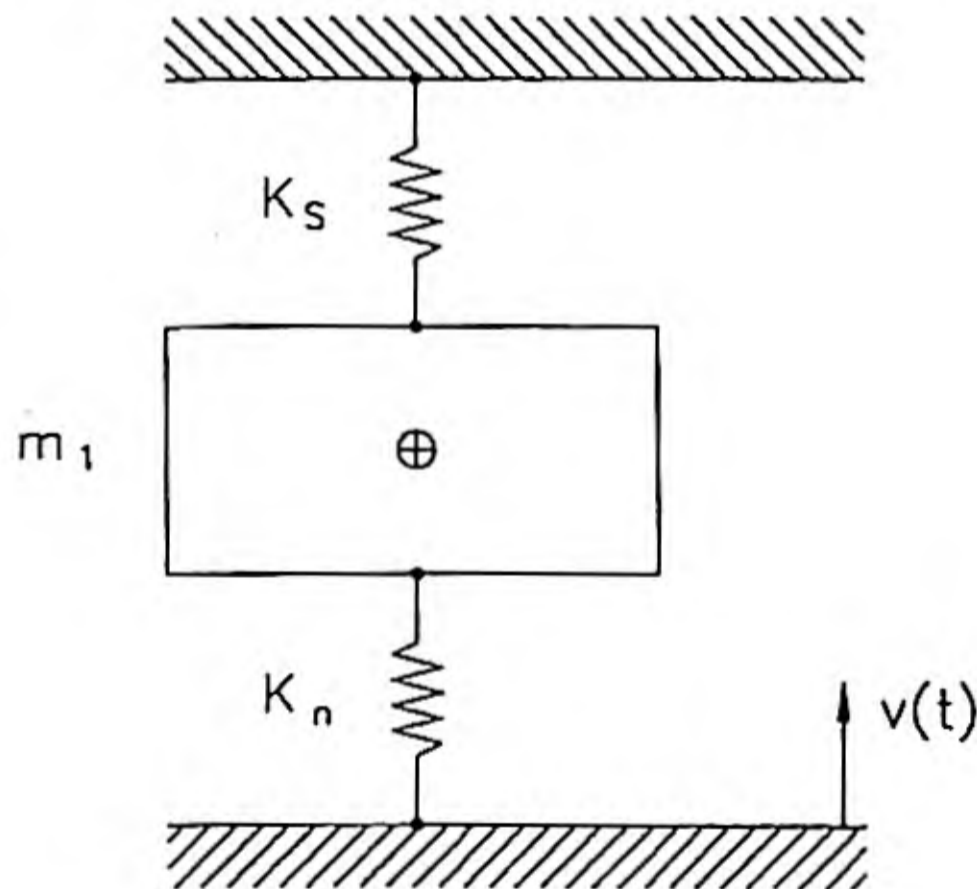


Figura 7.16. Reducción a 1 G.D.L. cuando oscila m_1

Como en el caso de la primera simplificación, y por la misma razón, ahora tampoco se considera el amortiguador.

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

La frecuencia fundamental de este modelo es la de una masa suspendida por dos resortes en paralelo, cuya rigidez equivalente viene dada por:

$$K_e = K_n + K_s$$

y la frecuencia fundamental:

$$\omega_{m1} = 1/2\pi \cdot \sqrt{(K_n + K_s)/m_1} \quad 7.39$$

El valor que se obtiene con esta expresión es, aproximadamente, la frecuencia fundamental de la masa no suspendida o semisuspendida.

Considerando los valores determinados anteriormente en el modelo de 1 G.D.L.:

$$\begin{aligned} K_s &= 157913,4 \text{ N/m} \\ R &= 12566,36 \text{ N.s/m} \\ m_2 &= 4000 \text{ kg} \end{aligned}$$

y considerando que la rigidez del neumático, para la carga del ejemplo, tiene un valor $K_n=1207000 \text{ N/m}$.

Para la frecuencia de la masa suspendida se tendrá:

$$f_{m2} = 1/2\pi \cdot \sqrt{K_s \cdot K_n / (K_s + K_n) \cdot m_2} = 0,9408 \text{ Hz}$$

y para la masa semisuspendida, suponiendo que $m_1 = 350 \text{ kg}$.

$$f_{m1} = 1/2\pi \cdot \sqrt{(K_s + K_n)/m_1} = 9,944 \text{ Hz}$$

Observando los valores obtenidos, puede comprobarse que el efecto de la rigidez del neumático es una reducción del valor de la frecuencia fundamental de la masa suspendida, de 1 Hz, para el que se había diseñado, hasta 0,9408 Hz; el amortiguador volverá a reducir un poco más este valor. Por otra parte, se obtiene con el modelo de 2 G.D.L. la frecuencia de la masa no suspendida, cuyo valor es del orden de 10 veces mayor que el de la suspendida, lo cual es usual en vehículos automóviles.

Para casos de menor carga por rueda, la relación entre la frecuencia de la masa no suspendida y la suspendida, es menor y suele encontrarse en el entorno de 8 veces.

7.2.6. Función de transferencia en el modelo de 2 G.D.L.

Como se vió antes, para hallar la función de transferencia de un modelo cualquiera, se parte de las ecuaciones diferenciales que representan su comportamiento en el tiempo.

Las ecuaciones diferenciales del modelo son:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + R_s (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_s (x_1 - x_2) - K_n (x_0 - x_1) + m_1 \cdot g = 0$$

7.40

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + R_s (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_s (x_2 - x_1) + m_2 \cdot g = 0$$

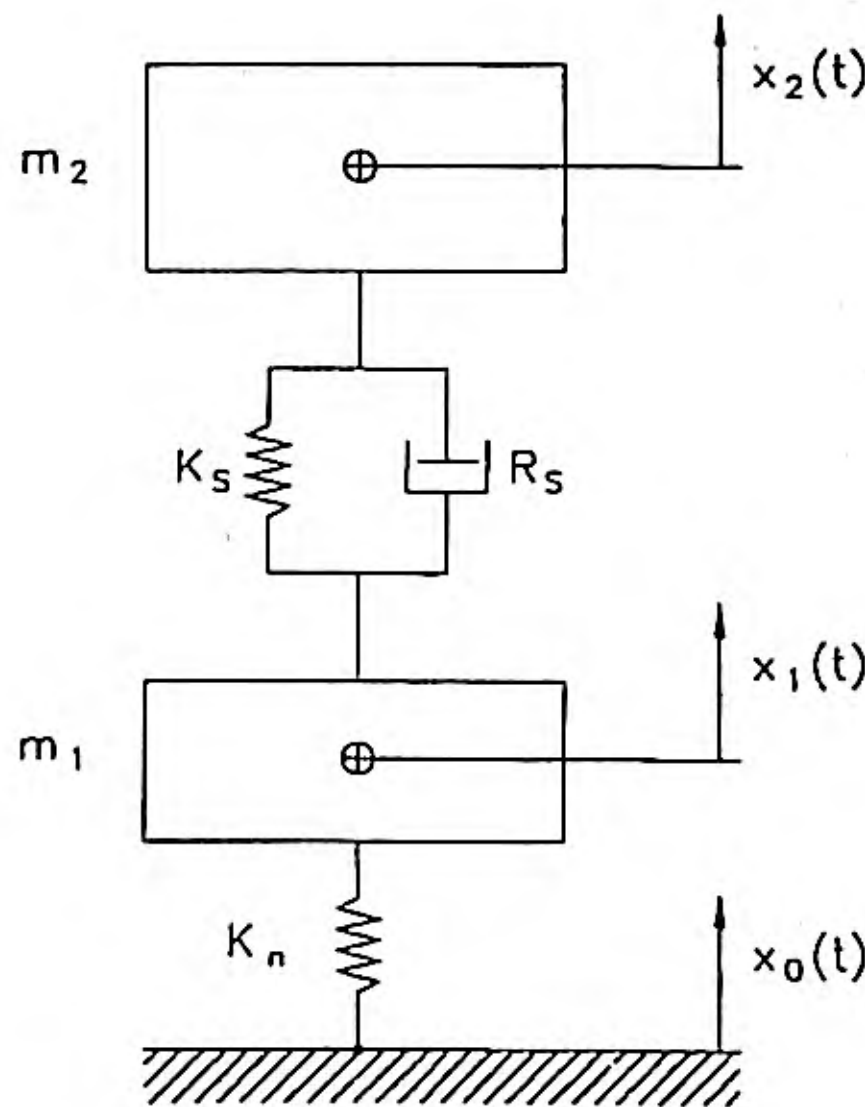


Figura 7.17. Modelo completo de un cuarto de vehículo.

Para hallar la función de transferencia entre la respuesta \$x_2\$ y la excitación \$x_0\$, se deben considerar nulas todas las condiciones iniciales y, además, todas las excitaciones exteriores excepto \$x_0\$.

En estas condiciones, al aplicar la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales, se obtiene:

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

$$(m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n) \cdot x_1(s) - (R_s \cdot s + K_s) \cdot x_2(s) - K_n \cdot x_0(s) = 0$$

$$(m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s) \cdot x_2(s) - (R_s \cdot s + K_s) \cdot x_1(s) = 0$$

Sistema que expresado en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n & -(R_s \cdot s + K_s) \\ -(R_s \cdot s + K_s) & m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n \cdot x_0(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad 7.41$$

Se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas, del cual, aplicando la regla de Cramer, puede obtenerse $x_2(s)$.

$$x_2(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n & K_n x_0(s) \\ -(R_s \cdot s + K_s) & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n & -(R_s \cdot s + K_s) \\ -(R_s \cdot s + K_s) & m_2 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s \end{bmatrix}}$$

$$x_2(s) = \frac{K_n \cdot (R_s \cdot s + K_s) \cdot x_0(s)}{[(m_1 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n)(m_2 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s) - (R_s \cdot s + K_s)^2]}$$

y en definitiva la función de transferencia:

$$\frac{x_2(s)}{x_0(s)} = \frac{K_n \cdot (R_s \cdot s + K_s)}{[(m_1 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n)(m_2 \cdot s^2 + R_s \cdot s + K_s) - (R_s \cdot s + K_s)^2]} \quad 7.42$$

Tomando los valores indicados en el apartado anterior, en la figura 7.19, se representa el módulo de la función de transferencia para dos valores del amortiguador, que corresponden a 0,25 y 0,4 del amortiguamiento crítico.

Como se observa en la figura 7.18, se incrementa el valor del módulo de la función de transferencia a la frecuencia fundamental, y es menor ante todas las demás frecuencias de excitación.

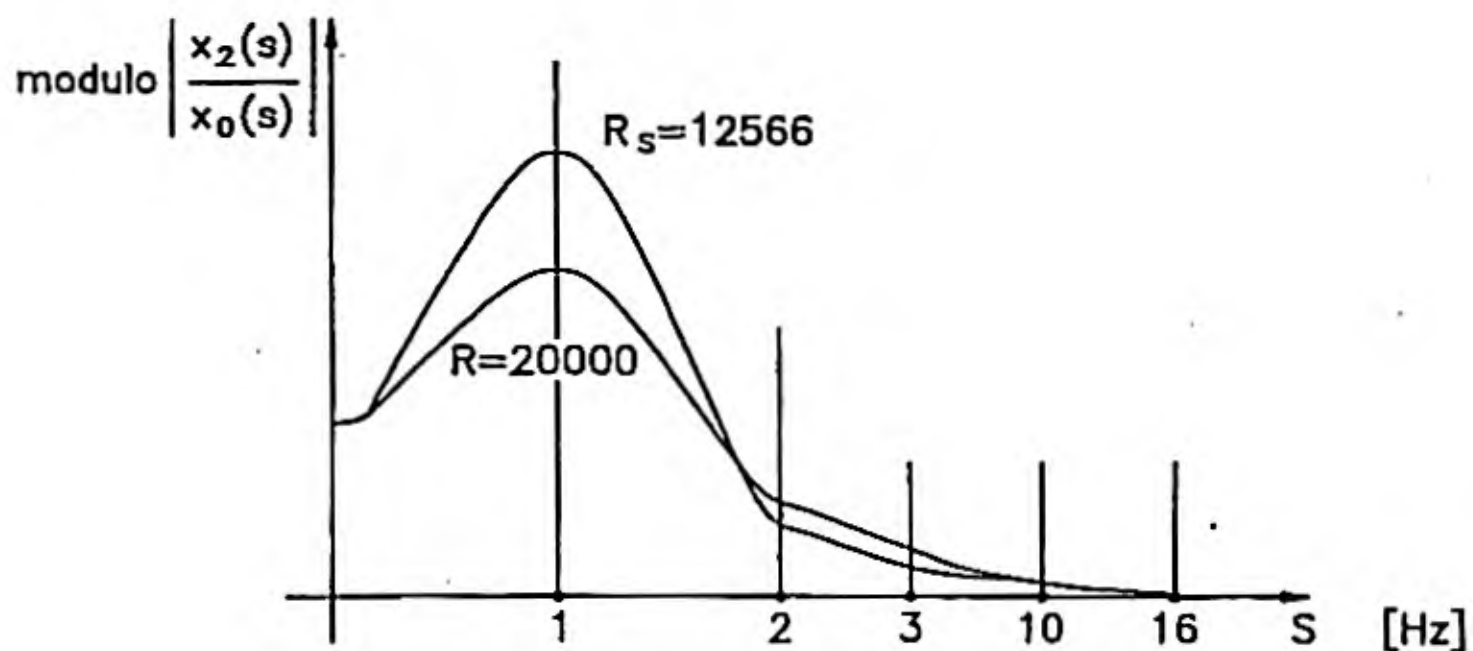


Figura. 7.18. Módulo de la función de transferencia respecto a la frecuencia.

Antes de elegir el valor definitivo del amortiguador es necesario analizar la función e transferencia entre $x_1(s)$ y $x_0(s)$.

En este caso, partiendo del sistema de ecuaciones algebraicas anteriores, se obtiene:

$$x_1(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} K_n \cdot x_0(s) & -(R_s \cdot s + K_s) \\ 0 & m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n & -(R_s \cdot s + K_s) \\ -(R_s \cdot s + K_s) & m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s \end{bmatrix}}$$

$$x_1(s) = \frac{K_n \cdot x_0(s) \cdot [m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s]}{[(m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n) (m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s) - (R_s \cdot s + K_s)^2]}$$

Y en definitiva la función de transferencia para la masa suspendida es:

$$\frac{x_1(s)}{x_0(s)} = \frac{K_n (m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s)}{[(m_1 s^2 + R_s \cdot s + K_s + K_n) (m_2 s^2 + R_s \cdot s + K_s) - (R_s \cdot s + K_s)^2]} \quad 7.43$$

Aplicando esta función de transferencia al ejemplo concreto que se estaba desarrollando, en la figura 7.19 se representa el valor de su módulo, para los dos valores considerados del amortiguamiento. En ella puede observarse que, cuando se incrementa el valor del amortiguamiento, el módulo de la función de transferencia permanece prácticamente

constante en un entorno estrecho de la frecuencia fundamental de la masa suspendida, pero menor ante el resto de frecuencias.

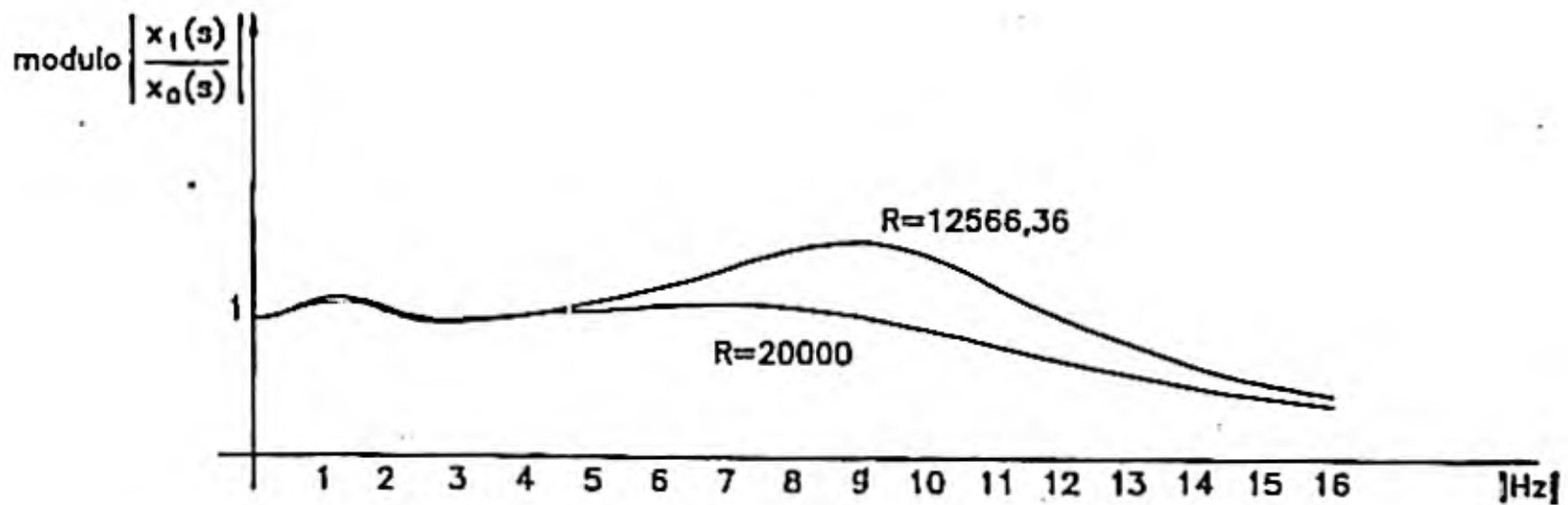


Figura. 7.19. Módulo de la función de transferencia para dos valores de amortiguamiento.

Teniendo en cuenta los valores de los módulos de ambas funciones de transferencia (figuras 7.18 y 7.19), para los diferentes intervalos de frecuencia, se adopta el valor más conveniente del amortiguamiento, normalmente como una decisión de compromiso, porque valores de R con mejor comportamiento para una de las masas y para ciertos intervalos de frecuencia pueden ser menos favorables en otros.

En estas circunstancias la elección del amortiguador se hace complicada, ya que lo que mejora un comportamiento empeora el otro, y en definitiva la decisión, como se comentaba, es de compromiso, tomando para los vehículos unos valores de amortiguamiento que se encuentran entre 0,25 y 0,35 del crítico.

7.3. MOVIMIENTOS DE CABECEO Y VAIVEN

En la figura 7.20, se representa el esquema de un vehículo visto desde el lateral, en donde k_d es la rigidez equivalente de la suspensión delantera y k_r la del eje trasero. Se trata de un modelo de dos grados de libertad que son: el desplazamiento vertical del centro de gravedad, denominado vaivén, y el giro alrededor de un eje transversal al vehículo que pasa por el centro de gravedad, denominado cabeceo.

Este modelo se obtiene al proyectar el vehículo sobre un plano longitudinal.

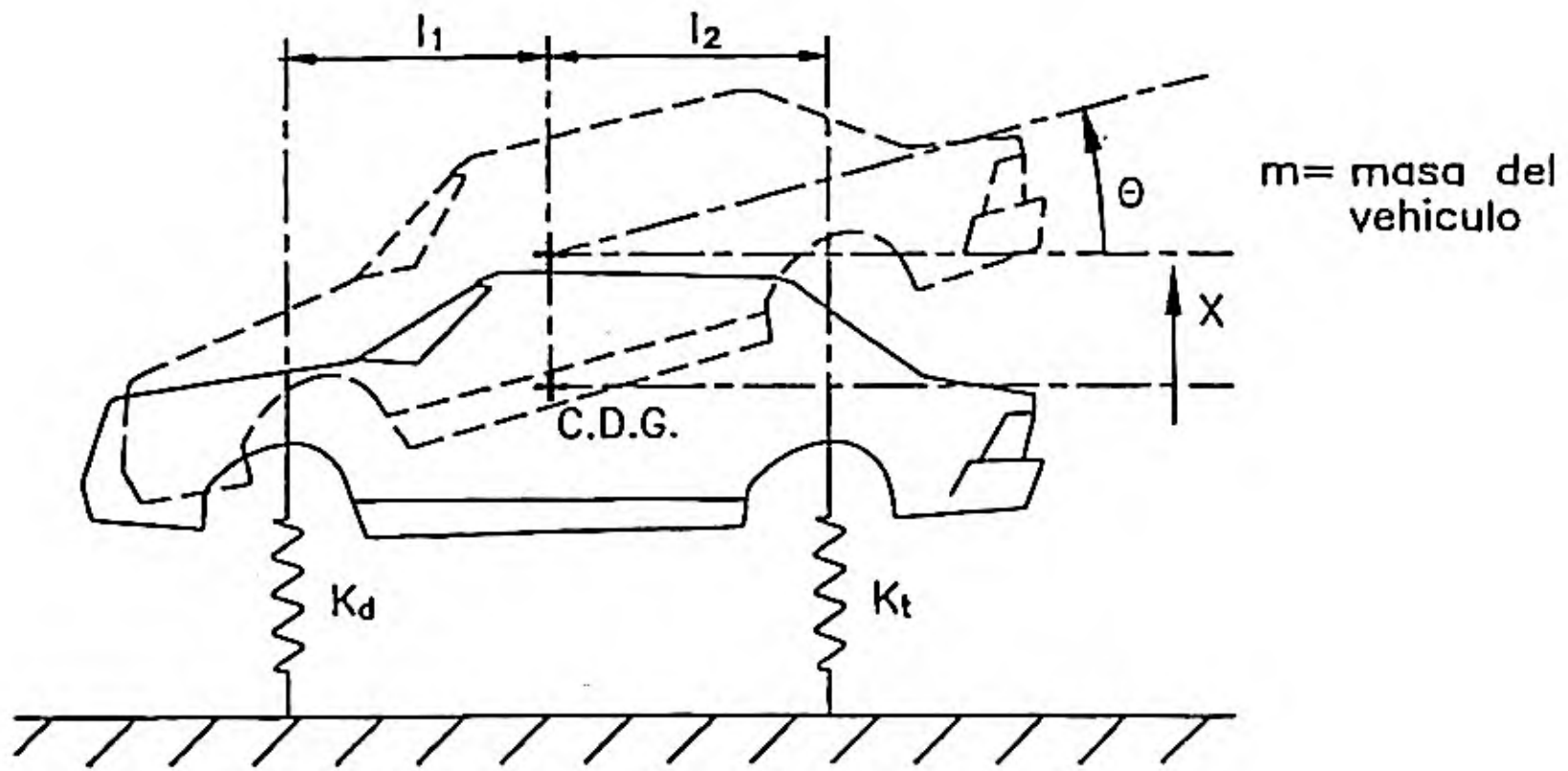


Figura 7.20. Cabeceo y vaivén de un vehículo.

Las ecuaciones del movimiento serán: para el caso del desplazamiento vertical (vaivén).

$$m \cdot \ddot{x} + k_d (x - l_1 \cdot \theta) + k_t (x + l_2 \cdot \theta) = 0 \quad 7.44$$

y para el movimiento de cabeceo, tomando momentos respecto al C.D.G. y siendo \$I\$ el momento de inercia respecto al eje transversal al vehículo que pasa por el C.D.G.

$$I \cdot \ddot{\theta} + k_t \cdot l_2 (x + l_2 \cdot \theta) - k_d \cdot l_1 (x - l_1 \cdot \theta) = 0 \quad 7.45$$

Operando y ordenando las ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + x (k_d + k_t) + \theta (k_t \cdot l_2 - k_d \cdot l_1) &= 0 \\ I \ddot{\theta} + x (k_t \cdot l_2 - k_d \cdot l_1) + \theta (k_t \cdot l_2^2 + k_d \cdot l_1^2) &= 0 \end{aligned} \quad 7.46$$

Al término \$(k_t \cdot l_2 - k_d \cdot l_1)\$ se le denomina "coeficiente de acoplamiento elástico". En el caso de ser cero, los movimientos de \$x\$ y \$\theta\$ estarán desacoplados y por lo tanto serán independientes. Efectivamente si:

$$k_t \cdot l_2 - k_d \cdot l_1 = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$k_t \cdot l_2 = k_d \cdot l_1 \quad 7.47$$

las ecuaciones fundamentales quedan:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + x(k_d + k_t) &= 0 \\ I \cdot \ddot{\theta} + \theta(k_t \cdot l_2^2 + k_d \cdot l_1^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 7.48$$

En este caso, si se aplica una fuerza vertical en el centro de gravedad del vehículo, el movimiento que aparece es únicamente de vaiven, y si únicamente se aplica un par, también en el C.D.G., el movimiento que produce es solamente de cabeceo alrededor del C.D.G.

Haciendo en las ecuaciones 7.46:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{m} \cdot (k_d + k_t) \\ D_2 &= \frac{1}{m} (k_t \cdot l_2 - k_d \cdot l_1) \\ D_3 &= \frac{1}{I} (k_t \cdot l_2^2 + k_d \cdot l_1^2) = \frac{1}{m \cdot r^2} (k_t \cdot l_2^2 + k_d \cdot l_1^2) \end{aligned} \quad 7.49$$

donde r es el radio de giro respecto al eje transversal al vehículo que pasa por el C.D.G., y expresando las ecuaciones fundamentales en función de D_1 , D_2 , y D_3 , se obtiene el sistema:

$$\ddot{x} + D_1 x + D_2 \theta = 0 \quad 7.50$$

$$\ddot{\theta} + \frac{D_2}{r^2} x + D_3 \theta = 0 \quad 7.51$$

7.3.1. Frecuencias de cabeceo y vaivén

Para hallar las frecuencias naturales del modelo se plantean dos casos, el primero es cuando existe desacoplamiento que, como se había visto anteriormente, sucede cuando:

$$k_t \cdot l_2 = k_d \cdot l_1$$

y, por lo tanto, $D_2 = 0$.

En este caso, de 7.50 y 7.51, se tiene:

$$\text{VAIVÉN:} \quad \omega_{nx} = \sqrt{D_1} = \sqrt{\frac{k_d + k_t}{m}} \quad 7.52$$

$$\text{CABECEO:} \quad \omega_{n\theta} = \sqrt{D_3} = \sqrt{\frac{k_t \cdot l_2^2 + k_d \cdot l_1^2}{m \cdot r^2}} \quad 7.53$$

En el caso de existir acoplamiento, hay que considerar que las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales van a ser de la forma:

$$\begin{aligned} x &= X \cdot \cos \omega_n \cdot t \\ \theta &= \Theta \cdot \cos \omega_n \cdot t \end{aligned} \quad 7.54$$

y sustituyendo en las ecuaciones 7.50 y 7.51, las 7.54 y sus derivadas:

$$(D_1 - \omega_n^2) X + D_2 \cdot \Theta = 0 \quad 7.55$$

$$\left(\frac{D_2}{r^2} \right) \cdot X + (D_3 - \omega_n^2) \cdot \Theta = 0 \quad 7.56$$

El sistema de ecuaciones anterior puede escribirse también, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} D_1 - \omega_n^2 & D_2 \\ \frac{D_2}{r^2} & D_3 - \omega_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 7.57$$

Es conocido que, para hallar las frecuencias fundamentales de un sistema, es necesario encontrar los valores de ω_n que hacen nulo el determinante de la matriz función de ω_n . En este caso esto significa que:

$$\omega_n^4 - (D_1 + D_3) \cdot \omega_n^2 + D_1 \cdot D_3 - \frac{D_2^2}{r^2} = 0 \quad 7.58$$

de donde se deducen las dos frecuencias naturales:

$$\begin{aligned}\omega_{n1}^2 &= \frac{1}{2}(D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r^2}} \\ \omega_{n2}^2 &= \frac{1}{2}(D_1 + D_3) + \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r^2}}\end{aligned}\tag{7.59}$$

Por otra parte, de la ecuación (7.55) puede deducirse el cociente entre la amplitud del vaiven y la del cabeceo, el cual será diferente para cada frecuencia fundamental.

$$\text{Para } \omega_{n1} \quad \left[\frac{X}{\Theta} \right]_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1}$$

$$\text{Para } \omega_{n2} \quad \left[\frac{X}{\Theta} \right]_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1}$$

Si el valor de cada uno de estos cocientes se interpreta como una longitud, es decir:

$$\begin{aligned}l_{01} &= \left[\frac{X}{\Theta} \right]_{\omega_{n1}} = \frac{D_2}{\omega_{n1}^2 - D_1} \\ l_{02} &= \left[\frac{X}{\Theta} \right]_{\omega_{n2}} = \frac{D_2}{\omega_{n2}^2 - D_1}\end{aligned}\tag{7.61}$$

Se cumplirá que:

$$\begin{aligned}\Theta \cdot l_{01} &= X \\ \Theta \cdot l_{02} &= X\end{aligned}\tag{7.62}$$

Estas ecuaciones indican que existen dos puntos separados del C.D.G. a las distancias l_{01} y l_{02} , respecto a los cuales gira la carrocería, (figura 7.21). Estos puntos no se desplazan verticalmente y se denominan centros de oscilación. Cuando el cociente X/Θ , da un valor negativo, el centro de oscilación se encuentra retrasado respecto al C.D.G. Esto se debe al criterio de signos adoptado inicialmente.

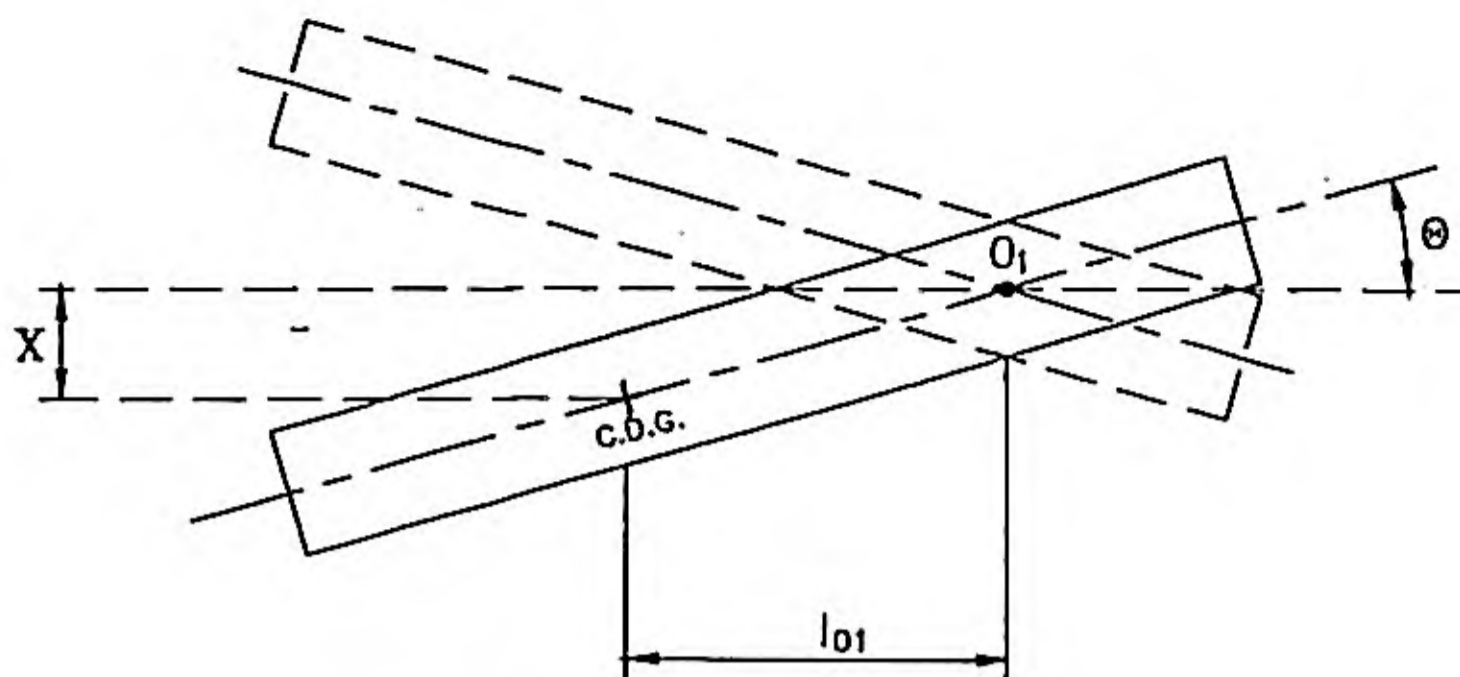


Figura 7.21. Centro de oscilación.

Al contrario, cuando X/Θ es positivo, el centro de oscilación se sitúa adelantado respecto al C.D.G.

Al centro de oscilación que se encuentra fuera de la batalla del vehículo, se le denomina centro de vaiven, y a su frecuencia asociada, frecuencia natural de vaiven. Al centro que se encuentra dentro de la batalla y a su frecuencia asociada, se le denominan centro de oscilación de cabeceo y frecuencia de cabeceo, respectivamente.

Cuando una cualquiera de las dos ruedas es excitada verticalmente por irregularidades de la calzada, se producen simultáneamente movimientos de oscilación respecto a ambos centros, y el movimiento resultante es la suma de ambos.

Un caso muy interesante se produce cuando $r^2 = l_1 \cdot l_2$. Sustituyendo en 7.61 se obtiene:

$$\frac{X}{\Theta} \Big|_{\omega_{n1}} = l_2$$

7.63

$$\frac{X}{\Theta} \Big|_{\omega_{n2}} = l_1$$

Esto significa que los centros de oscilación se encuentran, en proyección sobre el plano de rodadura, a igual distancia del C.D.G. que los ejes del vehículo. De esta forma, cuando se aplica un desplazamiento en la rueda delantera, el vehículo se mueve oscilando alrededor del eje trasero sin que éste se desplace verticalmente y a la inversa, cuando se desplaza la rueda trasera; es decir, no existe interacción entre las suspensiones delantera y trasera, lo cual es deseable.

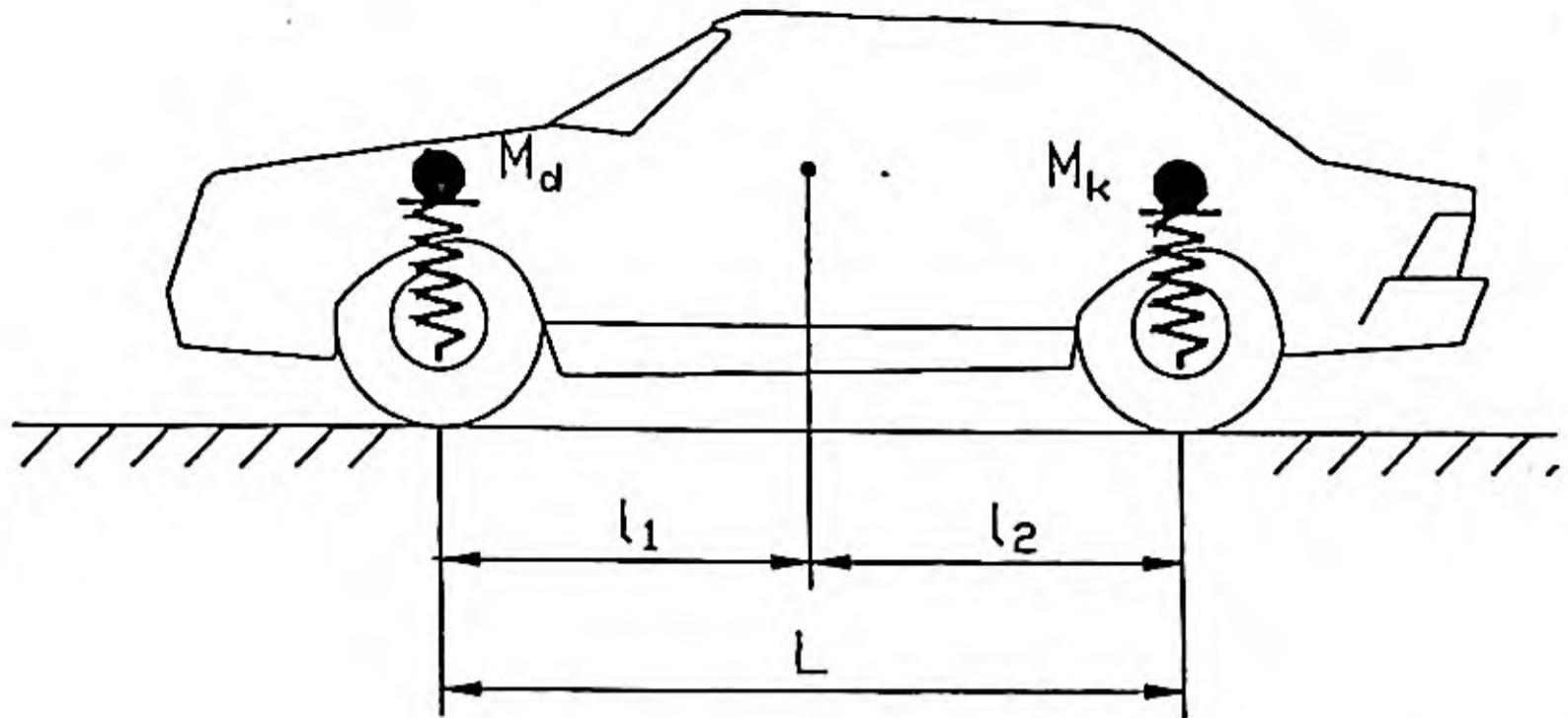


Figura 7.22. Discretización de la suspensión en dos masas independientes.

Al cumplirse que $r^2 = l_1 \cdot l_2$ el vehículo se comporta como lo harían dos masas independientes situadas cada una de ellas en la vertical que contiene al eje delantero y trasero, respectivamente. En la figura 7.22, se observa este hecho. En este caso, las frecuencias naturales podrán definirse como frecuencia de suspensión delantera y frecuencia de suspensión trasera, y siendo:

$$\omega_n \text{ delantera} = \sqrt{\frac{k_d \cdot (l_1 + l_2)}{m \cdot l_2}}$$

$$\omega_n \text{ trasera} = \sqrt{\frac{k_t \cdot (l_1 + l_2)}{m \cdot l_1}}$$

con:

$$m_d = \frac{m \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

$$m_t = \frac{m \cdot l_1}{l_1 + l_2}$$

- En la práctica es difícil cumplir la relación $r^2 = l_1 \cdot l_2$ y normalmente se tiene:

$$\frac{r^2}{l_1 \cdot l_2} = 0,8 \text{ para vehículos deportivos.}$$

$$\frac{r^2}{l_1 \cdot l_2} = 0,9 \div 1 \text{ para turismos normales con tracción trasera.}$$

$$\frac{r^2}{l_1 \cdot l_2} = 1,2 \text{ en turismos de tracción delantera.}$$

7.3.2. Modelos de 4 G.D.L.

Suspensión independiente.

En la figura 7.23, se representa un modelo de 4 grados de libertad, con el que puede simularse tanto el comportamiento vertical/transversal como el vertical/longitudinal de un vehículo. En el primer caso, los grados de libertad son el desplazamiento vertical de la rueda izquierda x_1 , el desplazamiento vertical de la rueda derecha x_2 , el desplazamiento vertical de la masa suspendida x , y el ángulo de balanceo de la carrocería θ .

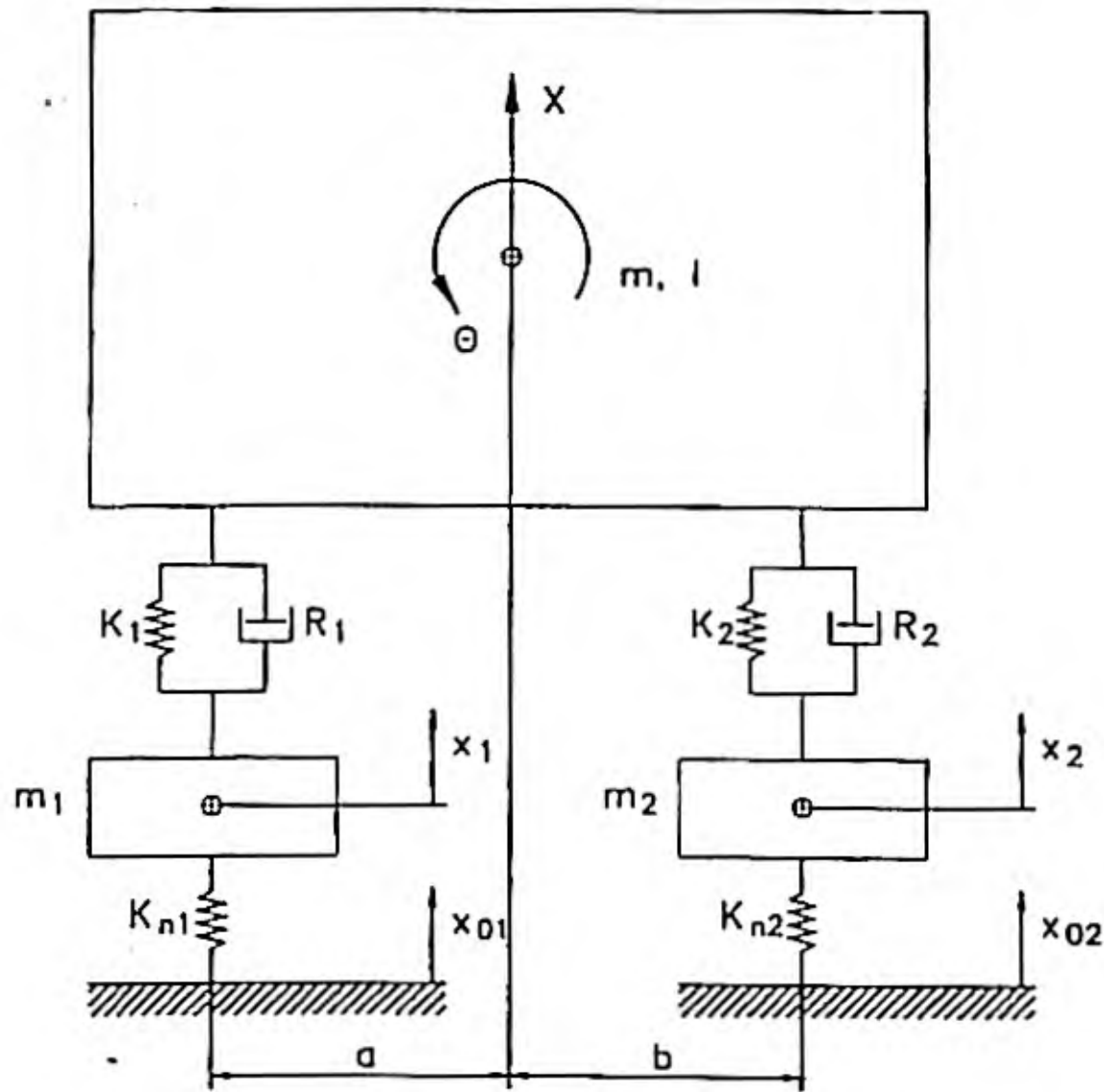


Figura 7.23. Modelo de cuatro grados de libertad.

El resto de los elementos son:

- K_{n1} - Rigidez vertical del neumático, rueda izquierda.
- K_{n2} - Rigidez vertical del neumático, rueda derecha.

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

K_1	-	Rígidez vertical suspensión, rueda izquierda.
K_2	-	Rígidez vertical suspensión, rueda derecha.
R_1	-	Amortiguador rueda izquierda.
R_2	-	Amortiguador rueda derecha.
m_1	-	Masa rueda izquierda.
m_2	-	Masa rueda derecha.
m	-	Masa suspendida.
I	-	Momento de Inercia de la masa suspendida alrededor de su eje longitudinal.
x_{01}	-	Desplazamiento producido por la irregularidad de la carretera en la rueda izquierda.
x_{02}	-	Desplazamiento producido por la irregularidad de la carretera en la rueda derecha.
a	-	Distancia del centro de gravedad a la suspensión izquierda.
b	-	Distancia del centro de gravedad a la suspensión derecha.

El modelo puede ser utilizado también, como ya se ha indicado, para el análisis del comportamiento vertical/longitudinal. En este caso K_{n1} , K_1 , R_1 , m_1 tienen el mismo significado pero ahora referido al eje delantero, y K_{n2} , K_2 , R_2 , m_2 al eje trasero.

En cuanto se refiere a I , ahora será el momento de inercia de la carrocería respecto a un eje transversal a la misma, y las distancias a , b serán las del centro de gravedad al eje delantero y trasero respectivamente (I_1 y I_2). Como el modelo tiene 4 G.D.L., su sistema de ecuaciones estará formado por cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Este sistema de ecuaciones puede presentarse en forma matricial de la forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [R]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{e\} = 0$$

siendo:

Matriz masa $[M]$:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Matriz amortiguamiento [R]:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & a \cdot R_1 & -R_1 \\ 0 & R_2 & -b \cdot R_2 & -R_2 \\ a \cdot R_1 & -b \cdot R_2 & (a^2 \cdot R_1 + b^2 \cdot R_2) & -(a \cdot R_1 - b \cdot R_2) \\ -R_1 & -R_2 & -(a \cdot R_1 - b \cdot R_2) & (R_1 + R_2) \end{bmatrix}$$

Matriz rigidez [K]:

$$[K] = \begin{bmatrix} (K_{n1} + K_1) & 0 & a \cdot K_1 & -K_1 \\ 0 & (K_{n2} + K_2) & -b \cdot K_2 & -K_2 \\ a \cdot K_1 & -b \cdot K_2 & (a^2 \cdot K_1 + b^2 \cdot K_2) & -(a \cdot K_1 - b \cdot K_2) \\ -K_1 & -K_2 & -(a \cdot K_1 - b \cdot K_2) & (K_1 + K_2) \end{bmatrix}$$

El vector {e}, contiene los términos independientes del sistema y en este caso:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} -x_{01} \cdot K_{n1} + m_1 \cdot g \\ -x_{02} \cdot K_{n2} + m_2 \cdot g \\ 0 \\ m \cdot g \end{Bmatrix}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. El vector de desplazamientos {x} es.

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \\ x \end{Bmatrix}$$

7.3.3. Aplicación de modelos de 4.G.D.L.

El modelo del apartado anterior se va a aplicar al análisis del comportamiento transversal de un vehículo industrial, sometido a irregularidades de la calzada, cuyas

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

característica son:

$$K_{n1} = K_{n2} = 1207000 \text{ N/m}$$

$$K_1 = K_2 = 157913,4 \text{ N/m}$$

$$R_1 = R_2 = 12566,36 \text{ N.s/m}$$

$$m_1 = m_2 = 350 \text{ Kg}$$

$$m = 8000 \text{ Kg}$$

$$I = 8000 \text{ Kg.m}^2$$

$$a = b = 1 \text{ m}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve mediante un algoritmo de resolución, y se supone como excitación que la rueda izquierda se encuentra en el suelo una irregularidad como la indicada en la figura 7.24, en donde se representa el desplazamiento vertical de la carretera, en función del tiempo que tarda la rueda en recorrer la irregularidad.

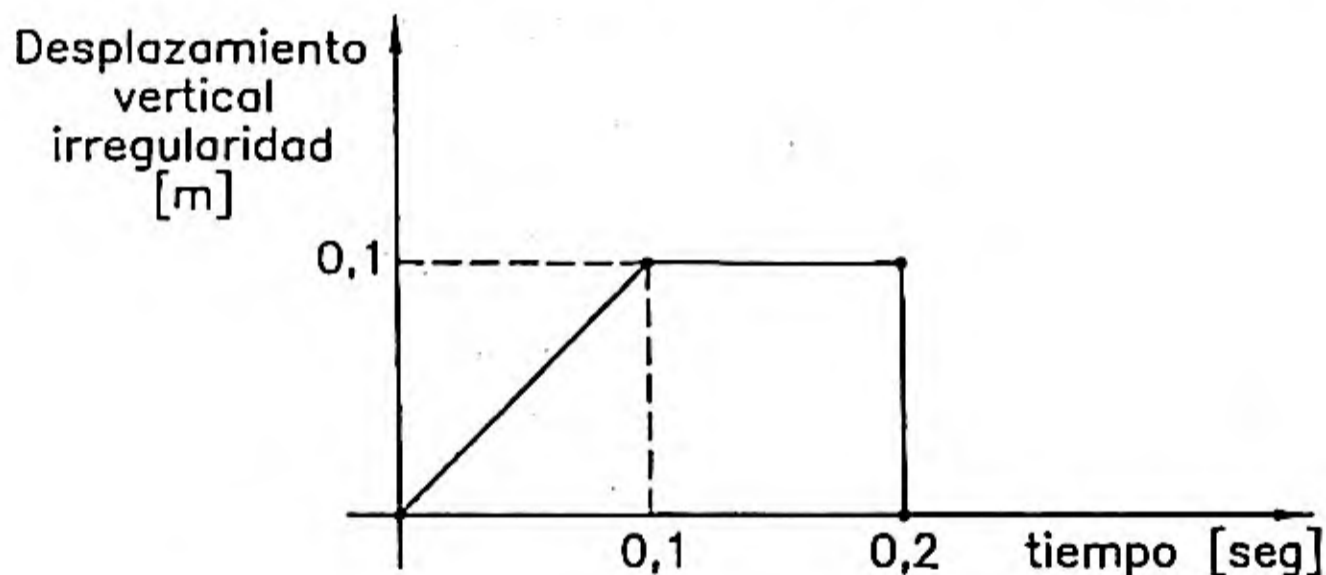


Figura 7.24. Modelo de irregularidad de la carretera que actúa sobre la rueda izquierda.

En la figura 7.25, se muestra la respuesta del modelo durante los dos primeros segundos. La curva 1 es el desplazamiento vertical de la masa suspendida, la curva 2 muestra el desplazamiento vertical de la rueda izquierda, y la 3 es la irregularidad de la carretera. Los valores se expresan en metros.

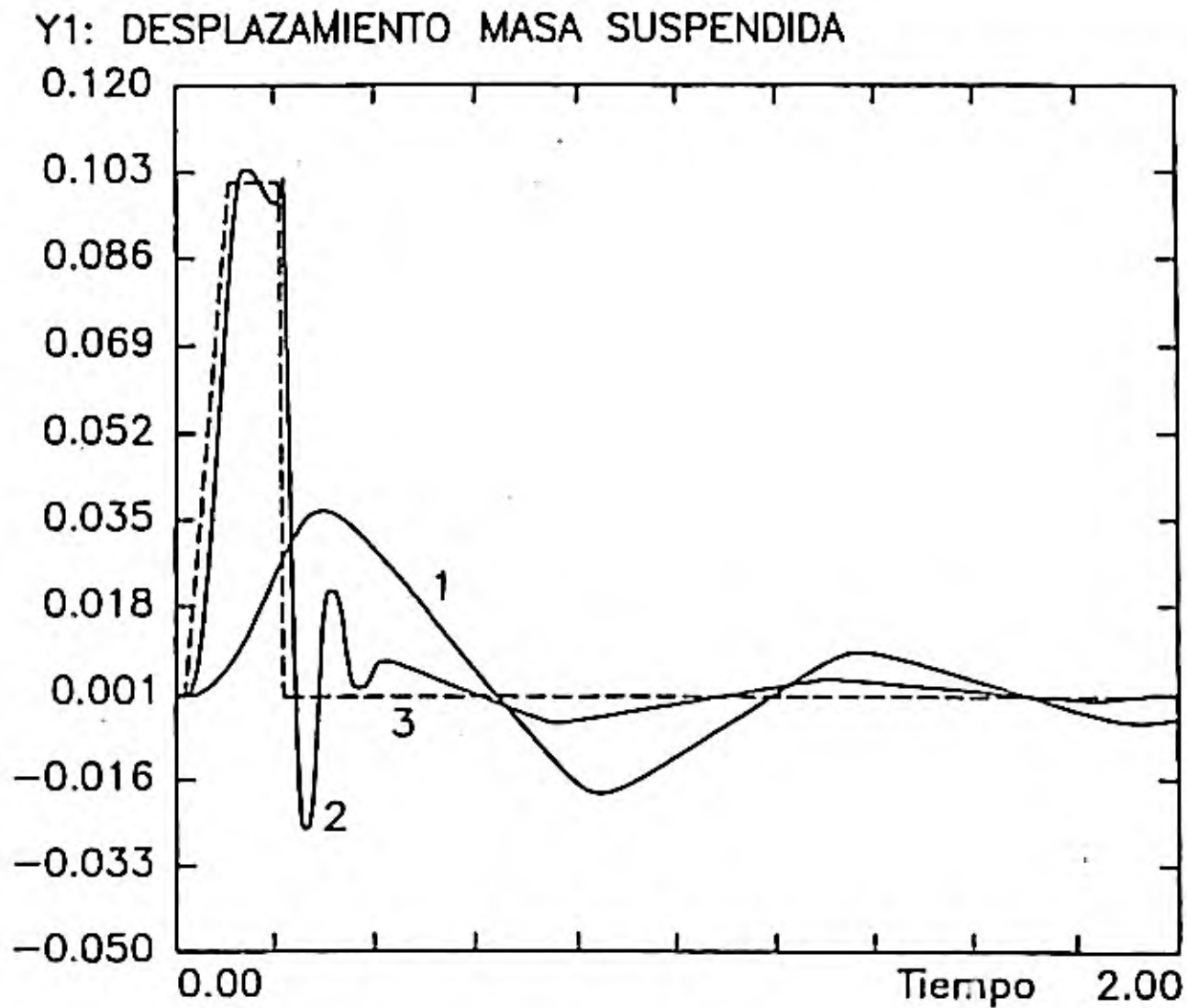


Figura. 7.25. Desplazamiento vertical del C.D.G. de la masa suspendida (1) y de la rueda izquierda (2).

Como se observa en esta figura, la rueda izquierda acompaña a la irregularidad hasta que ésta cesa bruscamente, y entonces oscila alrededor del valor cero muy rápidamente. Posteriormente comienza un movimiento mucho más lento y de amplitud más reducida. Si se observa la curva 1, se ve cómo el movimiento de la masa suspendida es, en los primeros instantes, de menor amplitud que el de la rueda, y mucho más lento.

Cuando la irregularidad cesa, la rueda intenta volver rápidamente al valor cero de desplazamiento, pero entonces se ve arrastrada por el movimiento lento de la masa suspendida.

En la figura 7.26, se muestra la misma respuesta pero sólo en los 0,5 primeros segundos, con el fin de que se puedan ver más claramente las diferencias entre la masa suspendida (curva 1) y la rueda (curva 2), ante la excitación de la irregularidad (curva 3). El desplazamiento máximo de la rueda llega a 103 mm., mientras que la masa suspendida sólo se eleva como máximo 35 mm. En definitiva, esta figura muestra uno de los cometidos de la suspensión, consistente en aislar a la carrocería de las posibles irregularidades del camino de rodadura.

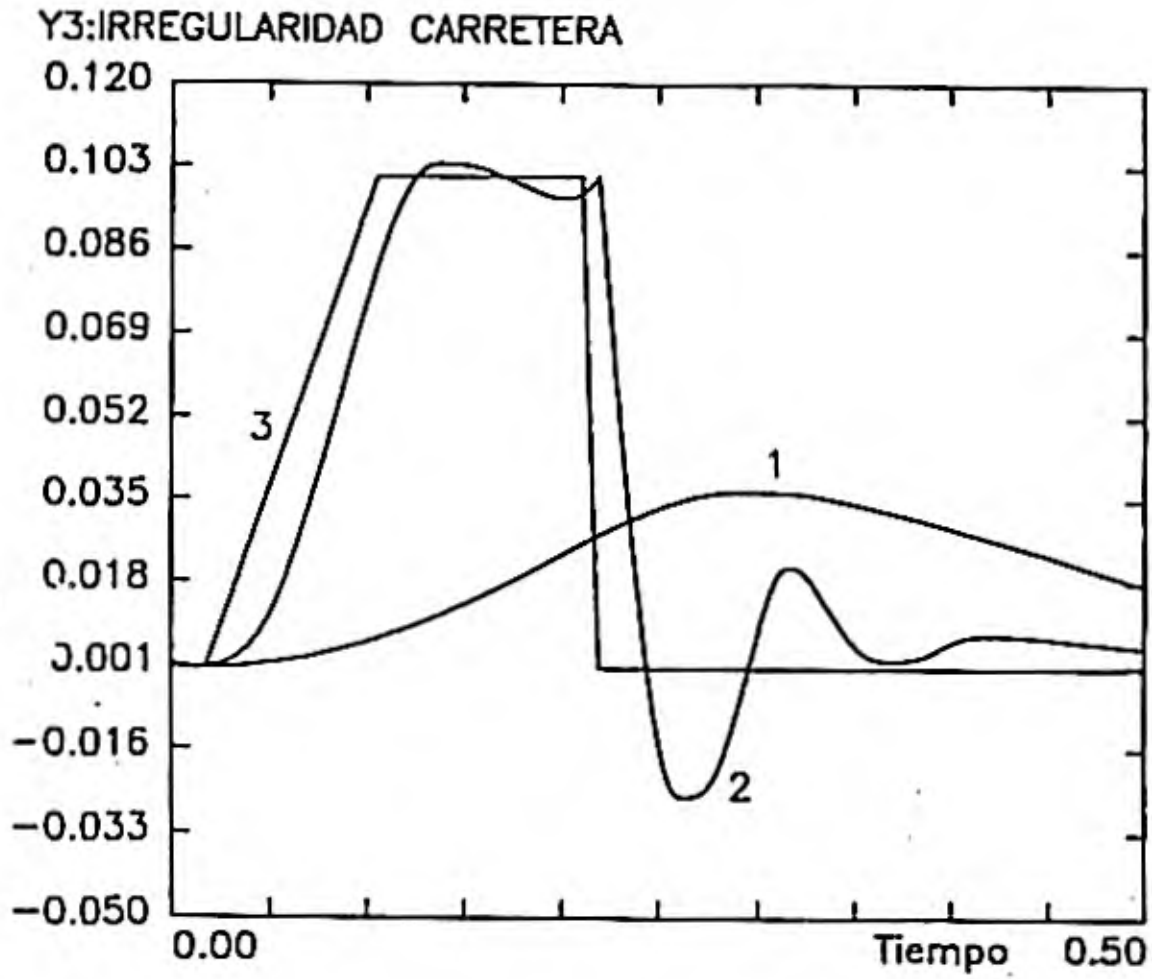


Figura 7.26. Desplazamiento vertical del C.D.G. (1); desplazamiento de la rueda izquierda (2) e irregularidad que lo provoca (3)

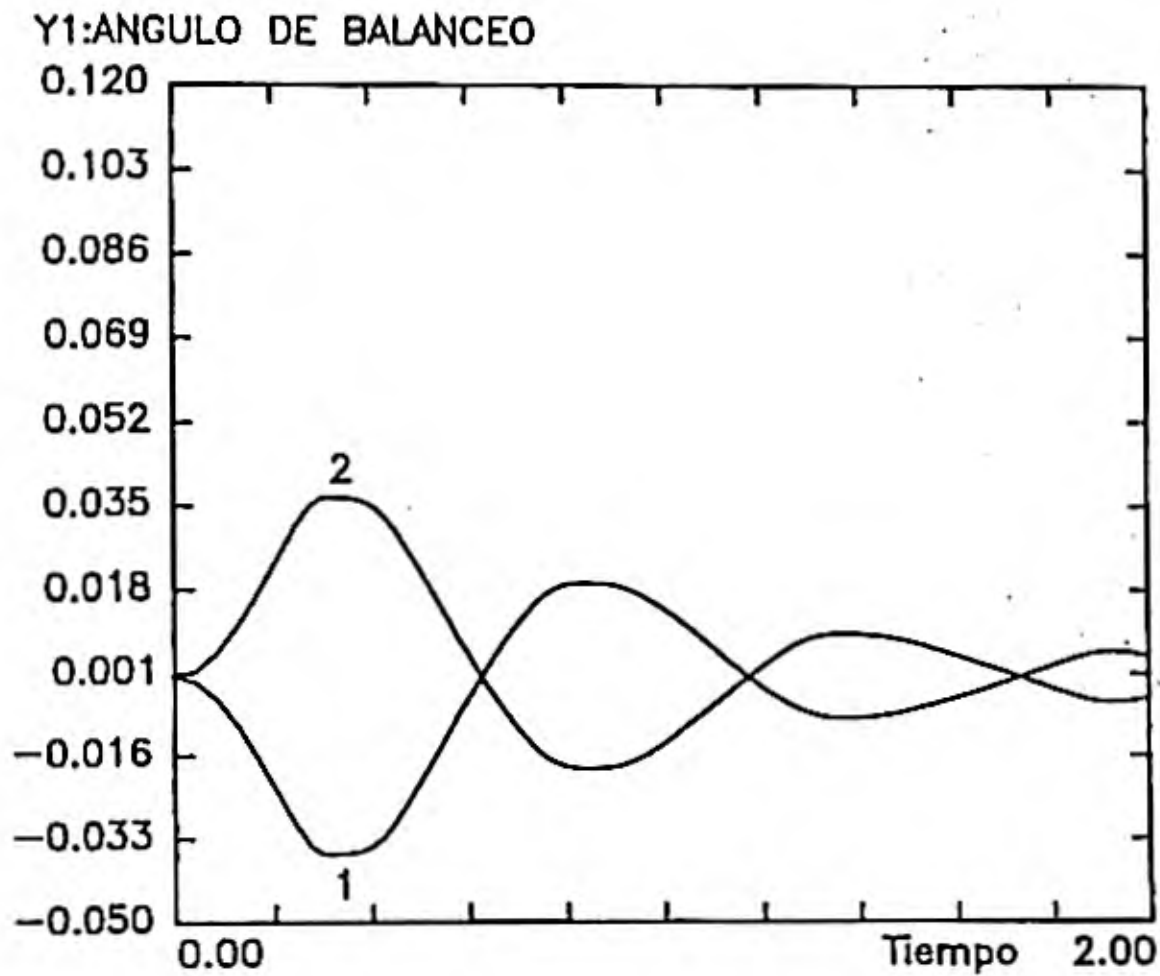


Figura 7.27. Desplazamiento vertical del C.D.G. (2) y variación del ángulo de balanceo (1)

Por último, en la figura 7.27, se muestra el ángulo de balanceo de la carrocería en radianes (curva 1), y el desplazamiento vertical de la masa suspendida (curva 2).

En la figura 7.26, puede observarse cómo el movimiento de la rueda es de más alta frecuencia que el vertical de la carrocería y en la figura 7.27, se observa cómo la frecuencia de balanceo es, en este caso, muy parecida a la del movimiento vertical de la carrocería.

7.3.4. Respuesta en curva

Para analizar el comportamiento transversal del vehículo en curva, se analiza el mismo modelo, pero en este caso la excitación se supondrá que es un par M aplicado alrededor del centro de gravedad de la carrocería y no existe irregularidad en el suelo.

Respecto al sistema de ecuaciones, estas condiciones sólo afectan al cambio del vector $\{e\}$, que en este caso vale:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} m_1 \cdot g \\ m_2 \cdot g \\ -M \\ m \cdot g \end{Bmatrix}$$

En la figura 7.28, se muestra el ángulo de balanceo de la carrocería durante los cuatro primeros segundos. Se observa cómo, en el período transitorio, se alcanza un valor máximo del orden de 0,087 radianes ($4,98^\circ$), mientras que en la respuesta permanente se sitúa en torno a 0,057 radianes ($3,26^\circ$).

Se observa, también, cómo al cabo de los cuatro segundos, la carrocería se balancea ya muy poco y puede considerarse que a partir de este tiempo se entra en el régimen permanente y la carrocería no se mueve.

La figura 7.29 muestra, en la curva 1, el desplazamiento vertical de la rueda izquierda y en la curva 2 el desplazamiento vertical de la rueda derecha, observándose cómo ambos desplazamientos son iguales pero de signo opuesto. Esto significa que la carrocería no se está desplazando verticalmente y, por lo tanto, en sentido transversal, están desacoplados los movimientos vertical y de balanceo.

Lo anterior se debe a que, en el modelo se ha considerado, el centro de gravedad está simétricamente situado y a que todos los demás elementos tienen los mismos valores en el lado izquierdo que en el derecho.

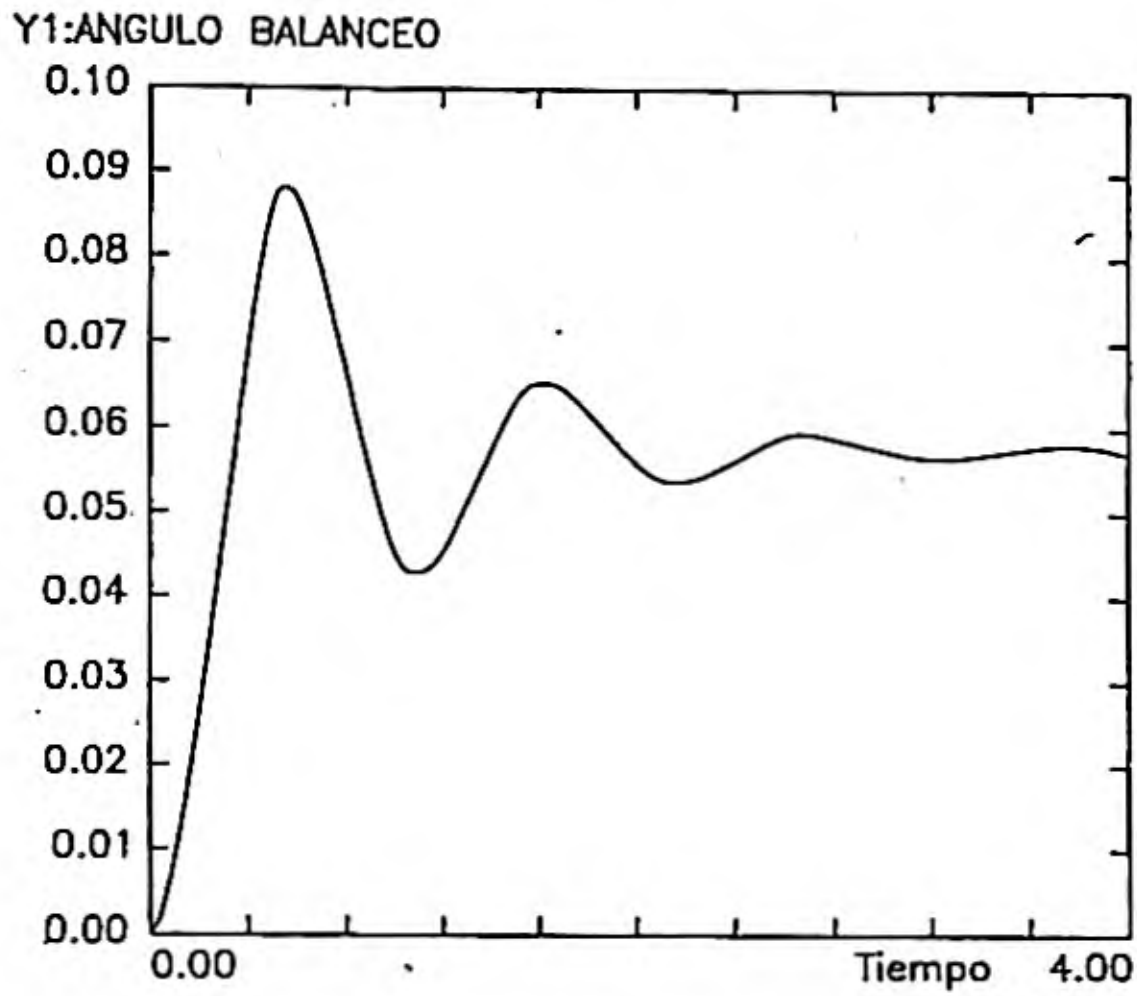


Figura 7.28. Ángulo de balanceo del vehículo sometido a un par M .

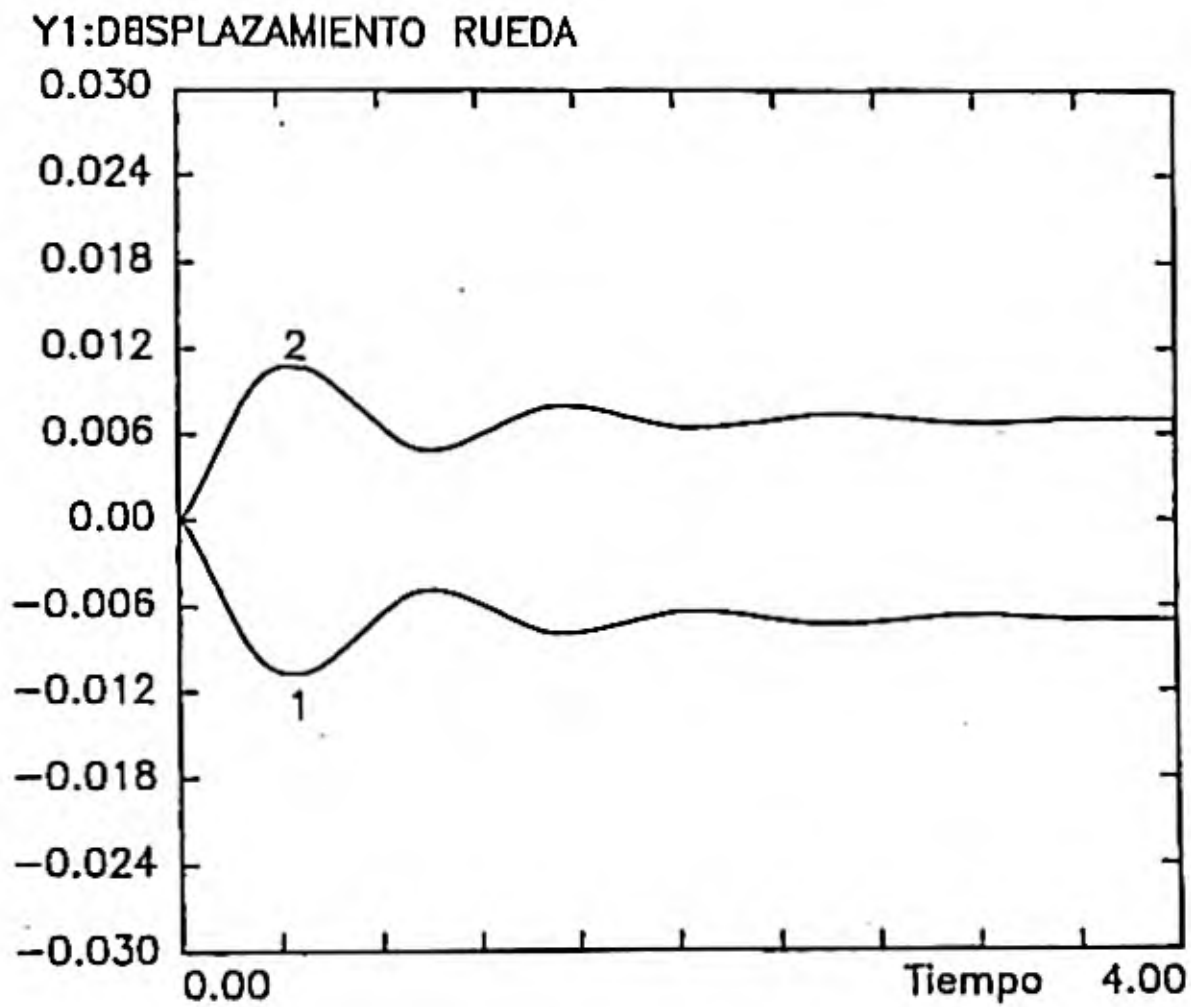


Figura 7.29. Desplazamiento vertical de las ruedas izquierda (1) y derecha (2)

Por último, en la figura 7.30, se muestra la carga en la rueda izquierda (curva 1), y el desplazamiento vertical de la misma rueda (curva 2). El valor de la carga en rueda parte de 42630 N, que es su valor en estática, tiene un máximo en el transitorio de unos 55000 N, y tiende a estabilizarse en el valor de 50630 N.

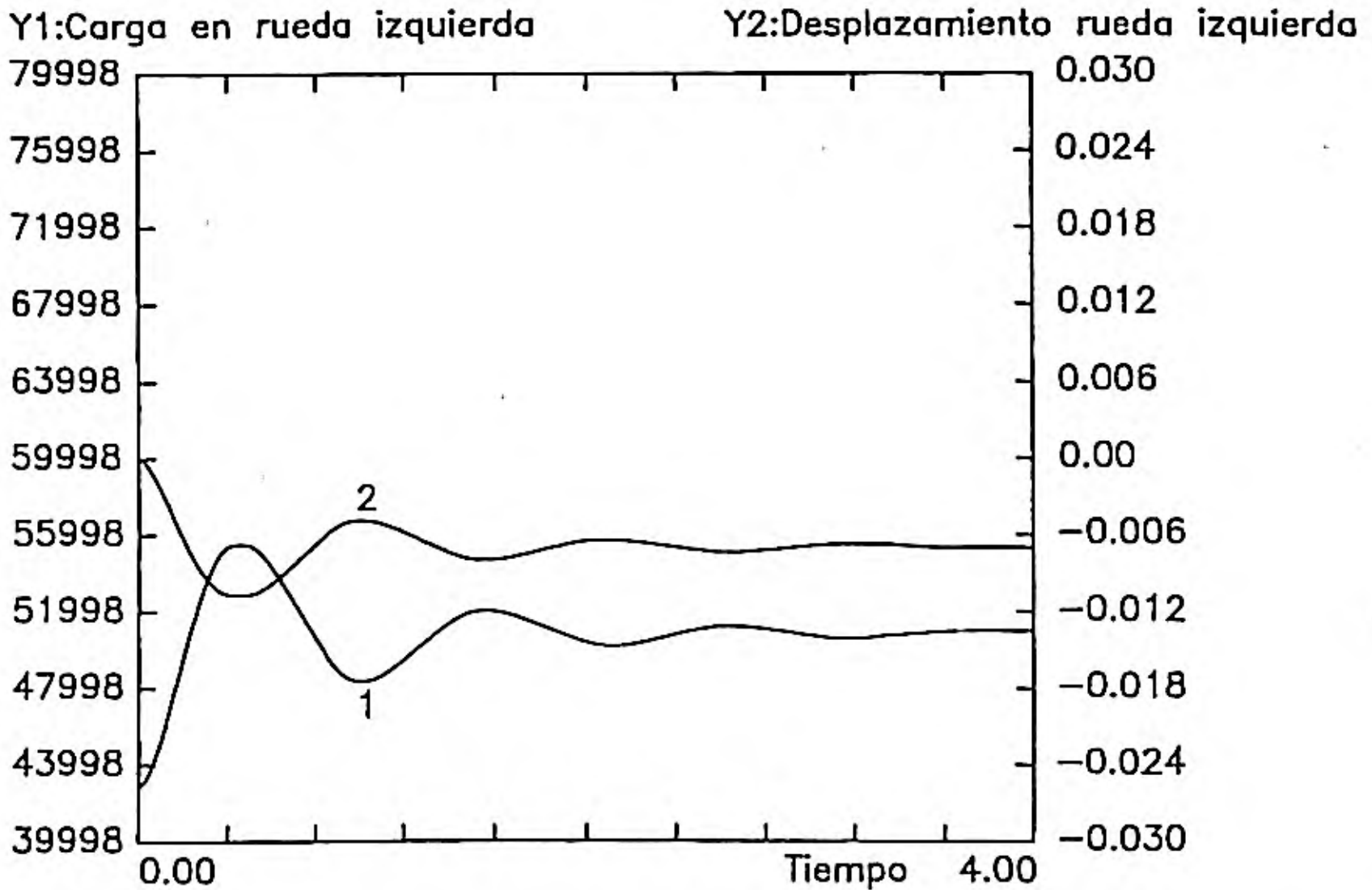


Figura 7.30. Carga dinámica sobre rueda izquierda (1) y desplazamiento vertical de la misma rueda (2)

Influencia de la masa no suspendida.

Para comprobar la influencia que en la respuesta de un vehículo tiene la masa no suspendida, se ha resuelto este modelo, ante la irregularidad de carretera definida anteriormente, para diferentes valores de la masa no suspendida. En la figura 7.31, se muestra el desplazamiento vertical de la rueda izquierda, para un valor de $m_1 = 350$ Kg (curva 1) y para $m_2 = 500$ Kg (curva 2).

Se observa cómo los máximos desplazamientos se producen siempre en la curva 2, lo que indica que todo incremento de masa no suspendida empeora la respuesta del vehículo y por lo tanto su bondad de comportamiento.

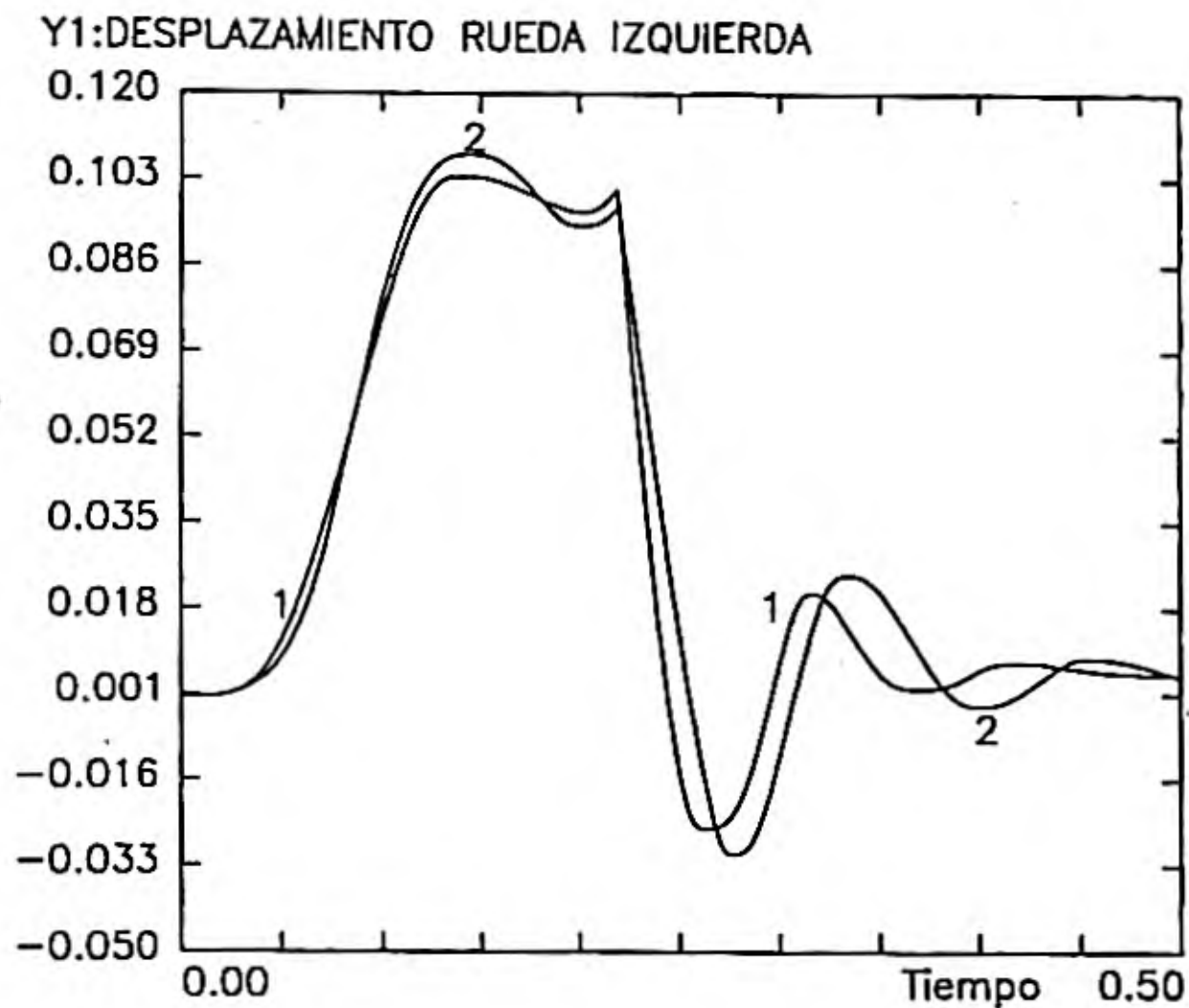


Figura 7.31. Desplazamiento vertical de la rueda izquierda para dos valores de la masa no suspendida

7.3.5. Suspensión con eje rígido

Los vehículos industriales suelen incorporar ejes rígidos, con lo que el modelo analizado en los apartados anteriores debe modificarse para contemplar de una forma más real, este hecho. En la figura 7.32, se muestra un modelo de 4 G.D.L., para analizar el comportamiento transversal de los vehículos que montan eje rígido. Los cuatro grados de libertad son el desplazamiento vertical del eje (x_1), el ángulo de balanceo del eje (θ_1), el desplazamiento vertical de la carrocería (x_2) y el ángulo de balanceo de la carrocería (θ_2).

Una particularidad de este modelo es que permite considerar la diferencia que puede existir entre la vía del eje ($a_1 + a_2$) y la distancia entre las suspensiones ($b_1 + b_2$); m_1, I_1 , son la masa y el momento de inercia del eje y m_2, I_2 los de la carrocería, respectivamente.

En cuanto al sistema de ecuaciones se tendrá:

$$[M] \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + [R] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + [K] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \{e\} = 0$$

siendo:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -(b_1 R_1 - b_2 R_2) & -(-b_1 R_1 + b_2 R_2) & -(R_1 + R_2) \\ -(b_1 R_1 - b_2 R_2) & (b_1^2 R_1 + b_2^2 R_2) & -(b_1^2 R_1 + b_2^2 R_2) & -(-b_1 R_1 + b_2 R_2) \\ -(-b_1 R_1 + b_2 R_2) & -(b_1^2 R_1 + b_2^2 R_2) & (b_1^2 R_1 + b_2^2 R_2) & -(b_1 R_1 - b_2 R_2) \\ -(R_1 + R_2) & -(-b_1 R_1 + b_2 R_2) & -(b_1 R_1 - b_2 R_2) & (R_1 + R_2) \end{bmatrix}$$

$$\{e\} = \begin{bmatrix} -x_{01} \cdot K_{n1} - x_{02} \cdot K_{n2} + m_1 \cdot g \\ a_1 \cdot x_{01} \cdot K_{n1} - a_2 \cdot s_{02} \cdot K_{n2} \\ 0 \\ m_2 \cdot g \end{bmatrix}$$

Como aplicación de este modelo se va a analizar el mismo vehículo que se ha estudiado con el modelo de suspensión independiente.

Las nuevas características de este modelo son:

$$m_1 = 700 \text{ Kg} \qquad I_1 = 1500 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$$

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m}; \qquad b_1 = b_2 = 0,85 \text{ m}.$$

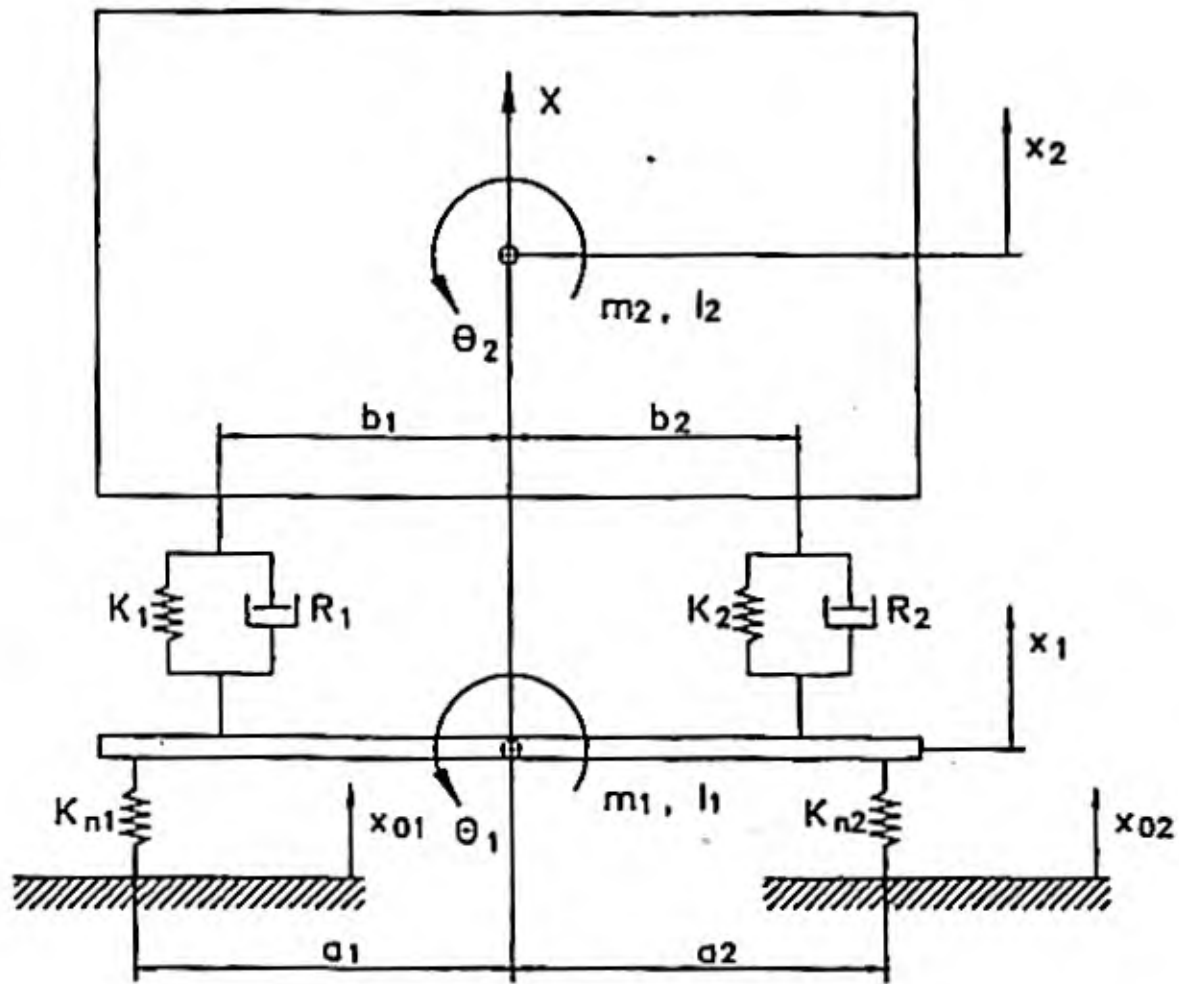


Figura 7.32. Suspensión con eje rígido.

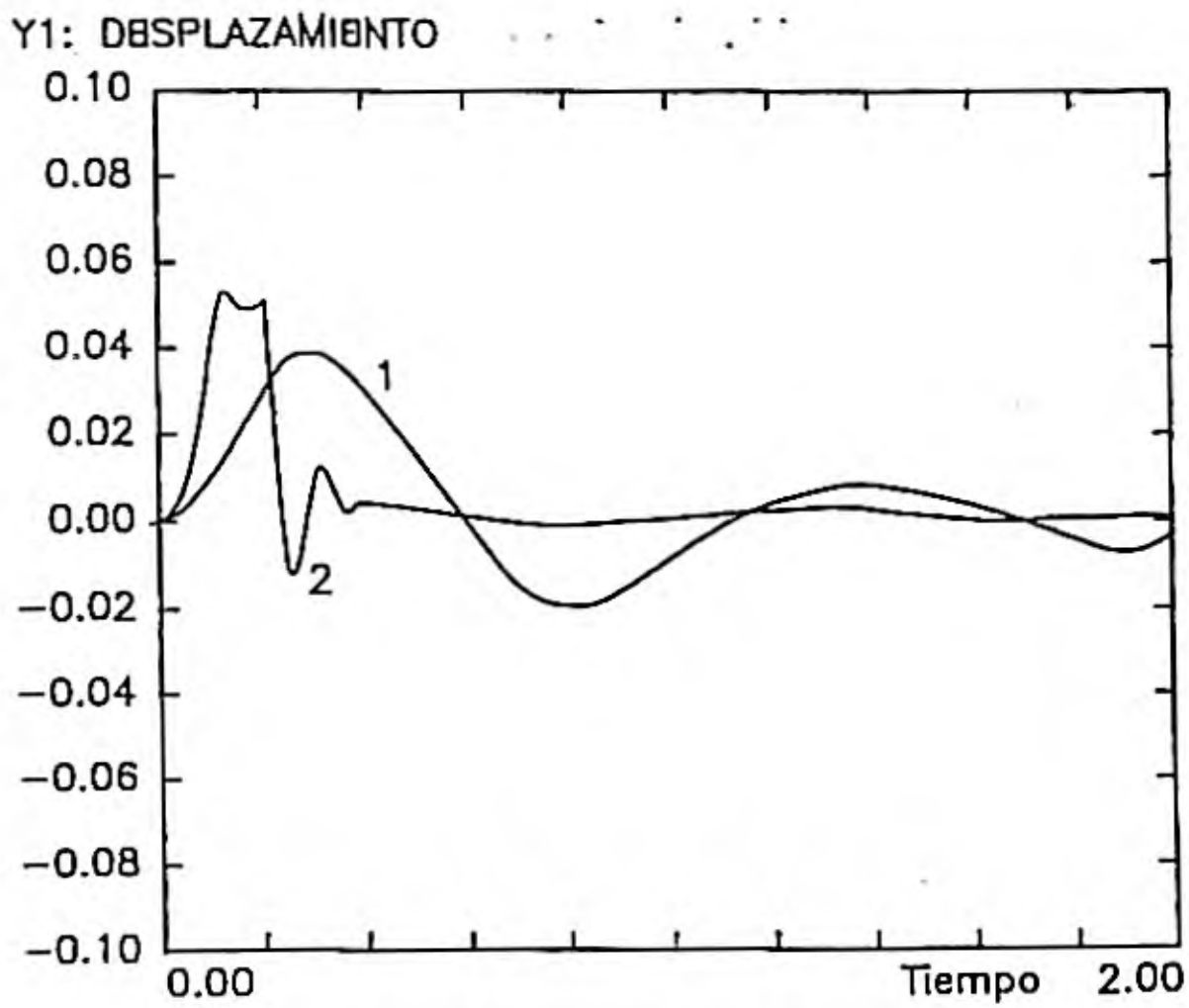


Figura 7.33. Desplazamientos verticales de los C.D.G. de la masa suspendida (1) y eje (2).

En la figura 7.33, se muestra la respuesta del sistema durante los dos primeros segundos, considerando como excitación la misma irregularidad de carretera que se había definido para la suspensión independiente (figura 7.24). La curva 1 muestra el desplazamiento vertical de la carrocería y la curva 2 el del eje. Como se observa, la respuesta es muy similar al caso de suspensión independiente, con la salvedad de que, como es lógico, el desplazamiento vertical del centro del eje es más reducido que el que se encontraba para la rueda izquierda.

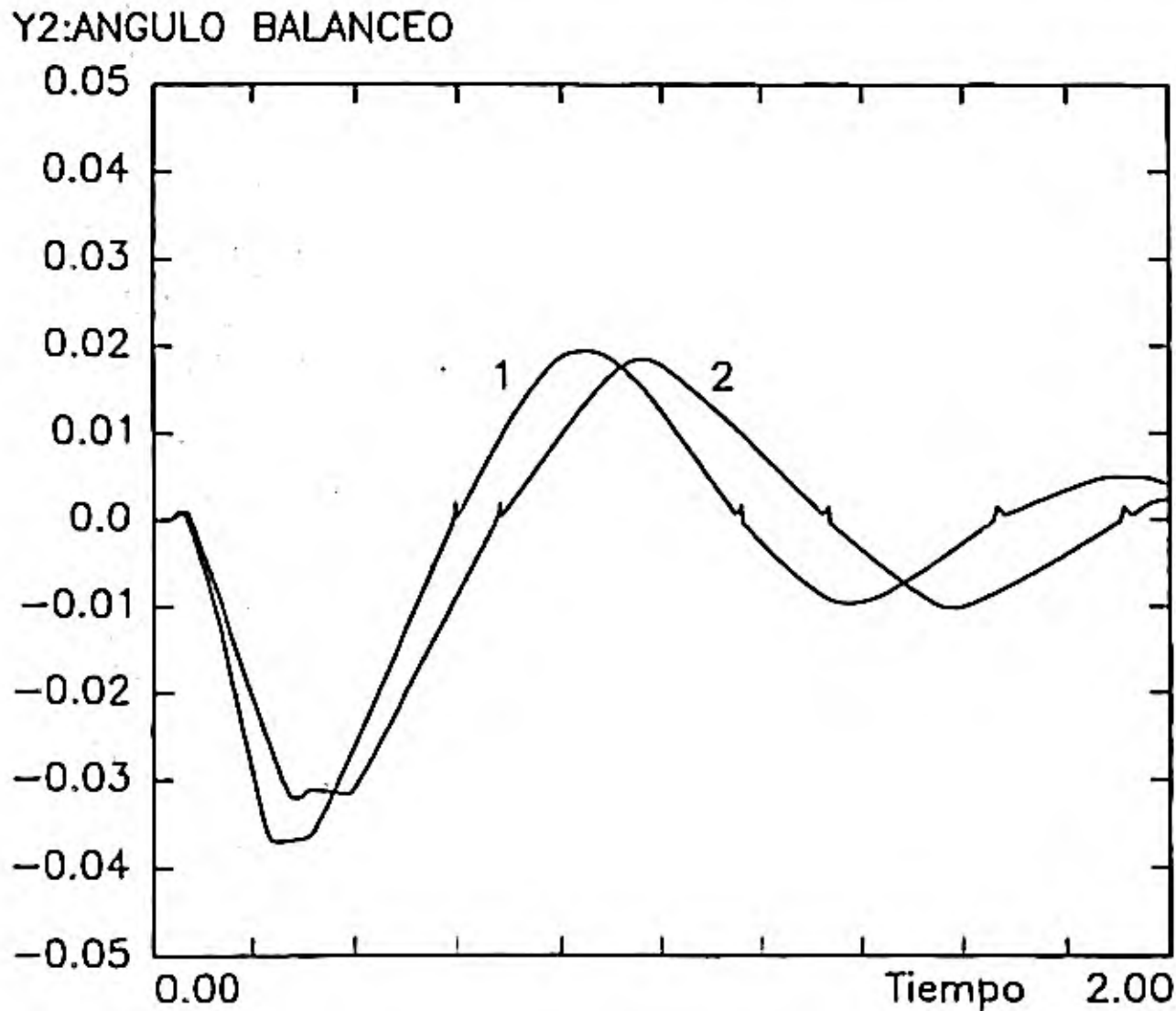


Figura 7.34. Balanceo de la masa suspendida: con suspensión independiente (1), con eje rígido (2).

Para comparar la influencia del eje rígido, en la figura 7.34, se muestran los ángulos de balanceo de la carrocería para los dos casos, la curva 1 es el perteneciente a la suspensión independiente y la curva 2 el del eje rígido. En el caso de llevar eje rígido, la amplitud de los giros es menor y, además, el movimiento tiene una frecuencia menor. Esta respuesta es lógica, si se tiene en cuenta que se ha considerado como masa del eje la suma de las masas que se asimilaban a las ruedas y, por lo tanto, no se ha aumentado la masa no suspendida. Por otro lado, en el modelo de eje rígido se considera el momento de inercia del eje, que hace que el modelo responda con menor amplitud en el transitorio y también con menor frecuencia. Como es lógico en el régimen permanente ambos modelos darán el mismo valor de ángulo de balanceo.

El comportamiento obtenido podría inducir a algún error, ya que es conocido que todos los fabricantes de vehículos tratan de sustituir el eje rígido por sistemas de suspensión

independiente, siempre que les es posible. El interés de la modificación radica, principalmente, en que la adopción de suspensión independiente va asociada con una importante disminución de la masa no suspendida, lo que como, se ha visto anteriormente, produce una mejora del comportamiento del vehículo.

7.4. SUSPENSION NEUMATICA

Dado un volumen de aire v_1 contenido en un recipiente de pared elástica y sometido a una presión p_1 , si sobre él actúa una fuerza F_1 se cumplirá que:

$$F_1 = S_1 (p_1 - p_a) \quad 7.64$$

en donde p_a es la presión atmosférica y S_1 la superficie útil del recipiente.

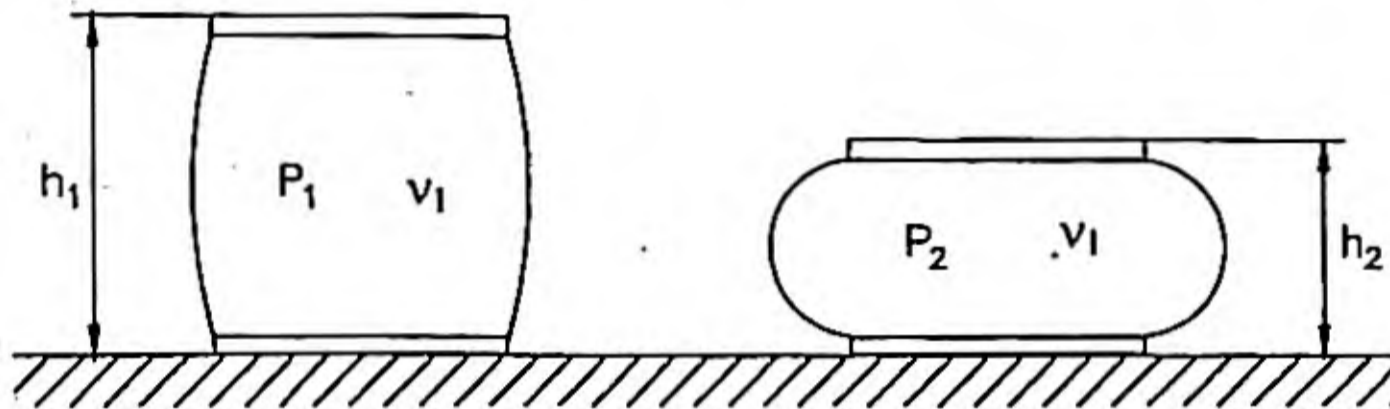


Figura 7.35. Suspensión neumática.

Suponiendo que la fuerza que actúa aumenta y pasa a valer F_2 , el recipiente se comprime, la presión aumenta y el volumen disminuye, así como también varían la altura y, considerando un caso general, la superficie. Para este segundo estado de carga se cumple que:

$$F_2 = S_2 (p_2 - p_a) \quad 7.65$$

En el caso de una pequeña variación de la carga podría adoptarse las siguientes ecuaciones:

$$p_2 - p_1 = dp; \quad v_1 - v_2 = dv; \quad S_2 - S_1 = dS$$

$$h_1 - h_2 = dh; \quad F_2 - F_1 = dF$$

En general, dada una situación inicial del cojín de aire definida por F, S, p, v, h y un segundo estado en que se tiene $F + dF, S + dS, p + dp, v - dv, h - dh$, se cumple:

$$F = S (p - p_a) \text{ y } F + dF = (S + dS) (p + dp - p_a)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación el valor de F dado en la primera se tiene:

$$dF = S \cdot dp + (p - p_a) \cdot dS \quad 7.66$$

en la que se ha despreciado el producto $dS \cdot dp$.

La rigidez de una suspensión neumática, supuesta constante durante una variación pequeña de la fuerza dF , vale por definición:

$$K = dF / dh \quad 7.67$$

en donde dh es positivo cuando h disminuye.

Teniendo en cuenta (7.66), la expresión de la rigidez es:

$$K = S \cdot dp/dh + (p - p_a) dS/dh \quad 7.68$$

si se tiene presente que $dh = dv/S$ la expresión (7.68) queda:

$$K = S^2 \cdot dp/dv + (p - p_a) dS/dh \quad 7.69$$

Cuando el vehículo se encuentra en marcha los movimientos de los cojines de aire de la suspensión son muy rápidos, de tal forma que puede considerarse que no hay tiempo para una transferencia de calor entre el aire del cojín y el ambiente, es decir, se desarrolla un proceso adiabático. En estas circunstancias la ley de compresión del aire viene dada por:

$$p \cdot v^\gamma = \text{constante.}$$

siendo usual, en suspensiones de vehículos, que $\gamma = 1.38$ 7.69 bis

Para un estado de carga concreto se tendrá:

$$dp/dv = - p \cdot \gamma / v \quad 7.70$$

Sustituyendo este valor en la expresión (7.69), se obtiene, definitivamente, la expresión de la rigidez en un instante determinado.

$$K = -S^2 \cdot p \cdot \gamma / v + (p - p_a) ds / dh \quad 7.71$$

Como puede observarse, la rigidez varía con la presión y ésta es diferente para cada estado de carga que se quiera analizar.

Como se verá más adelante, al analizar las curvas reales de comportamiento de las suspensiones neumáticas, la variación de la superficie en función de la altura es muy reducida y puede despreciarse para los cálculos iniciales. En estas condiciones la expresión de la rigidez queda:

$$K = -S^2 \cdot p \cdot \gamma/v \quad 7.72$$

En donde el signo menos indica que la rigidez aumenta al reducirse la altura del resorte neumático y, a la inversa, un aumento de altura trae consigo la disminución de la rigidez.

Existen varios tipos de suspensiones neumáticas pero, en general, durante el movimiento producido por la marcha, los cojines de aire están estancos y ni entra ni sale aire.

Durante el movimiento, la altura h del cojín varía de tal forma que en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 con alturas de cojín h_1 y h_2 , los volúmenes de aire alcanzan los valores:

$$v_1 = h_1 \cdot S_1$$

$$v_2 = h_2 \cdot S_2$$

Como ya se ha comentado, en los intervalos normales de funcionamiento puede hacerse $S_1 = S_2 = S$ y por lo tanto:

$$v_1 = h_1 \cdot S$$

$$v_2 = h_2 \cdot S$$

Conocida la presión en el primer instante p_1 , el valor de p_2 se obtiene como:

$$p_2 = p_1 \cdot v_1^{1,38} / v_2^{1,38} = p_1 \cdot (h_1 \cdot S)^{1,38} / (h_2 \cdot S)^{1,38} = p_1 \cdot h_1^{1,38} / h_2^{1,38}$$

Una vez hallados p_2 , v_2 , la nueva rigidez de la suspensión valdrá:

$$K_2 = -S^2 \cdot p_2 \cdot 1,38 / v_2$$

7.4.1. Comportamiento real de los cojinetes neumáticos

Los cojinetes neumáticos utilizados para las suspensiones neumáticas reciben el nombre de actuadores. En la figura 7.36, se muestra un actuador comercial en el que, además de las partes metálicas y la carcasa de goma, se distingue un tope de goma macizo sujetado a la

parte superior, que sirve como final de carrera de la suspensión, evitando que las partes metálicas puedan entrar en contacto y se deterioren, cuando el cojín por avería se ha quedado sin aire. Este tope de goma permite circular aún cuando no haya aire en los cojines.

La forma de amarre de la carcasa de goma sobre la pieza metálica inferior, denominada pistón, facilita los movimientos del cojín y permite que dentro de los márgenes normales de funcionamiento el área eficaz varíe muy poco. En la figura 7.37, se muestra la curva típica de un actuador:

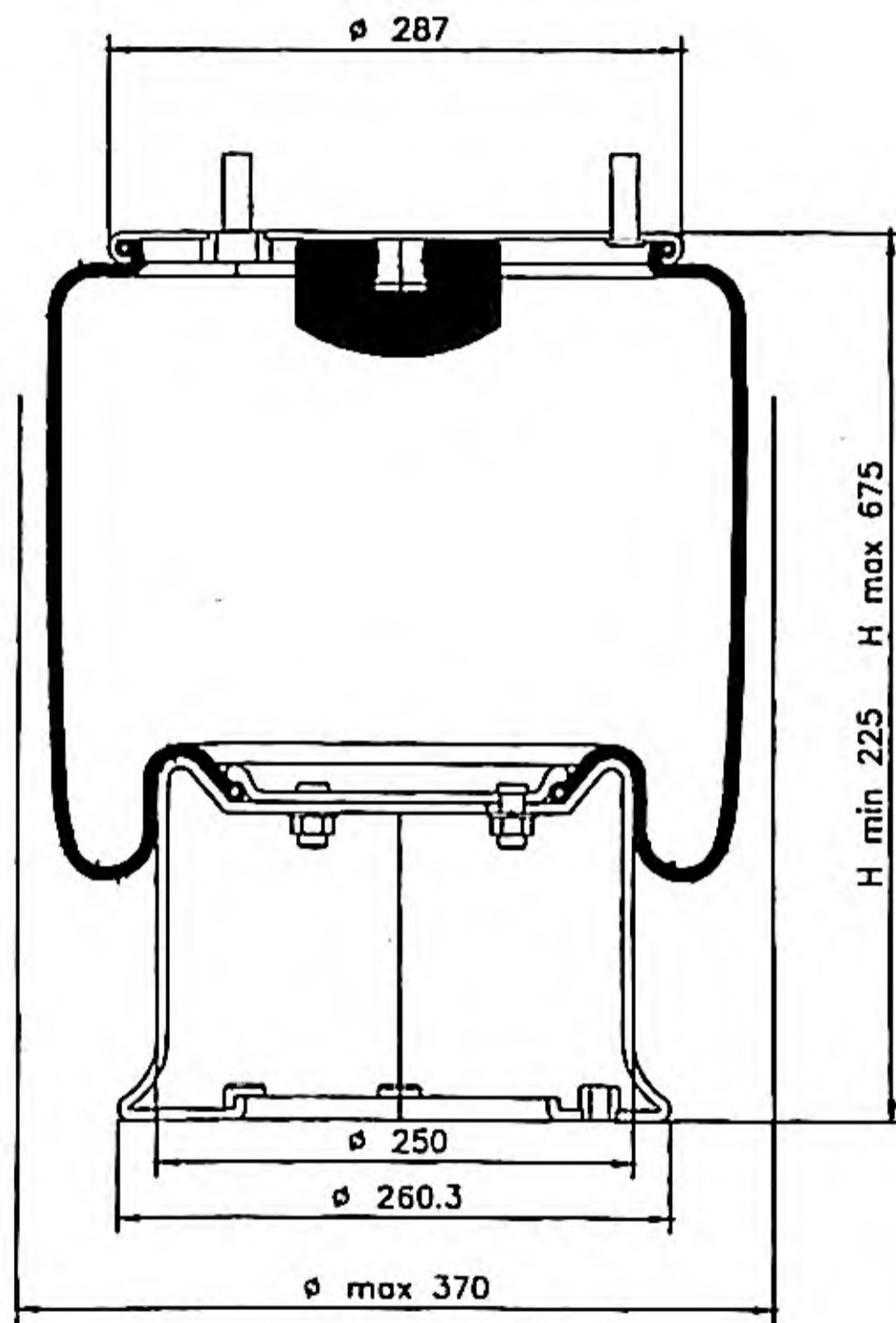


Figura 7.36. Esquema de un actuador neumático.

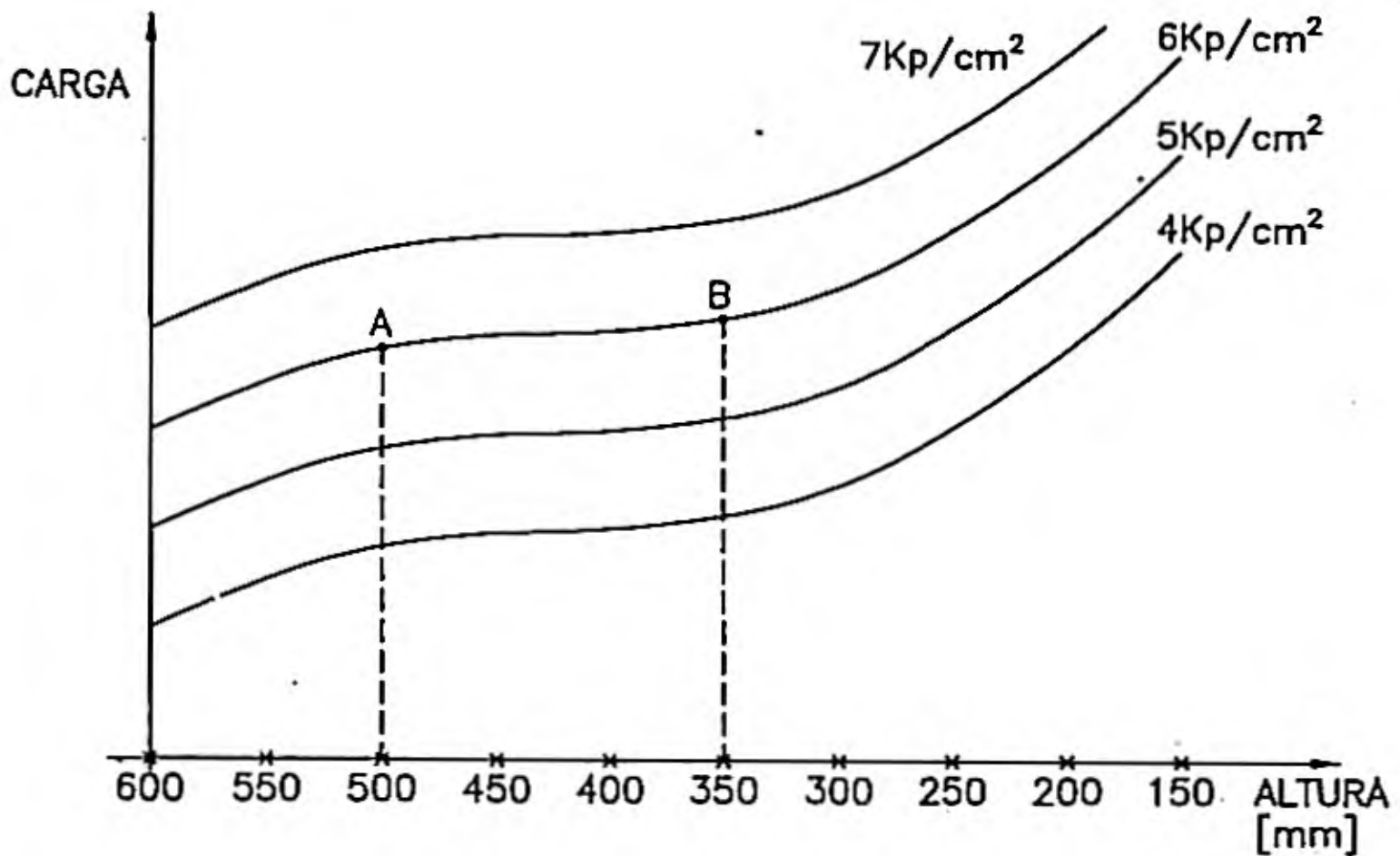


Figura 7.37. Curvas características de un actuador neumático.

El gráfico muestra la capacidad de carga de un actuador en función de su altura, para cada valor de presión de aire.

Tomando la curva correspondiente a una presión de 6 Kp/cm², se observa cómo entre los puntos A y B, correspondientes a las alturas de 500 y 300 mm, la variación de altura apenas influye en la capacidad de carga del actuador. Esto se debe a que en este intervalo la curva es prácticamente horizontal.

Cuando se le coloca a un vehículo suspensión neumática, se pretende que, en el funcionamiento normal, el actuador se encuentre dentro de este intervalo, ya que, ante irregularidades pequeñas de la carretera, sus movimientos de altura no inducen prácticamente modificaciones en su capacidad de carga.

7.4.2. Modelos con suspensión neumática

Todos los modelos estudiados en los apartados anteriores, pueden ser modificados cambiando la suspensión de resortes por la suspensión neumática, sin más que tener en cuenta que el valor de rigidez, constante K de los resortes, debe ser sustituido por la expresión:

$$K = S^2 \cdot p \cdot \gamma / v$$

sin olvidar que ahora la rigidez de la suspensión es variable y en cada paso de integración de las ecuaciones diferenciales, es necesario volver a determinar el nuevo valor de K , en función de la variación de la presión y de volumen, así como, que entre ellos debe cumplirse la relación que $p \cdot v^{\gamma} = \text{constante}$.

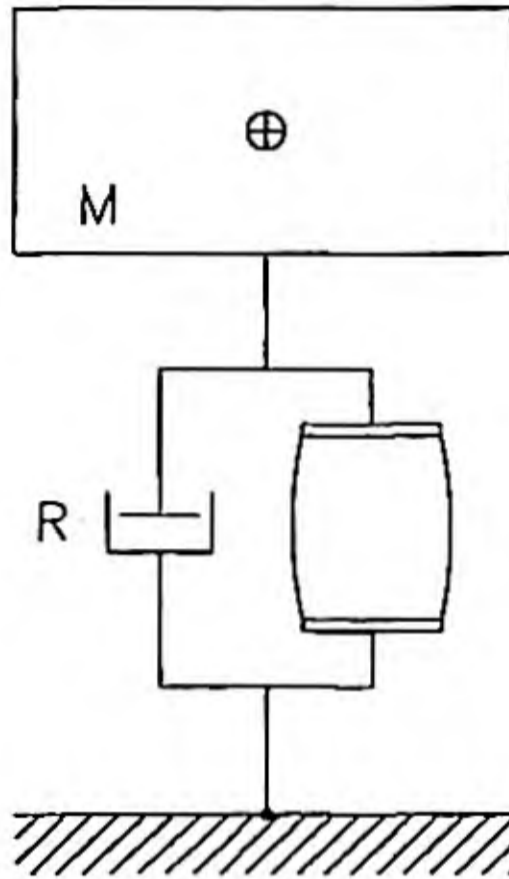


Figura 7.38. Suspensión neumática. Modelo de un grado de libertad.

Para analizar el comportamiento de la suspensión neumática se comenzará estudiando un modelo de un solo grado de libertad como el mostrado en la figura 7.38.

Inicialmente es necesario predimensionar las características del actuador, comenzando por su área eficaz.

$$S = \text{carga/presión}$$

Para el caso concreto de vehículo cuya suspensión se analizó en puntos anteriores vale:

$$S = 4000 \times 9,8 \text{ N} / 40 \times 10^4 \text{ N} / \text{m}^2 = 0,098 \text{ m}^2$$

En este caso se ha tomado como presión normal la de 4 bares ($40 \times 10^4 \text{ N/m}^2$), que está en el intervalo de valores comúnmente utilizados en la práctica.

Para que esta suspensión neumática tenga la misma rigidez que la determinada en los apartados anteriores, se debe cumplir:

$$v = S^2 \cdot p \cdot \gamma / K = 0,098^2 \times 40 \times 10^4 \times 1,38 / 157913,4 = 0,03357 \text{ m}^3$$

Estos valores del actuador se van a utilizar para resolver la ecuación diferencial del modelo, suponiendo que, como excitación, se tiene una sobrecarga de 20000 N en la rueda.

En la figura 7.39, se muestran los desplazamientos verticales de la masa suspendida, tanto para este caso como para el modelo clásico con suspensión de resorte. Puede observarse cómo, con la suspensión neumática, se disminuyen considerablemente los desplazamientos, tanto en el período transitorio como en el permanente, que pasa aproximadamente de 127 mm a 88 mm de deflexión. La curva 1 corresponde a la suspensión neumática y la 2 a la convencional.

En estas respuestas se observa, también, que aunque inicialmente ambas suspensiones se predimensionaron con la misma rigidez, la suspensión neumática responde más rápidamente que la de resorte, lo que evidentemente indica que su frecuencia es más alta. Este hecho se debe a que al ser la suspensión neumática de rigidez variable, conforme se va comprimiendo el actuador se incrementa su rigidez y, por lo tanto, responde con una frecuencia más alta.

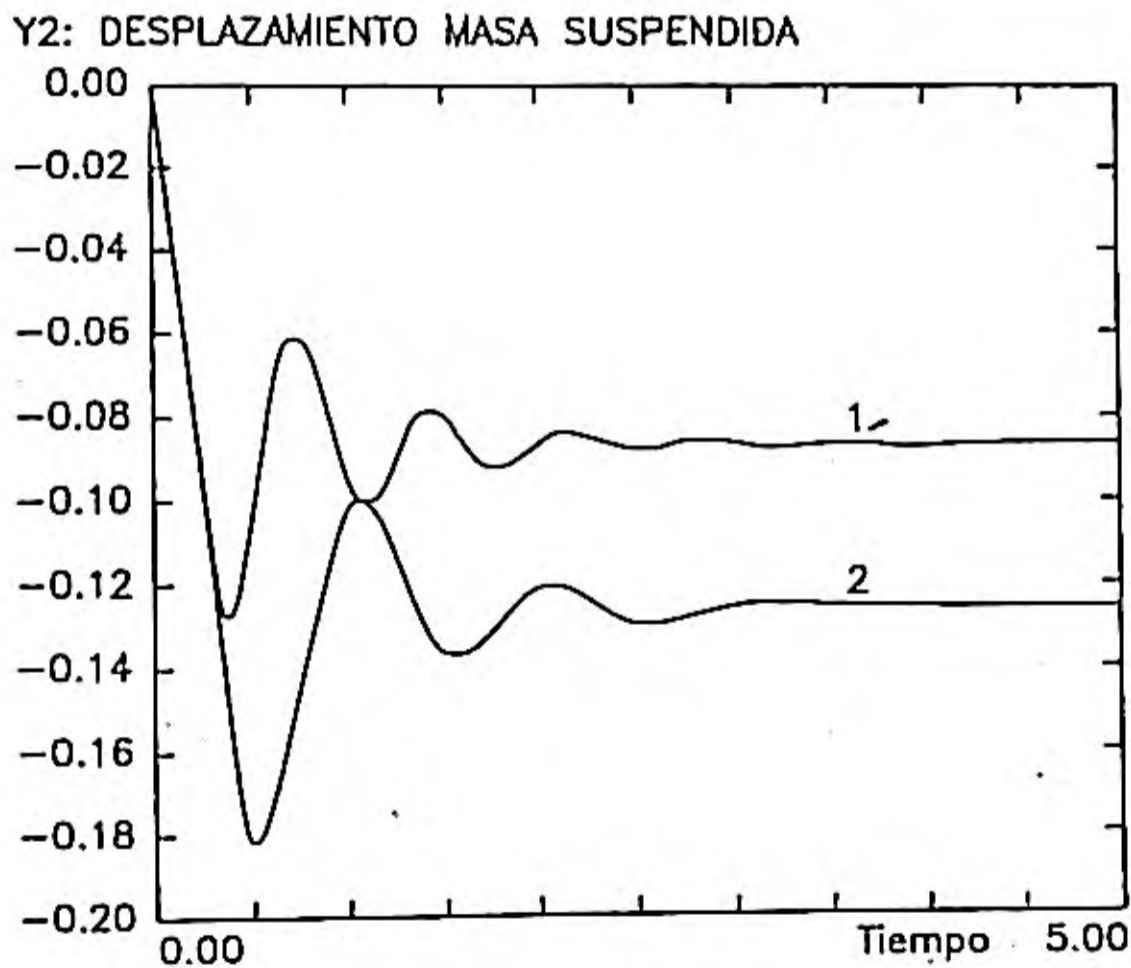


Figura 7.39. Desplazamiento vertical de la masa suspendida del vehículo analizado (1) con suspensión neumática, (2) con suspensión convencional.

Para observar la sensibilidad de los parámetros de la suspensión neumática, en la figura 7.40, se muestra la respuesta del sistema (desplazamiento vertical de la masa suspendida), con tres tipos de suspensión. La curva 1 corresponde a los valores predimensionados, la 2 a una suspensión con la misma presión inicial y, por lo tanto, igual área, pero con un volumen de aire de 27 litros, y por último la curva 3 responde a un sistema con el volumen de 33,57 litros, igual al original, pero una presión de aire en estática de 50000 N/m^2 y un área de $0,08 \text{ m}^2$.

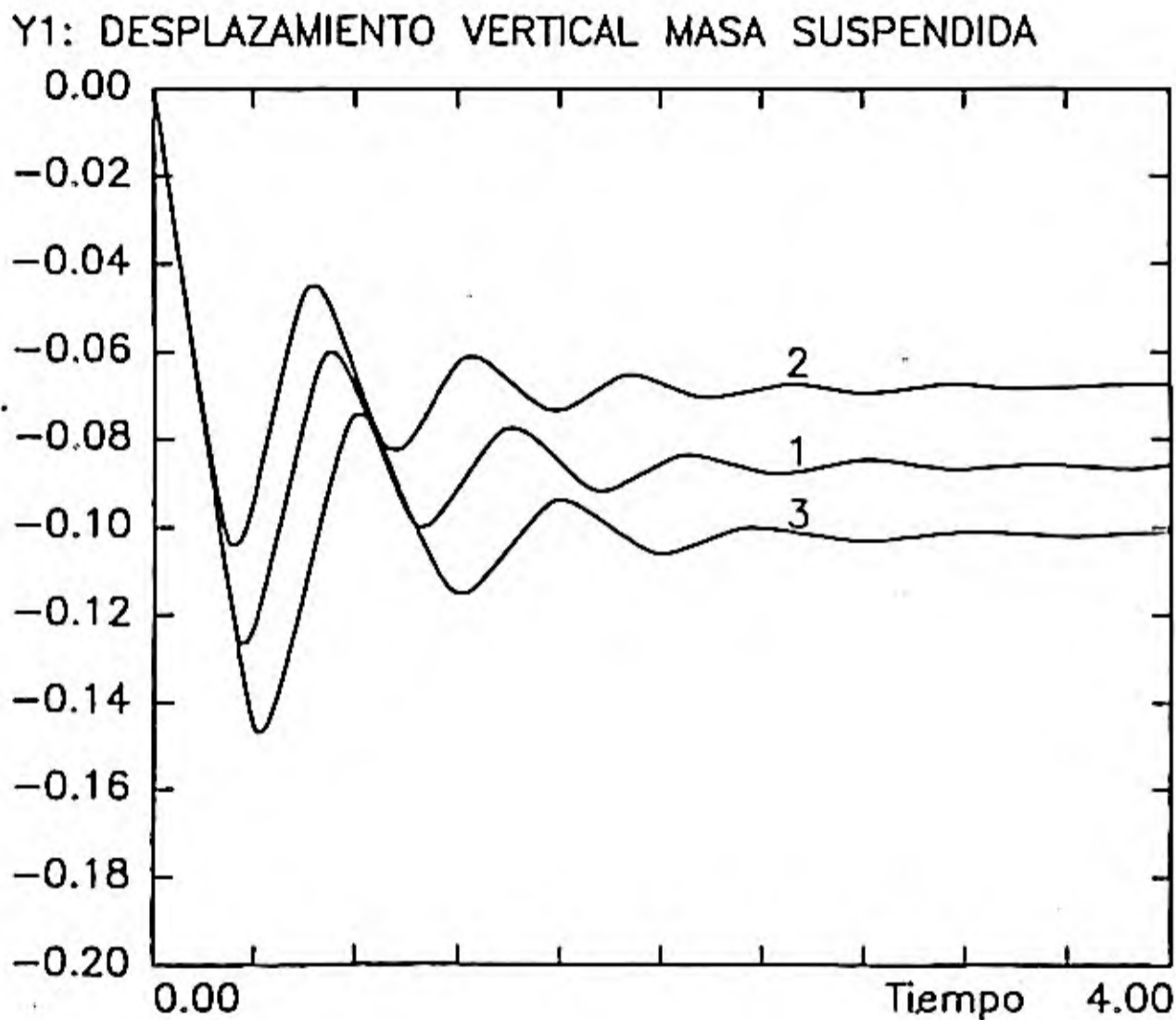


Figura 7.40. Sensibilidad de una suspensión neumática.

La disminución de volumen produce, como es evidente, un incremento de la rigidez inicial del sistema, y este alcanza una deflexión permanente de 70 mm aproximadamente. Cuando la modificación consiste en incrementar la presión hay que disminuir el área del actuador, de tal forma que se respete el equilibrio estático y la fuerza dada por el actuador siga siendo de 39200 N. En este caso se disminuye la rigidez inicial del sistema y la deflexión permanente alcanza aproximadamente un valor de 102 mm.

Otra característica que diferencia claramente la suspensión neumática de la convencional radica en que, debido a su sistema de regulación, se adecua mejor a las variaciones de carga del vehículo. El sistema de llenado de los actuadores incorpora una válvula que permite regular la altura de la suspensión. De esta forma, cuando el vehículo circula en vacío y la altura de la carrocería tiende a elevarse, mediante la válvula mencionada se puede disminuir el aire del actuador hasta que se alcanza la altura normal. En esta operación se

ha disminuido la presión del aire y si se ha colocado el actuador a la misma altura que en carga, el volumen de aire no ha variado. Al disminuir la presión, manteniendo constante el volumen, la rigidez se reduce y, por lo tanto, el sistema se ajusta al nuevo estado de carga.

En el caso de las suspensiones de resorte, cuando se definen sus características se hace pensando en la frecuencia fundamental de aproximadamente 1 Hz, pero debe hacerse para un estado de carga intermedio, de modo que, tanto en vacío como en carga máxima, la frecuencia no varíe demasiado de dicho valor.

Para comprobar esta diferencia de comportamiento entre la suspensión neumática y la de resorte, se ha resuelto el modelo bajo la hipótesis de que ambas suspensiones se han definido para que su frecuencia fundamental, soportando una masa suspendida de 4000 Kg, sea de 1 Hz, y que, no obstante, el vehículo va a circular descargado y, por lo tanto, la masa suspendida es solo de 2000 Kg. Se supone también que la suspensión neumática es regulada para que su altura sea la misma que en carga vaciando, por lo tanto, aire de los actuadores.

Como irregularidad de carretera, se supone que ésta es de forma armónica y de tal longitud de onda tal que, al circular, produce una excitación de 1 Hz con una amplitud de 0,1 m.

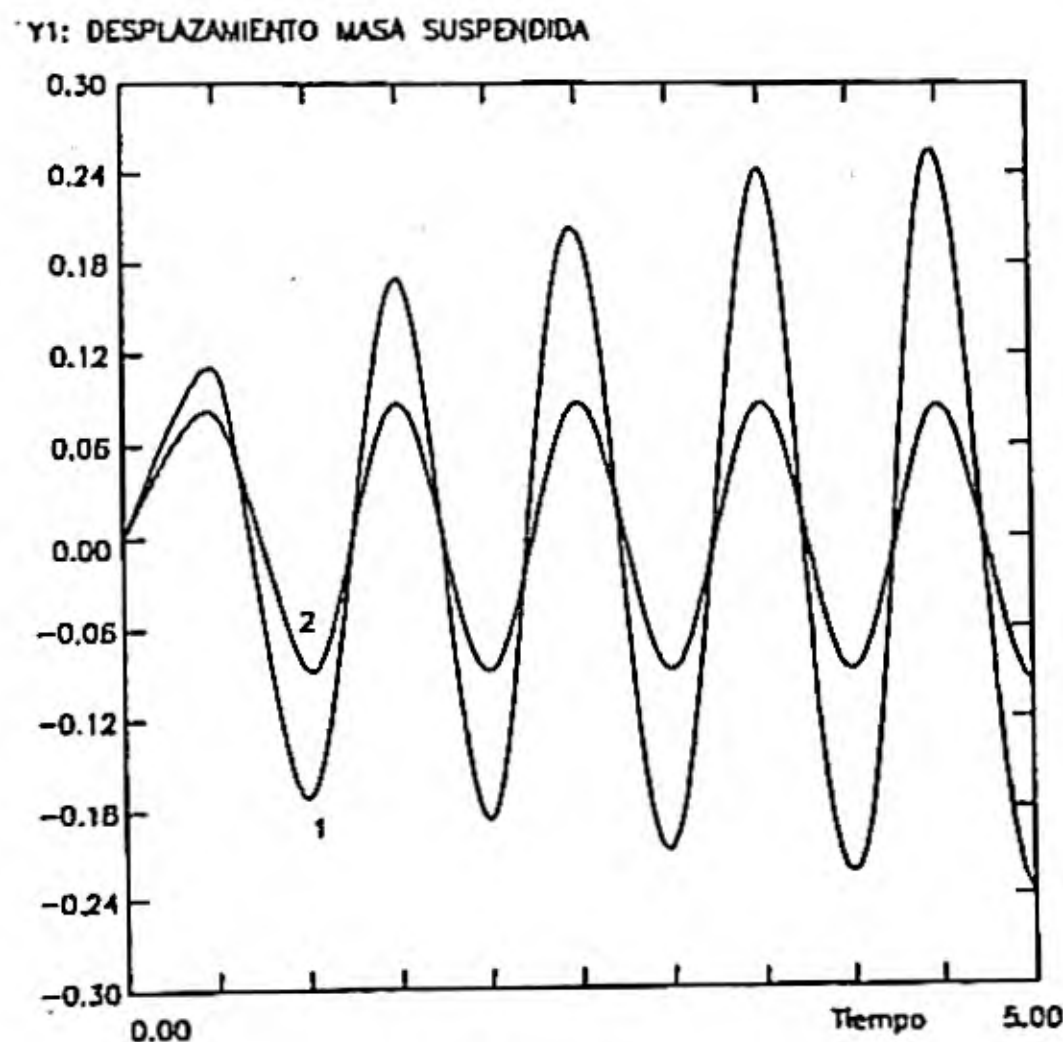


Figura 7.41. Comparación de desplazamientos entre suspensión convencional (1) y neumática (2).

En la figura 7.41, la curva 1 representa los desplazamientos verticales de la masa para la suspensión convencional y la 2 para la neumática, observándose una clara diferencia entre ellas.

Teniendo en cuenta que el confort de la marcha está directamente relacionado con el nivel de las aceleraciones verticales, en la figura 7.42, se muestran estas aceleraciones en la curva 1 para el resorte y en la 2 para la neumática. La diferencia de valores que se obtiene es verdaderamente importante, ya que en el caso de la suspensión neumática las amplitudes son, incluso, inferiores a la mitad de las obtenidas con los resortes.

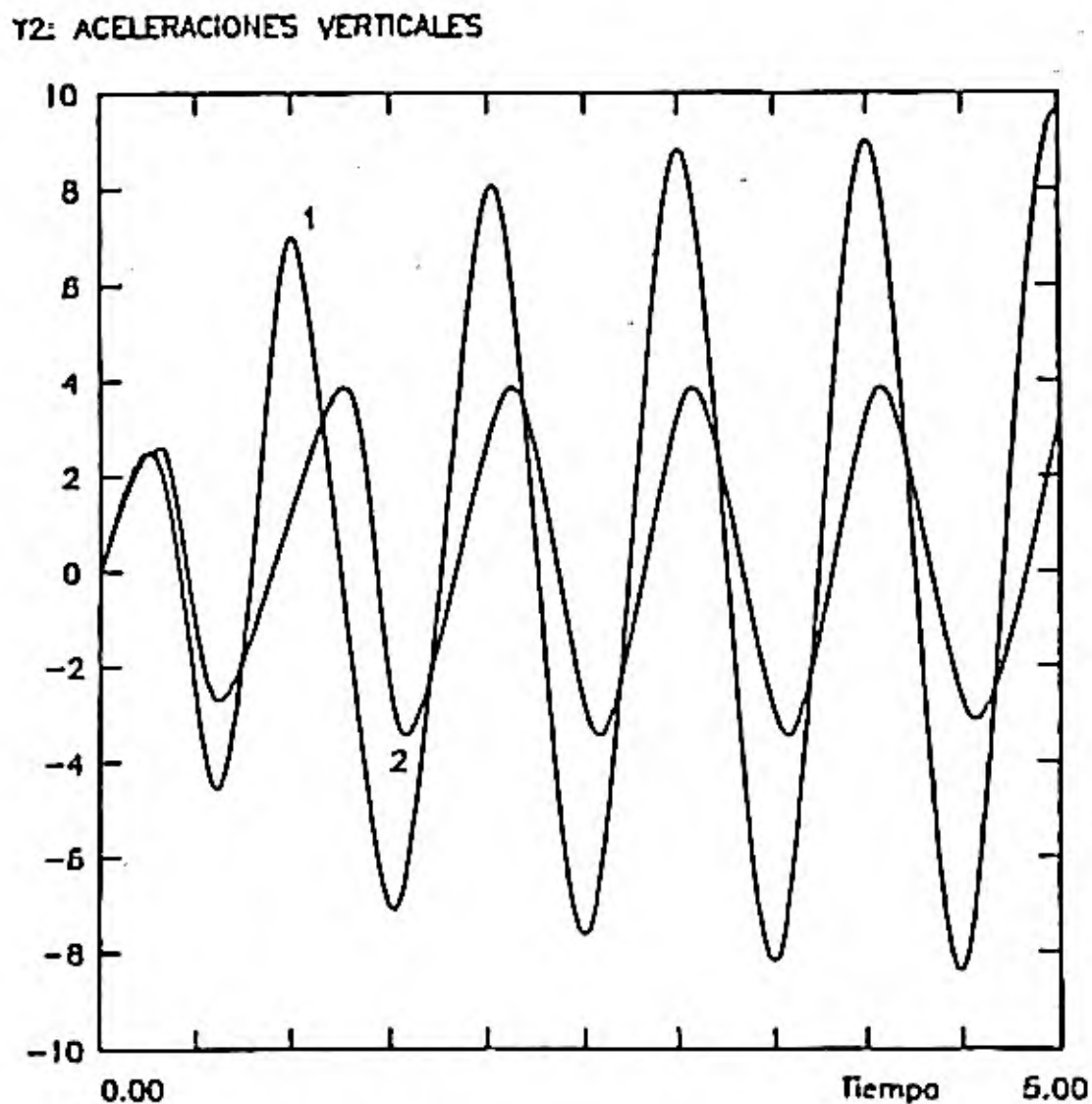


Figura 7.42. Comparación de aceleraciones verticales entre suspensión convencional (1) y neumática (2)

7.5. EL PERFIL SUPERFICIAL DE CARRETERA COMO UNA FUNCION ALEATORIA

7.5.1. Introducción

Los fenómenos físicos pueden clasificarse en determinísticos y aleatorios. Los fenómenos determinísticos se caracterizan porque pueden predecirse, con precisión, en función de observaciones previas; responden a ecuaciones matemáticas y con ellas pueden calcularse los valores de sus variables con un grado de incertidumbre pequeño.

Los fenómenos aleatorios, por el contrario, no pueden predecirse con exactitud. Un simple registro de la evolución de las variables de estudio con el tiempo no es suficiente para describir su evolución con carácter general. Su estudio se orienta al establecimiento de relaciones estadísticas para conocer algunas magnitudes de interés. En el caso de las vibraciones aleatorias, su estudio consiste en averiguar de qué forma las características estadísticas del movimiento de un sistema, aleatoriamente excitado, depende de las características estadísticas de la excitación, teniendo en cuenta las propiedades dinámicas del propio sistema.

Como resulta imposible predecir el valor que toma cada variable (desplazamiento, velocidad, aceleración, etc...) en un instante determinado, lo que se pretende es determinar la probabilidad de que el valor de dicha variable se encuentre, entre ciertos límites, en el instante considerado.

Las irregularidades de la carretera, que excitan verticalmente a las ruedas, pueden considerarse fenómenos aleatorios y representarse mediante funciones aleatorias. (figura 7.43).

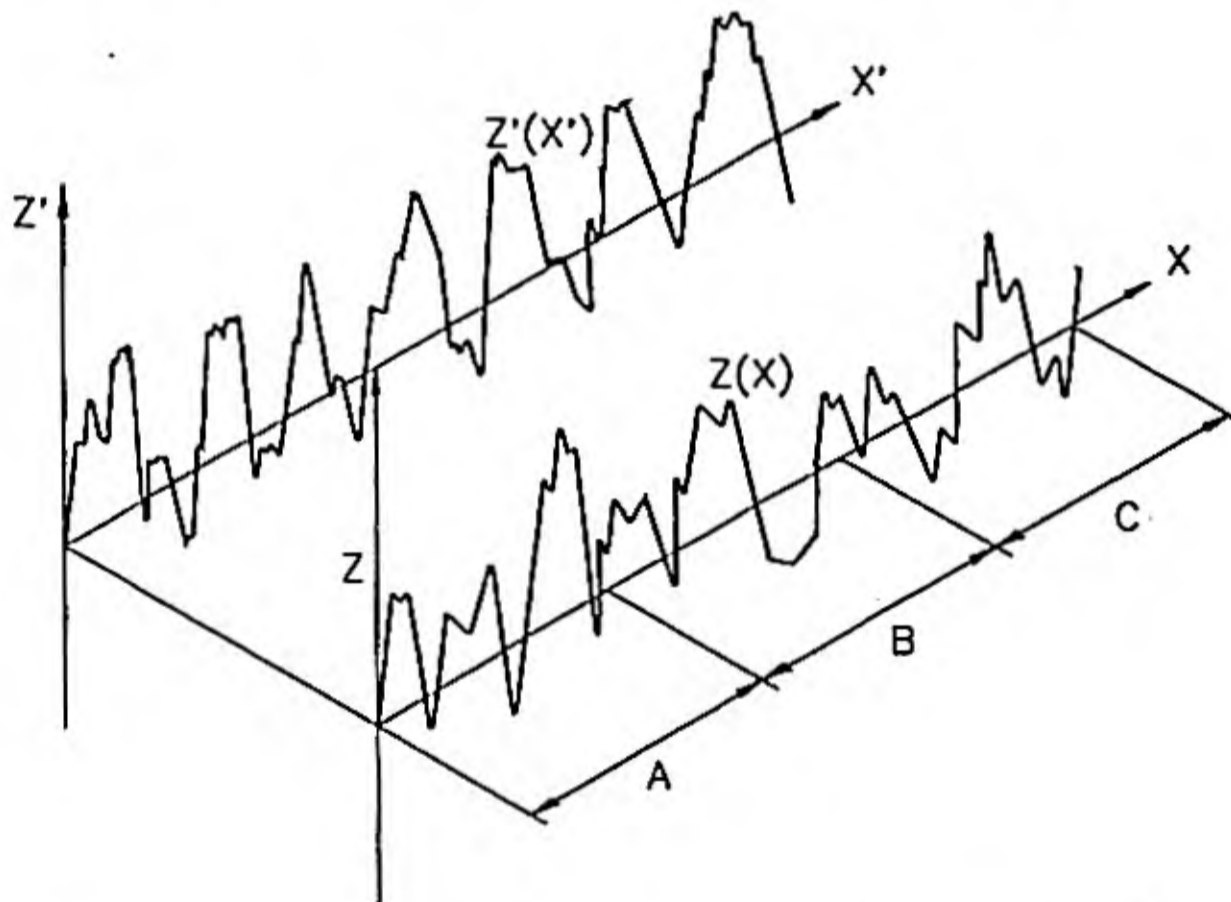


Figura 7.43. Representación de dos registros del perfil de una carretera.

Consideremos un registro suficientemente representativo de la variable aleatoria $z(x)$, también denominada función muestra, y tres intervalos para los valores de x (A, B, C). Se dice que esta función aleatoria es estacionaria, cuando las características estadísticas calculadas para cada uno de los tramos son iguales. Es decir, en general, una función aleatoria es estacionaria cuando al tomar intervalos suficientemente grandes de la variable, sus características estadísticas coinciden. Esta propiedad permite representar una función aleatoria definiendo sus características estadísticas en un tramo significativo de ella.

Por otra parte, si del mismo fenómeno aleatorio se toma otro registro tal como el $z'(x')$ (figura 7.43) y, siendo esta nueva función también estacionaria, resulta que sus características estadísticas son iguales a las de la función $z(x)$, se dice que el proceso es ergódico.

En la práctica se supone que el perfil superficial de las carreteras es una **función aleatoria ergódica**. Esta suposición permite que, estudiado un tramo de la carretera, suficientemente representativo, se pueda caracterizar el perfil de toda la carretera.

7.5.2. Principales parámetros estadísticos.

Densidad de probabilidad

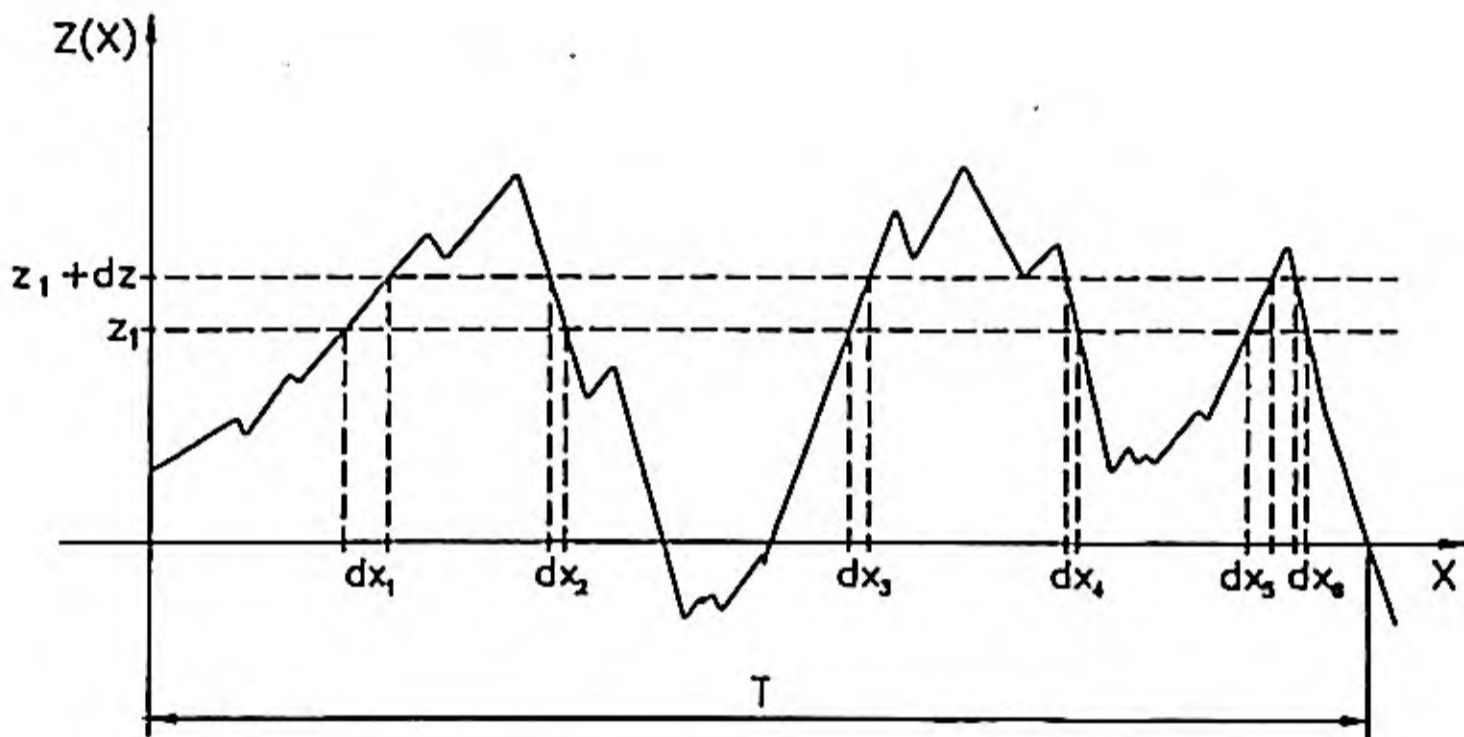


Figura 7.44. Representación de zonas en que $z_1 \leq Z(x) \leq z_1 + dz$

Dada una función aleatoria como la indicada en la figura 7.44, la probabilidad de que en un punto x cualquiera, la función $z(x)$ tenga un valor comprendido entre z_1 y $z_1 + dz$, vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad } [z_1 \leq z(x) \leq z_1 + dz] &= p(z) \cdot dz = \\ &= \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 + dx_5 + dx_6}{T} = \frac{\sum dx}{T} \end{aligned} \tag{7.73}$$

Es decir que la probabilidad de que $z_1 \leq z(x) \leq z_1 + dz$, puede definirse como el sumatorio de los espacios en que la función está comprendida entre z_1 y $z_1 + dz$, partido por la longitud total del espacio tomado como muestra.

A la función $p(z)$ se le denomina densidad de probabilidad.

Es conocido el hecho de que las funciones aleatorias que ocurren espontáneamente en la naturaleza, son, normalmente, de tipo gaussiano y, por tanto, tienen una densidad de probabilidad $p(z)$ en forma de campana como se muestra en la figura 7.45.

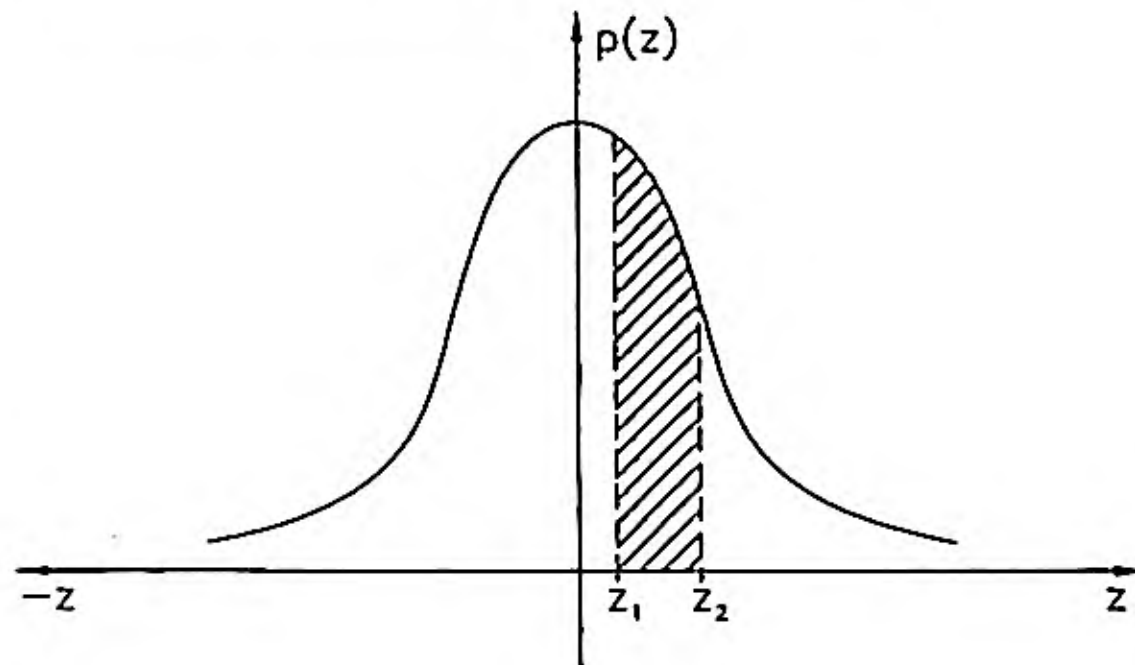


Figura 7.45. Densidad de probabilidad.

La probabilidad de que la irregularidad de la carretera tenga una amplitud de valor comprendido entre z_1 y z_2 es definida por:

$$\text{Prob} [z_1 \leq z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} p(z) \cdot dz \quad 7.74$$

Es decir, que la probabilidad de que $Z_1 \leq Z \leq Z_2$ viene dada por el área que encierra la función densidad de probabilidad con el eje de abscisas en el intervalo definido por z_1 y z_2

Varianza y desviación típica

Se define como varianza de una función aleatoria al valor medio del cuadrado de la diferencia entre $Z(x)$ y el valor medio de $Z(x)$. Es decir:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = E [(z - E[z])^2] \quad 7.75$$

en donde la letra E significa valor medio.

Desarrollando la anterior expresión de la varianza se llega a la siguiente:

$$\sigma^2 = E [z^2] - (E [z])^2 \quad 7.76$$

Es decir la varianza puede definirse también como la diferencia entre el valor cuadrático medio y el valor medio elevado al cuadrado.

La desviación típica, que en adelante se denominará σ , se define como la raíz cuadrada de la varianza, es decir:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad 7.77$$

Por último hay que recordar que el valor medio de una función aleatoria puede definirse en función de la densidad de probabilidad:

$$E[z] = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot p(z) \cdot dz \quad 7.78$$

y de la misma forma:

$$E[z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) dz$$

7.5.3. Correlación entre dos funciones

La correlación es una medida de la similitud entre dos funciones.

Teniendo dos funciones $z_1(x)$ y $z_2(x)$, la correlación entre ellas se calcula multiplicando las ordenadas de las dos funciones para cada desplazamiento x , y hallando posteriormente el valor medio de estos productos.

$$\text{Correlacion } (z_1(x), z_2(x)) = E[z_1(x) \cdot z_2(x)] \quad 7.79$$

y en el caso de que el estudio de ambas funciones se haga en forma discreta:

$$\text{Correlacion } (z_1(x), z_2(x)) = \frac{\sum^n (z_1(x) \cdot z_2(x))}{n} \quad 7.80$$

siendo n , el número de veces que se realiza el muestreo de las funciones.

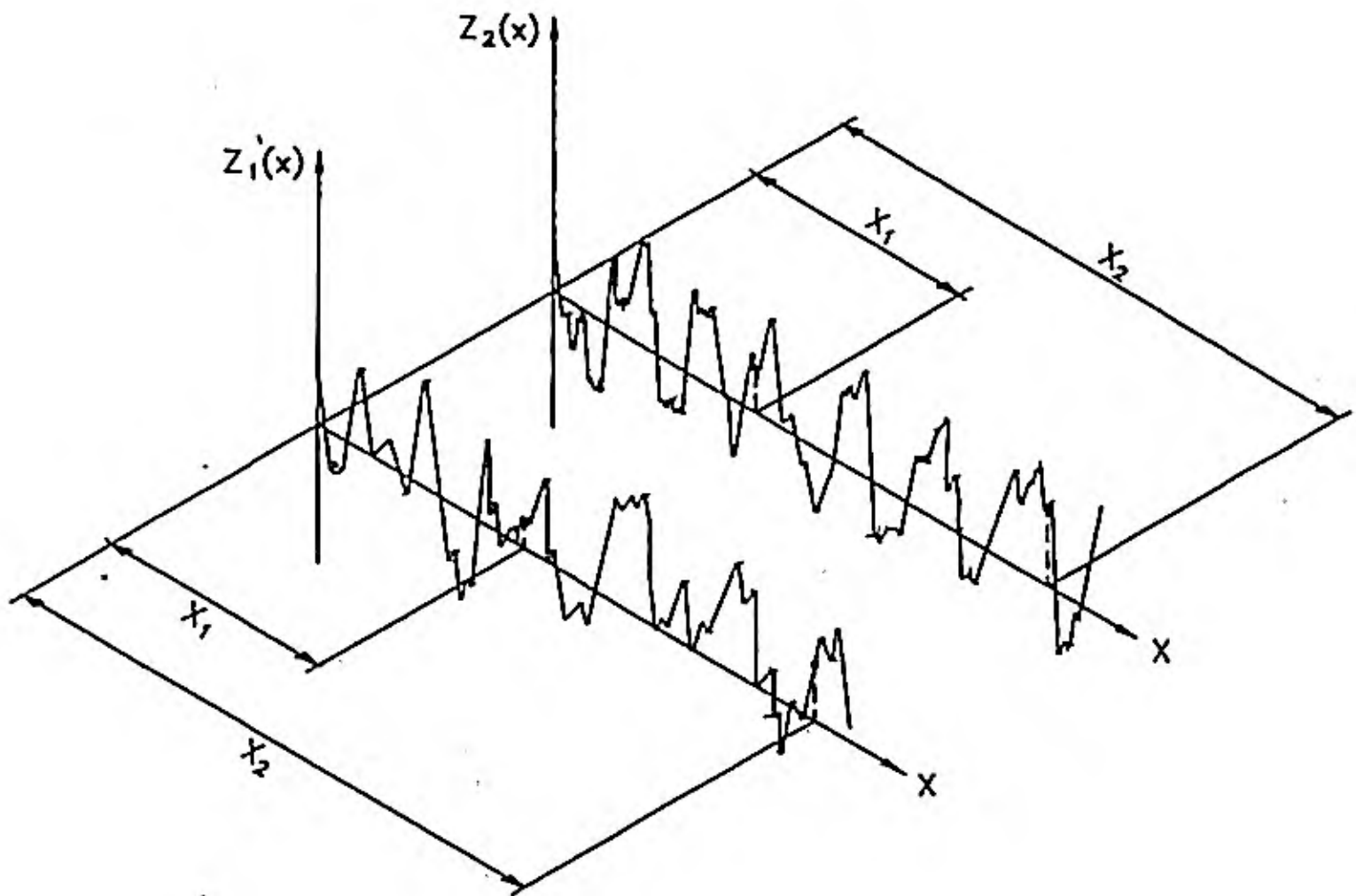


Figura 7.46. Correlación de dos funciones.

El valor de la correlación será mayor cuanto más parecidas sean las dos funciones y, al contrario, cuando ambas sean muy diferentes el valor de la correlación será pequeño.

7.5.4. Autocorrelación

Dada una función $z(x)$ se denomina autocorrelación al valor medio del producto de $z(x)$ en el punto x , por el valor de esta misma función en el punto $x + \Delta x$. Es decir, la autocorrelación consiste en la correlación de una función con ella misma, pero desplazada un intervalo Δx .

Evidentemente si $\Delta x = 0$ la autorrelación será máxima y al crecer el valor de Δx la autocorrelación irá disminuyendo. En definitiva designando por $R(\Delta x)$ la autocorrelación se tendrá:

$$R(\Delta x) = E [z(x) \cdot z(x + \Delta x)] \quad 7.81$$

Cuando $\Delta x = 0$ el valor de $R(0)$ coincide con el valor cuadrático medio de la función, y este constituye un máximo de la función de autocorrelación.

$$R(0) = E[z(x)^2]$$

7.82

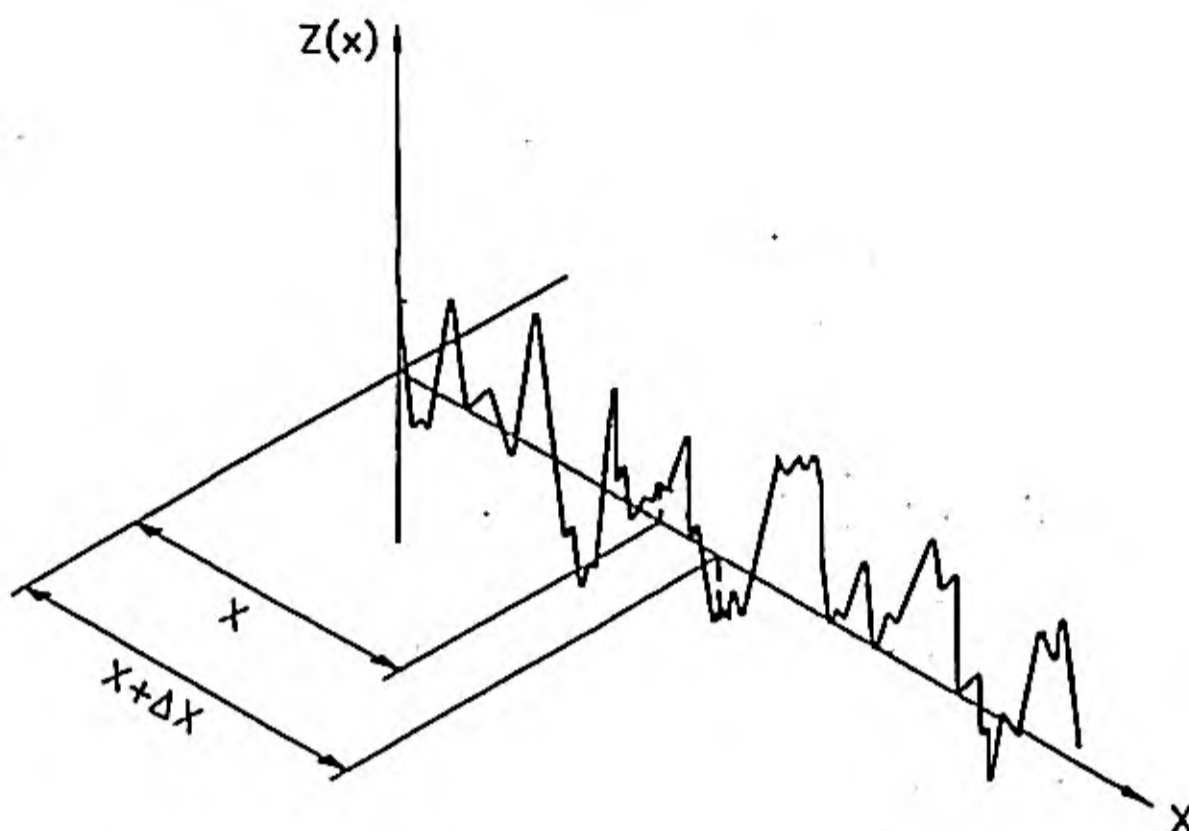


Figura 7.47. Representación para el cálculo de la autocorrelación.

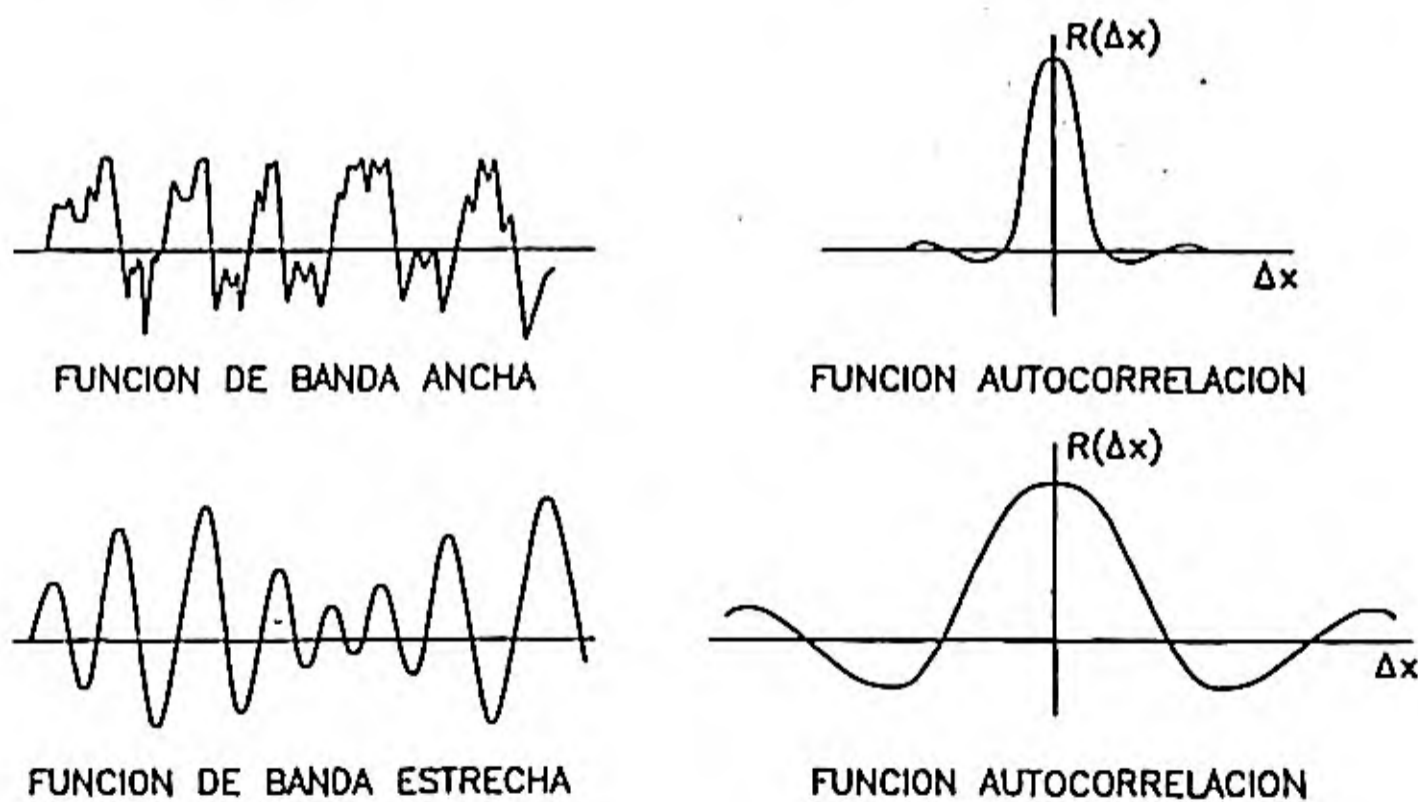


Figura 7.48. Autocorrelación de dos funciones diferentes.

Si se calcula la autocorrelación de una función para diferentes valores de Δx , se obtienen curvas como las indicadas en la figura 7.48. A cada una de estas curvas corresponde una función de autocorrelación.

7.5.5. Transformada de Fourier de funciones periódicas y no periódicas

Dada una función $z(x)$ y un valor constante X , dicha función es periódica si se verifica:

$$z(x) = z(x + nX) \quad 7.83$$

para $n = 1, 2 \dots n$.

Según la teoría de Fourier, la función $z(x)$ puede expresarse como suma de n componentes senoidales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de su frecuencia fundamental ω_0 .

En nuestro caso, en el que x representa desplazamientos, la frecuencia espacial puede expresarse en las siguientes formas:

$$F = \frac{1}{X} \text{ (m}^{-1}\text{)} \quad 7.84$$

$$\omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{X} \text{ (rad} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$$

y la función $z(x)$ expresada en series de Fourier es:

$$Z(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen}(n \omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ cos}(n \omega_0 x) \quad 7.85$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Los coeficientes de este desarrollo son:

$$a_0 = \frac{1}{X} \int_{-X/2}^{X/2} z(x) \cdot dx$$

$$a_n = \frac{2}{X} \int_{-X/2}^{X/2} z(x) \cdot \text{cos}(n \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot dx \quad 7.86$$

$$b_n = \frac{2}{X} \int_{-X/2}^{X/2} z(x) \cdot \text{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot x) \cdot dx$$

El término a_0 representa la componente continua de la función (valor medio). Resulta sencillo eliminar este término del desarrollo, simplemente con ajustar convenientemente la amplitud de la función $z(x)$ respecto al eje de ordenadas.

Teniendo en cuenta la formulación exponencial y compleja de las funciones seno y coseno, de (7.85 y 7.86) puede deducirse:

$$z(x) = \frac{1}{X} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 x} \quad 7.87$$

$$C_n = \int_0^X z(x) e^{-jn\omega_0 x} dx$$

Si la función $z(x)$ es no periódica, puede realizarse un tratamiento análogo al anterior considerando que el período X tiende a infinito, en este caso y teniendo en cuenta que $\omega_0 = 2\pi/X$ tiende a cero, el espectro de frecuencias se hace continuo. Haciendo $1/X = d\omega/2\pi$; $n\omega_0 = \omega$ en (7.87),

$$z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega x}$$

de donde:

$$z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega x} d\omega \quad 7.88$$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) e^{-j\omega x} dx \quad 7.89$$

Como $A(\omega)$, denominada transformada de Fourier, es normalmente una función compleja, si $A^*(\omega)$ es su conjugada:

$$A(\omega) \cdot A^*(\omega) = |A(\omega)|^2 \quad 7.90$$

y el valor cuadrático medio de $z(x)$ puede expresarse como:

$$\overline{z^2}(x) = \frac{1}{X} \int_{-X/2}^{X/2} z^2(x) dx = \frac{2}{X} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \quad 7.91$$

Denominando R_e a la parte real de $A(\omega)$ y I_m a la parte imaginaria, podemos expresar, de (7.89),

$$R_e[A(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \cos \omega x dx$$

$$I_m(A(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x) \sen \omega x dx$$

Siendo el espectro de amplitudes:

$$|A(\omega)| = [R_c^2(z(\omega)) + I_m^2(z(\omega))]^{1/2}$$

y el espectro de fases:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \left[-\frac{I_m[z(\omega)]}{R_c[z(\omega)]} \right]$$

En el caso de funciones no periódicas, la transformada de Fourier es una función continua de frecuencias. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que la función $A(\omega)$ tiene las mismas dimensiones que la $z(x)$, ahora referida a una banda de frecuencias.

7.5.6. Densidad espectral de un proceso aleatorio

La función de densidad espectral permite conocer la concentración de armónicos para los diferentes valores de la frecuencia. Considerando un espectro continuo de frecuencias, se define la densidad espectral de la función aleatoria $z(x)$ por:

$$S_z(\omega) = \lim_{X \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{X} |A(j\omega)|^2 \right] \quad 7.92$$

Teniendo en cuenta (7.91) y (7.92) puede expresarse el valor cuadrático medio de la función como:

$$\bar{z}^2(x) = \int_0^\infty S_z(\omega) d\omega \quad 7.93$$

Dado que el período de una función puramente aleatoria tiende a infinito, a la hora de calcular su transformada de Fourier posiblemente no obtengamos ninguna información válida al no verificarse la condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(x)| dx < \infty \quad 7.94$$

Para evitar este problema, como la función de autocorrelación sí contiene información de la composición espectral de la función $z(x)$, puede expresarse la densidad espectral de una función aleatoria $z(x)$ como la transformada de Fourier de su función autocorrelación $R(\Delta x)$, relación que puede deducirse de (7.81), (7.88) y (7.91).

De esta forma:

$$R(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\Delta x} d\omega$$

$$S_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x) \cdot e^{-j\omega \cdot \Delta x} \cdot d\Delta x$$

Como la función autocorrelación adquiere su valor máximo cuando $\Delta x = 0$, igual al valor cuadrático medio de la función, de 7.95 se obtiene:

$$E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cdot d\omega \quad 7.96$$

Es decir, el valor cuadrático medio de una función aleatoria estacionaria viene dado por el área comprendida bajo el gráfico de la densidad espectral. Las unidades de $S_z(\omega)$ son las de valor cuadrático medio/frecuencia. Puede demostrarse que la densidad espectral de un proceso aleatorio estacionario es una función real, par y no negativa.

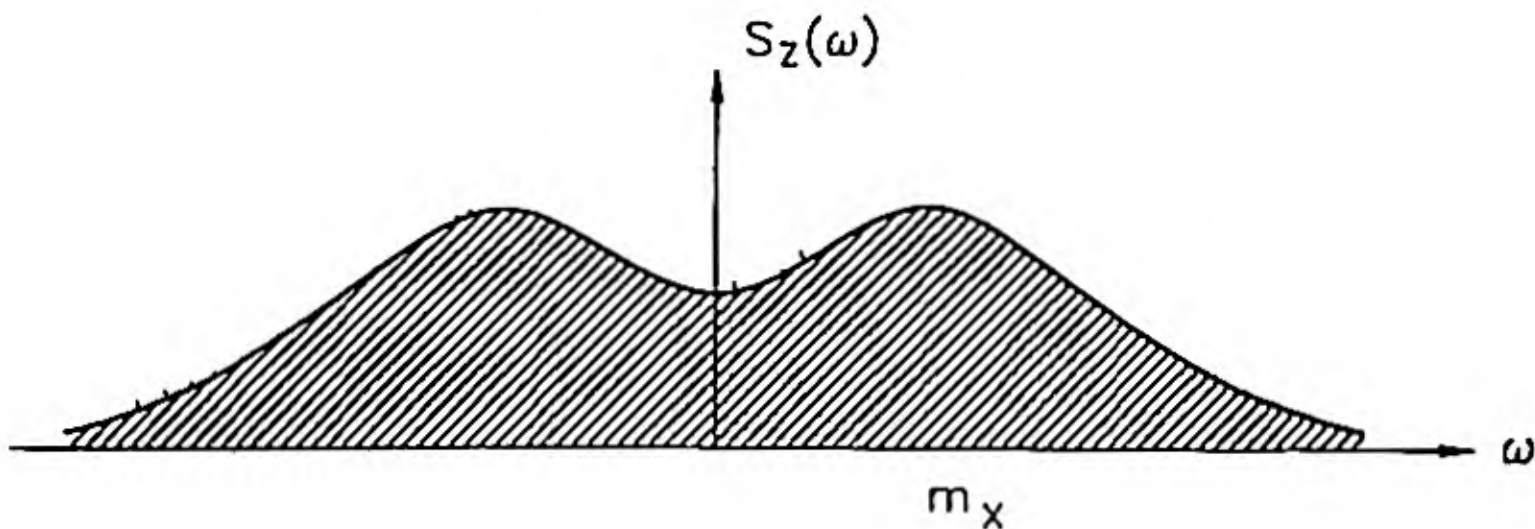


Figura 7.49. Representación de una función de densidad espectral.

Este es el caso de una función $x(t)$ que contiene un número elevado de frecuencias. Puede demostrarse que, en el caso de una función periódica que contiene un número discreto de frecuencias, su valor medio cuadrático es igual a la suma de los valores medios cuadrados de cada componente armónica individual contenida en dicha función. Si dividimos cada valor medio cuadrático de cada una de las componentes en frecuencia por sus intervalos de frecuencia respectivos y las sumamos, se obtendría la densidad espectral.

7.5.7. Densidad espectral de la carretera.

Las irregularidades verticales que presenta la carretera se definen como una función aleatoria estacionaria y ergódica, y sus principales características se obtienen de la función densidad espectral.

Dada una carretera sobre la que se quiere analizar el comportamiento de un vehículo que circula por ella, será imprescindible conocer la curva de densidad espectral de sus irregularidades verticales.

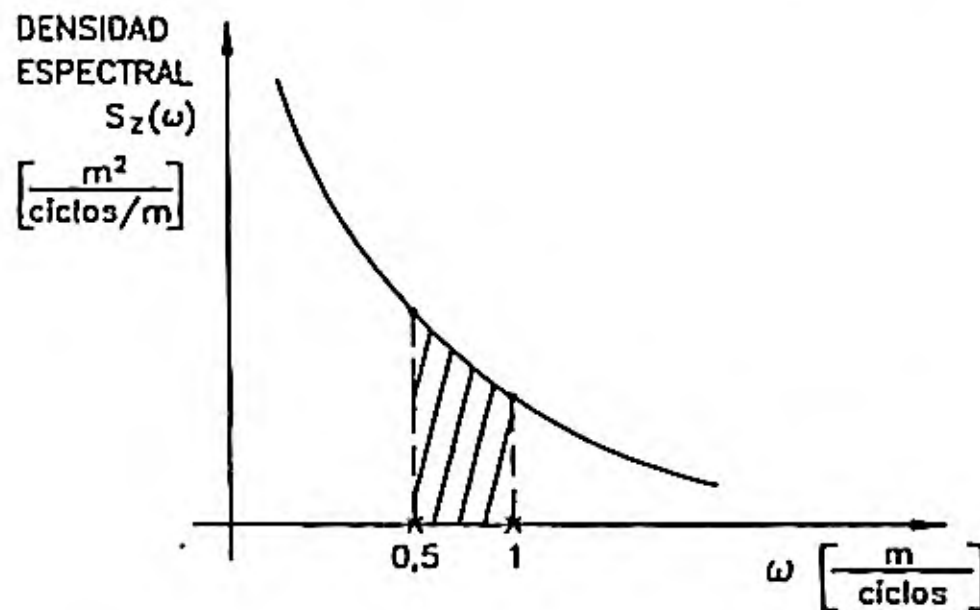


Figura 7.50. Densidad espectral de carretera.

En la figura 7.50, se representa una curva de densidad espectral de una carretera en función de la frecuencia espacial [ciclos/metro].

Dada la figura 7.50, si se halla, por ejemplo, el área comprendida por la curva de densidad espectral, el eje de abscisas y los valores de las frecuencias espaciales de 0,5 y 1 ciclos/metro, se obtiene el valor cuadrático medio de una función que puede suponerse armónica y de frecuencia 0,75 ciclos/metro. Esta función puede representar a las irregularidades que esa carretera presenta con frecuencias comprendidas entre 0,5 y 1 ciclos/metro.

Para irregularidades de carretera, se ha encontrado que puede relacionarse la densidad espectral y la frecuencia espacial de forma aproximada mediante:

$$S_z(\omega) = C_{sp} \cdot \omega^{-N} \tag{7.97}$$

en donde C_{sp} y N , son coeficientes que dependen del tipo de carretera.

En la tabla siguiente se dan los valores de estos coeficientes para algunos tipos de carreteras.

TIPO DE SUPERFICIE	N	C _{SP}
AUTOPISTA UNIFORME	3,8	4,3 X 10 ⁻¹¹
AUTOPISTA RUGOSA	2,1	8,1 X 10 ⁻⁶
CARRETERA UNIFORME	2,1	4,8 X 10 ⁻⁷
CARRETERA CON GRAVA	2,1	4,4 X 10 ⁻⁶
CAMPO ARADO	1,6	66,5 X 10 ⁻⁴

En la figura 7.51, se muestran las densidades espectrales correspondientes a diferentes carreteras.

- (1) Autopista
- (2) Carretera Nacional
- (3) Carretera Nacional con gravilla

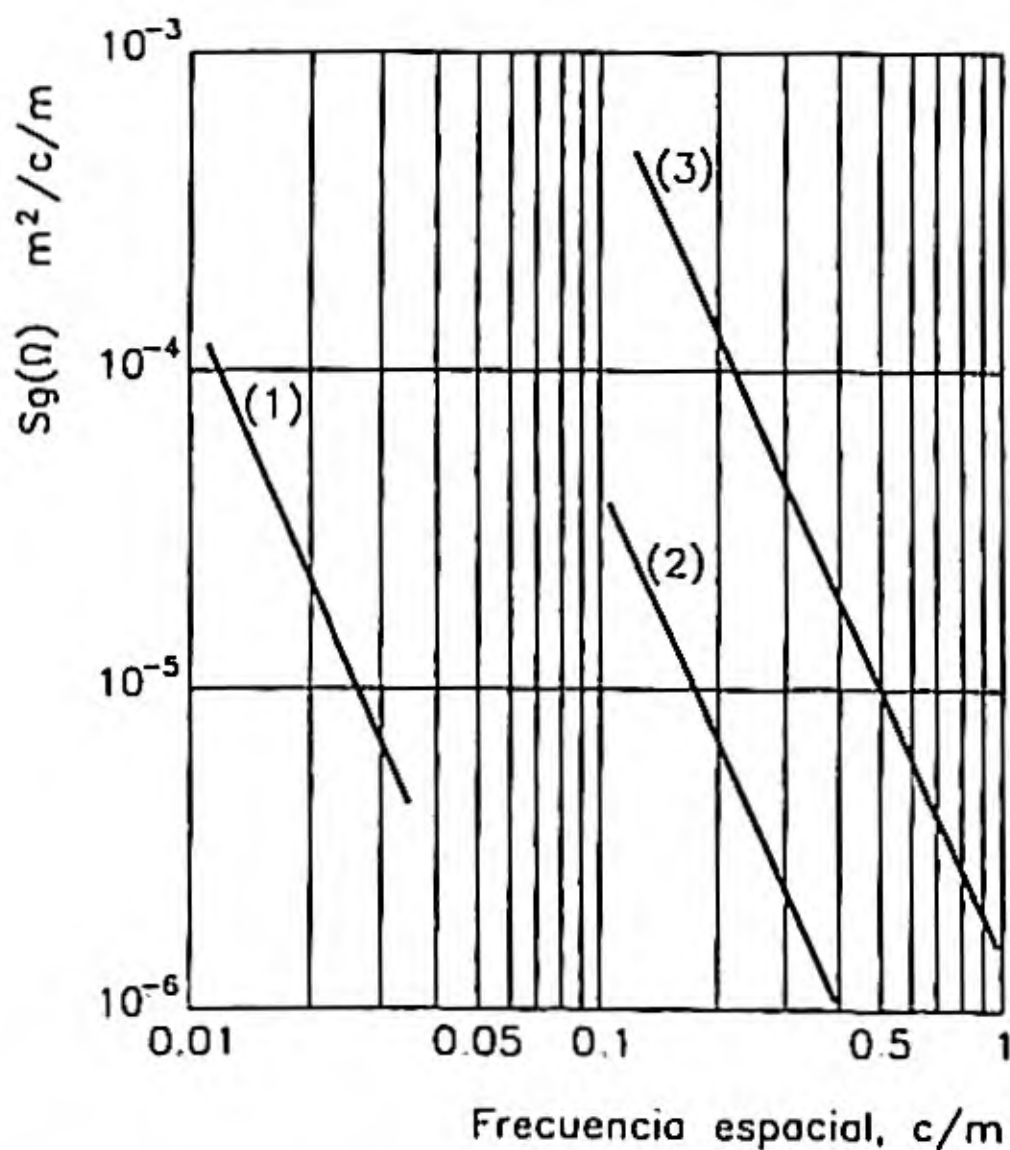


Figura 7.51. Densidad espectral de diferentes carreteras.

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

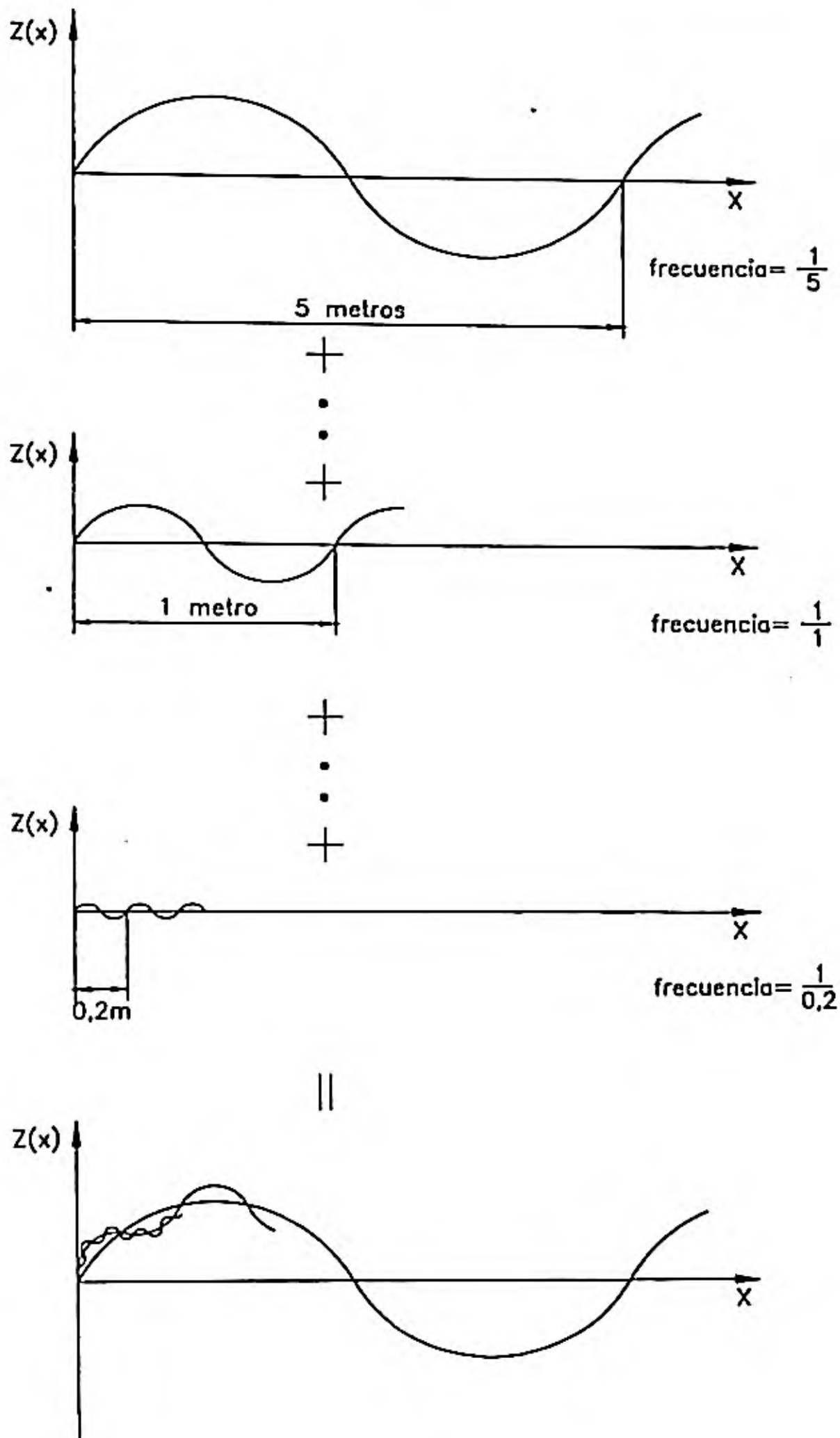


Figura 7.52. La carretera como suma de funciones armónicas.

Como puede observarse en la figura 7.51, la densidad espectral de las carreteras tiende, en general, a ser mayor para pequeños valores de la frecuencia espacial, y disminuye

cuando se incrementa dicha frecuencia. Es decir que las irregularidades de las carreteras pueden representarse como la suma de casi infinitas irregularidades armónicas, en las cuales, a medida que se incrementa su frecuencia espacial disminuye su amplitud.

Cuando un vehículo circula por la carretera, sus ruedas recorren las irregularidades a una velocidad determinada, de tal manera que las excitaciones que recibe dependen de las irregularidades de la carretera y de la velocidad del movimiento. Es decir, las irregularidades espaciales de la carretera $z(x)$ se convierten, en el vehículo, en excitaciones temporales $z(t)$.

Suponiendo que la frecuencia de la irregularidad fuera de 1 ciclo por metro, el paso sobre este perfil a una velocidad de 20 m/seg, supone al vehículo una excitación vertical de frecuencia temporal 20 ciclos/seg = 20 Hz.

La relación entre la frecuencia temporal y la espacial será:

$$\begin{aligned} \text{FRECUENCIA TEMPORAL} \left[\frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \right] &= \\ &= \text{FRECUENCIA ESPACIAL} \left[\frac{\text{ciclos}}{\text{m}} \right] \times \text{VELOCIDAD} \left[\frac{\text{M}}{\text{seg}} \right] \end{aligned}$$

En el caso concreto de este ejemplo:

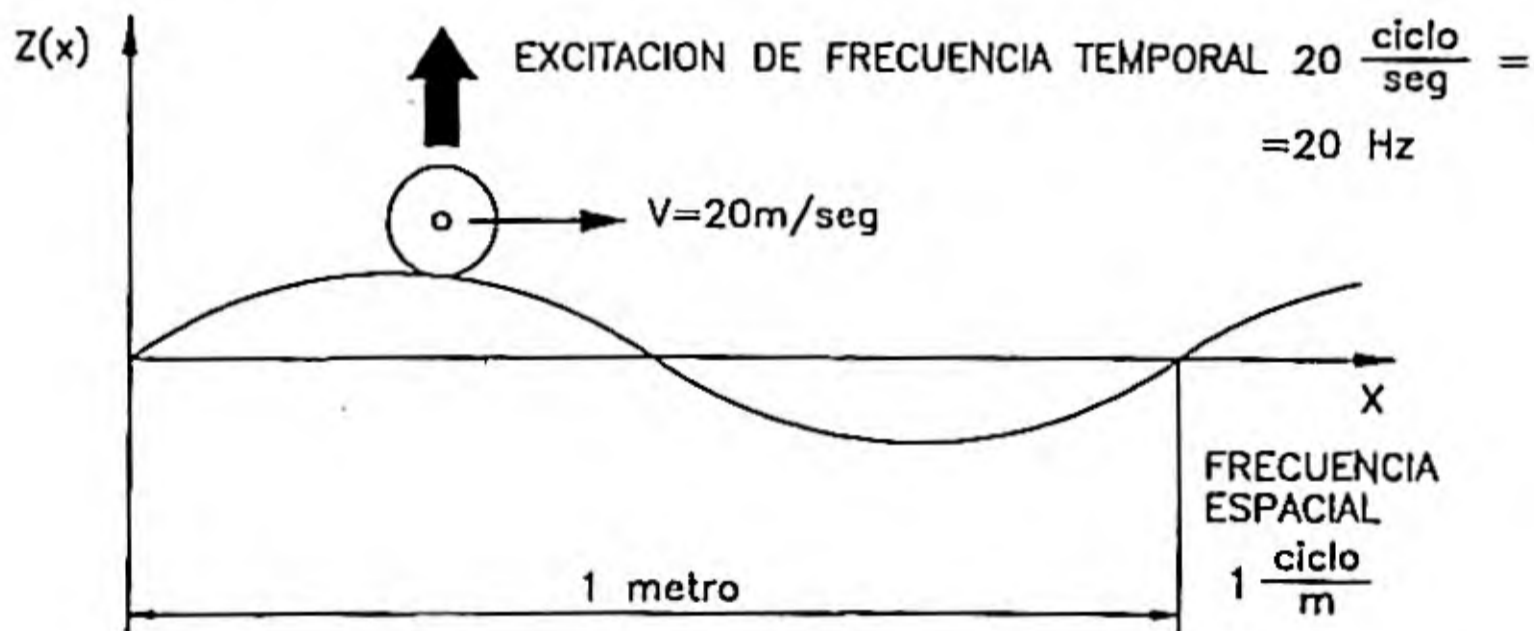


Figura 7.53. Paso de frecuencia espacial a frecuencia temporal.

Las curvas de densidad espectral de la carretera pueden transformarse en curvas de densidad espectral de excitación vertical sobre el vehículo, sin más que dibujar la curva multiplicando la frecuencia espacial por la velocidad y dividiendo el valor de la densidad espectral por la velocidad.

$$S_{zR}(\omega) = S_{zC}/V$$

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

Siendo:

$S_{ZR}(\omega) \Rightarrow$ Densidad espectral de la excitación vertical de la rueda
($m^2/\text{ciclos/s}$)

$S_{ZC}(\omega) \Rightarrow$ Densidad espectral de las irregularidades de la carretera
($m^2/\text{ciclos/m}$)

Conocida la densidad espectral de excitación en una rueda y recordando la definición de función de transferencia, se puede obtener la densidad espectral de respuesta en cualquier grado de libertad.

Si $H(\omega)$ es la función de transferencia entre la excitación vertical en la rueda y la respuesta en un grado de libertad concreto, y se denomina $S_r(\omega)$ a la densidad espectral de la respuesta se tendrá que:

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{ZR}(\omega)$$

El hecho de que la función de transferencia se halle elevada al cuadrado, se debe a que las densidades espectrales contienen información de los valores cuadráticos medios de la variable que se estudia.

Hay que señalar, también, que se emplea solamente el módulo de la función de transferencia, y esto se debe a que las densidades espectrales solamente contienen información de las amplitudes y no de los desfases.

Ejercicio 7.1

Un vehículo automóvil presenta las siguientes características:

* Masa suspendida 1500 kg.

Distancia del centro de gravedad a los ejes:

* Delantero 1,5 m.

* Trasero 1,6 m.

(en proyección sobre la superficie de rodadura)

Rigideces combinadas de suspensión y neumáticos:

* En el eje delantero 36 kN/m.

* En el eje trasero 39 kN/m.

Se realiza un ensayo haciendo circular el vehículo sobre una pista especial con ondulaciones de longitud de onda igual a 3,1 m. La masa suspendida entra en resonancia al alcanzar la velocidad de 12,5 Km/h.

Calcular:

1. El momento de inercia de la masa suspendida respecto a un eje transversal que contiene al centro de gravedad (OY).
2. A qué otra velocidad volverá a presentarse el fenómeno de resonancia.
3. Las posiciones de los centros de oscilación.
4. Cuando el vehículo está completamente cargado, su masa suspendida es de 2000 kg y el centro de gravedad no cambia de posición. En estas condiciones se observa que los choques de las ruedas de un eje sobre irregularidades de la calzada producen oscilaciones que no afectan a los puntos de amarre de la suspensión del eje contrario. Estimar el momento de inercia en este caso y el valor de las frecuencias naturales.

SOLUCION:

Considerando el esquema de vehículo con dos grados de libertad de la figura 7.54. Las ecuaciones diferenciales del movimiento de la masa suspendida, 7.50 y 7.51, pueden expresarse en la forma:

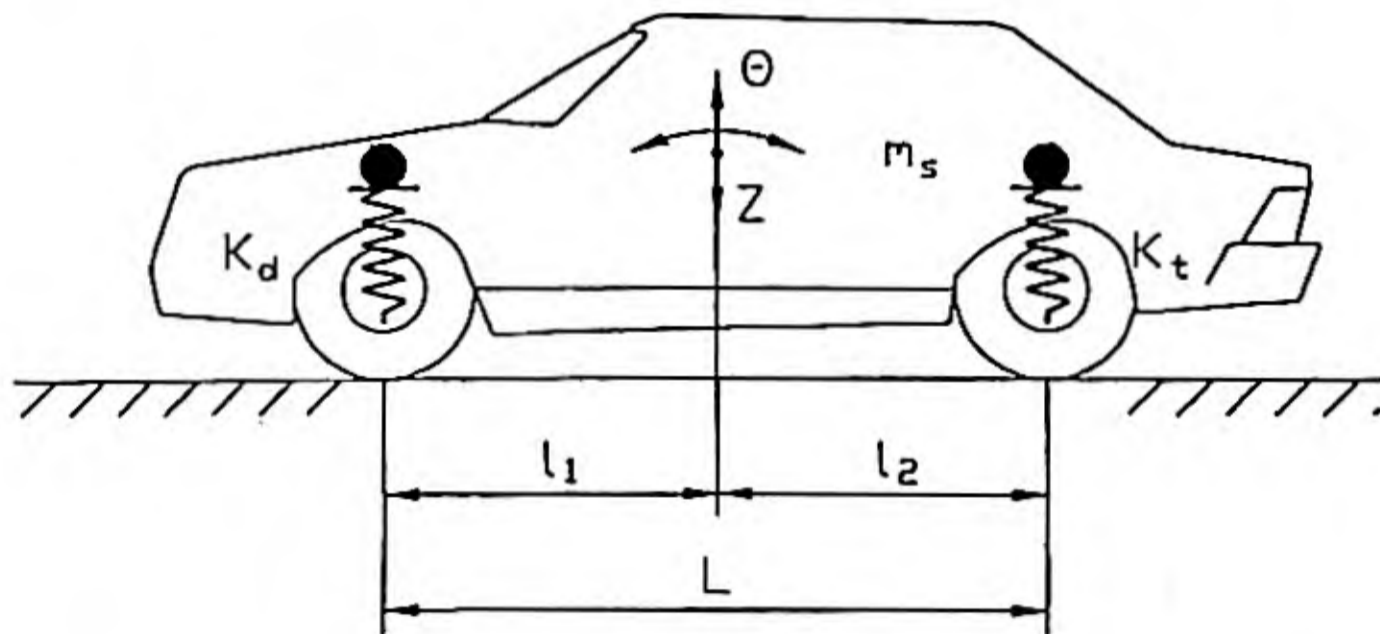


Figura 7.54. Modelo de vehículo con dos grados de libertad.

$$\ddot{Z} + D_1 \cdot Z + D_2 \cdot \theta = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} + D_3 \cdot \theta + \frac{D_2}{r_y^2} \cdot Z = 0$$

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

Teniendo en cuenta (7.49) y los siguientes valores:

$$K_d = 36 \text{ kN/m.} \quad K_t = 39 \text{ kN/m} \quad m_s = 1500 \text{ kg.}$$

$$l_1 = 1,5 \text{ m.} \quad l_2 = 1,6 \text{ m.} \quad r_y = \text{radio de giro respecto a YO}$$

$$D_1 = 50 \text{ s}^{-2}; D_2 = 5,6 \text{ ms}^{-2}; D_3 = \frac{120,56}{r^2} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por otra parte la expresión (1) para soluciones del tipo:

$$Z = Z A \cos \omega_n t$$

$$\theta = \theta A \cos \omega_n t$$

permite obtener (7.59):

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \cdot (D_1 + D_3) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (D_1 - D_3)^2 - \left(\frac{D_2}{r_y}\right)^2}$$

siendo ω_1 y ω_2 las frecuencias naturales de oscilación vertical y de cabeceo.

1. El ensayo que se realiza excita en el vehículo un movimiento de vibración vertical, puesto que la longitud de onda de la ondulación de la calzada coincide con la batalla del vehículo. Como normalmente la frecuencia natural vertical suele ser la de menor valor, consideraremos que su valor es:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (D_1 + D_3) - \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (D_1 - D_3)^2 - \left(\frac{D_2}{r}\right)^2} \quad (2)$$

por otra parte, la frecuencia de la excitación es:

$$f = \frac{V}{l_0} = \frac{12,5}{3,1} = 1,12 \text{ Hz}$$

considerando:

$$\omega_1 = 2 \pi A f = 7,037 \text{ rad. s}^{-1}$$

sustituyendo en (2) los valores conocidos, y resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$r = 1,056 \text{ m.}$$

$$I_{ys} = m_s \cdot A \cdot r^2 = 1500 \cdot A \cdot 1,056^2 = 1672,7 \text{ kg} \cdot A \cdot \text{m}^2$$

2. La otra frecuencia natural puede obtenerse calculando:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (D_1 + D_2) + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (D_1 - D_2)^2 - \left(\frac{D_2}{r}\right)^2}$$

Con:

$$D_2 = \frac{120,56}{1,056^2} = 108,03 \text{ s}^{-2}$$

sustituyendo los valores conocidos:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (50 + 108,03) + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (50 - 108,03)^2 - \left(\frac{5,6}{1,056}\right)^2}$$

$$\omega_2^2 = 107,54; \quad \omega_2 = 10,37 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2 \cdot \pi} = 1,65 \text{ Hz}$$

$$V = 3,1 \cdot 1,65 \cdot 3,6 = 18,41 \text{ km/h}$$

3. Para verificar la suposición de que ω_1 coincide con la frecuencia natural vertical, calcularemos las posiciones de los centros de oscilación. Teniendo en cuenta (7.61):

$$l_{o1} = \frac{D_2}{\omega_1^2 - D_1} = \frac{5,6}{49,52 - 50} = -11,66 \text{ m.}$$

$$l_{o2} = \frac{D_2}{\omega_2^2 - D_1} = \frac{5,6}{107,54 - 50} = 0,97 \text{ m.}$$

comprobamos que ω_1 corresponde a la frecuencia natural de vibración vertical y ω_2 al modo de cabeceo.

4. La condición expresada en el enunciado significa (7.63) que se cumple $l_{o1} = l_1$ y $l_{o2} = l_2$ ó lo que es lo mismo:

$$r^2 = l_1 \cdot l_2 = 1,5 \cdot 1,6 = 2,4$$

$$I_{ys} = 1000 \cdot 2,4 = 2400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

En este caso puede suponerse que el sistema se comporta como dos masas concentradas en los puntos de amarre de la suspensión de los ejes, anterior y posterior y las

frecuencias naturales de vibración serán:

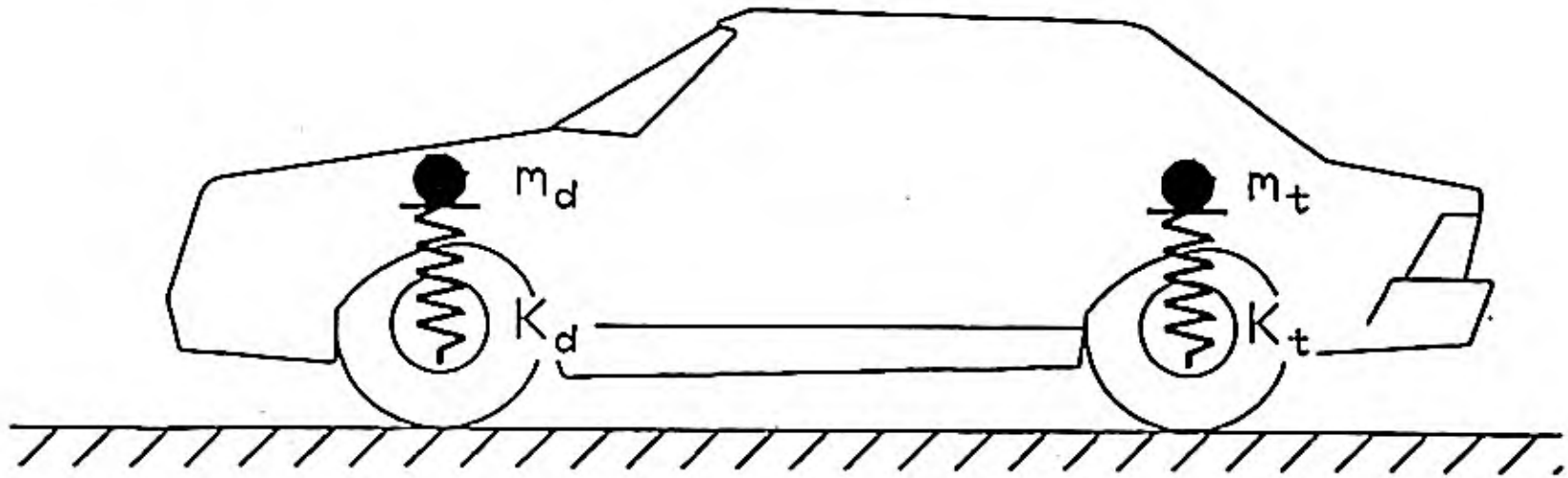


Figura 7.55. Modelo de masas concentradas en la sujección del vehículo a cada eje.

$$m_d = \frac{m_s \cdot l_2}{L} ; \omega_{n1} = \sqrt{\frac{K_d \cdot L}{m_s \cdot l_2}}$$

$$m_t = \frac{m_s \cdot l_1}{L} ; \omega_{n2} = \sqrt{\frac{K_t \cdot L}{m_s \cdot l_1}}$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{36000 \cdot 3,1}{2000 \cdot 1,6}} = 5,91 \text{ rad/s}^{-1} ; f_{n1} = 0,94 \text{ Hz}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{39000 \cdot 3,1}{2000 \cdot 1,5}} = 6,348 \text{ rad/s}^{-1} ; f_{n2} = 1,01 \text{ Hz}$$

Ejercicio 7.2.

Considérese un modelo simple de un vehículo, circulando sobre una superficie ondulada, de tal forma que los neumáticos sean de rigidez infinita, todas las masas suspendidas están concentradas y unidas a una única rueda, que representa al conjunto de ellas, por un resorte de rigidez K, y un amortiguador, como combinación del conjunto de la suspensión.

Supóngase los siguientes valores numéricos:

Amplitud de la ondulación de la superficie: 0,04 m.

Longitud de onda: 5 m.

Peso del vehículo en vacío: 8 kN.

[Teoría de los vehículos automóviles.]

Peso del vehículo a plena carga: 12 kN.
 Rigidez combinada de la suspensión: $K = 130 \text{ kN/m}$
 Relación de amortiguamiento cuando el vehículo está completamente cargado: $\xi = 0,5$.

El vehículo circula a 100 km/h y se supone que no se despegan las ruedas de la calzada en ningún momento.

Calcular la frecuencia de vibración libre sin y con amortiguamiento, en vacío y a plena carga así como los desplazamientos máximos.

SOLUCION:

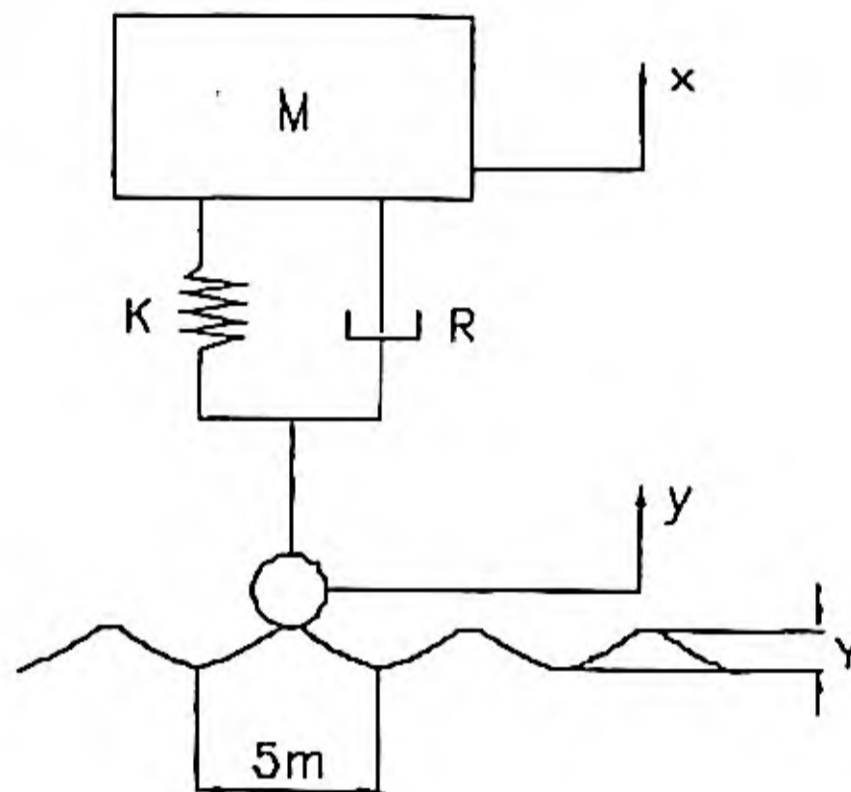


Figura 7.56. Modelo de un grado de libertad.

$$M \cdot \ddot{x} + c \cdot (\dot{x} - \dot{y}) + K \cdot (x - y) = 0 \quad (1)$$

$$M \cdot \ddot{x} + R \cdot \dot{x} + K \cdot x = R \cdot \dot{y} + K \cdot y \quad (2)$$

$$y = Y \cdot \text{sen} \omega \cdot t \quad (3)$$

$$M \cdot \ddot{x} + R \cdot \dot{x} + K \cdot x = A \cdot \text{sen} \omega \cdot t + B \cdot \text{cos} \omega \cdot t \quad (4)$$

siendo:

$$A = K \cdot Y \quad (5)$$

$$B = \omega \cdot R \cdot Y \quad (6)$$

Considerando una forma general:

$$M \cdot \ddot{x} + R \cdot \dot{x} + K \cdot x = F_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (7)$$

y una solución particular,

$$x_p(t) = X \cdot e^{i\omega t} \quad (8)$$

Sustituyendo esta solución y sus derivadas en la ecuación general:

$$-M \cdot X \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t} + R \cdot X \cdot i \cdot \omega \cdot e^{i\omega t} + K \cdot X \cdot e^{i\omega t} = F_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (9)$$

$$X = \frac{F_0}{(K - M \cdot \omega^2) + i \cdot R \cdot \omega} \quad (10)$$

multiplicando numerador y denominador por $(K - M\omega^2) - i \cdot R \cdot \omega$

$$X = F_0 \cdot \left[\frac{K - M \cdot \omega^2}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + R^2 \cdot \omega^2} - i \cdot \frac{R \cdot \omega}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + R^2 \cdot \omega^2} \right] \quad (11)$$

utilizando la transformación $a + i b = A e^{i\vartheta}$ siendo $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\vartheta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

tenemos,

$$X = \frac{F_0}{\left[(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R^2 \cdot \omega^2) \right]^{1/2}} \cdot e^{-i\vartheta} \quad (12)$$

$$\vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{R \cdot \omega}{K - M \cdot \omega^2} \right) \quad (13)$$

sustituyendo (12) en (8):

$$X_p(t) = \frac{F_0}{\left[(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R^2 \cdot \omega^2) \right]^{1/2}} \cdot e^{i(\omega t - \vartheta)} \quad (14)$$

solución en régimen estacionario.

Particularizando (14) para: $F(t) = F_0 \cdot \cos \omega t$ y $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$ se obtiene:

$$X_p(t) = \frac{F_0}{\left[(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R^2 \cdot \omega^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \cos(\omega t - \emptyset) \quad (15)$$

$$X_p(t) = \frac{F_0}{\left[(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R^2 \cdot \omega^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin(\omega t - \emptyset) \quad (16)$$

considerando la ecuación (4) del problema, en la que,

$$F(t) = K \cdot Y \cdot \sin \omega t + R \cdot \omega \cdot Y \cdot \cos \omega t \quad (17)$$

La respuesta estacionaria del sistema será:

$$X_p(t) = \frac{K \cdot Y \cdot \sin(\omega t - \emptyset) + R \cdot \omega \cdot Y \cdot \cos(\omega t - \emptyset)}{\left[(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R^2 \cdot \omega^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

que puede expresarse como:

$$X_p(t) = Y \left[\frac{K^2 + (R \cdot \omega)^2}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R \cdot \omega)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(\omega \cdot t - \emptyset_1 - \emptyset_2) \quad (19)$$

siendo:

$$\emptyset_1 = \tan^{-1} \cdot \frac{R \cdot \omega}{K - M \cdot \omega^2} \text{ y,}$$

$$\emptyset_2 = \tan^{-1} \cdot \left(\frac{K}{R \cdot \omega} \right)$$

$$\text{sen } \emptyset_2 = \frac{K}{\sqrt{K^2 + (R \cdot \omega)^2}}$$

$$\cos \varnothing_2 = \frac{R \cdot \omega}{\sqrt{K^2 + (R \cdot \omega)^2}}$$

la amplitud del movimiento es:

$$X = Y \left[\frac{K^2 + (R \cdot \omega)^2}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R \cdot \omega)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

y la relación de amplitudes o transmisibilidad puede expresarse por:

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{K^2 + (R \cdot \omega)^2}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R \cdot \omega)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

dividiendo por K^2 numerador y denominador y considerando que:

Amortiguamiento crítico: $R_c = 2 \cdot M \cdot \omega_n = 2\sqrt{K \cdot M}$

Relación de amortiguamiento: $\xi = \frac{R}{R_c}$

Frecuencia de la vibración libre no amortiguada: $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Relación de frecuencias: $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

La ecuación (20) puede escribirse como:

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{1 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Las anteriores expresiones permiten realizar los cálculos deseados.

Frecuencia de excitación (a 100 km/h = 27,7 m/s)

$$f = \frac{27,7 \text{ m/s}}{5 \text{ m}} = 5,54 \text{ Hz}$$

$$\omega = 34,81 \text{ rad/s}$$

Relación de amortiguamiento en vacío:

$$\xi = \frac{R}{2 \cdot \sqrt{K \cdot M}}; \quad \frac{\xi_v}{\xi_p} = \sqrt{\frac{M_p}{M_v}}$$

$$\xi_v = 0,5 \sqrt{\frac{12}{8}} = 0,61$$

Frecuencias naturales de vibración no amortiguada:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

a plena carga:

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{130 \cdot 9,81}{12}} = 10,31 \text{ rad/s}$$

$$f_{np} = \frac{\omega_{np}}{2 \cdot \pi} = 1,64 \text{ Hz}$$

en vacío:

$$\omega_{nv} = \sqrt{\frac{130 \cdot 9,81}{8}} = 12,62 \text{ rad/s}$$

$$f_{nv} = 2 \text{ Hz}$$

Relaciones de frecuencias (20):

$$\text{a plena carga: } r_p = \frac{5,54}{1,64} = 3,44$$

$$\text{en vacío: } r_v = \frac{5,54}{2} = 2,77$$

Relación de amplitudes X/Y:

a plena carga:

[Dinámica de un vehículo dotado de suspensión.]

$$\left(\frac{X}{Y}\right)_p = \left[\frac{1 + (2 \cdot 0,5 \cdot 3,44)^2}{(1 - 3,44^2)^2 + (2 \cdot 0,5 \cdot 3,44^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0,3$$

en vacío:

$$\left(\frac{X}{Y}\right)_v = \left[\frac{1 + (2 \cdot 0,61 \cdot 2,77)^2}{(1 - 2,77^2)^2 + (2 \cdot 0,61 \cdot 2,77^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0,22$$

Amplitudes del movimiento del vehículo:

$$X = \left(\frac{X}{Y}\right)_{p,v} Y$$

$$X_p = 0,3 \cdot 40 = 12 \text{ mm.}$$

$$X_v = 0,22 \cdot 40 = 8,87 \text{ mm.}$$

* BIBLIOGRAFIA

Referencias: [2], [5], [6], [9], [20], [25], [26], [35], [43], [52], [53] y [58]. (Ver bibliografía al final del libro).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APARICIO, F. (1986).- Neumáticos. Sección de Publicaciones, ETSII, Universidad Politécnica de Madrid
- [2] APARICIO, F.; VERA, C. GARCIA, A. (1991). Teoría de Vehículos y Automóviles. Problemas. Sección de Publicaciones de la ETSII. Universidad Politécnica de Madrid.
- [3] BAKKER, E.; PACEJKA, H.B; LIDNER, L. (1989).- "A New Tire Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies", SAE 890087
- [4] ARMENGOL, A. (1974).- Curso superior de Automoción. Barcelona.
- [5] BASTOW, D. (1980).- Car Suspension and Handling.- Pentech Press. London.
- [6] COLE, D. E. (1971).- Elementary Vehicle Dynamics.- Departament de Mechanical Engineering.- University of Michigan, Ann Arbor.
- [7] DAHLER, K.O. (1989).- "El convertidor Hidrodinámico de Par". Voith.
- [8] DAVISSON, J. A. (1969).- Design and Aplication of Comercial Type Tires. SP-344 - SAE.
- [9] DE BUEN, V. (1980).- "Contribución al estudio de los movimientos de la suspensión de los automóviles". Universiad Politécnica de Barcelona.
- [10] DE BUEN, V. (1982).- "Aerodinámica del automóvil". III Curso Superior de Automoción. Universidad Politécnica de Barcelona"
- [11] DUGOFF, H.; FAUCHER, P. S. and SEGEL, L.- An Analisis of Tire Traction Properties and Their influence on Dynamic Performance.
- [12] EL-GINDY, M. and ILOSVAI, L. (1983).- "Computer simulation study on a vehicle's directional response in some sever manoeuvres" Part 1: Rapid change manoeuvres. Int. J. of Vehicle Design, Vol.4 nº 4 PP. 386-401.
- [13] EL-GINDY, M. e ILOSVAI, L. (1983).- "Computer simulation study on a vehicle's directional response in some sever manoeuvres" Part 2: Steering and braking manoeuvres. Int. J. of Vehicles Design. Vol.4 nº 4. PP.501-510.
- [14] ELLIS, J. R. (1969).- Vehicle Dynamics.- Business Books. London-England.
- [15] ELLIS, J. R. (1994).- Vehicles Handling Dynamics. Mechanical Engineering Publications Limited. London.

- [16] **ERVIN, R.D.** (1986).- "The dependence of truck roll stability on size and weight variables", *Int. J. of Vehicle design*, Special Issue on Vehicle Safety. PP 192-208.
- [17] **FURUKAWA, YOSHIMI y otros.** (1989).- "A review of four-wheel steering studies from the viewpoint of vehicle dynamics and control" *Vehicle System Dynamics*, 18, PP 151-186.
- [18] **GARRY, K.P. y SOLLERY, J.L.** (1982).- "Reducing of aerodynamics drag of commercial vehicles" *Int. J. of Vehicle Design*, Vol. 3 nº 2, PP 160-170.
- [19] **GENTA, G.** (1981).- *Meccanica dell' Autoveicolo*. Libreria Universitaria Levrotto & Bella. Torino
- [20] **GILLESPIE, T.D.** (1992).- *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE.
- [21] **GIM, G. y NIKRAVESH, P.E.** (1990).- "An Analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulation part 1. Pure slips" *Int. J. of vehicle design* vol. 11, nº 6. PP 586-618.
- [22] **GIM, G. y NIKRAVESH, P.E.** (1991).- "An analytical model of pneumatic tyres for vehicle dynamic simulation Part 2. Comprehensive slips". *Int. J. of vehicle design*, vol. 12 nº 1 PP. 19-30
- [23] **GUERIN, M. B.** (1975).- "Stabilité transversal des véhicules industriels". *Ingenieurs de L'automobile* 6.75 PP. 209 a 221.
- [24] **HUCHO, W.** (1987).- *Aerodynamics of road vehicles*. Butterworths. London.
- [25] **JOLLY, A.** (1983).- "Study of ride confort using a nonlinear mathematical model of vehicle suspension"
- [26] **KARAMIHAS, S. M. y GILLESPIE, T.D.** (1993).- "Characterization of trucks for dynamic load prediction". *Heavy Vehicle Systems, Special Series, Int. J. of Vehicle Design*, Vol. 1, nº 1.
- [27] **LIMPEPT, R.** (1982).- *Vehicle System Components Design and Safety*. John Wiley & Sons.
- [28] **LIN, W. C.; DOBNER, D. J. y FRUECHTE, P. D.** (1993).- "Design and analysis of antilock brake control system with electric brake actuator". *Int. J. of Vehicle Design*, vol.14, nº 1. PP. 13-43.
- [29] **LUGNER, P.** (1982).- "Horizontal Motion of Automobiles. Theoretical and Practical Investigation". *Dynamics of high-Speed vehicle*, Springer, PP. 83-146.
- [30] **LUKIN, P.; GASPARYANTS, G. y RODIONOV, V.** (1989).- *Automobile Chassis. Design and Calculation*. MIR Publishers MOSCOW.
- [31] **MAALEJ, A. Y.; GUENTHER, D. A. y ELLIS, J. R.** (1989).- "Experimental development of tyre force and moment models", *Int. J. of Vehicle Design*, Vol. 10 nº 1 PP. 34-51.
- [32] **MATAIX, C.** (1975).- *Turbomáquinas Hidráulicas*. Editorial ICAI.
- [33] **MORELLI, A.** (1973).- *Costruzioni Automobilistiche*.- ISEDI.

[Bibliografía.]

- [34] MOORE, D. F. (1975).- The friction of pneumatic tyres.- Elsevier Scientific Publishing Company.
- [35] NIGAM, N. C. y NARAYANAN, S. (1994).- Application of Random Vibrations. Springer-verlang. New York.
- [36] NIU, M. (1973).- Estudio técnico del Neumático.- Firestone.
- [37] NOGUCHI, H. (1986).- "An analysis of vehicle behaviour in a cross wind", Int. J. of Vehicle design, special Issue on Vehicle Safety, PP. 304-317.
- [38] NORDSTROM, O. (1993).- "Stability, steerability and braking performance of heavy duty vehicles. A review of experimental and theoretical research and regulation proposal by VTI in Sweden". Heavy vehicles Systems, Special series, Int. J. of vehicle design, Vol. 1, nº 1. PP. 34-62.
- [39] NUNNEY, M. J. (1991).- Light and Heavy Vehicle Technology. Butterworth-Heinemann Ltd.
- [40] PACEJKA, H. B. (1983).- Tyre mechanics and its impact on vehicle dynamics. Proceeding of the international association for vehicle design.
- [41] PARRAGA, J. (1979).- Automoción I. Ediciones del Castillo, S.A.
- [42] PREUSSER, T. y otros (1989).- "Advanced in the development of wind Tunnel Balance Systems for experimental automotive aerodynamics SAE Technical paper series (890370).
- [43] RAO, S.S. (1984).- Mechanical Vibrations. Addison-Wesley Publishing Company..
- [44] Reglamento 30 (1958 y versiones).- Disposiciones uniformes referentes a la homologación de neumáticos para automóviles y sus remolques.- Naciones Unidas.- Ginebra.
- [45] REINECKE, E. (1985). "An anti-lock system with extended and control system function", Int. J. of Vehicle Design, vol. 6 nº. 4/5, pp. 561-566..
- [46] ROWELL, J. M.; GRITT, P.S. (1987), "Anti-lock Braking Systems" SAE, Inc.
- [47] SAKAI, H. (1981).- Theoretical and experimental studies on the dynamic properties of tyres.- Part: 1 Review of theories of rubber friction.- Vehicle Design Vol. 2 nº 1 pp. 78-110.
- [48] SAKAI, H. (1982).- Theoretical and experimental studies on the dynamic properties of tyres.- Part: 4 Investigations of influences of running conditions by calculation and experiment. Int. J. of Vehicle Design, Vol. 3, nº 3 pp. 333-375.
- [49] SANCAR, S., GUNTER, R. y SANKER, T. S. (1982).- "Effect of wheel slip on the stability and stopping ability of a road vehicle". Int. J. of vehicle design; Vol 2, nº 1 PP. 77-80.
- [50] SATOH, M.; SHIRAIISHI, S. (1983).- "Excess of antilock brake system on a rough". Braking of Road Vehicle. I Mech E Conference Publications. London. The Institution of Mechanical Engineers.

- [51] SEIFFERT, U. y WALZER, P. (1991).- Automobile technology of the future. VDI-Verlag Gmbh Düsseldorf.
- [52] SEGEL, L. et all (1987), "The Mechanics of Heavy-duty trucks and truck combinations". The open University, U.K.
- [53] SERRUYS, M. (1947).- La suspension et la direction des vehicules routiers. Dunod. Paris.
- [54] TIBKEN, M. (1990).- "Un nuevo sistema antibloqueo según el principio de un émbolo sumergido". La técnica industrial 501. PP. 25.
- [55] VIK, F. (1983).- "Design trends of articulated buses", Int. J. of vehicle design. Vol 4 nº 6, PP 646-658.
- [56] VIK, F. (1984) "A linear study of the transient and steady turning behaviour of articulated buses". Int. J. of vehicle design, Vol. 5 nº 1/2. PP 171-196.
- [57] WABCO. Anti-lock Braking System. ABS (1987).- Wabco Westinhouse Automotiv Products Group, Hannover.
- [58] WONG, J. Y. (1978).- Theory of Ground Vehicles. John Wiley & Sons inc.

Otros títulos:

**SERIE: INGENIERÍA MECÁNICA Y DE
FABRICACIÓN**

Problemas de mecanismos.

R. Martínez Fernández, A. García Beltrán,
S. Tapia Fernández y J. A. Jaén Gallego
y J. del Álamo Lobo.

*Diseño y cálculo de transmisión
por engranajes.*

Pilar Lafont, Andrés Díaz
y Javier Echávarri.

**SERIE: AUTOMÁTICA, INGENIERÍA
ELECTRÓNICA E INFORMÁTICA
INDUSTRIAL**

Sistemas de producción automatizados.
A. Barrientos y E. Gambao.

Teoría de sistemas. (4ª edición)

F. Matia, A. Jiménez, R. Aracil y E. Pinto

*Introducción a la movilidad 4G/LTE y el
desarrollo de aplicaciones con Android.*

R. León y R. Galán

Ejercicios de programación en C.

R. Martínez Fernández, Á. García y Beltrán,
S. Tapia Fernández, J. A. Jaén Gallego,
Fº. J. del Álamo Lobo.

SERIE: INGENIERÍA DE LA ORGANIZACIÓN

Ingeniería de Proyectos.

A. González Marcos, F. Alba Elías,
J. Ordieres Meré.



BIBLIOTECA UTN



056774

La creciente demanda de prestaciones de los vehículos, unida a la necesidad de reducir lo máximo posible los efectos negativos de su uso masivo, ha llevado al desarrollo de una gran cantidad de conocimientos obtenidos de la investigación de los múltiples aspectos relacionados con los automóviles.

Sin embargo, pese a que muchos de estos conocimientos han alcanzado la categoría de disciplinas académicas, pocos son los textos que plasmen, de forma sistemática, los contenidos de tales disciplinas.

Para suplir esta carencia aparece este libro que aborda desde los conceptos introductorios de la materia a la interacción del vehículo, como sistema, con su medio o la dinámica vehicular. Todos los capítulos incorporan ejercicios resueltos con el fin de ayudar a la comprensión de la teoría y completar los temas tratados desde una perspectiva más aplicada.

BIBLIOTECA UTN



056774

DEXTRA

EDITORIAL



INDUSTRIALES

ETSII | UPM

SECCIÓN DE PUBLICACIONES

ISBN: 978-84-16277-61-2



9 788416 277612