

*Novena edición*

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

¡Incluye clave  
de acceso  
para descargar  
AMPL® y TORA!

**40**  
ANIVERSARIO

Con AMPL®, Solver, Excel  
e implementaciones TORA

HAMDY A. TAHA


## ACCESO AL MATERIAL ADICIONAL Y PROGRAMAS MENCIONADOS EN EL LIBRO

Para acceder a los capítulos y apéndices adicionales mencionados en el libro, así como a los programas AMPL y TORA, visite el sitio Web:

**<http://pearsoneducacion.net/taha>**

Seleccione el vínculo **Companion Website (Profesores y alumnos)** y diríjase a la sección **Register Your Access Code** para introducir la siguiente clave de acceso.

(Utilice una moneda para descubrir el código de acceso. No use objetos filosos porque podría dañar el código).



TATA-CHOI-MEDIC-ARRAN-IBIZA-NJORD

337

### IMPORTANTE:

**¡Este código de acceso sólo puede usarse una vez y no puede ser reemplazado en caso de daño!**

**Asegúrese que el código no aparezca descubierto.**

# Investigación de operaciones

J:00000007275

003.1

T34

In

2012

INVESTIGACIÓN OPERATIVA  
(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)



Biblioteca Nro.	
Via de Adquisición	Donado
Factura Nro.	0017555
Fecha	11-10-2012
Valor Unitario	38.92
Inventario Nro.	224583 / FACAE

CB: 028559

# Investigación de operaciones

*Novena edición*

**Hamdy A. Taha**

*University of Arkansas, Fayetteville*

TRADUCCIÓN

**Rodolfo Navarro Salas**

*Ingeniero Mecánico*

*Universidad Nacional Autónoma de México*

REVISIÓN TÉCNICA

**MÉXICO**

**Alicia Nandeli Mercado Zepeda**

**Humberto Oviedo Galdeano**

**Francisco García Mora**

*Academia de Investigación de Operaciones*

*Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería  
y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA)*

*Instituto Politécnico Nacional*

**Mario Álvarez García**

*Departamento de Ingeniería Industrial*

*Instituto Tecnológico Superior del Occidente del Estado de Hidalgo*

**Ulises Mercado Valenzuela**

*Unidad de Estudios de Posgrado e Investigación*

*Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco*

**ARGENTINA**

**Oswaldo Facundo Martínez**

*Departamento de Ingeniería Industrial*

*Universidad Tecnológica Nacional*

*Facultad Regional Córdoba*

**PEARSON**

**TAHA, HAMDY A.**

**Investigación de operaciones**  
Novena edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-0796-6

Área: Matemáticas

Formato: 18.5 × 23.5 cm

Páginas: 824

Authorized translation from the English language edition, entitled *Operations Research: An Introduction*, 9<sup>th</sup> Edition, by *Hamdy A. Taha*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2011. All rights reserved.  
ISBN 9780132555937

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Operations Research: An Introduction*, 9a edición, por *Hamdy A. Taha*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2011. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

**Edición en español**

Editora: Gabriela López Ballesteros  
e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com  
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández  
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

NOVENA EDICIÓN, 2012

D.R. © 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.  
Atacomulco 500-5o. piso  
Col. Industrial Atoto  
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

**ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0796-6**  
**ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0797-3**  
**ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0798-0**

PRIMERA IMPRESIÓN  
Impreso en México/Printed in Mexico.  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

Esta obra se terminó de imprimir en febrero de 2012 en los talleres de Litográfica Ingramex, S.A. de C.V. Centeno 162-1, Col. Granjas Esmeralda, C.P. 09810, México, D.F.

**PEARSON**

## Contenido

### *A Karen*

Los ríos no llevan agua,  
el sol las fuentes secó...  
¡Yo sé donde hay una fuente  
que no ha de secar el sol!  
La fuente que no se agota  
es mi propio corazón...

—*V. Ruiz Aguilera (1862)*

# Contenido

**Lo nuevo en esta edición xxv**

**Agradecimientos xxvi**

**Reconocimientos xxx**

**Acerca del autor xxxi**

**Marcas registradas xxxiii**

## **Capítulo 1 Qué es la investigación de operaciones 1**

- 1.1 Introducción 1
- 1.2 Modelos de investigación de operaciones 1
- 1.3 Solución del modelo de IO 5
- 1.4 Modelos de colas y simulación 6
- 1.5 El arte del modelado 6
- 1.6 Más que sólo matemáticas 7
- 1.7 Fases de un estudio de IO 9
- 1.8 Acerca de este libro 10
- Bibliografía 11

## **Capítulo 2 Modelado con programación lineal 13**

- 2.1 Modelo de PL con dos variables 13
- 2.2 Solución gráfica de la PL 16
  - 2.2.1 Solución de un modelo de maximización 16
  - 2.2.2 Solución de un modelo de minimización 24
- 2.3 Solución con computadora, aplicando Solver y AMPL 27
  - 2.3.1 Solución de PL con Excel Solver 27
  - 2.3.2 Solución de PL con AMPL 31
- 2.4 Aplicaciones de programación lineal 35
  - 2.4.1 Inversión 35
  - 2.4.2 Planificación de la producción y control de inventario 40
  - 2.4.3 Planificación de la mano de obra 48
  - 2.4.4 Planificación de desarrollo urbano 52
  - 2.4.5 Mezcla y refinación 57
  - 2.4.6 Aplicaciones de PL adicionales 63
- Bibliografía 68

## **Capítulo 3 Método simplex y análisis de sensibilidad 69**

- 3.1 Modelo de PL en forma de ecuación 69
- 3.2 Transición de la solución gráfica a la algebraica 72

- 3.3 Método simplex 76
  - 3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex 77
  - 3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex 79
  - 3.3.3 Resumen del método simplex 85
- 3.4 Solución artificial inicial 89
  - 3.4.1 Método  $M$  89
  - 3.4.2 Método de dos fases 94
- 3.5 Casos especiales en el método simplex 99
  - 3.5.1 Degeneración 99
  - 3.5.2 Óptimos alternativos 102
  - 3.5.3 Solución no acotada 104
  - 3.5.4 Solución no factible 106
- 3.6 Análisis de sensibilidad 108
  - 3.6.1 Análisis de sensibilidad gráfica 108
  - 3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica. Cambios en el lado derecho 114
  - 3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica. Función objetivo 123
  - 3.6.4 Análisis de sensibilidad con Tora, Solver, y AMPL 129
- 3.7 Temas de cálculo en la programación lineal 131
- Bibliografía 136

## Capítulo 4 Dualidad y análisis postóptimo 137

- 4.1 Definición del problema dual 137
- 4.2 Relaciones primal-dual 141
  - 4.2.1 Repaso de operaciones con matrices simples 141
  - 4.2.2 Diseño de la tabla simplex 142
  - 4.2.3 Solución dual óptima 143
  - 4.2.4 Cálculos con la tabla simplex 150
- 4.3 Interpretación económica de la dualidad 153
  - 4.3.1 Interpretación económica de las variables duales 154
  - 4.3.2 Interpretación económica de las restricciones duales 156
- 4.4 Algoritmos simplex adicionales 158
  - 4.4.1 Algoritmo simplex dual 159
  - 4.4.2 Algoritmo simplex generalizado 164
- 4.5 Análisis postóptimo 165
  - 4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad 166
  - 4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad 171
- Bibliografía 174

**Capítulo 5 Modelo de transporte y sus variantes 175**

- 5.1 Definición del modelo de transporte 175
- 5.2 Modelos de transporte no tradicionales 182
- 5.3 Algoritmo de transporte 187
  - 5.3.1 Determinación de la solución de inicio 188
  - 5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte 191
  - 5.3.3 Explicación del método de los multiplicadores con el método simplex 199
- 5.4 Modelo de asignación 200
  - 5.4.1 Método húngaro 201
  - 5.4.2 Explicación del método húngaro con simplex 206
- Bibliografía 208

**Capítulo 6 Modelo de redes 209**

- 6.1 Alcance y definición de modelos de redes 209
- 6.2 Algoritmo del árbol de mínima expansión 212
- 6.3 Problema de la ruta más corta 217
  - 6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta 217
  - 6.3.2 Algoritmos de la ruta más corta 221
  - 6.3.3 Formulación de programación lineal del problema de la ruta más corta 230
- 6.4 Modelo de flujo máximo 234
  - 6.4.1 Enumeración de cortes 235
  - 6.4.2 Algoritmo de flujo máximo 236
  - 6.4.3 Formulación de programación lineal en el modo de flujo máximo 244
- 6.5 CPM y PERT 247
  - 6.5.1 Representación en forma de red 247
  - 6.5.2 Cálculos del método de la ruta crítica (CPM) 252
  - 6.5.3 Construcción del cronograma 255
  - 6.5.4 Formulación de programación lineal de CPM 261
  - 6.5.5 Redes PERT 262
- Bibliografía 265

**Capítulo 7 Programación lineal avanzada 267**

- 7.1 Fundamentos del método simplex 267
  - 7.1.1 Desde los puntos extremos hasta las soluciones básicas 269
  - 7.1.2 Tabla simplex generalizada en forma matricial 272

7.2	Método simplex revisado	275
7.2.1	Desarrollo de las condiciones de optimalidad y factibilidad	275
7.2.2	Algoritmo simplex revisado	278
7.3	Algoritmo de variables acotadas	283
7.4	Dualidad	290
7.4.1	Definición matricial del problema dual	290
7.4.2	Solución dual óptima	290
7.5	Programación lineal paramétrica	294
7.5.1	Cambios paramétricos en C	295
7.5.2	Cambios paramétricos en b	297
7.6	Más temas de programación lineal	300
	Bibliografía	300

## **Capítulo 8 Programación de metas 301**

8.1	Formulación de una programación de metas	301
8.2	Algoritmos de programación de metas	306
8.2.1	Método de los pesos	306
8.2.2	Método preventivo	308
	Bibliografía	314

## **Capítulo 9 Programación lineal entera 315**

9.1	Aplicaciones ilustrativas	315
9.1.1	Presupuesto de capital	316
9.1.2	Problema de cobertura de conjunto	320
9.1.3	Problema de cargo fijo	325
9.1.4	Restricciones Uno - u - otro y Si - entonces	330
9.2	Algoritmos de programación entera	335
9.2.1	Algoritmo de ramificación y acotamiento	336
9.2.2	Algoritmo de plano de corte	344
	Bibliografía	349

## **Capítulo 10 Programación heurística 351**

10.1	Introducción	351
10.2	Heurística codiciosa (búsqueda local)	352
10.2.1	Heurística de variable discreta	352
10.2.2	Heurística de variable continua	354
10.3	Metaheurística	357
10.3.1	Algoritmo de búsqueda tabú	358
10.3.2	Algoritmo de recocido simulado	365
10.3.3	Algoritmo genético	371

- 10.4 Aplicación de metaheurística a programas lineales enteros 376
  - 10.4.1 Algoritmo tabú aplicado a una PLE 378
  - 10.4.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado a una PLE 382
  - 10.4.3 Algoritmo genético aplicado a la PLE 386
- 10.5 Introducción a la programación de restricción (PR) 391
- Bibliografía 392

## **Capítulo 11 Problema del agente viajero (TSP\*) 395**

- 11.1 Aplicaciones de ejemplo de TSP 395
- 11.2 Modelo TSP matemático 397
- 11.3 Algoritmos TSP exactos 407
  - 11.3.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento 407
  - 11.3.2 Algoritmo del plano de corte 410
- 11.4 Heurísticas de búsqueda local 412
  - 11.4.1 Heurística del vecino más cercano 413
  - 11.4.2 Heurística de inversión 413
- 11.5 Metaheurísticas 416
  - 11.5.1 Algoritmo tabú aplicado al modelo TSP 416
  - 11.5.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado al modelo TSP 420
  - 11.5.3 TSP Algoritmo genético aplicado al modelo TSP 423
- Bibliografía 427

## **Capítulo 12 Programación dinámica determinística 429**

- 12.1 Naturaleza recursiva de los cálculos de programación dinámica (PD) 429
- 12.2 Recursividad hacia adelante (avance) y hacia atrás (retroceso) 433
- 12.3 Aplicaciones de PD seleccionadas 434
  - 12.3.1 Modelo de la mochila/equipo de vuelo/carga de contenedor 435
  - 12.3.2 Modelo de tamaño de la fuerza de trabajo 443
  - 12.3.3 Modelo de reemplazo de equipo 446
  - 12.3.4 Modelo de inversión 449
  - 12.3.5 Modelos de inventario 453
- 12.4 Problema de dimensionalidad 453
- Bibliografía 456

## **Capítulo 13 Modelos de inventario determinísticos 457**

- 13.1 Modelo general de inventario 457

- 13.2 El papel (rol) de la demanda en el desarrollo de modelos de inventario 458
- 13.3 Modelos estáticos de cantidad de pedido económico (EOQ) 460
  - 13.3.1 Modelo EOQ clásico 460
  - 13.3.2 EOQ con reducciones de precios 465
  - 13.3.3 Cantidad de pedido económica (EOQ) de varios artículos con limitación de almacenamiento 469
- 13.4 Modelos dinámicos de cantidad de pedido económica (EOQ) 471
  - 13.4.1 Modelo de EOQ sin costo de preparación 473
  - 13.4.2 Modelo de EOQ con costo de preparación 476
- Bibliografía 487

## **Capítulo 14 Repaso de probabilidad básica 489**

- 14.1 Leyes de probabilidad 489
  - 14.1.1 Ley de la adición de probabilidad 490
  - 14.1.2 Ley de probabilidad condicional 491
- 14.2 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad 492
- 14.3 Expectativa de una variable aleatoria 495
  - 14.3.1 Media y varianza (desviación estándar) de una variable aleatoria 496
  - 14.3.2 Variables aleatorias conjuntas 497
- 14.4 Cuatro distribuciones de probabilidad comunes 500
  - 14.4.1 Distribución binomial 500
  - 14.4.2 Distribución de Poisson 501
  - 14.4.3 Distribución exponencial negativa 503
  - 14.4.4 Distribución normal 504
- 14.5 Distribuciones empíricas 506
- Bibliografía 512

## **Capítulo 15 Análisis de decisiones y juegos 513**

- 15.1 Toma de decisiones bajo certidumbre. Proceso de jerarquía analítica (PJA) 513
- 15.2 Toma de decisiones en condiciones de riesgo 523
  - 15.2.1 Árbol de decisiones. Basado en el criterio del valor esperado 523
  - 15.2.2 Variantes del criterio del valor esperado 529
- 15.3 Decisión bajo incertidumbre 537
- 15.4 Teoría de juegos 541
  - 15.4.1 Solución óptima de juegos de suma cero entre dos personas 542
  - 15.4.2 Solución de juegos con estrategias combinadas 545
- Bibliografía 551

**Capítulo 16 Modelos de inventario probabilísticos 553**

- 16.1 Modelos de revisión continua 553
  - 16.1.1 Modelo EOQ "probabilizado" 553
  - 16.1.2 Modelo EOQ probabilístico 556
- 16.2 Modelos de un solo periodo 560
  - 16.2.1 Modelo sin preparación (Modelo Newsvendor) 560
  - 16.2.2 Modelo con preparación (Política s-S) 564
- 16.3 Modelo de varios periodos 567
  - Bibliografía 569

**Capítulo 17 Cadenas de Markov 571**

- 17.1 Definición de una cadena de Markov 571
- 17.2 Probabilidades de transición absolutas y de  $n$  pasos 574
- 17.3 Clasificación de los estados en una cadena de Markov 576
- 17.4 Probabilidades de estado estable y tiempos de retorno medios de cadenas ergódicas 578
- 17.5 Tiempo del primer paso 583
- 17.6 Análisis de los estados absorbentes 587
  - Bibliografía 592

**Capítulo 18 Sistemas de colas 593**

- 18.1 ¿Por qué estudiar las colas? 593
- 18.2 Elementos de un modelo de colas 595
- 18.3 Papel de la distribución exponencial 596
- 18.4 Modelos de nacimiento y muerte puros (relación entre las distribuciones exponencial y de Poisson) 600
  - 18.4.1 Modelo de nacimiento puro 600
  - 18.4.2 Modelo de muerte pura 604
- 18.5 Modelo de colas general de Poisson 606
- 18.6 Colas de Poisson especializadas 611
  - 18.6.1 Medidas de desempeño de estado estable 612
  - 18.6.2 Modelos de un solo servidor 616
  - 18.6.3 Modelos de varios servidores 623
  - 18.6.4 Modelo de servicio de máquinas  $(M/M/R):(GD/K/K), R < K$  633
- 18.7  $(M/G/1):(GD/\infty/\infty)$ —Fórmula de Pollaczek-Khintchine (P-K) 636
- 18.8 Otros modelos de colas 638

- 18.9 Modelos de decisión en colas 638
  - 18.9.1 Modelos de costos 639
  - 18.9.2 Modelo de nivel de aspiración 643
- Bibliografía 645

## **Capítulo 19 Modelado de simulación 647**

- 19.1 Simulación Montecarlo 647
- 19.2 Tipos de simulación 652
- 19.3 Elementos de la simulación de evento discreto 653
  - 19.3.1 Definición genérica de eventos 653
  - 19.3.2 Muestreo de distribuciones de probabilidad 654
- 19.4 Generación de números aleatorios 661
- 19.5 Mecánica de la simulación discreta 663
  - 19.5.1 Simulación manual de un modelo de un solo servidor 663
  - 19.5.2 Simulación basada en una hoja de cálculo del modelo de un solo servidor 669
- 19.6 Métodos para reunir observaciones estadísticas 670
  - 19.6.1 Método de subintervalos 671
  - 19.6.2 Método de réplica 673
- 19.7 Lenguajes de simulación 674
- Bibliografía 676

## **Capítulo 20 Teoría de optimización clásica 677**

- 20.1 Problemas no restringidos 677
  - 20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes 678
  - 20.1.2 Método de Newton-Raphson 681
- 20.2 Problemas restringidos 683
  - 20.2.1 Restricciones de igualdad 683
  - 20.2.2 Restricciones de desigualdad. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 693
- Bibliografía 698

## **Capítulo 21 Algoritmos de programación no lineal 699**

- 21.1 Algoritmos no restringidos 699
  - 21.1.1 Método de búsqueda directa 699
  - 21.1.2 Método del gradiente 703
- 21.2 Algoritmos restringidos 706
  - 21.2.1 Programación separable 707
  - 21.2.2 Programación cuadrática 715
  - 21.2.3 Programación estocástica 720

21.2.4 Método de combinaciones lineales 724

21.2.5 Algoritmo SUMT 726

Bibliografía 727

**Apéndice A Tablas estadísticas 729**

**Apéndice B Respuestas parciales a problemas seleccionados 733**

**Índice 779**

# Material disponible en el sitio web de este libro (en inglés)

([www.pearsoneducacion.net/taha](http://www.pearsoneducacion.net/taha))

## **Chapter 22 Additional Network and LP Algorithms 22.1**

- 22.1 Minimum-Cost Capacitated Flow Problem 22.1
  - 22.1.1 Network Representation 22.1
  - 22.1.2 Linear Programming Formulation 22.4
  - 22.1.3 Capacitated Network Simplex Algorithm 22.9
- 22.2 Decomposition Algorithm 22.20
- 22.3 Karmarkar Interior-Point Method 22.29
  - 22.3.1 Basic Idea of the Interior-Point Algorithm 22.30
  - 22.3.2 Interior-Point Algorithm 22.31
- Bibliography 22.40

## **Chapter 23 Forecasting Models 23.1**

- 23.1 Moving Average Technique 23.1
- 23.2 Exponential Smoothing 23.5
- 23.3 Regression 23.6
- References 23.10

## **Chapter 24 Probabilistic Dynamic Programming 24.1**

- 24.1 A Game of Chance 24.1
- 24.2 Investment Problem 24.4
- 24.3 Maximization of the Event of Achieving a Goal 24.8
- References 24.11

## **Chapter 25 Markovian Decision Process 25.1**

- 25.1 Scope of the Markovian Decision Problem 25.1
- 25.2 Finite-Stage Dynamic Programming Model 25.3
- 25.3 Infinite-Stage Model 25.7
  - 25.3.1 Exhaustive Enumeration Method 25.7
  - 25.3.2 Policy Iteration Method without Discounting 25.10
  - 25.3.3 Policy Iteration Method with Discounting 25.13
- 25.4 Linear Programming Solution 25.16
- References 25.20

## **Chapter 26 Case Analysis 26.1**

- Case 1: Airline Fuel Allocation Using Optimum Tankering 26.2
- Case 2: Optimization of Heart Valves Production 26.9
- Case 3: Scheduling Appointments at Australian Tourist Commission Trade Events 26.12
- Case 4: Saving Federal Travel Dollars 26.16
- Case 5: Optimal Ship Routing and Personnel Assignment for Naval Recruitment in Thailand 26.20
- Case 6: Allocation of Operating Room Time in Mount Sinai Hospital 26.26
- Case 7: Optimizing Trailer Payloads at PFG Building Glass 26.30
- Case 8: Optimization of Crosscutting and Log Allocation at Weyerhaeuser 26.36
- Case 9: Layout Planning for a Computer Integrated Manufacturing (CIM) Facility 26.41
- Case 10: Booking Limits in Hotel Reservations 26.48
- Case 11: Casey's Problem: Interpreting and Evaluating a New Test 26.51
- Case 12: Ordering Golfers on the Final Day of Ryder Cup Matches 26.54
- Case 13: Inventory Decisions in Dell's Supply Chain 26.56
- Case 14: Analysis of an Internal Transport System in a Manufacturing Plant 26.59
- Case 15: Telephone Sales Manpower Planning at Qantas Airways 26.62

## **Appendix C AMPL Modeling Language C.1**

- C.1 Rudimentary AMPL Model C.1
- C.2 Components of AMPL Model C.2
- C.3 Mathematical Expressions and Computed Parameters C.11
- C.4 Subsets and Indexed Sets C.13
- C.5 Accessing External Files C.16
- C.6 Interactive Commands C.24
- C.7 Iterative and Conditional Execution of AMPL Commands C.26
- C.8 Sensitivity Analysis using AMPL C.27
- C.9 Selected AMPL Models C.28
- Bibliography C.40

**Appendix D Review of Vectors and Matrices D.1**

D.1 Vectors *D.1*

D.2 Matrices *D.2*

D.3 Quadratic Forms *D.13*

D.4 Convex and Concave Functions *D.15*

Problems *D.15*

Selected References *D.16*

**Appendix E Case Studies E.1**

# Categorización por herramienta de los archivos en el sitio web\*

## **AMPL:**

- Modelo de asignación, *AppenCFiles*
- Programación de citas, *ch26Files*
- Programación de metas (interactiva), *AppenCFiles*
- Modelos de programación entera
  - Algoritmo de ramificación y acotamiento (interactivo), *AppenCFiles*
  - Secuenciación de trabajos, *AppenCFiles*
  - Planificación de personal de ventas por teléfono en Qantas, *ch26Files*
  - Hospital Monte Sinaí, *ch26Files*
  - Optimización de PGF Glass, *ch26Files*
  - Cobertura de conjuntos, *AppenCFiles*
  - Organización de rutas marítimas, *ch26Files*
- Modelos de programación lineal
  - Programación de autobuses, *ch2Files*
  - Almacenamiento de combustible, *ch26Files*
  - Producción de válvulas cardíacas, *ch26Files*
  - Modelo de Reddy Mikks, *AppenCFiles*
  - Renovación urbana, *AppenCFiles*
- Modelos de programación no lineal
  - EOQ con limitación, *AppenCFiles*
  - PNL, *AppenCFiles*
- Modelos de red
  - CPM, *AppenCFiles*
  - Flujo máximo, *AppenCFiles*
  - Red capacitada de costo mínimo, *AppenCFiles*
  - Ruta más corta, *AppenCFiles*
- Modelo de transporte, *AppenCFiles*
- Problema del agente viajero (TSP)
  - Ramificación y acotamiento (interactivo), *AppenCFiles*
  - Plano de corte, *AppenCFiles*

## **Excel:**

- Proceso de jerarquía analítica (PJA), *ch15Files*
- Probabilidades de Bayes, *ch15Files*
- Decisiones bajo incertidumbre, *ch15Files*

\*Todo el material incluido en el sitio web se encuentra en idioma inglés.

Métodos de búsqueda

- Dicótomo, *ch21Files*
- Sección dorada, *ch21Files*
- Newton-Raphson, *ch20Files*

Heurística

- Vecino más cercano en el problema del agente viajero (TSP), *ch11Files*
- Caminata aleatoria, *ch11Files*
- Inversiones en el problema del agente viajero (TSP), *ch11Files*

Elaboración de histogramas, *ch23Files*

Inventario

- Revisión continua, *ch16Files*
- Cantidad de pedido económica (EOQ), *ch11Files*
- PD general, *ch11Files*
- PD de Wagner-Whitin, *ch11Files*
- Heurística de Silver-Meal, *ch11Files*

Problema de la mochila, PD, *ch10Files*

Manipulación de matrices, *AppendFiles*

Cadenas de Markov

- Probabilidades absolutas, *ch17Files*
- Probabilidades de absorción, *ch17Files*
- Tiempo de primer paso, *ch17Files*
- Matriz de transición en  $n$  pasos, *ch17Files*
- Probabilidades de estado estable, *ch17Files*

Metaheurística

- PLE, tabú, *ch11Files*
- PLE, genética, *ch11Files*

PLE de recocido simulado, *ch11Files*

Técnica del promedio móvil, *ch23Files*

Colas

- Poisson, *ch18Files*
- Fórmula de P-K, *ch18Files*

Regresión, *ch23Files*

Simulación

- Montecarlo (área de un círculo), *ch19Files*
- Cola de un solo servidor, *ch9Files*
- Cola de varios servidores, *ch19Files*
- Generador de números aleatorios, *ch19Files*
- Método regenerativo (ciclos), *ch19Files*

Tablas estadísticas, "electrónicas", *ch14Files*

TSP (Agente viajero)

- Metaheurística. *Vea Metaheurística*
- Heurística. *Vea Heurística*

**Solver:**

Modelo de inventario de cantidad de pedido económica (EOQ) con limitación, *ch11Files*

Programación entera de ramificación y acotamiento, *ch9Files*

- Modelos de programación lineal
  - TOYCO, *ch3Files, ch3Files*
  - Reddy Mikks, *ch3Files*
  - Análisis de sensibilidad, *ch3Files*
  - Renovación urbana, *ch2Files*
- Modelos de red
  - Flujo máximo, *ch6Files*
  - Red capacitada de costo mínimo, *ch22Files*
  - Ruta más corta, *ch6Files*
- Programación cuadrática, *ch21Files*
- Programación estocástica, *ch21Files*

**Tora:**

- Reemplazo de equipo, *ch5Files*
- Modelos de programación entera
  - Ramificación y acotamiento, *ch9Files*
  - Presupuesto de capital, *ch9Files*
  - Cobertura de conjuntos, *ch9Files*
  - Cargo fijo, *ch9Files*
  - Uno - u - otro, Si - entonces, *ch9Files*
  - Cortes en TSP, *ch9Files*
- Modelos de programación lineal
  - Variables acotadas, *ch7Files*
  - Dieta, *ch2Files*
  - Diet, *ch2Files*
  - método *M*, *ch3Files*
  - Reddy Mikks, *ch2Files*
  - Análisis de sensibilidad, *ch3Files*
  - TOYCO, *ch3Files*
- Modelos de red
- CPM (Método de la ruta crítica), *ch6Files*
  - Flujo máximo, *ch6Files*
  - PERT (Técnica de evaluación y revisión de programas), *ch6Files*
  - Ruta más corta, *ch6Files*
- Modelos de colas (Poisson), *ch18Files*
- Modelo de transporte, *ch5Files*
- Juegos de suma cero, *ch15Files*

# Lo nuevo en esta edición

Esta novena edición contiene, de manera más concisa que las anteriores, tanto el texto como el software de apoyo, con el fin de que el lector se enfoque de lleno en la puesta en ejecución algorítmica y práctica de las técnicas de investigación de operaciones.

- La nueva sección 3.7 constituye un amplio encuadre (sin necesidad de utilizar matemáticas) de cómo los diferentes algoritmos de PL, programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y de punto interior) se ponen en ejecución en códigos comerciales (por ejemplo CPLEX y XPRESS) para incrementar la velocidad de cómputo y precisión necesarias para resolver problemas muy grandes.
- El nuevo capítulo 10 se ocupa de la heurística y la metaheurística diseñadas para obtener buenas soluciones aproximadas a problemas de programación entera y combinatoria. La necesidad de la heurística y la metaheurística es un reconocimiento del hecho de que el desempeño de los algoritmos exactos ha sido menos satisfactorio desde el punto de vista computacional.
- El nuevo capítulo 11 está dedicado al importante problema del agente viajero. Incluye varias aplicaciones y el desarrollo de algoritmos de solución heurísticos y exactos.
- Todos los algoritmos de los nuevos capítulos 10 y 11 se codificaron en Excel para permitir una conveniente experimentación interactiva con los modelos.
- Todos los modelos AMPL se movieron al apéndice C\* para complementar las reglas sintácticas de AMPL presentadas en el apéndice. Los modelos aparecen oportunamente en el libro con sus respectivas referencias.
- A lo largo del libro se agregaron numerosos problemas nuevos.
- Se actualizó el software TORA.
- Con el fin de mantener una cantidad razonable de páginas impresas, hemos pasado al sitio web\* parte del material, entre el que se incluye el apéndice AMPL.

\* Todo el material incluido en el sitio web se encuentra en idioma inglés.

# Agradecimientos

Pearson agradece a los profesores usuarios de esta obra y a los centros de estudio su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Investigación de operaciones*.

## ARGENTINA

**Marisa Raquel De Giusti**  
**María Teresa Guardarucci**  
*Universidad Nacional de La Plata*

## MÉXICO CIUDAD DE MÉXICO

**Guillermo Márquez Arreguín**  
*Escuela Superior de Computación (ESCOM)*  
*Instituto Politécnico Nacional*

**Jorge Herrera Ayala**  
*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)*  
*Instituto Politécnico Nacional*

**Alejandra Alcántara Pacheco**  
**Araceli Guerrero Huerta**  
**Domingo González Zúñiga**  
**Erasto Víctor Vergara Nava**  
**Fidel Cisneros Molina**  
**José Luis Arvizuo Rivera**  
**Luis Chávez García**  
**Manuel Roberto Montes de Ortiz**  
**María Mayra Vázquez Jiménez**  
**Pedro Azuara Rodríguez**  
*Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales  
y Administrativas (UPIICSA)*  
*Instituto Politécnico Nacional*

**Claudia Gómez Wulschner**  
**Edgar Possani Espinosa**  
**Miguel de Lascuráin Morhan**  
*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*

**Luis Moncayo**

*Instituto Tecnológico Autónomo de México  
Campus Ciudad de México*

**Eric Porras Musalem**

**Lino A. Notarantonio**

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey  
Campus Santa Fe*

**Raúl Chávez**

*Universidad Anáhuac del Sur*

**Adolfo Miguel Castro Gómez**

**Gema Esther González Flores**

**José Luis Ruz D.**

*Facultad de Contaduría y Administración  
Universidad Nacional Autónoma de México*

**Armando Popoca Flores**

**Daniel Hadad Cartas**

**Manuel Fuentes Ruiz**

**Miguel Ángel Aguirre Pitol**

*Facultad de Economía  
Universidad Nacional Autónoma de México*

**Bonifacio Román Tapia**

**Eduardo Alejandro Hernández González**

**Efraín Ramos Trejo**

**Leonardo Bañuelos Saucedo**

*Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México*

**Cuahtémoc Tenopala Granados**

*Universidad La Salle*

**ESTADO DE MÉXICO**

**Ángel Díaz Pineda**

**Arizbel Bailón Salgado**

**Jeanette López Alanís**

**Francisco Quiroz Aguilar**

**María de la Luz Dávila Flores**

**Mario Luis Chew Hernández**

*Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco*

**Martha Eugenia Limón Hernández**

**Rodolfo Flores Pineda**

*Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli*

**Ciria Salinas López**

**Jorge Coria**

**Martha Chapa Plata**

**Víctor Jiménez Guido**

*Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec*

**Francisco Franco Urzúa**

**Jesús Avendaño Martínez**

*Instituto Tecnológico de Tlalnepantla*

**Martha Beatriz Martínez Ponce**

*Instituto Tecnológico de Toluca*

**Eduardo Díaz**

**Luis E. Herrera**

**Manuel Álvarez Madrigal**

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*

*Campus Estado de México*

**Karla Valenzuela**

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*

*Campus Toluca*

**Fernando López Solís**

**Gastón Vértiz Camarón**

**Mónica Marina Mondragón Ixtlah**

*Facultad de Ingeniería*

*Universidad Autónoma del Estado de México*

*Campus Toluca*

**Raúl Arreguín Bustamante**

*Universidad del Valle de México*

*Campus Toluca*

**Jorge Luis Suárez Madariaga**

**Florentino Almida Martínez**

*Facultad de Estudios Superiores Acatlán*

*Universidad Nacional Autónoma de México*

**Andrés Gutiérrez Bárcenas**

**José Isaac Sánchez Guerra**

**Marco Antonio Hernández**

*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán*

*Universidad Nacional Autónoma de México*

## **GUANAJUATO**

**José Luis Laguna**

*Escuela Profesional de Comercio y Administración*

**Antonio Murillo Montoya**  
**Francisco Rodríguez S.**  
**Hugo Carrillo Rodríguez**  
**José Alfredo Jiménez García**  
**José Francisco Rodríguez Silva**  
**José Luis Martínez Pichardo**  
**Juan Antonio Sillero Pérez**  
*Instituto Tecnológico de Celaya*

**José Enrique González Martínez**  
*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*  
*Campus León*

**Ricardo Zúñiga Almanza**  
*Universidad de Celaya*

**Mario Cruz Alcaraz**  
*Universidad de León*

**Fernando Gómez Guerra**  
**Jorge Velázquez Centeno**  
*Universidad Iberoamericana, León*

## **PUEBLA**

**Juan Carlos Ruiz Arenas**  
*Universidad de Las Américas*

**Carlos Gerardo Díaz Marín**  
**Guillermo Francisco López Torres**  
**María del Pilar León Franco**  
*Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla*

## **SAN LUIS POTOSÍ**

**Julio César González Martínez**  
*Universidad del Valle de México*  
*Campus San Luis Potosí*

## **SINALOA**

**Raúl Soto**  
*Universidad de Occidente*  
*Unidad Culiacán*

# Reconocimientos

Quiero reconocer la importancia de las revisiones realizadas a la novena edición por los profesores Yahya Fathi (NCSU), Marc E. Posner (Ohio State University), Charu Chandra (University of Michigan, Dearbon), Yasser Hosni (University of Central Florida), M. Jeya Chandra (Penn State University) y Manbir Sodhi (Rhode Island University).

Como siempre, sigo en deuda con mis amigos y colegas por su continuo apoyo durante tantos años: John Ballard (University of Nebraska, Lincoln), David Elizandro (Tennessee Tech University), Rafael Gutiérrez (University of Texas, El Paso), José Pablo Nuño de la Parra (Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla), y Jung-Fu Tsai (National Taipei University of Technology).

Deseo expresar mi aprecio al personal de editorial y de producción de Pearson por su ayuda durante la producción de esta edición.

HAMDY A. TAHA  
hat@uark.edu

## Acerca del autor



**Hamdy A. Taha** es profesor emérito de ingeniería industrial en la University of Arkansas, donde enseña, investiga y simula operaciones. Es autor de otros tres libros sobre programación y simulación, los cuales se han traducido a varios idiomas. También es autor de varios capítulos de libros, y sus artículos técnicos han aparecido en revistas como *European Journal of Operations Research*, *IEEE Transactions on Reliability*, *IIE Transactions*, *Interfaces*, *Management Science*, *Naval Research Logistics Quarterly*, *Operations Research* y *Simulation*. El profesor Taha recibió el premio Alumni por excelencia en investigación y el premio Nadine Baum por excelencia en la enseñanza, ambos por parte de la University of Arkansas, así como otros

premios por investigación y enseñanza del Colegio de Ingeniería de esta misma universidad. También recibió el nombramiento de becario Fulbright Senior de la Universidad Carlos III de Madrid, España. Domina tres idiomas y se ha desempeñado como profesor y consultor en Europa, México y Medio Oriente.

# Marcas registradas

AMPL es una marca registrada de AMPL Optimization, LLC, 900 Sierra Place SE, Albuquerque, NM 87108-3379, EUA.

CPLEX es una marca registrada de ILOG, Inc., IBM Corporation, 1 New Orchard Road, Armonk, Nueva York, 10504 10504-1722.

KNITRO es una marca registrada de Ziena Optimization Inc., 1801 Maple Ave. Suite 6320, Evanston IL, 60201.

LOQO es una marca registrada de Princeton University, Princeton University, Princeton, NJ, 08544.

Microsoft es una marca registrada y Windows y Excel son marcas registradas de Microsoft Corporation, One Microsoft Way Redmond, WA, 98052-7329.

MINOS es una marca registrada de Stanford University, 450 Serra Mall, Stanford, CA 94305.

Solver es una marca registrada de Frontline Systems, Inc., P.O. Box 4288, Incline Village, NV 89450.

TORA es una marca registrada de Hamdy A. Taha.

# CAPÍTULO 1

## Qué es la investigación de operaciones

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Las primeras actividades formales de investigación de operaciones (IO) se iniciaron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando un equipo de científicos empezó a tomar decisiones con respecto a la mejor utilización del material bélico. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares se adaptaron para mejorar la eficiencia y productividad en el sector civil.

Este capítulo presenta la terminología básica de la IO, que comprende el modelado matemático, soluciones factibles, optimización y cálculos iterativos. Hace hincapié en que la definición correcta del problema es la fase más importante (y más difícil) de practicar la IO. También se recalca que si bien el modelado matemático es la piedra angular de la IO, en la decisión final se deben tomar en cuenta factores incuantificables, como el comportamiento humano, por ejemplo. El libro presenta varias aplicaciones que utilizan ejemplos resueltos y problemas específicos.\*

### 1.2 MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Imagine que tiene un compromiso de negocios que requiere 5 semanas de traslado continuo entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Sale de Fayetteville los lunes y regresa los miércoles. Un boleto regular de viaje redondo cuesta \$400, pero se ofrece 20% de descuento si el viaje redondo comprende un fin de semana. Un boleto sencillo en cualquier dirección cuesta 75% del precio regular. ¿Cómo debe comprar los boletos para reducir el costo del traslado durante las 5 semanas?

\*En el sitio web de este libro encontrará el capítulo 26 (en inglés), el cual está dedicado por completo a la presentación del análisis de casos totalmente desarrollados.

Podemos considerar la situación como un problema de toma de decisiones, cuya solución requiere responder tres preguntas:

1. ¿Cuáles son las **alternativas** de decisión?
2. ¿Conforme a qué restricciones se toma la decisión?
3. ¿Cuál es el **criterio objetivo** apropiado para evaluar las alternativas?

Se consideran tres **alternativas** razonables:

1. Comprar cinco boletos normales FYV-DEN-FYV para salir el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.
2. Comprar un boleto FYV-DEN, cuatro DEN-FYV-DEN que abarquen fines de semana, y uno DEN-FYV.
3. Comprar un boleto FYV-DEN-FYV para el lunes de la primera semana y el miércoles de la última semana, y cuatro DEN-FYV-DEN para los viajes restantes. Todos los boletos en esta alternativa cubren por lo menos un fin de semana.

La **restricción** en estas opciones es que pueda salir de FYV el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.

Un **criterio objetivo** obvio para evaluar la alternativa propuesta es el precio de los boletos. La alternativa que dé el costo mínimo será la mejor. Específicamente, tenemos:

$$\text{Costo de la alternativa 1} = 5 \times 400 = \$2000$$

$$\text{Costo de la alternativa 2} = .75 \times 400 + 4 \times (.8 \times 400) + .75 \times 400 = \$1880$$

$$\text{Costo de la alternativa 3} = 5 \times (.8 \times 400) = \$1600$$

La alternativa 3 es la mejor porque es la más económica.

Aunque el ejemplo anterior ilustra los tres componentes principales de un modelo de IO, los cuales son: **alternativas**, **criterio objetivo** y **restricciones**, las situaciones difieren por los detalles de la construcción de cada componente y la solución del modelo resultante. Para ilustrar este punto, considere la formación de un rectángulo de área máxima con un trozo de alambre de  $L$  pulgadas de longitud. ¿Cuál será el mejor ancho y altura del rectángulo?

En contraste con el ejemplo de los boletos, el número de alternativas en este ejemplo no es finito; es decir, el ancho y la altura del rectángulo pueden asumir una cantidad infinita de valores porque son variables continuas. Para formalizar esta observación, las alternativas del problema se identifican definiendo el ancho y la altura como variables algebraicas

$$w = \text{ancho del rectángulo en pulgadas,}$$

$$h = \text{altura del rectángulo en pulgadas.}$$

Con base en estas definiciones, las restricciones de la situación pueden expresarse verbalmente como

1. Ancho del rectángulo + altura del rectángulo = la mitad de la longitud del alambre.
2. El ancho y la altura no pueden ser negativos.

Estas restricciones se traducen de manera algebraica como sigue

1.  $2(w + h) = L$
2.  $w \geq 0, h \geq 0$

Ahora el único componente restante es el objetivo del problema; es decir, maximizar el área del rectángulo. Si  $z$  se define como el área del rectángulo, el modelo completo es

$$\text{Maximizar } z = wh$$

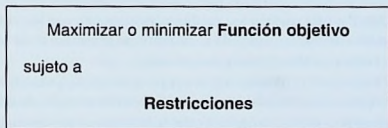
sujeito a

$$2(w + h) = L$$

$$w, h \geq 0$$

Utilizando cálculo diferencial, la mejor solución de este modelo es  $w = h = \frac{L}{4}$ , la cual requiere la construcción de una forma cuadrada.

Con los datos de los dos ejemplos anteriores, el modelo general de IO se organiza en el siguiente formato general:



Una solución del modelo es **factible** si satisface todas las restricciones; es **óptima** si, además de ser factible, produce el mejor valor (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el ejemplo de los boletos, el problema considera tres alternativas factibles, y la tercera es la que produce la solución óptima. En el problema del rectángulo, una alternativa factible debe satisfacer la condición  $w + h = \frac{L}{2}$ , donde  $w$  y  $h$  son variables no negativas. Esta definición conduce a una infinidad de soluciones factibles y, a diferencia del problema de los boletos, el cual utiliza una sencilla comparación de precios, la solución óptima se determina aplicando cálculo diferencial.

Aunque los modelos de IO están diseñados para “optimizar” un criterio objetivo específico sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución resultante depende de la exactitud con que el modelo representa el sistema real. Considere, por ejemplo, el modelo de los boletos. Si no se identifican *todas* las alternativas dominantes para comprar los boletos, entonces la solución resultante es óptima sólo en relación con las opciones representadas en el modelo. Específicamente, si se omite la alternativa 3 en el modelo, entonces la solución “óptima” requeriría que se compraran los boletos en \$1880, la cual es una solución **subóptima**. La conclusión es que “la” solución óptima de un modelo es mejor sólo para ese modelo. Si el modelo es una representación razonablemente buena del sistema real, entonces su solución también es óptima para la situación real.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 1.2A<sup>1</sup>

1. En el ejemplo de los boletos, identifique una cuarta alternativa factible.
2. En el problema del rectángulo, identifique dos soluciones factibles, e indique cuál es la mejor.
3. Determine la solución óptima del problema del rectángulo (*Sugerencia:* Aplique la restricción para expresar la función objetivo respecto de una variable, luego utilice cálculo diferencial).
4. Amy, Jim, John y Kelly están en la ribera de un río y desean cruzar a la ribera opuesta en una canoa, la cual sólo puede llevar dos personas a la vez. Como Amy es la más atlética, puede cruzar el río remando en 1 minuto. Jim, John y Kelly lo harían en 2, 5 y 10 minutos, respectivamente. Si dos personas están en la canoa, la persona más lenta determina el tiempo de cruce. El objetivo es que las cuatro personas estén en la ribera opuesta en el menor tiempo posible.
  - (a) Identifique por los menos dos planes factibles para cruzar el río (recuerde que la canoa es el único medio de transporte y que no puede viajar vacía).
  - (b) Defina el criterio para evaluar las alternativas.
  - \*(c) ¿Cuál es el menor tiempo para llevar a las cuatro personas al otro lado del río?
- \*5. En un juego de béisbol, Jim es el lanzador y Joe es el bateador. Suponga que Jim puede lanzar una bola rápida o una curva al azar. Si Joe predice correctamente una curva, puede mantener un promedio de bateo de .500; de otra manera, si Jim lanza una curva y Joe está preparado para una bola rápida, su promedio de bateo se mantiene por debajo de .200. Por otra parte, si Joe predice correctamente una bola rápida, mantiene un promedio de bateo de .300, de lo contrario su promedio es de sólo .100.
  - (a) Defina las alternativas para este caso.
  - (b) Determine la función objetivo para el problema, y describa en qué difiere de la optimización común (maximización o minimización) de un criterio.
6. Durante la construcción de una casa, se deben recortar seis viguetas de 24 pies cada una a la longitud correcta de 23 pies. La operación de recortar una vigueta implica la siguiente secuencia:

Operación	Tiempo (segundos)
1. Colocar la vigueta en caballetes de aserrar	15
2. Medir la longitud correcta (23 pies)	5
3. Marcar la línea de corte para la sierra circular	5
4. Recortar la vigueta a la longitud correcta	20
5. Apilar las viguetas recortadas en un área designada	20

Intervienen tres personas: Dos deben realizar al mismo tiempo las operaciones 1, 2 y 5, y un cortador se ocupa de las operaciones 3 y 4. Hay dos pares de caballetes de aserrar donde se colocan las viguetas sin recortar, y cada par puede manejar tres viguetas. Sugiera un buen plan para recortar las seis viguetas.

7. Se construye una pirámide (bidimensional) en cuatro capas. La capa inferior se compone de los puntos (equidistantes) 1, 2, 3 y 4; la siguiente incluye los puntos 5, 6 y 7; la tercera comprende los puntos 8 y 9, y la superior el punto 10. Lo que se quiere es invertir la

<sup>1</sup> Un asterisco antes del número señala problemas cuya solución aparece en el Apéndice B.

pirámide (que la capa inferior incluya un punto y la superior cuatro) cambiando de lugar los puntos.

- (a) Identifique dos soluciones factibles.
  - (b) Determine el número mínimo de movimientos necesarios para invertir la pirámide.<sup>2</sup>
8. Cuenta con cuatro cadenas y cada una consta de tres eslabones sólidos. Tiene que hacer un brazaletе conectando las cuatro cadenas; romper un eslabón cuesta 2 centavos, y volverlo a soldar 3 centavos.
- (a) Identifique dos soluciones factibles y evalúelas.
  - (b) Determine el costo mínimo para hacer el brazaletе.
9. Los cuadros de una tabla rectangular de 11 filas y 9 columnas están numerados en secuencia del 1 al 99 con una recompensa monetaria *oculta* de entre 0 y 20 dólares, asignada a cada cuadro. El juego consiste en que un jugador elige un cuadrado seleccionando cualquier número de dos dígitos y luego restando al número seleccionado la suma de sus dos dígitos. El jugador recibe entonces la recompensa asignada al cuadro seleccionado. Sin importar cuántas veces se repita el juego, ¿qué valores monetarios deben asignarse a los 99 cuadros para minimizar la recompensa de los jugadores? Para hacer el juego interesante, asignar \$0 a *todos* los cuadros no es una opción.

### 1.3 SOLUCIÓN DEL MODELO DE IO

En la investigación de operaciones no se cuenta con una técnica general única para resolver todos los modelos que puedan surgir en la práctica. En su lugar, el tipo y complejidad del modelo matemático determina la naturaleza del método de solución. Por ejemplo, en la sección 1.2 la solución del problema de los boletos requiere una clasificación simple de las alternativas, basada en el precio de la compra total, mientras que la solución del problema del rectángulo utiliza cálculo diferencial para determinar el área máxima.

La técnica de IO más importante es la **programación lineal**. Está diseñada para modelos con funciones objetivo y restricciones lineales. Otras técnicas incluyen la **programación entera** (en la cual las variables asumen valores enteros), la **programación dinámica** (en la cual el modelo original puede descomponerse en subproblemas más pequeños y manejables), la **programación de red** (en la cual el problema puede modelarse como una red), y la **programación no lineal** (en la cual las funciones del modelo son no lineales). Éstas son sólo algunas de las muchas herramientas de IO con que se cuenta.

Una peculiaridad de la mayoría de las técnicas de IO es que por lo general las soluciones no se obtienen en formas cerradas (como si fueran fórmulas), sino que más bien se determinan mediante **algoritmos**. Un algoritmo proporciona reglas fijas de cálculo que se aplican en forma repetitiva al problema, y cada repetición (llamada **iteración**) acerca la solución a lo óptimo. Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es recomendable que estos algoritmos se ejecuten con la computadora.

Algunos modelos matemáticos pueden ser tan complejos que es imposible resolverlos con cualquiera de los algoritmos de optimización disponibles. En esos casos quizá sea necesario abandonar la búsqueda de la solución *óptima* y simplemente buscar una *buen*a solución aplicando la **heurística**, y la **metaheurística**, o bien *reglas empíricas*.

<sup>2</sup> Los problemas 7 y 8 se tomaron y compendiaron de Bruce Goldstein, *Cognitive Psychology: Mind, Research, and Everyday Experience*, Wadsworth Publishing, 2005.

## 1.4 MODELOS DE COLAS Y SIMULACIÓN

Las colas y la simulación estudian las líneas de espera. No son técnicas de optimización; más bien determinan medidas de desempeño de las líneas de espera, como tiempo de espera promedio en la cola, tiempo de espera promedio para el servicio, y el uso de las instalaciones de servicio.

Los modelos de colas utilizan modelos probabilísticos y estocásticos para analizar líneas de espera, y la simulación estima las medidas de desempeño al imitar el comportamiento del sistema real. De cierto modo, la simulación tiene ventajas para observar un sistema real, ya que la diferencia principal entre las colas y la simulación es que los modelos de colas son puramente matemáticos y, en consecuencia, están sujetos a hipótesis específicas que limitan el alcance de su aplicación. La simulación, por otra parte, es flexible y puede utilizarse para analizar prácticamente cualquier situación de colas.

El uso de la simulación no está exento de inconvenientes. El proceso de desarrollar modelos de simulación es costoso, tanto en tiempo como en recursos; además la ejecución de los modelos de simulación suele ser lenta, aun con la computadora más rápida.

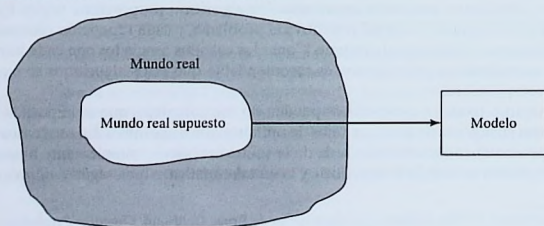
## 1.5 EL ARTE DEL MODELADO

Los modelos desarrollados en la sección 1.1 son representaciones exactas de situaciones reales. Esto es raro en la IO, ya que la mayoría de las aplicaciones suelen implicar diversos grados de aproximación. La figura 1.1 ilustra los niveles de abstracción que caracterizan el desarrollo de un modelo de IO. Abstraemos de la situación real el mundo real supuesto al concentrarnos en las variables dominantes que controlan el comportamiento del sistema real. El modelo expresa de una manera razonable las funciones matemáticas que representan el comportamiento del mundo real supuesto.

Para ilustrar los niveles de abstracción en el modelado, considere la Tyko Manufacturing Company, donde se producen varios recipientes de plástico. Cuando se emite una orden de producción al departamento de producción, las materias primas necesarias se toman de las existencias de la compañía o se adquieren con proveedores

FIGURA 1.1

Niveles de abstracción en el desarrollo de un modelo



externos. Una vez que se completa un lote de producción, el departamento de ventas se encarga de distribuir el producto a los clientes.

Una pregunta lógica al analizar la situación de Tyko es la determinación del tamaño de un lote de producción. ¿Cómo puede un modelo representar esta situación?

Al examinar todo el sistema se ve que algunas variables pueden incidir directamente en el nivel de producción, incluida la siguiente lista (parcial) clasificada por departamentos.

1. *Departamento de producción:* Capacidad de producción expresada en función de las horas de mano de obra y máquina disponibles, inventario en proceso y normas de control de calidad.
2. *Departamento de materiales:* Existencias disponibles de materias primas, programas de entrega de proveedores externos y limitaciones de almacenamiento.
3. *Departamento de ventas:* Pronóstico de ventas, capacidad de las instalaciones de distribución, eficacia de las campañas publicitarias y el efecto de la competencia.

Cada una de estas variables afecta el nivel de producción en Tyko. Sin embargo, es realmente difícil establecer relaciones funcionales explícitas entre ellas y el nivel de producción.

Un primer nivel de abstracción requiere definir los límites del mundo real supuesto. Reflexionando un poco, podemos aproximar el sistema real por medio de dos parámetros dominantes:

1. Tasa de producción.
2. Tasa de consumo.

La determinación de la tasa de producción implica variables como la capacidad de producción, las normas de control de calidad y la disponibilidad de las materias primas. Los datos de ventas determinan la tasa de consumo. En esencia, la simplificación a partir del mundo real al mundo real supuesto se logra “concentrando” varios parámetros del mundo real en un único parámetro del mundo real supuesto.

Ahora es más fácil abstraer un modelo desde el mundo real supuesto. Con las tasas de producción y consumo se pueden establecer medidas de exceso o escasez de inventario. Entonces el modelo abstraído puede construirse para equilibrar los costos conflictivos de exceso y escasez de inventario; es decir, para minimizar el costo total del inventario.

## 1.6 MÁS QUE SÓLO MATEMÁTICAS

Debido a la naturaleza matemática de los modelos de IO, tendemos a pensar que un estudio de investigación de operaciones *siempre* está enraizado en el análisis matemático. Aunque el modelado matemático es fundamental en la IO, primero se deben explorar métodos más sencillos. En algunos casos se puede obtener una solución de “sentido común” mediante observaciones sencillas. En realidad, como invariablemente el elemento humano afecta la mayoría de los problemas de decisión, un estudio de la psicología de las personas puede ser clave para resolver el problema. A continuación se presentan tres ejemplos que respaldan este argumento.

1. Al atender quejas sobre la lentitud de los elevadores en un gran edificio de oficinas, el equipo de IO percibió la situación en principio como un problema de línea de espera que podría requerir el uso del análisis matemático o la simulación de colas. Después de estudiar el comportamiento de las personas que se quejaron, el psicólogo del equipo sugirió que se instalaran espejos de cuerpo completo a la entrada de los elevadores. Como por milagro, las quejas desaparecieron, ya que las personas se mantenían ocupadas observándose a sí mismas y a las demás mientras esperaban el elevador.

2. En un estudio de los mostradores de documentación en un gran aeropuerto inglés, un equipo de consultores estadounidenses y canadienses utilizó la teoría de colas para investigar y analizar la situación. Una parte de la solución recomendaba utilizar letreros bien colocados que urgieran a los pasajeros cuya salida era en 20 minutos a que avanzaran al inicio de la cola y solicitaran el servicio de inmediato. La solución no tuvo éxito porque los pasajeros, en su mayoría británicos, estaban “condicionados a un comportamiento muy estricto en las colas” y, por consiguiente, se rehusaban a adelantarse a otros que esperaban en la cola.

3. En una fundidora de acero en India, primero se producen lingotes a partir del mineral de hierro, los cuales se utilizan después en la fabricación de varillas y vigas de acero. El gerente notó una gran demora entre la producción de los lingotes y su transferencia a la siguiente fase de fabricación (donde se elaboraban los productos finales). Idealmente, para reducir el costo de recalentamiento la fabricación debía comenzar en cuanto los lingotes salieran del horno. Al principio el problema se percibió como una situación de equilibrio de la línea de producción, el cual podría resolverse reduciendo la producción de lingotes o incrementando la capacidad del proceso de fabricación. El equipo de IO utilizó tablas sencillas para registrar la producción de los hornos durante los tres turnos del día. Se descubrió que aun cuando el tercer turno comenzaba a las 11:00 P.M., la mayoría de los lingotes se producían entre las 2:00 y las 7:00 A.M. Una investigación más a fondo reveló que los operadores del turno preferían descansar más al principio del turno y luego compensar durante la madrugada la producción perdida. El problema se resolvió “nivelando” la producción de los lingotes a lo largo del turno.

De estos ejemplos se pueden sacar tres conclusiones:

1. Antes de aventurarse en un complicado modelado matemático, el equipo de IO debe explorar la posibilidad de utilizar ideas “agresivas” para resolver la situación. La solución del problema de los elevadores con la instalación de espejos se basó en la psicología humana más que en el modelado matemático. También es más sencilla y menos costosa que cualquier recomendación que un modelo matemático pudiera haber producido. Quizás esta sea la razón de que los equipos de investigación de operaciones suelen recurrir a los conocimientos de personas “externas” que se desempeñan en campos no matemáticos (el psicológico en el caso del problema de los elevadores). Este punto fue aceptado y ejecutado por el primer equipo de IO en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial.

2. Las soluciones se originan en las personas y no en la tecnología. Cualquier solución que no tome en cuenta el comportamiento humano probablemente falle. Aun cuando la solución matemática del problema del aeropuerto británico pudo haber sido

razonable, el hecho de que el equipo consultor no se percatara de las diferencias culturales entre los Estados Unidos e Inglaterra (los estadounidenses y los canadienses tienden a ser menos formales) dio por resultado una recomendación que no se podía poner en práctica.

3. Un estudio de IO no debe iniciar con el prejuicio de utilizar una herramienta matemática específica antes de que se justifique su uso. Por ejemplo, como la programación lineal es una técnica exitosa, existe la tendencia de utilizarla para modelar “cualquier” situación. Esa forma de proceder suele conducir a un modelo matemático del todo alejado de la situación real. Por lo tanto, es imperativo que se analicen primero los datos disponibles aplicando las técnicas más simples siempre que sea posible (por ejemplo, promedios, gráficas e histogramas), para determinar el origen del problema. Una vez que se define el problema, puede decidirse cuál será la herramienta más apropiada para la solución.<sup>3</sup> En el problema de la fundidora de acero, todo lo que se necesitaba para aclarar la situación de la producción de lingotes era la elaboración de tablas sencillas.

## 1.7 FASES DE UN ESTUDIO DE IO

Los estudios de investigación de operaciones se basan en la *labor de equipo*, donde los analistas de IO y el cliente trabajan codo con codo. Los conocimientos de modelado de los analistas de IO se deben complementar con la experiencia y cooperación del cliente para quien realizan el estudio.

Como herramienta de toma de decisiones, la IO es tanto una ciencia como un arte. Es una ciencia por las técnicas matemáticas que incorpora, y un arte porque el éxito de las fases que conducen a la solución del modelo matemático depende en gran medida de la creatividad y experiencia del equipo de IO. Willemain (1994) manifiesta que “una práctica [de IO] eficaz requiere más que competencia analítica. También requiere, entre otros atributos, juicio técnico (es decir, cuándo y cómo utilizar una técnica dada), así como habilidades de comunicación y supervivencia organizacional”.

Es difícil prescribir cursos de acción específicos (semejantes a los que indica la teoría precisa de la mayoría de los modelos matemáticos) para estos factores intangibles. Sin embargo, podemos ofrecer lineamientos generales para la implementación de la IO en la práctica.

Para implementar la IO en la práctica, las fases principales son:

1. Definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de la solución.

<sup>3</sup> Decidir sobre un modelo matemático específico antes de justificar su uso es como “poner la carreta adelante del caballo”, y me recuerda la historia de un viajero aéreo frecuente, paranoico en cuanto a la posibilidad de una bomba terrorista a bordo del avión. Calculó la probabilidad de que semejante desgracia pudiera ocurrir, y aunque resultó muy pequeña no bastó para calmar su angustia. Desde entonces, siempre llevaba una bomba en su portafolio porque, según sus cálculos, ¡la probabilidad de que hubiera *dos* bombas a bordo era prácticamente cero!

La fase 3, que se ocupa de la *solución del modelo*, es la mejor definida y por lo general la más fácil de implementar en un estudio de IO, porque maneja principalmente modelos matemáticos precisos. La implementación de las fases restantes es más un arte que una teoría.

La **definición del problema** implica definir el alcance del problema investigado. Esta función debe ser realizada por todo el equipo de IO. El objetivo es identificar tres elementos principales del problema de decisión: (1) descripción de las alternativas de decisión; (2) determinación del objetivo del estudio, y (3) especificación de las limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.

La **construcción del modelo** implica un intento de transformar la definición del problema en relaciones matemáticas. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos estándar, como la programación lineal, se suele obtener una solución utilizando los algoritmos disponibles. Por otra parte, si las relaciones matemáticas son demasiado complejas como para permitir la determinación de una solución analítica, el equipo de IO puede optar por simplificar el modelo y utilizar un método heurístico, o bien considerar la simulación, si es lo apropiado. En algunos casos, una simulación matemática puede combinarse con modelos heurísticos para resolver el problema de decisión, como lo demuestran los análisis de casos del capítulo 26, que se encuentra en el sitio web.

La **solución del modelo** es por mucho la más sencilla de todas las fases de IO porque implica el uso de algoritmos de optimización bien definidos. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el *análisis de sensibilidad*. Tiene que ver con la obtención de información adicional sobre el comportamiento de la solución óptima cuando el modelo experimenta algunos cambios de parámetros. El análisis de sensibilidad es particularmente necesario cuando no se pueden estimar con precisión los parámetros del modelo. En estos casos es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en el entorno de los parámetros estimados.

La **validez del modelo** comprueba si el modelo propuesto hace en realidad lo que dice que hace, es decir, ¿predice adecuadamente el comportamiento del sistema que se estudia? Al principio, el equipo de IO debe estar convencido de que el resultado del modelo no contenga "sorpresas". En otras palabras, ¿tiene sentido la solución? ¿Los resultados son intuitivamente aceptables? Del lado formal, un método común de comprobar la validez de un modelo es comparar su resultado con resultados históricos. El modelo es válido si, en condiciones de datos de entrada iguales, reproduce de forma razonable el desempeño pasado. Sin embargo, no suele haber seguridad de que el desempeño futuro continuará copiando el comportamiento pasado. Además, como el modelo se basa en el examen cuidadoso de datos pasados, la comparación propuesta casi siempre es favorable. Si el modelo propuesto representara un sistema nuevo (inexistente), no habría datos históricos disponibles. En esos casos podemos utilizar la simulación como una herramienta independiente para comprobar el resultado del modelo matemático.

La **implementación** de la solución de un modelo validado implica la transformación de los resultados en instrucciones de operación comprensibles que se emitirán a las personas que administrarán el sistema recomendado. La responsabilidad de esta tarea recae principalmente en el equipo de IO.

## 1.8 ACERCA DE ESTE LIBRO

Morris (1967) afirma que "la enseñanza de los modelos no es lo mismo que la enseñanza del modelado". Tuve en cuenta esta importante aseveración durante la prepa-

ración de la novena edición, e hice todo el esfuerzo posible por presentar el arte del modelado en la IO con la inclusión de modelos realistas en el libro. Dada la importancia de los cálculos en la IO, el libro analiza la forma en que los algoritmos teóricos se acomodan en los códigos de computadoras comerciales (vea la sección 3.7). También presenta herramientas extensivas para realizar los cálculos, que van desde TORA orientado al aspecto tutorial, hasta los paquetes comerciales Excel, Excel Solver y AMPL.

La investigación de operaciones es tanto un arte como una ciencia; el arte de describir y modelar el problema, y la ciencia de resolver el modelo utilizando algoritmos matemáticos precisos. Un primer curso en la materia debe permitir al estudiante apreciar la importancia de ambas áreas. Esto proporcionará a los usuarios de IO la clase de confianza que normalmente no se obtendría si la capacitación se enfocara sólo en el aspecto artístico de la IO, con el pretexto que las computadoras pueden liberar al usuario de la necesidad de *entender* por qué funcionan los algoritmos de solución.

Las habilidades de modelado y cálculo pueden mejorarse por el estudio de los casos prácticos editados. Para ayudarle en este sentido, el capítulo 26 en el sitio web incluye 15 casos totalmente desarrollados y analizados que comprenden la mayor parte de los modelos de IO que se presentan en este libro. También se incluyen 50 casos basados en aplicaciones de la vida real en el apéndice E en el sitio web. Se dispone de más estudios de casos en periódicos y publicaciones. En particular, *Interfaces* (publicado por INFORMS) es una rica fuente de diversas aplicaciones de IO.

## BIBLIOGRAFÍA

- Altier, W., *The Thinking Manager's Toolbox: Effective Processes for Problem Solving and Decision Making*, Oxford University Press, Nueva York, 1999.
- Checkland, P., *Systems Thinking, System Practice*, Wiley, Nueva York, 1999.
- Evans, J., *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*, South-Western Publishing, Cincinnati, 1991.
- Gass, S., "Model World: Danger, Beware the User as a Modeler," *Interfaces*, vol. 20, núm. 3, págs. 60-64, 1990.
- Morris, W., "On the Art of Modeling", *Management Science*, vol. 13, págs. B707-B717, 1967.
- Paulos, J., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill and Wang, Nueva York, 1988.
- Singh, S., *Fermat's Enigma*, Walker, Nueva York, 1997.
- Willemain, T., "Insights on Modeling from a Dozen Experts", *Operations Research*, vol. 42, núm. 2, págs. 213-222, 1994.

# CAPÍTULO 2

## Modelado con programación lineal

---

### Aplicación de la vida real. Frontier Airlines adquiere combustible de una manera económica

La carga de combustible de un avión puede hacerse en cualquiera de las escalas a lo largo de una ruta de vuelo. El precio del combustible varía entre escalas y se pueden obtener ahorros potenciales cargando más combustible en un lugar más económico para usarlo en tramos de vuelo subsecuentes. La desventaja es que el peso adicional del combustible cargado hará que se consuma más gasolina. La programación lineal (PL) y la heurística se utilizan para determinar la cantidad óptima de carga de combustible que equilibre el costo del consumo excesivo frente a los ahorros en el costo del combustible. El estudio, realizado en 1981, arrojó ahorros netos de aproximadamente \$350,000 al año. El caso 1 en el capítulo 26 en el sitio web, proporciona los detalles del estudio. Es interesante que ahora, con el reciente aumento del costo del combustible, muchas aerolíneas estén utilizando software para adquirir combustible con base en la PL.

---

### 2.1 MODELO DE PL CON DOS VARIABLES

En esta sección analizaremos la solución gráfica de una programación lineal (PL) con dos variables. Aun cuando en la práctica difícilmente ocurren problemas de dos variables, el tratamiento proporciona fundamentos concretos para el desarrollo del algoritmo simplex general que se presenta en el capítulo 3.

---

#### Ejemplo 2.1-1 (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores con dos materias primas,  $M_1$  y  $M_2$ . La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Toneladas de materia prima por tonelada de		Disponibilidad diaria máxima (toneladas)
	Pintura para exteriores	Pintura para interiores	
Materia prima, $M_1$	6	4	24
Materia prima, $M_2$	1	2	6
Utilidad por tonelada (\$1000)	5	4	

---

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder la de pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, que la demanda diaria máxima de pintura para interiores es de dos toneladas.

Reddy Mikks se propone determinar la (mejor) combinación óptima de pinturas para interiores y exteriores que maximice la utilidad diaria total.

Todos los modelos de IO, incluido el de PL, constan de tres componentes básicos.

1. Las **variables** de decisión que pretendemos determinar.
2. El **objetivo** (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar).
3. Las **restricciones** que la solución debe satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Para el problema de Reddy Mikks necesitamos determinar las cantidades diarias que se deben producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como sigue:

$x_1$  = Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores

$x_2$  = Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores

La meta de Reddy Mikks es *maximizar* (es decir, incrementar lo más posible) la utilidad diaria de ambas pinturas. Los dos componentes de la utilidad diaria total se expresan en función de las variables  $x_1$  y  $x_2$  como sigue:

Utilidad de la pintura para exteriores =  $5x_1$  (en miles de dólares)

Utilidad de la pintura para interiores =  $4x_2$  (en miles de dólares)

Si  $z$  representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), el objetivo (o meta) de Reddy Mikks se expresa como sigue

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

A continuación definimos las restricciones que limitan el consumo de las materias primas y la demanda del producto. Las restricciones en las materias primas se expresan verbalmente como

$$\left( \begin{array}{l} \text{Consumo de una materia} \\ \text{prima por ambas pinturas} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{l} \text{Disponibilidad máxima} \\ \text{de materia prima} \end{array} \right)$$

El consumo diario de la materia prima  $M1$  es de 6 toneladas por tonelada de pintura para exteriores, y de 4 toneladas por tonelada de pintura para interiores. Por lo tanto

$$\text{Consumo de materia prima } M1 \text{ por ambas pinturas} = 6x_1 + 4x_2 \text{ toneladas/día}$$

Asimismo,

$$\text{Consumo de materia prima } M2 \text{ por ambas pinturas} = 1x_1 + 2x_2 \text{ toneladas/día}$$

Las disponibilidades diarias de las materias primas  $M1$  y  $M2$  son de 24 y 6 toneladas, respectivamente. Así pues, las restricciones en las materias primas son

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ (Materia prima } M1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ (Materia prima } M2)$$

La primera restricción en la demanda del producto estipula que la producción diaria de pintura para interiores no debe exceder a la de pintura para exteriores en más de 1 tonelada, lo cual se traduce en

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad (\text{Límite del mercado})$$

La segunda restricción limita la demanda diaria de pintura para interiores a 2 toneladas, es decir,

$$x_2 \leq 2 \quad (\text{Límite de la demanda})$$

Una restricción implícita (o "sobrentendida") requiere que todas las variables,  $x_1$  y  $x_2$ , asuman sólo valores positivos o cero. Las restricciones, expresadas como  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$  se conocen como **restricciones de no negatividad**.

El modelo completo de Reddy Mikks es

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

suje to a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Todos los valores de  $x_1$  y  $x_2$  que satisfacen las cinco restricciones constituyen una **solución factible**. De lo contrario la solución es **no factible**. Por ejemplo, la solución  $x_1 = 3$  toneladas por día y  $x_2 = 1$  tonelada por día es una solución factible porque no viola *ninguna* de las cinco restricciones. Este resultado se confirma sustituyendo ( $x_1 = 3, x_2 = 1$ ) en el lado izquierdo de cada restricción. En la restricción (1) tenemos  $6x_1 + 4x_2 = 6 \times 3 + 4 \times 1 = 22$ , la cual es menor que el lado derecho de la restricción ( $= 24$ ). Las restricciones 2 a 5 se comprueban de la misma manera (¡hágalo!). Por otra parte, la solución  $x_1 = 4$  y  $x_2 = 1$ , es no factible porque no satisface por lo menos una restricción, por ejemplo la restricción (1):  $6 \times 4 + 4 \times 1 = 28$ , la cual es mayor que el lado derecho ( $= 24$ ).

La meta del problema es determinar la solución **óptima**, es decir la mejor solución **factible** que maximice la utilidad total  $z$ . Primero utilizamos el método gráfico (sección 2.2) para demostrar que el problema de Reddy Mikks tiene una cantidad *infinita* de soluciones factibles, una propiedad compartida por todas las PL no triviales. Esto significa que el problema no puede ser resuelto por enumeración. En vez de eso, necesitamos un algoritmo que determine la solución óptima en una cantidad finita de pasos. El método gráfico en la sección 2.2, y su generalización algebraica en el capítulo 3, explican los detalles del algoritmo deseado.

**Comentarios.** El objetivo y la función de restricción en todas las PL deben ser lineales. Adicionalmente, todos los parámetros (coeficientes de las funciones objetivo y de restricción) del modelo se conocen con certeza.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.1A

- Para el modelo de Reddy Mikks, defina las siguientes restricciones y expréselas con un lado izquierdo lineal y un lado derecho constante:
  - La demanda diaria de pintura para interiores supera la de pintura para exteriores por *al menos* una tonelada.
  - El consumo diario de materia prima M2 en toneladas es *cuando mucho* de 6 y por *lo menos* de 3.

- \***(c)** La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la demanda de pintura para exteriores.
  - (d)** La cantidad mínima de pintura que debe producirse tanto para interiores como para exteriores es de 3 toneladas.
  - \***(e)** La proporción de pintura para interiores respecto de la producción total de pintura para interiores y exteriores no debe exceder de 5.
2. Determine la mejor solución *factible* entre las siguientes soluciones (factibles y no factibles) del modelo de Reddy Mikks:
- (a)**  $x_1 = 1, x_2 = 4$ .
  - (b)**  $x_1 = 2, x_2 = 2$ .
  - (c)**  $x_1 = 3, x_2 = 1.5$ .
  - (d)**  $x_1 = 2, x_2 = 1$ .
  - (e)**  $x_1 = 2, x_2 = -1$ .
- \*3. Para la solución factible  $x_1 = 2, x_2 = 2$  del modelo de Reddy Mikks, determine las cantidades no usadas de las materias primas  $M1$  y  $M2$ .
4. Suponga que Reddy Mikks vende su pintura para exteriores a un solo mayorista con un descuento. La utilidad por tonelada es de \$5000 si el contratista compra no más de 2 toneladas diarias, y de \$4500 en los demás casos. Expresar matemáticamente la función objetivo. ¿Es lineal la función resultante?

## 2.2 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA PL<sup>1</sup>

La solución gráfica incluye dos pasos:

1. Determinar el espacio de soluciones factibles.
2. Determinar la solución óptima de entre todos los puntos localizados en el espacio de soluciones.

A continuación se muestran dos ejemplos para mostrar cómo se manejan las funciones objetivo de maximización y minimización.

### 2.2.1 Solución de un modelo de maximización

---

#### Ejemplo 2.2-1

Este ejemplo resuelve el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.1-1.

#### Paso 1. Determinación del espacio de soluciones factibles.

Antes que nada, considere las restricciones de no negatividad  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ . En la figura 2.1, el eje horizontal  $x_1$  y el eje vertical  $x_2$  representan las variables de pintura para exteriores e interiores, respectivamente. Así pues, las restricciones de no negatividad limitan las variables al primer cuadrante (sobre el eje  $x_1$  y a la derecha del eje  $x_2$ ).

---

<sup>1</sup> La solución gráfica de una PL con dos variables, aunque difícilmente es útil en la práctica, proporciona ideas que son cruciales para entender el método simplex algebraico general que se presenta en el capítulo 3. El módulo gráfico interactivo TORA es en especial útil para experimentar con el método gráfico. La sección 2.3 presenta los paquetes comerciales Excel Solver y AMPL. Su uso se demuestra mediante diversas aplicaciones de PL prácticas en la sección 2.4.

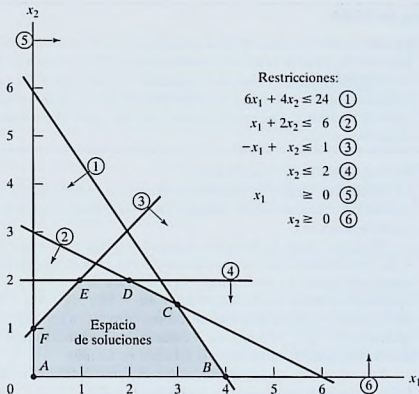


FIGURA 2.1  
Espacio factible del modelo de Reddy Mikks

Para tener en cuenta las otras cuatro restricciones, primero sustituya cada desigualdad con una ecuación, y luego trace la línea recta resultante localizando dos puntos diferentes. Por ejemplo, después de sustituir  $6x_1 + 4x_2 \leq 24$  con la línea recta  $6x_1 + 4x_2 = 24$ , se determinan dos puntos distintos haciendo  $x_1 = 0$  para obtener  $x_2 = \frac{24}{4} = 6$  y luego que  $x_2 = 0$  para obtener  $x_1 = \frac{24}{6} = 4$ . De este modo, la línea  $6x_1 + 4x_2 = 24$  que pasa por los puntos (0,6) y (4,0) es la línea (1) que se muestra en la figura 2.1.

A continuación consideramos el efecto de la desigualdad que divide el plano  $(x_1, x_2)$  en dos semiplanos, uno a cada lado de la línea trazada. Sólo una de estas dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar el lado correcto seleccionamos (0,0) como *punto de referencia*. Si (0,0) satisface la desigualdad, entonces el lado en que está es el semiplano factible; de lo contrario, es el otro lado. El uso del punto de referencia (0,0) se ilustra con la restricción  $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ . Como  $6 \times 0 + 4 \times 0 = 0$  es menor que 24, el semiplano que representa la desigualdad (1) incluye el origen (lo que se indica con la dirección de la flecha en la figura 2.1).

Conviene seleccionar (0,0) por computadora como punto de referencia a todas las restricciones del modelo porque siempre da un valor de cero al lado izquierdo de la restricción. Sin embargo, si la línea pasa por el origen, en ese caso debe usarse como punto de referencia cualquier otro punto que no esté sobre la línea.

La aplicación del procedimiento de punto de referencia a todas las restricciones del modelo produce las restricciones que se muestran en la figura 2.1 (¡compruébelo!). El **espacio de soluciones factibles** es el área en el primer cuadrante que satisface todas las restricciones al mismo tiempo. En la figura 2.1 todos los puntos en o sobre el límite del área ABCDEF definen el espacio de soluciones factibles. Todos los puntos fuera de esta área son no factibles.

### Momento de TORA.

El módulo de PL gráfico TORA controlado por menú es útil para reforzar su comprensión de cómo se grafican las restricciones de PL. Seleccione Linear Programming en el MAIN menu. Después de ingresar el modelo, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione Solve  $\Rightarrow$  Graphical. En la pantalla de resultados podrá interactuar con el trazo de las restricciones, una a la vez, para ver cómo afecta cada restricción el espacio de soluciones.

#### Paso 2. Determinación de la solución óptima:

La cantidad de puntos de solución en el espacio factible  $ABCDEF$  de la figura 2.1 es infinita. En consecuencia, se requiere un procedimiento sistemático para determinar la solución óptima.

En primer lugar, la dirección en la cual se incrementa la función de utilidad  $z = 5x_1 + 4x_2$  (recordemos que estamos maximizando  $z$ ) se determina asignando valores crecientes arbitrarios a  $z$ . Por ejemplo, la utilización de  $z = 10$  y  $z = 15$  (arbitrarios) equivaldría a trazar las dos líneas  $5x_1 + 4x_2 = 10$  y  $5x_1 + 4x_2 = 15$ , que identifican la dirección en la cual se incrementa  $z$ , como se muestra en la figura 2.2. La solución óptima ocurre en  $C$ , el punto en el espacio de soluciones más allá del cual cualquier incremento adicional producirá la solución no factible.

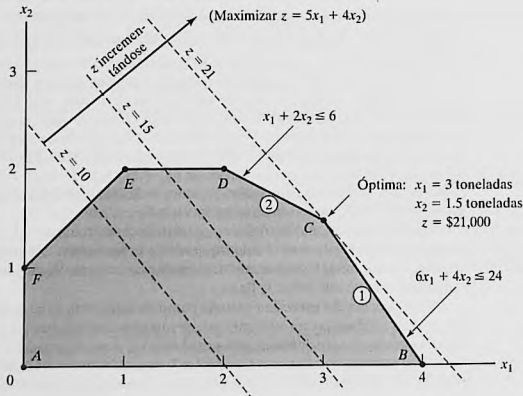
Los valores de  $x_1$  y  $x_2$  asociados con el punto óptimo  $C$  se determinan resolviendo las ecuaciones asociadas con las líneas (1) y (2):

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

FIGURA 2.2

Solución óptima del modelo de Reddy Mikks



La solución es  $x_1 = 3$  y  $x_2 = 1.5$  con  $z = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$ , que demanda una combinación de producto diaria de 3 toneladas de pintura para exteriores, y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria asociada es de \$21,000.

Una característica importante de la solución de PL óptima es que *siempre* está asociada con un **punto de esquina** del espacio de soluciones (donde, en dos dimensiones, se intersecan dos líneas). Esto es cierto incluso si la función objetivo es paralela a una restricción. Por ejemplo, si la función objetivo es  $z = 6x_1 + 4x_2$ , la cual es paralela a la restricción 1, siempre podemos decir que la solución óptima ocurre en el punto de esquina  $B$  o  $C$ . En realidad, cualquier punto sobre el segmento de línea  $BC$  será una solución óptima *alternativa* (vea también el ejemplo 3.5-2); sin embargo, la observación importante en este caso es que los *puntos de esquina*  $B$  y  $C$  definen totalmente el segmento de línea  $BC$ .

---

### Momento TORA.

Puede interactuar con TORA para ver que la solución óptima siempre está asociada con un punto de esquina. En la pantalla de resultados puede hacer clic en View/Modify Input Data para modificar los coeficientes de la función objetivo y resolver de nuevo gráficamente el problema. Puede utilizar las siguientes funciones objetivo para comprobar la idea propuesta.

- (a)  $z = 5x_1 + x_2$
  - (b)  $z = 5x_1 + 4x_2$
  - (c)  $z = x_1 + 3x_2$
  - (d)  $z = -x_1 + 2x_2$
  - (e)  $z = -2x_1 + x_2$
  - (f)  $z = -x_1 - x_2$
- 

La notable observación de que la solución óptima de PL siempre está asociada con un punto de esquina indica que su búsqueda puede limitarse a una cantidad finita de puntos (y no a una infinita). De hecho, en este pequeño ejemplo la solución óptima se determina tan sólo con enumerar todos los puntos de esquina, como se muestra en la tabla siguiente:

Punto de esquina	$(x_1, x_2)$	$z$
$A$	$(0, 0)$	0
$B$	$(4, 0)$	20
$C$	$(3, 1.5)$	21 (ÓPTIMA)
$D$	$(2, 2)$	18
$E$	$(1, 2)$	13
$F$	$(0, 1)$	4

A medida que aumenta la cantidad de restricciones y variables, los puntos de esquina también lo hacen, y el procedimiento de enumeración propuesto se hace computacionalmente impráctico. No obstante, la observación con respecto al rol de los puntos de esquina al identificar la solución óptima es clave para el desarrollo del algoritmo algebraico general, llamado *método simplex*, que se estudiará en el capítulo 3.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2A

- Determine el espacio factible para cada una de las siguientes restricciones independientes, dado que  $x_1, x_2 \geq 0$ .
  - $-3x_1 + x_2 \geq 6$
  - $x_1 - 2x_2 \geq 5$
  - $2x_1 - 3x_2 \leq 12$
  - $x_1 - x_2 \leq 0$
  - $-x_1 + x_2 \geq 0$
- Identifique la dirección de incremento de  $z$  en cada uno de los casos siguientes:
  - Maximizar  $z = x_1 - x_2$
  - Maximizar  $z = -5x_1 - 6x_2$
  - Maximizar  $z = -x_1 + 2x_2$
  - Maximizar  $z = -3x_1 + x_2$
- Determine el espacio de soluciones y la solución óptima del modelo de Reddy Mikks para cada uno de los siguientes cambios independientes:
  - La demanda diaria máxima de pintura para exteriores es de 2.5 toneladas.
  - La demanda diaria de pintura para interiores es por lo menos de 2 toneladas.
  - La demanda diaria de pintura para interiores es exactamente 1 tonelada mayor que la de pintura para exteriores.
  - La disponibilidad diaria de la materia prima  $M1$  es por lo menos de 24 toneladas.
  - La disponibilidad diaria de la materia prima  $M1$  es por lo menos de 24 toneladas, y la demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en por lo menos 1 tonelada.
- Una compañía que funciona 10 horas al día fabrica dos productos en tres procesos secuenciales. La siguiente tabla resume los datos del problema:

Producto	Minutos por unidad			Utilidad unitaria
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	10	6	8	\$2
2	5	20	10	\$3

Determine la combinación óptima de los dos productos.

- Una compañía fabrica dos productos,  $A$  y  $B$ . El volumen de ventas de  $A$  es por lo menos 80% de las ventas totales de  $A$  y  $B$ . Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de  $A$  por día. Ambos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de  $A$  y de 4 lb por unidad de  $B$ . Las utilidades de  $A$  y  $B$  son de \$20 y \$50, respectivamente. Determine la combinación óptima de productos para la compañía.
- Alumco fabrica láminas y varillas de aluminio. La capacidad de producción máxima se estima en 800 láminas o 600 varillas por día. La demanda diaria es de 550 láminas y 580 varillas. La utilidad por tonelada es de \$40 por lámina y de \$35 por varilla. Determine la combinación de producción diaria óptima.
- Una persona desea invertir \$5000 durante el próximo año en dos tipos de inversión. La inversión  $A$  reditúa 5% y la inversión  $B$  8%. La investigación de mercado recomienda una asignación de por lo menos 25% en  $A$  y cuando mucho 50% en  $B$ . Además, la inver-

- sión  $A$  debe ser por lo menos de la mitad de la inversión  $B$ . ¿Cómo deben asignarse los fondos a las dos inversiones?
8. La división de educación continua del Colegio Comunitario Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Los cursos ofrecidos suelen ser de dos tipos: prácticos y de humanidades. Para satisfacer las demandas de la comunidad, se deben ofrecer por lo menos 10 cursos de cada tipo cada semestre. La división estima que los ingresos por el ofrecimiento de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de \$1500 y \$1000 por curso, respectivamente.
    - (a) Idee una oferta de cursos óptima para el colegio.
    - (b) Demuestre que el costo por curso adicional es de \$1500, el cual es igual al ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de la oferta de cursos adicionales?
  9. ChemLabs utiliza las materias primas  $I$  y  $II$  para producir dos soluciones de limpieza doméstica,  $A$  y  $B$ . Las disponibilidades diarias de las materias primas  $I$  y  $II$  son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de solución  $A$  consume .5 unidades de la materia prima  $I$ , y 0.6 unidades de la materia prima  $II$ , en tanto que una unidad de la solución  $B$  consume 0.5 unidades de la materia prima  $I$ , y .4 unidades de la materia prima  $II$ . Las utilidades por unidad de las soluciones  $A$  y  $B$  son de \$8 y \$10, respectivamente. La demanda diaria de la solución  $A$  es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución  $B$  va de 40 a 200 unidades. Determine las cantidades de producción óptimas de  $A$  y  $B$ .
  10. La tienda de abarrotes Ma-and-Pa tiene un espacio de anaqueles limitado y debe utilizarlo con eficacia para incrementar las utilidades. Dos marcas de cereal, *Grano* y *Wheatie*, compiten por un total de espacio de 60 pies<sup>2</sup> en anaqueles. Una caja de *Grano* ocupa .2 pies<sup>2</sup>, y una caja de *Wheatie* requiere .4 pies<sup>2</sup>. Las demandas diarias máximas de *Grano* y *Wheatie* son de 200 y 120 cajas, respectivamente. Una caja de *Grano* reditúa una utilidad neta de \$1.00 y la de una de *Wheatie* es de \$1.35. Ma-and-Pa considera que como la utilidad neta de *Wheatie* es 35% mayor que la de *Grano*, a *Wheatie* se le debe asignar 35% más espacio que a *Grano*, lo que equivale a asignar aproximadamente 57% a *Wheatie* y 43% a *Grano*. ¿Usted qué piensa?
  11. Jack es un estudiante novato en la Universidad de Ulern. Se da cuenta de que "sólo trabajo y nada de diversión me hacen ser un chico aburrido". Jack desea distribuir su tiempo disponible de aproximadamente 10 horas al día entre las tareas y la diversión. Estima que divertirse es dos veces más entretenido que hacer tareas. Pero también desea estudiar por lo menos el mismo tiempo que le quiere dedicar a la diversión. Sin embargo, Jack comprende que para cumplir con sus tareas no puede divertirse más de 4 horas al día. ¿Cómo debe distribuir su tiempo para maximizar su placer tanto de trabajar como de divertirse?
  12. Wild West produce dos tipos de sombreros tejados. El sombrero tipo 1 requiere el doble de mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para el tipo 1 y el tipo 2 son de 150 y 200 sombreros por día, respectivamente. La utilidad es de \$8 por sombrero tipo 1, y de \$5 por sombrero tipo 2. Determine la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice la utilidad.
  13. Show & Sell puede publicitar sus productos en la radio y la televisión locales. El presupuesto para publicidad se limita a \$10,000 al mes. Cada minuto de publicidad en radio cuesta \$15 y cada minuto de comerciales en televisión \$300. Show & Sell quiere anunciarse en radio por lo menos dos veces más que en televisión. Por el momento, no es práctico utilizar más de 400 minutos de publicidad por radio al mes. Por experiencias pasadas, se estima que la publicidad por televisión es 25 veces más efectiva que la de la radio. Determine la asignación óptima del presupuesto a publicidad por radio y televisión.
  - \*14. Wyoming Electric Coop posee una planta generadora de energía de turbina de vapor. Como en Wyoming abundan los depósitos de carbón, la planta genera su vapor con carbón. Esto, sin embargo, puede conducir a emisiones que no satisfagan las normas de la Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés). Las normas de la

Agencia de Protección Ambiental limitan la descarga de bióxido de azufre a 2000 partes por millón por tonelada de carbón quemado, y la descarga de humo por las chimeneas de la planta a 20 lb por hora. La Coop recibe dos tipos de carbón pulverizado, C1 y C2, para usarlos en la planta de vapor. Los dos tipos se suelen mezclar antes de la combustión. Por simplicidad, se supone que la cantidad de azufre contaminante descargado (en partes por millón) es un promedio ponderado de la proporción de cada tipo utilizado en la mezcla. Los siguientes datos se basan en el consumo de 1 tonelada por hora de cada uno de los dos tipos de carbón.

Tipo de carbón	Descarga de azufre en partes por millón	Descarga de humo en lb por hora	Vapor generado en lb por hora
C1	1800	2.1	12,000
C2	2100	.9	9000

- (a) Determine la proporción óptima para mezclar los dos tipos de carbón.
- (b) Determine el efecto de rebajar el límite de descarga de humo en una libra sobre la cantidad de vapor generado por hora.
15. Top Toys planea una nueva campaña de publicidad por radio y TV. Un comercial de radio cuesta \$300 y uno de TV \$2000. Se asigna un presupuesto total de \$20,000 a la campaña. Sin embargo, para asegurarse de que cada medio tendrá por lo menos un comercial de radio y uno de TV, lo máximo que puede asignarse a uno u otro medio no puede ser mayor que el 80% del presupuesto total. Se estima que el primer comercial de radio llegará a 5000 personas, y que cada comercial adicional llegará sólo a 2000 personas nuevas. En el caso de la televisión, el primer anuncio llegará a 4500 personas y cada anuncio adicional a 3000. ¿Cómo debe distribuirse la suma presupuestada entre la radio y la TV?
16. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballero y blusas de dama para las tiendas de descuento Walmart, corporación que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye el corte, la costura y el empaque. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura, y 5 en empaque. La fábrica trabaja un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla muestra los requerimientos de tiempo y utilidades por unidad para las dos prendas:

Prenda	Minutos por unidad			Utilidad unitaria (\$)
	Corte	Costura	Empaque	
Camisas	20	70	12	8
Blusas	60	60	4	12

Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

17. Una compañía mueblera fabrica escritorios y sillas. El departamento de aserrado corta la madera para ambos productos, la que luego se envía a los distintos departamentos de ensamble. Los muebles ensamblados se envían para su acabado al departamento de pintura. La capacidad diaria del departamento de aserrado es de 200 sillas o de 80 escritorios. El departamento de ensamble de sillas puede producir 120 sillas diarias, y el de ensamble de escritorios produce 60 escritorios. La capacidad del departamento de pintura es de 150 sillas, o 110 escritorios. Dado que la utilidad por sillas es de \$50 y la de un escritorio es de \$100, determine la combinación de producción óptima para la compañía.

- \*18. Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones consecutivas produce dos modelos de radio: HiFi-1 y HiFi-2. La siguiente tabla muestra los tiempos de ensamble de las tres estaciones de trabajo.

Estación de trabajo	Minutos por unidad	
	HiFi-1	HiFi-2
1	6	4
2	5	5
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por cada estación por día. Determine la combinación de productos óptima que minimizará el tiempo ocioso (o no utilizado) en las tres estaciones de trabajo.

19. *Experimento con TORA.* Ingrese la siguiente PL en TORA, y seleccione el modo de solución gráfica para que aparezca la pantalla gráfica de PL.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 8x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A continuación, en una hoja de papel trace a escala los ejes  $x_1$  y  $x_2$  para el problema (también puede hacer clic en la opción Print Graph, en la parte superior derecha de la ventana para obtener una hoja a escala lista para usarse). Ahora, trace a mano una restricción en la hoja preparada y luego haga clic en la ventana izquierda de la pantalla para verificar su respuesta. Repita la misma operación para cada restricción, y termine el procedimiento con una gráfica de la función objetivo. El proceso sugerido se diseñó para que usted ponga a prueba y refuerce su entendimiento de la solución gráfica de la PL mediante una retroalimentación inmediata de TORA.

20. *Experimento con TORA.* Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 22.5 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En PL se dice que una restricción es *redundante* si su eliminación del modelo no modifica el espacio de soluciones factibles. Use el medio gráfico de TORA para identificar las res-

tricciones redundantes, luego demuestre que su eliminación (basta con no graficarlas) no afecta al espacio de soluciones ni a la solución óptima

21. *Experimento con TORA.* En el modelo de Reddy Mikks, utilice TORA para demostrar que la eliminación de las restricciones de la materia prima (restricciones 1 y 2) produciría un espacio de soluciones ilimitado. ¿Qué se puede decir en este caso acerca de la solución óptima del modelo?
22. *Experimento con TORA.* En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se agrega la siguiente restricción al problema.

$$x_2 \geq 3$$

Utilice TORA para demostrar que el modelo resultante tiene restricciones conflictivas que no se pueden satisfacer al mismo tiempo, y que por consiguiente no tiene una solución factible.

## 2.2.2 Solución de un modelo de minimización

### Ejemplo 2.2-2 (Problema de la dieta)

Ozark Farms consume diariamente un mínimo de 800 lb de un alimento especial, el cual es una mezcla de maíz y soya con las siguientes composiciones:

Forraje	lb por lb de forraje		Costo (\$/lb)
	Proteína	Fibra	
Maíz	.09	.02	.30
Soya	.60	.06	.90

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30% de proteína y un máximo de 5% de fibra. El objetivo es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo. Las variables de decisión del modelo son

$x_1$  = libras de maíz en la mezcla diaria

$x_2$  = libras de soya en la mezcla diaria

El objetivo es minimizar el costo diario total (en dólares) de la mezcla de alimento, es decir,

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

Las restricciones representan la cantidad diaria de la mezcla y las necesidades dietéticas. Ozark Farms requiere un mínimo de 800 lb de alimento al día, es decir,

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

La cantidad de proteína contenida en  $x_1$  libras de maíz y en  $x_2$  libras de soya es  $(.09x_1 + .6x_2)$  lb. Esta cantidad debe ser al menos igual al 30% de la mezcla de alimentos total  $(x_1 + x_2)$  lb, es decir,

$$.09x_1 + .6x_2 \geq .3(x_1 + x_2)$$

Asimismo, la necesidad de fibra de 5% máximo se representa como sigue

$$.02x_1 + .06x_2 \leq .05(x_1 + x_2)$$

Las restricciones se simplifican cambiando los términos en  $x_1$  y  $x_2$  al lado izquierdo de cada desigualdad, con sólo una constante del lado derecho. El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

$$.21x_1 - .30x_2 \leq 0$$

$$.03x_1 - .01x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 2.3 muestra la solución gráfica del modelo. La segunda y tercera restricciones pasan por el origen. De este modo, a diferencia del modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1, la determinación de los semiplanos factibles de estas dos restricciones requiere que se utilice un punto de referencia diferente de (0,0), por ejemplo, (100,0) o (0,100).

### Solución:

El modelo minimiza el valor de la función objetivo al reducir  $z$  en la dirección que se muestra en la figura 2.3. La solución óptima es la intersección de las dos líneas  $x_1 + x_2 = 800$  y  $.21x_1 - .30x_2 = 0$ , y por consiguiente  $x_1 = 470.6$  lb y  $x_2 = 329.4$  lb. El costo mínimo de la mezcla de alimentos es  $z = .3 \times 470.6 + .9 \times 329.4 = \$437.64$  por día.

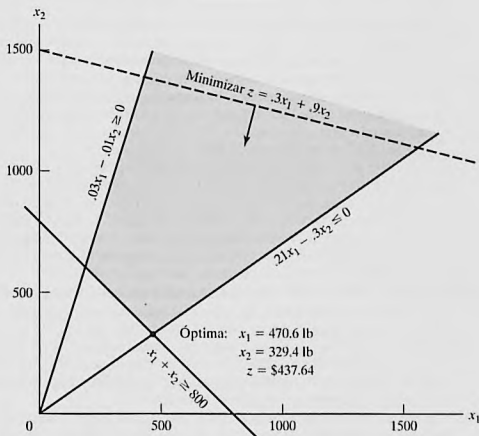


FIGURA 2.3

Solución gráfica del modelo de la dieta

**Comentarios.** Nos podríamos preguntar por qué la restricción  $x_1 + x_2 \geq 800$  no puede ser reemplazada con  $x_1 + x_2 = 800$  porque no sería óptimo producir más que la cantidad mínima. Aunque la solución del presente modelo satisfizo la ecuación, un modelo más complejo puede imponer restricciones adicionales que requerirían mezclar más que la cantidad mínima. Aún más importante, la desigualdad, por definición, es inclusiva del caso de igualdad, de modo que puede elegirse la ecuación si la optimalidad lo requiere. La conclusión es que no debemos “prejuizar” la solución imponiendo la restricción de igualdad adicional.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2B

- Identifique la dirección de reducción de  $z$  en cada uno de los siguientes casos:
  - Minimizar  $z = 4x_1 - 2x_2$
  - Minimizar  $z = -3x_1 + x_2$
  - Minimiza  $z = -x_1 - 2x_2$
- Para el modelo de la dieta, suponga que la disponibilidad diaria de maíz se limita a 450 lb. Identifique el nuevo espacio de soluciones, y determine la nueva solución óptima.
- Para el modelo de la dieta, ¿qué tipo de solución óptima daría el modelo si la mezcla de alimentos no debiera exceder las 800 lb por día? ¿Tiene sentido la solución?
- John debe trabajar cuando menos 20 horas a la semana para complementar sus ingresos al mismo tiempo que asiste a la escuela. Tiene la oportunidad de trabajar en dos tiendas de menudeo. En la tienda 1 puede trabajar entre 5 y 12 horas a la semana, y en la tienda 2 le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Ambas tiendas pagan el mismo salario por hora. Para decidir cuántas horas trabajar en cada tienda, John desea basar su decisión en la tensión del trabajo. Basado en entrevistas con otros empleados, John estima que, en una escala del 1 al 10, los factores de tensión son 8 y 6 en las tiendas 1 y 2, respectivamente. Como la tensión aumenta cada hora, supone que la tensión total en cada tienda al final de la semana es proporcional a las horas que trabaja en las tiendas. ¿Cuántas horas debe trabajar John en cada tienda?
- \*OilCo está construyendo una refinería para producir cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para avión. La demanda mínima (en barriles por día) de cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Iraq y Dubai firmaron un contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir por lo menos 40% de su crudo de Iraq y el resto de Dubai. OilCo pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo no cambiarán durante los próximos 10 años.
 

Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes: Un barril de crudo de Iraq rinde .2 barriles de diesel, .25 barriles de gasolina, 1 barril de lubricante y .15 barriles de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: .1, .6, 1.5 y .1, respectivamente. OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles por día).
- Day Trader desea invertir una suma de dinero que genere un rendimiento anual mínimo de \$10,000. Están disponibles dos grupos de acciones: acciones de primera clase y acciones de alta tecnología, con rendimientos anuales promedio de 10 y 25%, respectivamente. Aunque las acciones de alta tecnología producen un mayor rendimiento, son más riesgosas, y Trader quiere limitar la suma invertida en estas acciones a no más de 60% de la inversión total. ¿Cuál es la suma mínima que Trader debe invertir en cada grupo de acciones para alcanzar su objetivo de inversión?
- \*Un centro de reciclaje industrial utiliza dos chatarras de aluminio,  $A$  y  $B$ , para producir una aleación especial. La chatarra  $A$  contiene 6% de aluminio, 3% de silicio, y 4% de carbón. La chatarra  $B$  contiene 3% de aluminio, 6% de silicio, y 3% de carbón. Los costos por tonelada de las chatarras  $A$  y  $B$  son de \$100 y \$80, respectivamente. Las especificaciones de la aleación especial requieren que (1) el contenido de aluminio debe ser mínimo

de 3% y máximo de 6%; (2) el contenido de silicio debe ser de entre 3 y 5%, y (3) el contenido de carbón debe ser de entre 3 y 7%. Determine la mezcla óptima de las chatarras que deben usarse para producir 1000 toneladas de la aleación.

8. *Experimento con TORA*. Considere el modelo de la dieta, y que la función objetivo sea como sigue

$$\text{Minimizar } z = .8x_1 + .8x_2$$

Use TORA para demostrar que la solución óptima está asociada con *dos* puntos de esquina distintos, y que ambos puntos dan por resultado el mismo valor objetivo. En este caso se dice que el problema tiene *óptimos alternativos*. Explique las condiciones que conducen a esta situación, y demuestre que, en realidad, el problema tiene una cantidad infinita de óptimos alternativos; proporcione luego una fórmula para determinar todas esas soluciones.

## 2.3 SOLUCIÓN CON COMPUTADORA, APLICANDO SOLVER Y AMPL

En la práctica, los modelos de PL suelen implicar miles de variables y restricciones, y la computadora es el único medio viable para resolver problemas de PL. Esta sección presenta dos sistemas de software comúnmente utilizados: Excel Solver y AMPL. Solver es en particular atractivo para los usuarios de hojas de cálculo. AMPL es un lenguaje de modelado algebraico que, como todos los lenguajes de programación de alto grado, requiere más conocimientos. No obstante, AMPL, y lenguajes similares<sup>2</sup>, ofrece una gran flexibilidad de modelado. Aunque la presentación en esta sección se concentra en programaciones lineales, tanto AMPL como Solver pueden manejar problemas enteros y no lineales, como se demostrará en capítulos posteriores.

### 2.3.1 Solución de PL con Excel Solver

En Excel Solver, la hoja de cálculo es el medio de entrada y salida para la PL. La figura 2.4 muestra la distribución de los datos para el modelo de Reddy Mikks (archivo *solverRM1.xls*). La parte superior de la figura incluye cuatro tipos de información: (1) celdas para ingresar datos (B5:C9 y F6:F9); (2) celdas que representan las variables y la función objetivo (B13:D13); (3) definiciones algebraicas de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones (celdas D5:D9), y (4) celdas que proporcionan nombres y símbolos explicativos. Solver solamente requiere los primeros tres tipos. El cuarto tipo mejora la legibilidad aunque no sirve para ningún otro propósito. El posicionamiento relativo de los cuatro tipos de información en la hoja de cálculo (como se sugiere en la figura 2.4) es conveniente para la referencia cruzada apropiada de las celdas en Solver, y se recomienda su uso.

¿Cómo se vincula Solver con los datos de la hoja de cálculo? En primer lugar, proporcionamos definiciones “algebraicas” de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones mediante los datos de entrada (celdas B5:C9 y F6:F9), así como la función objetivo y variables (celdas B13:D13). A continuación colocamos las fórmulas resultantes de forma apropiada en las celdas D5:D9, como se muestra en la siguiente tabla:

	Expresión algebraica	Fórmula en la hoja de cálculo	Ingresada en la celda
Objetivo $z$	$5x_1 + 4x_2$	$= B5*BS13 + C5*CS13$	D5
Restricción 1	$6x_1 + 4x_2$	$= B6*BS13 + C6*CS13$	D6
Restricción 2	$x_1 + 2x_2$	$= B7*BS13 + C7*CS13$	D7
Restricción 3	$-x_1 + x_2$	$= B8*BS13 + C8*CS13$	D8
Restricción 4	$0x_1 + x_2$	$= B9*BS13 + C9*CS13$	D9

<sup>2</sup> Entre otros paquetes comerciales conocidos están AIMMS, GAMS, LINGO, MPL, OPL Studio, y Xpress Mosel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	<b>Reddy Mikks Model</b>										
2	<b>Input data:</b>						Cell	Formula	Copy to		
3		x1	x2				D5	=B5*B\$13+C5*C\$13	D6:D9		
4		Exterior	Interior	Totals		Limits	D13	=D5			
5	<b>Objective</b>	5	4	21							
6	<b>Raw material 1</b>	6	4	24	<=	24					
7	<b>Raw material 2</b>	1	2	6	<=	6					
8	<b>Market limit</b>	-1	1	-1.5	<=	1					
9	<b>Demand limit</b>	0	1	1.5	<=	2					
10		>=0	>=0								
11	<b>Output results:</b>										
12		x1	x2	z							
13	<b>Soluton</b>	3	1.5	21							

**Solver Parameters**

Set Target Cell:

Equal To:  Max  Min  Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

**Add Constraint**

Cell Reference:

Constraint:

<=   <  >=  >  int  bin

FIGURA 2.4

Definición del modelo de Reddy Mikks con Excel Solver (archivo *solverRM1.xls*)

En realidad, sólo tiene que ingresar la fórmula en la celda D5 y luego copiarla en las celdas D6:D9. Para hacerlo de manera correcta, es necesario utilizar la *referencia fija* de las celdas que representan a  $x_1$  y  $x_2$  (es decir, \$B\$13 y \$C\$13, respectivamente).

Las fórmulas explícitas que se acaban de describir no son prácticas para PL grandes. En su lugar, la fórmula en la celda D5 puede escribirse en forma compacta como sigue

$$= \text{SUMPRODUCT}(B5:C5, \$B\$13: \$C\$13)$$

La nueva fórmula puede copiarse entonces en las celdas D6:D9.

Ahora, todos los elementos del modelo de PL ya están listos para ejecutar el modelo. Haga clic en el menú Solver de la barra de menús de la hoja de cálculo<sup>3</sup> para acceder al cuadro de diálogo **Solver Parameters** (que se muestra en medio de la figura 2.4). A continuación, actualice el cuadro de diálogo como sigue:

Set Target Cell: **\$D\$5**

Equal To:  Max

By Changing Cells: **\$B\$13:\$C\$13**

Esta información le indica a Solver que las variables de PL (celdas \$B\$13 y \$C\$13) se determinan al maximizar la función objetivo en la celda \$D\$5.

Para establecer las restricciones haga clic en el botón Add en el cuadro de diálogo para desplegar el cuadro **Add Constraint** (en la parte inferior de la figura 2.4) y luego ingrese el tipo desigualdad en el lado izquierdo, y el lado derecho de las restricciones como<sup>4</sup>

$$D6:D9 \leq F6:F9$$

Para las restricciones de no negatividad haga clic en el botón Add una vez más e ingrese

$$B13:C13 \geq 0$$

Otra forma de ingresar las restricciones no negativas es hacer clic en la Options del cuadro de diálogo **Solver Parameters** para acceder a **Solver Options** (vea la figura 2.5) y luego active las casillas  Assume Non-Negative y  Assume Linear Model.

Por lo general no es necesario cambiar los valores predeterminados restantes en **Solver Options**. Sin embargo, la precisión predeterminada de .000001 puede ser demasiado "alta" para algunos problemas, y Solver puede devolver de forma incorrecta el

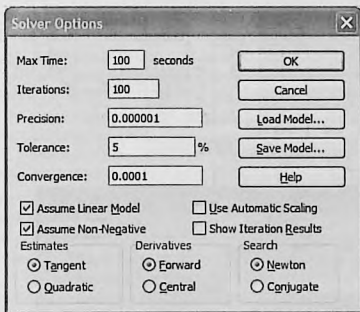


FIGURA 2.5

Cuadro de diálogo Solver Options (Opciones de Solver)

<sup>3</sup> Quizá sea necesario verificar antes Solver como complemento de Excel.

<sup>4</sup> En el cuadro de diálogo Add Constraint de la figura 2.4, las dos opciones adicionales int y bin, las cuales significan integer y binary, se utilizan en programas enteros para limitar las variables a valores enteros y binarios (vea el capítulo 9).

mensaje "Solver could not find a feasible solution" (Solver no pudo determinar una solución factible). En esos casos se tiene que especificar una precisión menor (es decir, un valor mayor). Si el mensaje persiste, es posible que el problema sea no factible.

Los nombres de rango descriptivos de Excel pueden usarse para mejorar la legibilidad. Se crea un rango resaltando las celdas deseadas y escribiendo el nombre en el cuadro superior izquierdo de la hoja, pulsando luego la tecla Return. La figura 2.6 (archivo *solverRM2.xls*) proporciona los detalles con un resumen de los nombres de rango utilizados en el modelo. Hay que cotejar el modelo contra el archivo *solverRM1.xls* para ver cómo se utilizan los rangos en las fórmulas.

Para resolver el problema haga clic en el botón **Solve** del cuadro de diálogo **Solver Parameters**. De este modo el estado de la solución aparece en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Si la elaboración del modelo es correcta, el valor óptimo de  $z$  aparecerá en la celda D5 y los valores de  $x_1$  y  $x_2$  aparecerán en las celdas B13 y C13, respectivamente. Por conveniencia, la celda D13 exhibe el valor óptimo de  $z$  al ingresar la fórmula = D5 en la celda D13, y en celdas contiguas aparece la solución óptima completa.

Si un problema no tiene una solución factible, Solver mostrará el mensaje explícito "Solver could not find a feasible solution" (Solver no pudo determinar una solución factible). Si el valor objetivo óptimo es ilimitado (no finito), Solver emitirá un mensaje un tanto ambiguo "The Set Cell values do not converge" (Los valores de la celda no convergen). En cualquier caso, el mensaje indica que hay algo erróneo en la formulación del modelo, como se verá en la sección 3.5.

FIGURA 2.6

Uso de nombres de rango en Excel Solver (archivo *solverRM2.xls*)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Reddy Mikks Model</b>							
2	<b>Input data:</b>						<b>Range name</b>	<b>Cells</b>
3		x1	x2				UnitsProduced	B13:C13
4		Exterior	Interior	Totals		Limits	JnlProfit	B5:C5
5	<b>Objective</b>	5	4	21			Totals	D6:D9
6	Raw material 1	6	4	24	<=	24	Limits	F6:F9
7	Raw material 2	1	2	6	<=	6	TotalProfit	D5
8	Market limit	-1	1	-1.5	<=	1		
9	Demand limit	0	1	1.5	<=	2		
10		>=0	>=0					
11	<b>Output results:</b>							
12		x1	x2	z				
13	Solution	3	1.5	21				

**Solver Parameters**

Set Target Cell: TotalProfit [E5] [Solve]

Equal To:  Max  Min  Value of: 0 [Close]

By Changing Cells: UnitsProduced [E13] [Guess]

Subject to the Constraints:

Totals <= Limits  
 UnitsProduced >= 0

[Add]
[Change]
[Delete]
[Reset All]
[Help]

El cuadro de diálogo **Solver Results** brinda la oportunidad de solicitar más detalles sobre la solución, por ejemplo, los reportes de análisis de sensibilidad. En la sección 3.6.4 analizaremos estos resultados adicionales.

La solución del modelo de Reddy Mikks con Solver es directa. Otros modelos pueden requerir un “poco de inventiva” antes de poder establecerlos. Una clase de modelos de PL que caen en esta categoría tiene que ver con la optimización de redes, como se verá en el capítulo 6.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3A

1. Modifique el modelo de Reddy Mikks de la figura 2.4 para tener en cuenta un tercer tipo de pintura denominado “marina”. Los requerimientos por tonelada de las materias primas 1 y 2 son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura oscila entre .5 toneladas y 1.5 toneladas. La utilidad por tonelada es de \$3.5 (miles).
2. Desarrolle el modelo Excel Solver para los siguientes problemas:
  - (a) El modelo de la dieta del ejemplo 2.2-2
  - (b) Problema 16, conjunto 2.2a
  - (c) Problema 5, conjunto 2.2b

### 2.3.2 Solución de PL con AMPL<sup>5</sup>

Esta sección proporciona una breve introducción a AMPL. El material en el apéndice C en el sitio web detalla la sintaxis de AMPL. Se hará referencia a la presentación en esta sección y con otras presentaciones de AMPL en el libro. Los dos ejemplos que aquí se presentan se refieren a los fundamentos de AMPL.

**Problema de Reddy Mikks. Modelo rudimentario.** AMPL cuenta con herramientas para modelar una PL en un formato manuscrito rudimentario. La figura 2.7 muestra un código autoexplicativo para el modelo de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*). Todas las palabras clave reservadas aparecen en negritas. Los demás nombres los genera el usuario. La función objetivo y cada una de las restricciones pueden tener nombres distintos (generados por el usuario) seguidos de punto y coma. Cada instrucción se cierra con punto y coma.

El formato manuscrito es adecuado para los problemas, en el sentido de que se requiere un nuevo código siempre que se cambian los datos de entrada. Para problemas prácticos (con estructura compleja y muchas variables y restricciones), el formato manuscrito, en el mejor de los casos, es tedioso. AMPL elimina esta dificultad aplicando un código que divide el problema en dos componentes: (1) Un modelo algebraico general para una clase específica de problemas aplicable a cualquier cantidad de variables y restricciones, y (2) datos para controlar el modelo algebraico. La implementación de estos dos puntos se aborda en la siguiente sección por medio del problema de Reddy Mikks.

<sup>5</sup> Por conveniencia, la versión de AMPL para el estudiante se encuentra en el sitio web. Las actualizaciones posteriores se pueden descargar de [www.ampl.com](http://www.ampl.com). AMPL utiliza comandos en línea y no opera en el ambiente de Windows.

```

maximize z: 5*x1+4*x2;
subject to
  c1: 6*x1+4*x2<=24;
  c2: x1+2*x2<=6;
  c3: -x1+x2<=1;
  c4: x2<=2;
solve;
display z,x1,x2;

```

FIGURA 2.7

Modelo AMPL rudimentario para el problema de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*)

**Problema de Reddy Mikks. Modelo algebraico.** La figura 2.8 muestra las instrucciones del modelo (archivo *amplIRM2.txt*). El archivo debe ser estrictamente texto (ASCII). El símbolo # designa el inicio de los comentarios explicativos. Los comentarios pueden aparecer en renglones distintos o después del punto y coma al final de una instrucción. El lenguaje es sensible a las mayúsculas o minúsculas, y todas sus palabras clave, con algunas excepciones, se escriben en minúsculas. (La sección C.2 en el sitio web proporciona más detalles).

```

#-----modelo algebraico
param m;
param n;
param c{1..n};
param b{1..m};
param a{1..m,1..n};

var x{1..n}>=0;

maximize z: sum{j in 1..n}c[j]*x[j];
subject to restr{i in 1..m}:
      sum{j in 1..n}a[i,j]*x[j]<=b[i];
#-----especificar datos del modelo
data;
param n:=2;
param m:=4;
param c:=1 5 2 4;
param b:=1 24 2 6 3 1 4 2;
param a:
      1 2 :=
      1 6 4
      2 1 2
      3 -1 1
      4 0 1;
#-----resolver el problema
solve;
display z, x;

```

FIGURA 2.8

Modelo AMPL del problema de Reddy Mikks mediante datos de entrada puestos en el código fuente (archivo *amplIRM2.txt*)

El modelo algebraico en AMPL visualiza el problema de PL general con  $n$  variables y  $m$  restricciones en el siguiente formato genérico:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } z: \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{sujeto a } \text{restr}_i: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Así se dan a la función objetivo y a la restricción  $i$  los nombres (especificados por usuario)  $z$  y  $\text{restr}_i$ .

El modelo se inicia con las instrucciones `param` que declaran a  $m, n, c, b$  y  $a_{ij}$  como parámetros (o constantes) cuyos valores específicos se dan en la sección de datos de entrada del modelo. Traduce  $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$  como `c{1..n}`;  $b_i (i = 1, 2, \dots, m)$  como `b{1..m}`, y  $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$  como `a{1..m, 1..n}`. A continuación, las variables  $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ , junto con la restricción de no negatividad, las define la instrucción `var`

```
var x{1..n}>=0;
```

Una variable se considera no restringida si elimina `>=0` de su definición. La notación en `{}` representa el conjunto de subíndices dentro del cual se definen un `param` o una `var`.

El modelo se desarrolla de la siguiente manera, en función de los parámetros y las variables. La función objetivo y las restricciones tienen nombres distintos seguidos por dos puntos (`:`). La instrucción objetivo es una traducción directa de maximizar

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j;$$

```
maximize z: sum{j in 1..n}c{j}*x{j};
```

A la restricción  $i$  se le da el nombre raíz `restr` con un índice dentro del conjunto `{1..m}`:

```
restr{i in 1..m}:sum{j in 1..n}a{i,j}*x{j}<=b{i};
```

La instrucción es una traducción directa de  $\text{restr}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ .

Ahora el modelo algebraico puede utilizarse con cualquier conjunto de datos aplicables que se puedan ingresar después de la instrucción `data`; Para el modelo de Reddy Mikks, los datos indican a AMPL que el problema tiene 2 variables (`param n:=2`;) y 4 restricciones (`param m:=4`;) Se debe utilizar el operador compuesto `:=`, y la instrucción debe iniciar con la palabra clave `param`. Para los parámetros de un solo subíndice,  $c$  y  $b$ , cada elemento está representado por su índice seguido de su valor y separados al menos por un espacio en blanco. Así,  $c_1 = 5$  y  $c_2 = 4$  se ingresan como

```
param c:= 1 5 2 4;
```

Los datos para la instrucción `param b` se ingresan del mismo modo.

Para el parámetro con subíndice doble  $a_{ij}$ , el conjunto de datos se lee como una matriz bidimensional con sus filas que designan a  $i$  y sus columnas que designan a  $j$ . El renglón superior define al subíndice  $j$ , y el subíndice  $i$  se ingresa al inicio de cada fila como

```
param a:  1    2 :=
          1    6    4
          2    1    2
          3   -1    1
          4    0    1;
```

El conjunto de datos debe terminar con punto y coma. Observe la ubicación *obligatoria* del separador : y el operador compuesto := después de param a.

Ahora el modelo y sus datos ya están listos. El comando solve; invoca el algoritmo de solución y el comando display z, x; proporciona la solución.

Para ejecutar el modelo, primero invoque AMPL (haga clic en el comando ampl.exe del directorio de AMPL). En el indicador ampl: ingrese el siguiente comando model, luego pulse la tecla Return:

```
model amplRM2.txt;
```

El resultado del sistema aparecerá entonces en la pantalla como sigue:

```
MINOS 5.5: Optimal solution found.
2 iterations, objective = 21

z = 21
x[*] :=

1 = 3
2 = 1.5
```

Los cuatro renglones inferiores son el resultado de ejecutar display z, x;. En realidad, AMPL dispone de capacidades de formateo que mejoran la legibilidad de los resultados de salida (vea la sección C.5.2 en el sitio web).

AMPL permite separar el modelo algebraico y los datos en dos archivos independientes. Este arreglo es más conveniente porque sólo el archivo de datos se tiene que cambiar una vez que se ha desarrollado el modelo. Para los detalles, vea el final de la sección C.2.

AMPL ofrece una amplia variedad de capacidades de programación. Por ejemplo, los datos de entrada y salida pueden asegurarse para que no sean enviados a archivos, hojas de cálculo y bases de datos externos, y el modelo puede ejecutarse de forma activa para una amplia variedad de opciones. Los detalles se dan en el apéndice C, en el sitio web.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3B

1. En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se produce un tercer tipo de pintura, llamada "marina". Los requerimientos por tonelada de las materias primas  $M1$  y  $M2$  son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura oscila entre .5 toneladas y 1.5 toneladas, y la utilidad por tonelada es de \$3.5 (mil). Modifique el modelo de Excel Solver aplicando solver RM2.xls y el modelo AMPL amplRM2.txt para tener en

cuenta la nueva situación y determinar la solución óptima. Compare el esfuerzo adicional asociado con cada modificación.

2. Desarrolle modelos AMPL para los siguientes problemas:
  - (a) El problema de la dieta del ejemplo 2.2-2 y determine la solución óptima.
  - (b) Problema 16, conjunto 2.2a
  - (c) Problema 5, conjunto 2.2b

## 2.4 APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Esta sección presenta modelos realistas de PL en los cuales la definición de las variables y la construcción de la función objetivo, así como las restricciones, no son tan directas como en el caso del modelo de dos variables. Las áreas cubiertas por estas aplicaciones incluyen lo siguiente:

1. Inversión.
2. Planificación de la producción y control de inventarios.
3. Planificación de la mano de obra.
4. Planificación de desarrollo urbano.
5. Refinación y mezcla de petróleo.

Cada modelo se detalla, y se interpreta su solución óptima.

### 2.4.1 Inversión

Multitud de oportunidades de inversión están disponibles para los inversionistas de hoy. Ejemplos de problemas de inversión son la asignación de presupuestos de capital para proyectos, estrategia de inversión en bonos, selección de cartera de acciones, y establecimiento de una política de préstamos bancarios. En muchas de estas situaciones, la PL puede usarse para seleccionar la combinación óptima de oportunidades que maximizarán el rendimiento, al mismo tiempo que se satisfacen los requerimientos establecidos por el inversionista y el mercado.

---

#### Ejemplo 2.4-1 (Modelo de préstamo bancario)

Bank One está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de \$12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	.140	.10
Automóvil	.130	.07
Casa	.120	.03
Agrícola	.125	.05
Comercial	.100	.02

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses.

La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%.

**Modelo matemático:** La situación se refiere a determinar el monto del préstamo en cada categoría, lo que conduce a las siguientes definiciones de las variables:

$x_1$  = préstamos personales (en millones de dólares)

$x_2$  = préstamos para automóvil

$x_3$  = préstamos para casa

$x_4$  = préstamos agrícolas

$x_5$  = préstamos comerciales

El objetivo del Bank One es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamos al corriente. Por ejemplo, cuando se pierde 10% de préstamos personales por deuda impagable, el banco recibirá intereses sobre 90% del préstamo; es decir, recibirá un interés de 14% sobre  $9x_1$  del préstamo original  $x_1$ . El razonamiento es válido para los cuatro tipos restantes de préstamos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Interés total} &= .14(.9x_1) + .13(.93x_2) + .12(.97x_3) + .125(.95x_4) + .1(.98x_5) \\ &= .126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5\end{aligned}$$

También tenemos

$$\text{Deuda impagable} = .1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5$$

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z &= \text{Interés total} - \text{Deuda impagable} \\ &= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5) \\ &\quad - (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5) \\ &= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5\end{aligned}$$

El problema tiene cinco restricciones:

1. *Los fondos totales no deben exceder de \$12 (millones):*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

2. *Los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a por lo menos el 40% de todos los préstamos:*

$$x_4 + x_5 \geq .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien

$$.4x_1 + .4x_2 + .4x_3 - .6x_4 - .6x_5 \leq 0$$

3. *Los préstamos para casa deben ser iguales a por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa:*

$$x_3 \geq .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

o bien

$$.5x_1 + .5x_2 - .5x_3 \leq 0$$

4. Las deudas impagables no deben exceder 4% de todos los préstamos:

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \leq .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien

$$.06x_1 + .03x_2 - .01x_3 + .01x_4 - .02x_5 \leq 0$$

5. No negatividad:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Una sutil suposición en la formulación precedente es que todos los préstamos se emiten aproximadamente al mismo tiempo. Nos permite pasar por alto las diferencias en el valor del tiempo de los fondos asignados a los diferentes préstamos.

#### Solución:

La solución óptima se calcula utilizando AMPL (archivo *amplEx2.4-1.txt*):

$$z = .99648, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7.2, x_4 = 0, x_5 = 4.8$$

#### Comentarios.

- Quizá se pregunte por qué no definimos el lado derecho de la segunda restricción como  $.4 \times 12$  en lugar de  $.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ . A fin de cuentas, parece razonable que el banco quiera prestar los \$12 (millones). La respuesta es que el uso dado en la formulación no desapruueba esta posibilidad, pero hay dos razones más por las que no debería utilizar  $.4 \times 12$ : (1) Si otras restricciones en el modelo son tales que *no puedan* usarse todos los \$12 (millones) (por ejemplo, el banco puede limitar los diferentes préstamos), entonces la opción  $.4 \times 12$  podría conducir a una solución incorrecta o no factible. (2) Si desea experimentar con el efecto de cambiar los fondos disponibles (por ejemplo, de \$12 a \$13 millones) en la solución óptima, es posible que olvide cambiar  $.4 \times 12$  a  $.4 \times 13$ , en cuyo caso la solución no será correcta. Un razonamiento parecido aplica al lado izquierdo de la cuarta restricción.
- La solución óptima requiere que se asignen los \$12 millones: \$7.2 millones a préstamos para casa, y \$4.8 millones a préstamos comerciales. Las categorías restantes no reciben nada. El rendimiento de la inversión es

$$\text{Tasa de rendimiento} = \frac{z}{12} = \frac{.99648}{12} = .0834$$

Esto muestra que la tasa de rendimiento anual combinada es de 8.034%, la cual es menor que la mejor tasa de interés *neto* (de 8.64% para préstamos para casa), y nos pregunta por qué el modelo no aprovecha esta oportunidad. La respuesta es que la estipulación de que los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a por lo menos 40% de todos los préstamos (restricción 2) hace que la solución asigne \$4.8 millones a préstamos comerciales a la tasa *neto* más baja de 7.8%, de ahí la reducción de la tasa de interés total a  $100 \left( \frac{.0864 \times 7.2 + .078 \times 4.8}{12} \right) = 8.034\%$ . De hecho, si eliminamos la restricción 2, la solución óptima asignará todos los fondos a préstamos para casa a la tasa más alta de 8.64% (¡inténtelo utilizando el modelo AMPL!).

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4A

- Fox Enterprises está considerando seis posibles proyectos de construcción durante los próximos 4 años. Fox puede emprender cualquiera de los proyectos en parte o en su totalidad. La ejecución parcial de un proyecto prorrateará proporcionalmente tanto el rendi-

miento como los desembolsos de efectivo. Los rendimientos (valor presente) y los desembolsos de efectivo para los proyectos se dan en la siguiente tabla.

Proyecto	Desembolso de efectivo (\$1000)				Rendimiento (\$1000)
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondos disponibles (\$1000)	60.0	70.0	35.0	20.0	

- Formule el problema como un programa lineal, y determine la combinación óptima de proyectos que maximice el rendimiento total utilizando AMPL, Solver o TORA. Pase por alto el valor en el tiempo del dinero.
  - Suponga que si se emprende una parte del proyecto 2, entonces debe emprenderse por lo menos una parte igual del proyecto 6. Modifique la formulación del modelo y determine la nueva solución óptima.
  - En el modelo original, suponga que los fondos no utilizados al final de un año se utilizan en el año siguiente. Halle la nueva solución óptima, y determine qué tanto cada año "le pide prestado" al año anterior. Por sencillez, pase por alto el valor del dinero en el tiempo.
  - Suponga en el modelo original que los fondos anuales disponibles para cualquier año se pueden exceder, si fuera necesario, pidiendo prestado a otras actividades financieras dentro de la compañía. Ignorando el valor del dinero en el tiempo, reformule el modelo de PL y determine la solución óptima. ¿Requeriría la nueva solución que se pida prestado en cualquier año? De ser así, ¿cuál es la tasa de rendimiento sobre el dinero pedido en préstamo?
- \*2. El inversionista Doe dispone de \$10,000 para invertirlos en cuatro proyectos. La tabla siguiente presenta el flujo de efectivo para las cuatro inversiones.

Proyecto	Flujo de efectivo (\$1000) al inicio del				
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
1	-1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	-1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	-1.00	0.80	1.90	0.80
4	-1.00	0.40	0.60	1.80	0.95

La información que aparece en la tabla puede interpretarse como sigue: Para el proyecto 1, \$1.00 invertido al inicio del año 1 reeditaré \$0.50 al inicio del año 2; \$0.30 al inicio del año 3; \$1.80 al inicio del año 4, y \$1.20 al inicio de año 5. Las entradas restantes pueden interpretarse de la misma manera. La entrada 0.00 indica que no se están realizando transacciones. Doe tiene opción adicional de invertir en una cuenta bancaria que gana 6.5% anual. Todos los fondos acumulados al final del año 1 pueden volverse a invertir en el año siguiente. Formule el problema como un programa lineal para determinar la asignación óptima de fondos a oportunidades de inversión. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.

3. HiRise Construction puede licitar por la adjudicación de dos proyectos de 1 año. La siguiente tabla da el flujo de efectivo trimestral (en millones de dólares) para los dos proyectos.

Proyecto	Flujo de efectivo (en millones de dólares) el				
	1 de enero	1 de abril	1 de julio	1 de octubre	31 de diciembre
I	-1.0	-3.1	-1.5	1.8	5.0
II	-3.0	-2.5	1.5	1.8	2.8

HiRise dispone de fondos en efectivo que ascienden a \$1 millón a principios de cada trimestre, y puede pedir prestado un máximo de \$1 millón a una tasa de interés anual nominal de 10%. Cualquier dinero pedido a préstamo debe ser devuelto al final de cada trimestre. El efecto excedente puede ganar un interés trimestral a una tasa anual nominal de 8%. La acumulación neta al final de cada trimestre se invierte en el siguiente.

- (a) Suponga que a HiRise se le permite una participación parcial o completa en los dos proyectos. Determine el nivel de participación que maximizará el efectivo neto acumulado el 31 de diciembre. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.
- (b) ¿Es posible pedir prestado dinero en cualquier trimestre y al mismo tiempo terminar con fondos excedentes? Explique.
4. En anticipación a los fuertes gastos académicos, Joe y Jill iniciaron un programa de inversión anual en el octavo cumpleaños de su hijo, el cual terminará hasta que cumpla dieciocho años. Planean invertir las siguientes cantidades al principio de cada año:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad (\$)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Para evitar sorpresas desagradables, quieren invertir el dinero sin riesgo en las siguientes opciones: Ahorros asegurados con rendimiento anual de 7.5%, bonos del gobierno a seis años que rinden 7.9% y cuyo precio de mercado actual es de 98% de su valor nominal, además de bonos municipales a 9 años que rinden 8.5% y cuyo precio de mercado actual es de 1.02 de su valor nominal. ¿Cómo deberá invertirse el dinero?

- \*5. Un ejecutivo empresarial tiene la opción de invertir en dos planes. El plan A garantiza que cada dólar invertido ganará \$.70 al año, y el plan B garantiza que cada dólar invertido ganará \$2 después de 2 años. En el plan A, las inversiones pueden hacerse anualmente, y en el plan B sólo se permiten durante periodos que sean múltiplos de 2 años. ¿Cómo debe invertir el ejecutivo \$100,000 para maximizar las ganancias al final de 3 años? Resuelva el modelo utilizando Solver de AMPL.
6. Un apostador participa en un juego que requiere dividir entre cuatro opciones el dinero apostado. El juego tiene tres resultados. La tabla siguiente presenta la ganancia o pérdida correspondiente por dólar para las diferentes opciones del juego.

Resultado	Rendimiento por dólar depositado en la opción			
	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

El apostador tiene un total de \$500, los cuales puede apostar sólo una vez. El resultado exacto del juego no se conoce *a priori*. Debido a esta incertidumbre, la estrategia del apostador es maximizar la *ganancia mínima* producida por los tres resultados. ¿Cómo deberá el apostador asignar los \$500 entre las cuatro opciones? Resuelva el modelo con Solver de AMPL. (*Sugerencia:* La ganancia neta del apostador puede ser positiva, cero o negativa).

7. *Lewis (1996)*. Las facturas en una casa se reciben mensualmente (por ejemplo, servicios e hipoteca de la casa), trimestralmente (pagos de impuestos estimados), semestralmente (como los seguros), o anualmente (renovaciones y pagos vencidos de suscripciones). La siguiente tabla da las facturas mensuales durante el próximo año.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Total
\$	800	1200	400	700	600	900	1500	1000	900	1100	1300	1600	12000

Para solventar estos gastos, la familia aparta \$1000 cada mes, cantidad que es el promedio del total dividido entre 12 meses. Si el dinero se deposita en una cuenta de ahorros convencional, puede ganar un interés anual de 4%, siempre que permanezca en la cuenta por lo menos 1 mes. El banco también ofrece certificados de depósito a 3 y 6 meses que pueden ganar el 5.5% y 7% de interés anual, respectivamente. Desarrolle un programa de inversión de 12 meses que maximizará la ganancia total de la familia durante el año. Establezca cualesquier suposiciones o requerimientos necesarios para llegar a una solución factible. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.

#### 2.4.2 Planificación de la producción y control de inventario

Abundan las aplicaciones de PL para planificar la producción y para controlar inventarios. Esta sección presenta tres ejemplos. El primero tiene que ver con la programación de la producción para satisfacer una demanda de un periodo único. El segundo se refiere al uso del inventario en un sistema de producción de múltiples periodos para satisfacer la demanda futura, y el tercero tiene que ver con el uso del inventario, y la contratación y despido de personal para “nivelar” la producción durante un horizonte de planificación de múltiples periodos.

##### Ejemplo 2.4-2 (Modelo de producción de un periodo único)

En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha y chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte, aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos en firme de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Elabore un plan de producción óptimo para la compañía, con base en los siguientes datos:

Departamento	Tiempo por unidades (h)				Capacidad (h)
	Chamarras	Relleno de plumas	Pantalones	Guantes	
Corte	.30	.30	.25	.15	1000
Aislamiento	.25	.35	.30	.10	1000
Costura	.45	.50	.40	.22	1000
Empaque	.15	.15	.1	.05	1000
Demanda	800	750	600	500	
Utilidad unitaria	\$30	\$40	\$20	\$10	
Penalización por unidad	\$15	\$20	\$10	\$8	

**Modelo matemático:** Las variables del problema son

$x_1$  = cantidad de chamarras con capucha

$x_2$  = cantidad de chamarras con relleno de plumas

$x_3$  = cantidad de pantalones

$x_4$  = cantidad de pares de guantes

Se penaliza a la compañía si no cumple la demanda. El objetivo es entonces maximizar la utilidad neta, definida como

$$\text{Utilidad neta} = \text{Utilidad total} - \text{Penalización total}$$

La utilidad total es  $30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4$ . Para calcular la penalización total, las restricciones de la demanda pueden escribirse como sigue

$$x_1 + s_1 = 800, \quad x_2 + s_2 = 750, \quad x_3 + s_3 = 600, \quad x_4 + s_4 = 500,$$

$$x_j \geq 0, \quad s_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

La nueva variable  $s_j$  representa la escasez en la demanda del producto  $j$ , y la penalización total se calcula como  $15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4$ . El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - (15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)$$

sujeto a

$$.30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 \leq 1000$$

$$.25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 \leq 1000$$

$$.45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 \leq 1000$$

$$.15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 \leq 1000$$

$$x_1 + s_1 = 800, \quad x_2 + s_2 = 750, \quad x_3 + s_3 = 600, \quad x_4 + s_4 = 500$$

$$x_j \geq 0, \quad s_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

**Solución:**

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4.txt*) es  $z = \$64,625$ ,  $x_1 = 800$ ,  $x_2 = 750$ ;  $x_3 = 387.5$ ,  $x_4 = 500$ ,  $s_1 = s_2 = s_4 = 0$ ,  $s_3 = 212.5$ . La solución satisface toda la demanda de ambos tipos de chamarra y los guantes. Una merma de 213 (redondeada desde 212.5) pantalones representará un costo de penalización de  $213 \times \$10 = \$2130$ .

### Ejemplo 2.4-3 (Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples)

Acme Manufacturing Company firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varía por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, Acme puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarlas en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a

razón de \$8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrolle un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo.

**Modelo matemático:** Las variables del problema incluyen la cantidad de producción mensual y el inventario de fin de mes. Para que  $i = 1, 2, \dots, 6$ , sean

$x_i$  = Cantidad de unidades producidas en el mes  $i$

$I_i$  = Unidades que quedan en el inventario de fin de mes  $i$

Las relaciones entre estas variables y la demanda mensual durante el horizonte de 6 meses aparecen representadas esquemáticamente en la figura 2.9. El sistema se inicia vacío ( $I_0 = 0$ ).

El objetivo es minimizar el costo total de producción y del inventario de fin de mes.

$$\text{Costo de producción total} = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6$$

$$\text{Costo total del inventario (almacenamiento)} = 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

Por consiguiente, la función objetivo es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = & 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 \\ & + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6) \end{aligned}$$

Las restricciones del problema se determinan directamente a partir de la representación que aparece en la figura 2.9. Para cada periodo tenemos la siguiente ecuación de balance:

$$\text{Inventario inicial} + \text{Cantidad de producción} - \text{Inventario final} = \text{Demanda}$$

La cual se traduce matemáticamente para los meses individuales como

$$x_1 - I_1 = 100 \quad (\text{Mes 1})$$

$$I_1 + x_2 - I_2 = 250 \quad (\text{Mes 2})$$

$$I_2 + x_3 - I_3 = 190 \quad (\text{Mes 3})$$

$$I_3 + x_4 - I_4 = 140 \quad (\text{Mes 4})$$

$$I_4 + x_5 - I_5 = 220 \quad (\text{Mes 5})$$

$$I_5 + x_6 = 110 \quad (\text{Mes 6})$$

$$x_i, i = 1, 2, \dots, 6, I_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5$$

Observe que el inventario inicial,  $I_0$ , es cero. Además, en cualquier solución óptima, el inventario final  $I_6$  será cero porque no es costeable incurrir en costos de almacenamiento adicionales innecesarios.

FIGURA 2.9

Representación esquemática del sistema de producción e inventario

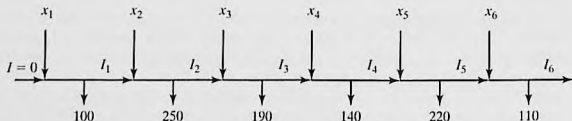
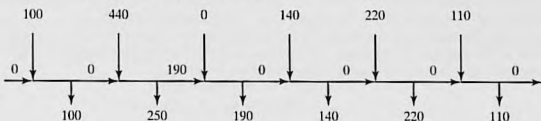


FIGURA 2.10

Solución óptima del problema de producción e inventario

**Solución:**

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-3.txt*) se resume en la figura 2.10. Muestra que la demanda de cada mes se satisface desde la misma producción del mes excepto en el mes 2 donde la cantidad producida (= 440 unidades) cubre la demanda de los meses 2 y 3. El costo total asociado es  $z = \$49,980$ .

**Ejemplo 2.4-4 (Modelo de nivelación de la producción para múltiples periodos)**

Una compañía está planeando fabricar un producto para marzo, abril, mayo y junio del próximo año. Las cantidades demandadas son 520, 720, 520 y 620 unidades, respectivamente. La compañía tiene una fuerza de trabajo permanente de 10 empleados pero puede satisfacer las necesidades de producción fluctuantes contratando y despidiendo trabajadores temporales. Los costos adicionales de contratar y despedir un trabajador temporal en cualquier mes son de \$200 y \$400, respectivamente. Un trabajador de planta produce 12 unidades por mes; y uno temporal, que no tiene la misma experiencia, produce 10. La compañía puede producir más de lo necesario en cualquier mes y guardar el excedente para el mes subsiguiente a un costo de retención de \$50 por unidad por mes. Desarrolle una política óptima de contratación y despido durante el horizonte de planificación de 4 meses.

**Modelo matemático:** Este modelo es semejante al del ejemplo 2.4-3 en el sentido de que cada mes tiene su producción, demanda e inventario final. La única excepción es el manejo de una fuerza de trabajo permanente comparada con una fuerza de trabajo temporal.

El trabajo realizado por los trabajadores permanentes se toma en cuenta restando las unidades que producen de la demanda mensual respectiva. La demanda restante se satisface entonces contratando y despidiendo trabajadores temporales. Por lo tanto

$$\text{Demanda restante para marzo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para abril} = 720 - 12 \times 10 = 600 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para mayo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$

$$\text{Demanda restante para junio} = 620 - 12 \times 10 = 500 \text{ unidades}$$

Las variables del modelo para el mes  $i$  se definen como sigue

$x_i$  = Cantidad neta de trabajadores temporales al inicio del mes  $i$  después de cualquier contratación o despido

$S_i$  = Cantidad de trabajadores temporales contratados o despedidos al inicio del mes  $i$

$I_i$  = Unidades del inventario final para el mes  $i$

Por definición,  $x_i$  e  $I_i$  son no negativas, en tanto que  $S_i$  es *irrestringida en cuanto a signo* porque es igual a la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el mes  $i$ . Éste es el primer caso en este capítulo del uso de una variable irrestringida. Como se verá en breve, se requiere una sustitución especial para permitir la contratación y despido en el modelo.

En este modelo, el desarrollo de la función objetivo requiere construir primero las restricciones. La cantidad de unidades producidas en el mes  $i$  por  $x_i$  trabajadores temporales es  $10x_i$ . Así pues, tenemos las siguientes restricciones del inventario:

$$\begin{aligned}10x_1 &= 400 + I_1 && \text{(Marzo)} \\I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 && \text{(Abril)} \\I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 && \text{(Mayo)} \\I_3 + 10x_4 &= 500 && \text{(Junio)} \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0, I_1, I_2, I_3 \geq 0\end{aligned}$$

Para contratación y despido, la fuerza de trabajo temporal se inicia con  $x_1$  trabajadores a principios de marzo. A principios de abril  $x_1$  se ajustará (hacia arriba o hacia abajo) con  $S_2$  trabajadores temporales para generar  $x_2$ . La misma idea se aplica a  $x_3$  y  $x_4$ , lo que conduce a las siguientes ecuaciones de restricciones

$$\begin{aligned}x_1 &= S_1 \\x_2 &= x_1 + S_2 \\x_3 &= x_2 + S_3 \\x_4 &= x_3 + S_4 \\S_1, S_2, S_3, S_4 &\text{Irrestringidas en cuanto a signo} \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

A continuación desarrollamos la función objetivo. La meta es minimizar el costo del inventario más el costo de contratación y despido. Como en el ejemplo 2.4-3.

$$\text{Costo de retención de inventario} = 50(I_1 + I_2 + I_3)$$

El modelado del costo de contratación y despido es un poco complicado. Dado que los costos de contratar y despedir a un trabajador temporal son de \$200 y \$400, respectivamente, tenemos

$$\left( \begin{array}{c} \text{Costo de} \\ \text{contratación} \\ \text{y despido} \end{array} \right) = 200 \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de trabajadores} \\ \text{temporales contratados al} \\ \text{principio de cada mes} \end{array} \right) + 400 \left( \begin{array}{c} \text{Cantidad de trabajadores} \\ \text{temporales despedidos al} \\ \text{principio de cada mes} \end{array} \right)$$

Si la variable  $S_i$  es positiva, la contratación ocurre en el mes  $i$ . Si es negativa, entonces ocurre el despido. Esta valoración "cualitativa" se traduce matemáticamente aplicando la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, \text{ donde } S_i^-, S_i^+ \geq 0$$

Ahora la variable irrestringida  $S_i$  es la diferencia entre las dos variables no negativas  $S_i^-$  y  $S_i^+$ . Podemos pensar en  $S_i^-$  como la cantidad de trabajadores temporales contratados, y en  $S_i^+$  como la de despedidos. Por ejemplo, si  $S_i^- = 5$  y  $S_i^+ = 0$ , entonces  $S_i = 5 - 0 = +5$ , lo que representa contratación. Si  $S_i^- = 0$  y  $S_i^+ = 7$ , entonces  $S_i = 0 - 7 = -7$ , lo que representa despido. En el primer caso, el costo de contratación correspondiente es  $200S_i^- = 200 \times 5 = \$1000$ , y en el segundo caso el costo de despido correspondiente es  $400S_i^+ = 400 \times 7 = \$2800$ .

La sustitución  $S_i = S_i^- - S_i^+$  es la base para el desarrollo del costo de contratación y despido. Primero tenemos que responder una posible pregunta: ¿Qué pasa si tanto  $S_i^-$  y como  $S_i^+$  son positivos? La respuesta es que esto no puede suceder porque implica tanto contratación como despido en el mismo mes. De manera interesante, la teoría de la PL (capítulo 7) nos dice que  $S_i^-$  y  $S_i^+$  no pueden ser positivos al mismo tiempo, un resultado matemático confirmado por intuición.

Ahora podemos escribir el costo total de contratación y despido como

$$\text{Costo de contratación} = 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-)$$

$$\text{Costo de despido} = 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+)$$

El modelo completo es

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= 50(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-) \\ &\quad + 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+) \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 400 + I_1 \\ I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 \\ I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 \\ I_3 + 10x_4 &= 500 \\ x_1 &= S_1^- - S_1^+ \\ x_2 &= x_1 + S_2^- - S_2^+ \\ x_3 &= x_2 + S_3^- - S_3^+ \\ x_4 &= x_3 + S_4^- - S_4^+ \\ S_1^-, S_1^+, S_2^-, S_2^+, S_3^-, S_3^+, S_4^-, S_4^+ &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ I_1, I_2, I_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-4.txt*) es  $z = \$19,500$ ,  $x_1 = 50$ ,  $x_2 = 50$ ,  $x_3 = 45$ ,  $x_4 = 45$ ,  $S_1^- = 50$ ,  $S_3^+ = 5$ ,  $I_1 = 100$ ,  $I_3 = 50$ . Todas las demás variables son cero. La solución requiere contratar 50 trabajadores temporales en marzo ( $S_1^- = 50$ ), y conservar la fuerza de trabajo permanente hasta mayo, cuando se despida a 5 trabajadores temporales ( $S_3^+ = 5$ ). No se recomienda ninguna otra contratación o despido hasta finales de junio cuando, presuntamente, todos los trabajadores temporales serán despedidos. Esta solución requiere que se conserven 100 unidades de inventario hasta mayo, y 50 unidades hasta junio.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4B

1. AutoMate contrató a ToolCo para que abastezca sus tiendas de descuento automotrices con llaves inglesas y cinceles. La demanda semanal de AutoMate consiste en por lo menos 1500 llaves inglesas y 1200 cinceles. ToolCo no puede fabricar todas las unidades solicitadas con su capacidad actual de un turno y debe utilizar tiempo extra y posiblemente subcontratar a otras fábricas de herramientas. El resultado es un incremento del

costo de producción por unidad, como se muestra en la siguiente tabla. La demanda del mercado limita la proporción entre cinceles y llaves inglesas a por lo menos 2:1.

Herramienta	Tipo de producción	Intervalo de producción semanal (unidades)	Costo unitario (\$)
Llaves inglesas	Regular	0-550	2.00
	Tiempo extra	551-800	2.80
	Subcontratación	801-∞	3.00
Cinceles	Regular	0-620	2.10
	Tiempo extra	621-900	3.20
	Subcontratación	901-∞	4.20

- (a) Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción óptimo para cada herramienta.
- (b) Explique por qué la validez del modelo depende del hecho de que el costo de producción unitario sea una función creciente de la cantidad producida.
- (c) Resuelva el modelo aplicando AMPL, Solver o TORA.
2. En tres máquinas se procesan cuatro productos en secuencia. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes del problema:

Máquina	Costo por h (\$)	Tiempo de fabricación por unidad (h)				Capacidad (h)
		Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
3	4	7	3	2	1	450
Precio de venta unitario (\$)		75	70	55	45	

Formule el problema como un modelo de PL, y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- \*3. Un fabricante produce tres modelos, I, II y III, de un producto determinado con las materias primas A y B. La siguiente tabla proporciona los datos del problema:

Materia prima	Requerimientos por unidad			Disponibilidad
	I	II	III	
A	2	3	5	4000
B	4	2	7	6000
Demanda mínima	200	200	150	
Precio por unidad (\$)	30	20	50	

Las horas de trabajo por unidad del modelo I son dos veces las del II y tres veces las del III. Toda la fuerza de trabajo de la fábrica puede producir el equivalente a 1500 unidades del modelo I. Los requerimientos del mercado especifican las proporciones 3:2:5 para la

producción de los tres modelos respectivos. Formule el problema como un programa lineal, y halle la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

4. La demanda de helado durante los tres meses de verano (junio, julio y agosto) en All-Flavor Parlor se estima en 500, 600 y 400 cartones de 20 galones, respectivamente. Dos mayoristas, 1 y 2, le surten helado a All-Flavors. Aunque los sabores de los dos proveedores son diferentes, son intercambiables. El máximo de cartones que cada proveedor puede surtir es de 400 por mes. Además, el precio de los dos proveedores cambia de un mes al siguiente, según la tabla:

	Precio por cartón en el mes de		
	Junio	Julio	Agosto
Proveedor 1	\$100	\$110	\$120
Proveedor 2	\$115	\$108	\$125

Para aprovechar la fluctuación del precio, All-Flavor puede comprar más de lo que necesita en un mes y guardar el excedente para satisfacer la demanda en un mes posterior. El costo de refrigerar un cartón de helado es de \$5 por mes. En la presente situación es realista suponer que el costo de refrigeración está en función de la cantidad de cartones promedio disponibles durante el mes. Desarrolle un modelo para determinar el programa óptimo de compra de helado a los dos proveedores, y determine la solución óptima con TORA, Solver o AMPL.

5. La demanda de un artículo durante los siguientes cuatro trimestres es de 300, 400 y 250 unidades, respectivamente. El precio por unidad es de \$20 en el primer trimestre y se incrementa \$2 cada trimestre en lo sucesivo. El proveedor no puede surtir más de 400 unidades en cualquier trimestre. Aunque podemos aprovechar los bajos precios en los primeros trimestres, se incurre en un costo de almacenamiento de \$3.50 por unidad de trimestre. Además, el máximo de unidades que puede conservar de un trimestre al siguiente no puede exceder de 100. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de compra óptimo del artículo para satisfacer la demanda y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.
6. Se contrató a una compañía para que manufacturara dos productos,  $A$  y  $B$ , durante los meses de junio, julio y agosto. La capacidad de producción total (expresada en horas) varía mensualmente. La siguiente tabla proporciona los datos básicos de la situación:

	Junio	Julio	Agosto
Demanda de $A$ (unidades)	500	5000	750
Demanda de $B$ (unidades)	1000	1200	1200
Capacidad (h)	3000	3500	3000

Las tasas de producción por hora son .75 y 1 para los productos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Se debe satisfacer toda la demanda; sin embargo, la de un mes posterior se puede satisfacer con la producción de uno anterior. Para cualquiera de los productos  $A$  y  $B$  guardados de un mes al siguiente, los costos de retención son de \$.90 y \$.75 por unidad, respectivamente. Los costos de producción unitarios de los dos productos,  $A$  y  $B$ , son de \$30 y \$28, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para los dos productos y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

- \*7. El proceso de fabricación de un producto consta de dos operaciones sucesivas, I y II. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes durante los meses de junio, julio y agosto.

	Junio	Julio	Agosto
Demanda del producto terminado (unidades)	500	450	600
Capacidad de la operación I (h)	800	700	550
Capacidad de la operación II (h)	1000	850	700

Producir una unidad del producto implica .6 horas en la operación I, más .8 horas en la operación II. Se permite la sobreproducción o el producto terminado en parte (en la operación I), o el producto terminado (en la operación II) en cualquier mes para su uso en un mes posterior. Los siguientes costos de retención correspondientes son de \$.20 y \$.40 por unidad por mes. El costo de producción varía por operación y por mes. Para la operación 1, el costo de producción unitario es de \$10, \$12 y \$11 en junio, julio y agosto, respectivamente. Para la operación 2, el costo correspondiente de producción unitario es de \$15, \$18 y \$16. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para las dos operaciones en el horizonte de 3 meses, y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

8. En dos máquinas se fabrican dos productos en secuencia. El tiempo disponible en cada máquina es de 8 horas por día y puede incrementarse hasta 4 horas de tiempo extra, si es necesario, a un costo adicional de \$100 por hora. La siguiente tabla proporciona la tasa de producción en las dos máquinas, así como el precio por unidad de los dos productos.

	Tasa de producción (unidades/h)	
	Producto 1	Producto 2
Máquina 1	5	5
Máquina 2	8	4
Precio por unidad (\$)	110	118

Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo y el uso recomendado de tiempo extra, si lo hay. Resuelva el problema con AMPL, Solver o TORA.

### 2.4.3 Planificación de la mano de obra

Las fluctuaciones de la fuerza de trabajo para satisfacer la demanda variable con el tiempo pueden lograrse mediante el proceso de contratación y despido, como se demostró en el ejemplo 2.4-4. Hay situaciones en las que el efecto de las fluctuaciones de la demanda puede ser "absorbido" ajustando las horas de inicio y terminación de un turno de trabajo. Por ejemplo, en lugar de seguir las horas de inicio de los tres turnos de 8 horas tradicionales a las 8:00 A.M., 3:00 P.M. y 11:00 P.M., podemos utilizar turnos de 8 horas con traslapes en los que la hora de inicio de cada uno se establece en respuesta al aumento o reducción de la demanda.

La idea de redefinir el inicio de un turno para absorber la fluctuación de la demanda también puede extenderse a otros ambientes de operación. El ejemplo 2.4-5 hace referencia a la terminación de la cantidad mínima de autobuses que se requieren para satisfacer las necesidades de transporte durante las horas pico y normales.

### Aplicación de la vida real. Planificación del personal de ventas por teléfono en Qantas Airways

La línea aérea australiana Qantas opera sus oficinas de reservaciones principales de 7:00 a 22:00, con turnos de 6 horas que comienzan a diferentes horas del día. Qantas utilizó la PL (con el análisis de colas integrado) para proveer de personal a su oficina principal de ventas por teléfono de manera eficiente y proporcionar al mismo tiempo un servicio conveniente a sus clientes. El estudio, realizado a finales de la década de 1970, permitió ahorros anuales de más de 200,000 dólares australianos por año. El estudio se detalla en el caso 15, capítulo 26, en el sitio Web.

#### Ejemplo 2.4-5 (Modelo de horarios de autobuses)

La ciudad de Progreso estudia la factibilidad de utilizar un sistema de autobuses de transportación masiva para reducir el tráfico urbano. El estudio busca la cantidad mínima de autobuses que satisfaga las necesidades de transporte. Después de reunir la información necesaria, el ingeniero de tránsito observó que la cantidad mínima de autobuses que se requería fluctuaba según la hora del día, y dicha cantidad se podía representar de forma aproximada por valores constantes durante intervalos de 4 horas sucesivos. La figura 2.11 resume los hallazgos del ingeniero. Para realizar el mantenimiento diario requerido, cada autobús puede operar sólo 8 horas continuas al día.

**Modelo matemático:** Las variables del modelo son la cantidad de autobuses necesarios en cada turno, y las restricciones tienen que ver con la satisfacción de la demanda. El objetivo es minimizar la cantidad de autobuses en operación.

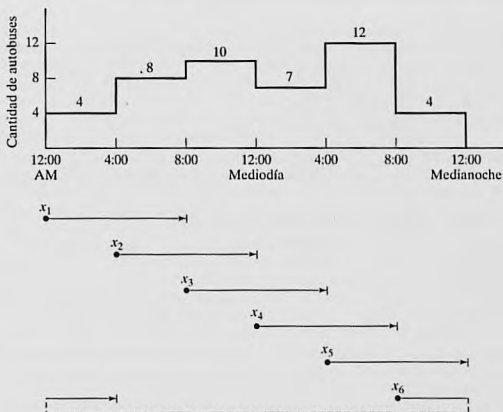


FIGURA 2.11

Cantidad de autobuses en función de la hora del día

La definición expresada de las variables es un tanto “imprecisa”. Sabemos que cada autobús circulará durante 8 horas consecutivas, pero no sabemos cuándo debe iniciar un turno. Si seguimos un horario normal de tres turnos (8:01 A.M. a 4:00 P.M., 4:01 P.M. a 12:00 medianoche, y 12:01 A.M. a 8:00 A.M.) y suponemos que  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son las cantidades de autobuses que inician en el primero, segundo y tercer turnos, en la figura 2.11 podemos ver que  $x_1 \geq 10$ ,  $x_2 \geq 12$  y  $x_3 \geq 8$ . La cantidad mínima correspondiente de autobuses diarios es  $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$ .

La solución dada es aceptable sólo si los turnos *deben* coincidir con el horario de tres turnos normal. Sin embargo, una ventaja podría ser que el proceso de optimización eligiera la “mejor” hora de inicio de un turno. Una forma razonable de hacerlo es permitir que se inicie un turno cada 4 horas. La parte inferior de la figura ilustra esta idea con turnos de 8 horas traslapados que se inician a las 12:01 A.M., 4:00 A.M., 8:01 A.M., 12:01 P.M. y 8:01 P.M. Así pues, las variables se definen como

$x_1$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 A.M.

$x_2$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 A.M.

$x_3$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 A.M.

$x_4$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 P.M.

$x_5$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 P.M.

$x_6$  = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 P.M.

En la figura 2.11 podemos ver que debido al traslape de los turnos, la cantidad de autobuses durante los periodos sucesivos de 4 horas se calcula como sigue:

Espacios de tiempo	Cantidad de autobuses en operación
12:01 A.M. a 4:00 A.M.	$x_1 + x_6$
4:01 A.M. a 8:00 A.M.	$x_1 + x_2$
8:01 A.M. a 12:00 del día	$x_2 + x_3$
12:01 P.M. a 4:00 P.M.	$x_3 + x_4$
4:01 P.M. a 8:00 P.M.	$x_4 + x_5$
8:01 A.M. a 12:00 A.M.	$x_5 + x_6$

El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 & & + x_6 & \geq & 4 & \text{(12:01 A.M.-4:00 A.M.)} \\ x_1 + x_2 & & & \geq & 8 & \text{(4:01 A.M.-8:00 A.M.)} \\ x_2 + x_3 + & & & \geq & 10 & \text{(8:01 A.M.-12:00 del día)} \\ x_3 + x_4 + & & & \geq & 7 & \text{(12:01 P.M.-4:00 P.M.)} \\ x_4 + x_5 & & & \geq & 12 & \text{(4:01 P.M.-8:00 P.M.)} \\ x_5 + x_6 & & & \geq & 4 & \text{(8:01 P.M.-12:00 P.M.)} \\ x_j & \geq & 0, & j = & 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

**Solución:**

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-5.xls*, *solverEx2.4-5.xls*, o *toraEx2.4-5.txt*) requiere programar 26 autobuses (comparados con 30 cuando se utilizan los tres turnos tradicionales). El horario requiere  $x_1 = 4$  autobuses que empiecen a las 12:01 A.M.,  $x_2 = 10$  a las 4:01 A.M.,  $x_3 = 8$  a las 12:01 P.M. y  $x_4 = 4$  a las 4:01 P.M. (Nota: El archivo *solverEx2.4-5.xls* da la solución óptima alternativa  $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 6, x_6 = 2$ , con  $z = 26$ .)

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4C**

- \*1. En el ejemplo de los horarios de autobuses suponga que éstos pueden operar turnos de 8 o de 12 horas. Si un autobús opera durante 12 horas, al conductor se le pagan horas extra a 150% del salario por hora regular. ¿Recomienda utilizar turnos de 12 horas? Resuelva el nuevo modelo utilizando AMPL, Solver o TORA.
2. Un hospital emplea voluntarios para atender la recepción entre las 8:00 A.M. y las 10:00 P.M. Cada voluntario trabaja tres horas consecutivas, excepto los que entran a las 8:00 P.M., que sólo trabajan 2 horas. Una aproximación a la necesidad mínima de voluntarios es por medio de una función escalonada en intervalos de dos horas, los cuales se inician a las 8:00 A.M. como 4, 6, 8, 6, 4, 6 y 8. Como la mayoría de los voluntarios son pensionados, están dispuestos a ofrecer sus servicios a cualquier hora del día (8:00 A.M. a 10:00 P.M.). Sin embargo, como la mayoría de las instituciones caritativas compiten por sus servicios, la cantidad requerida debe mantenerse lo más baja posible. Determine un programa óptimo (utilice AMPL, Solver o TORA) de la hora de inicio de los voluntarios.
3. En el problema 2, suponga que ningún voluntario iniciará al mediodía o a una hora en que se impliquen el almuerzo y la comida. Desarrolle la PL, y determine el horario óptimo utilizando AMPL, Solver o TORA.
4. En una compañía camionera de cargas pequeñas, los andenes de la terminal incluyen trabajadores *eventuales* contratados temporalmente para que se encarguen de las cargas pico. En el andén de Omaha, Nebraska, la demanda mínima de trabajadores eventuales durante los 7 días de la semana (a partir del lunes) es de 20, 14, 10, 15, 18, 10 y 12 trabajadores. Cada trabajador es contratado para que labore 5 días consecutivos. Desarrolle el modelo de PL y determine una práctica de contratación semanal óptima de trabajadores eventuales para la compañía utilizando AMPL, Solver o TORA.
- \*5. La mayoría de los departamentos académicos de las universidades contratan estudiantes para que realicen encargos de oficina. La necesidad de ese servicio fluctúa durante las horas hábiles (8:00 A.M. a 5:00 P.M.). En un departamento, la cantidad mínima de estudiantes requeridos es de 2 entre las 8:00 A.M. y las 10:00 A.M.; 3 entre las 10:01 A.M. y las 11:00 A.M.; 4 entre las 11:01 A.M. y la 1:00 P.M., y 3 entre la 1:01 P.M. y las 5:00 P.M. A cada estudiante se le asignan 3 horas consecutivas (excepto a los que inician a las 3:01 P.M. que trabajan 2 horas, y a los que inician a las 4:01 que trabajan 1 hora). Debido al horario flexible de los estudiantes, por lo común pueden iniciar a cualquier hora durante el día de trabajo, excepto a la hora del almuerzo (12:00 del día). Desarrolle el modelo de PL y determine un horario que especifique la hora del día y la cantidad de estudiantes que se reportan al trabajo. Use AMPL, Solver o TORA para determinar la solución.
6. Una gran tienda de departamentos opera 7 días a la semana. El gerente estima que la cantidad mínima de vendedores requeridos para proporcionar un servicio ágil es de 12 el lunes, 18 el martes, 20 el miércoles, 28 el jueves, 32 el viernes, y 40 para el sábado y el domingo. Cada vendedor trabaja 5 días a la semana, con los dos días de descanso escalonados a lo largo de la semana. Por ejemplo, si 10 personas inician el lunes, 2 pueden tomar su día de descanso el martes o el miércoles; 5 el miércoles y jueves, y 3 el sábado y domingo. ¿Cuántos vendedores se deben contratar, y cómo se distribuirán sus días de descanso? Use AMPL, Solver o TORA para determinar la solución.

#### 2.4.4 Planificación de desarrollo urbano<sup>6</sup>

La planificación urbana implica atender tres áreas generales: (1) construcción de nuevos desarrollos de vivienda; (2) remodelación de viviendas deterioradas y áreas recreativas, y (3) planificación de edificios públicos (escuelas y aeropuertos). Las restricciones asociadas con estos proyectos son tanto económicas (terreno, construcción y financiamiento) como sociales (escuelas, parques y nivel de ingreso). Los objetivos en la planificación urbana varían. En los nuevos desarrollos de vivienda, la utilidad suele ser el motivo para emprender el proyecto. En las dos categorías restantes los objetivos implican consideraciones sociales, políticas, económicas y culturales. De hecho, en un caso divulgado en 2004, el alcalde de una ciudad en Ohio deseaba demoler un área vieja de la ciudad para construir departamentos de lujo. El motivo era incrementar la recaudación de impuestos para aliviar la escasez de presupuesto. El ejemplo de esta sección se diseñó con base en el caso de Ohio.

---

##### Ejemplo 2.4-6 (Modelo de renovación urbana)

La ciudad de Erstville enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, y su reemplazo con un moderno desarrollo.

El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. A continuación, un resumen de la situación.

1. Se pueden demoler 300 casas populares. Cada casa ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de \$2000.
2. Los tamaños de los lotes para construir casas unifamiliares, dobles, triples y cuádruples, son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios, ocupan 15% del área disponible.
3. En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan por lo menos 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
4. El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$1000, \$1900, \$2700 y \$3400, respectivamente.
5. El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$50,000, \$70,000, \$130,000 y \$160,000, respectivamente. El financiamiento a través de un banco local está limitado a \$15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar la recaudación de impuestos?

**Modelo matemático:** Además de determinar cuántas unidades se construirán de cada tipo de vivienda, también necesitamos decidir cuántas casas se deben demoler para crear el espacio para el nuevo desarrollo. Por lo tanto, las variables del problema se definen como sigue:

$x_1$  = Cantidad de casas unifamiliares

$x_2$  = Cantidad de casas dobles

---

<sup>6</sup>Esta sección está basada en Laidlaw (1972)

$x_3$  = Cantidad de casas triples

$x_4$  = Cantidad de casas cuádruples

$x_5$  = Cantidad de casas viejas a demoler

El objetivo es maximizar la recaudación total de impuestos de los cuatro tipos de casas, es decir,

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

La primera restricción del problema es la disponibilidad del terreno.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Acres utilizados para la} \\ \text{construcción de casas nuevas} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{l} \text{Área en acres} \\ \text{netamente disponible} \end{array} \right)$$

A partir de los datos del problema, tenemos

$$\text{Acres necesarios para casas nuevas} = .18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4$$

Para determinar la cantidad de acres disponibles, cada casa demolida ocupa un lote de .25 acres, es decir  $.25x_5$  acres. Considerando 15% para espacios abiertos, calles y áreas para servicios, la cantidad neta de acres disponibles es de  $.85(.25x_5) = .2125x_5$ . La restricción resultante es

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 \leq .2125x_5$$

o bien

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 \leq 0$$

La cantidad de casas demolidas no puede ser superior a 300, lo cual se expresa como

$$x_5 \leq 300$$

A continuación agregamos las restricciones que limitan la cantidad de casas de cada tipo

$$(\text{Cantidad de casas unifamiliares}) \geq (20\% \text{ de todas las casas})$$

$$(\text{Cantidad de casas dobles}) \geq (10\% \text{ de todas las casas})$$

$$(\text{Cantidad de casas triples y cuádruples}) \geq (25\% \text{ de todas las casas})$$

Estas restricciones se expresan matemáticamente como sigue

$$x_1 \geq .2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2 \geq .1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_3 + x_4 \geq .25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

La única restricción restante se refiere a que el costo de demolición y construcción se mantenga dentro del presupuesto permisible, es decir,

$$(\text{Costo de construcción y demolición}) \leq (\text{Presupuesto disponible})$$

Expresando todos los costos en miles de dólares, tenemos

$$(50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4) + 2x_5 \leq 15000$$

El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 \leq 0$$

$$x_5 \leq 300$$

$$-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 \leq 0$$

$$.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 \leq 0$$

$$.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 \leq 0$$

$$50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 \leq 15000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

### Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEX2.4-6.txt* o *solverEx2.4-6.xls*) es:

Recaudación total de impuestos = \$343,965

Cantidad de casas unifamiliares =  $x_1 = 35.83 \approx 36$  casas

Cantidad de casas dobles =  $x_2 = 98.53 \approx 99$  casas

Cantidad de casas triples =  $x_3 = 44.79 \approx 45$  casas

Cantidad de casas cuádruples =  $x_4 = 0$  unidades

Cantidad de casas demolidas =  $x_5 = 244.49 \approx 245$  casas

**Comentarios.** La programación lineal no garantiza una solución entera de manera automática, y ésta es la razón de redondear los valores continuos al entero más próximo. La solución redondeada requiere que se construyan 180 (= 36 + 99 + 45) casas y que se demuelan 245 casas viejas, lo cual representa \$345,600 en impuestos. Tenga en cuenta, sin embargo, que quizá la solución redondeada no sea factible. De hecho, la solución redondeada actual viola la restricción del presupuesto por \$70,000 (¡compruébelo!). No obstante, la solución entera óptima verdadera (con los algoritmos que se presentan en el capítulo 9) es  $x_1 = 36, x_2 = 98, x_3 = 45, x_4 = 0, x_5 = 245$  con  $z = \$343,700$ . Observe con cuidado que la solución redondeada produce un mejor valor objetivo, lo que parece contradictorio. La razón es que la solución redondeada requiere que se produzca una casa doble adicional, lo cual es factible sólo si al presupuesto se le aumentan \$70,000.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4D

- Una inmobiliaria está desarrollando un área para renta de viviendas y locales comerciales. El área de viviendas se compone de departamentos-estudio, casas dúplex y unifamiliares. Se estima que la demanda máxima por parte de los arrendatarios potenciales es de 500 departamentos-estudio, 300 casas dúplex y 250 casas unifamiliares, pero la cantidad de casas dúplex debe ser igual como mínimo al 50% de la cantidad de departamentos-estudio y casas unifamiliares. El espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de casas en una relación de por lo menos 10 pies<sup>2</sup>, 15 pies<sup>2</sup> y 18 pies<sup>2</sup> para departamentos-estudio, casas dúplex y casas unifamiliares, respectivamente. Sin embargo, la disponibilidad del terreno limita el espacio para locales comerciales a no más de 10,000 pies<sup>2</sup>. La renta mensual se estima en \$600, \$750 y \$1200 para departamentos-estudio, casas dúplex y casas unifamiliares, en ese orden. La renta de los locales comerciales es de \$100/pie<sup>2</sup>. Desarrolle un modelo de PL para determinar el área óptima para locales comerciales y la cantidad de casas, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.
- El concejo de la ciudad de Fayetteville está en el proceso de aprobar la construcción de un nuevo centro de convenciones de 200,000 pies<sup>2</sup>. Se han propuesto dos sitios, y ambos

requieren ejercer la ley de "dominio inminente", o de expropiación, para adquirir la propiedad. La siguiente tabla presenta los datos de las propiedades propuestas (contiguas) en ambos sitios, junto con el costo de adquisición.

Propiedad	Sitio 1		Sitio 2	
	Área (1000 pies <sup>2</sup> )	Costo (\$1000)	Área (1000 pies <sup>2</sup> )	Costo (\$1000)
1	20	1000	80	2800
2	50	2100	60	1900
3	50	2350	50	2800
4	30	1850	70	2500
5	60	2950		

Se permite la adquisición parcial de la propiedad. Se debe adquirir 75% como mínimo de la propiedad 4 si se selecciona el sitio 1, y por lo menos 50% de la propiedad 3 si se selecciona el sitio 2. Aunque la propiedad del sitio 1 es más cara (por pie<sup>2</sup>), el costo de construcción es menor que en el sitio 2 porque la infraestructura está en mejores condiciones. El costo de construcción es de \$25 millones en el sitio 1, y de \$27 millones en el sitio 2. ¿Cuál sitio debe seleccionarse y qué propiedades deben adquirirse? Halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

- \*3. Una ciudad emprenderá cuatro proyectos de renovación de vivienda urbana durante los próximos 5 años. Cada proyecto tiene distinto año de inicio y duración diferente. La siguiente tabla muestra los datos básicos de la situación:

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Costo (millones de \$)	Ingreso anual (millones \$)
Proyecto 1	Inicio		Terminación			5.0	.05
Proyecto 2		Inicio			Terminación	8.0	.07
Proyecto 3	Inicio				Terminación	15.0	.15
Proyecto 4			Inicio	Terminación		1.2	.02
Presupuesto (millones \$)	3.0	6.0	7.0	7.0	7.0		

Los proyectos 1 y 4 deben terminarse del todo dentro de su tiempo estipulado. Los otros dos proyectos pueden terminarse parcialmente de ser necesario, siempre y cuando no excedan su presupuesto. Sin embargo, cada proyecto debe quedar por lo menos con un avance de 25%. Al final de cada año, los inquilinos ocupan de inmediato la sección terminada de un proyecto, y así se obtiene una cantidad proporcional de ingreso. Por ejemplo, si en el año 1 se completa 40% del proyecto y 60% en el año 3, el ingreso asociado para el horizonte de planeación a 5 años es de  $.4 \times \$50,000$  (en el año 2) +  $.4 \times \$50,000$  (en el año 3) +  $(.4 + .6) \times \$50,000$  (en el año 4) +  $(.4 + .6) \times \$50,000$  (en el año 5) =  $(4 \times .4 + 2 \times .6) \times \$50,000$ . Desarrolle un modelo de PL para determinar el desarrollo de los proyectos que maximice el ingreso total durante la planeación a 5 años, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA. Por sencillez, omita el valor del dinero en el tiempo.

4. La ciudad de Fayetteville va a iniciar un proyecto de renovación urbano que incluirá casas para personas de bajos y medianos ingresos, departamentos de lujo y viviendas populares. El proyecto también incluye una escuela primaria pública y locales comerciales. El tamaño de la escuela primaria (cantidad de salones de clase) es proporcional a la cantidad de alumnos, y el espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de viviendas. La tabla siguiente proporciona los datos pertinentes de la situación:

	Bajos ingresos	Medianos ingresos	Altos ingresos	Viviendas populares	Salones de clase	Locales comerciales
Cantidad mínima de unidades	100	125	75	300		0
Cantidad máxima de unidades	200	190	260	600		25
Tamaño de lote por unidad (acres)	.05	.07	.03	.025	.045	.1
Cantidad promedio de alumnos por unidad	1.3	1.2	.5	1.4		
Demanda de espacio para locales comerciales por unidad (acres)	.023	.034	.046	.023	.034	
Ingreso anual por unidad (\$)	7000	12,000	20,000	5000	—	15,000

La nueva escuela puede ocupar un espacio máximo de 2 acres con salones para un máximo de 25 alumnos por salón. El costo anual de operación por salón de clase es de \$10,000. El proyecto se ubicará en un lote baldío de 50 acres propiedad de la ciudad. Adicionalmente, el proyecto puede utilizar una propiedad adyacente ocupada por 200 casas en ruinas que se demolerán, cada una de las cuales ocupa .25 acres. El costo de comprar y demoler una de estas casas es de \$7000. El espacio abierto, las calles y lotes de estacionamiento consumen 15% del terreno total disponible.

Desarrolle un programa lineal para determinar el plan óptimo para el proyecto, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

5. Realco posee 800 acres de terreno rústico en un lago escénico en el corazón de las Montañas Ozark. Anteriormente, a los desarrollos nuevos alrededor del lago se le imponían pocas regulaciones, o ninguna. Ahora en las orillas del lago hay muchas casas de descanso, y fosas sépticas de las que la mayoría están instaladas de manera inadecuada. Al paso de los años, el escurrimiento de las fosas sépticas contaminó gravemente el agua. Para detener la degradación del lago, las autoridades del condado aprobaron reglamentos estrictos aplicables a todos los futuros desarrollos. (1) Sólo se pueden construir casas unifamiliares, dobles y triples, donde un mínimo de 50% del total de casas deben ser casas unifamiliares. (2) Para limitar la cantidad de fosas sépticas, se requieren tamaños de lotes mínimos de 2, 3 y 4 acres para las casas unifamiliares, dobles y triples, respectivamente. (3) Deben establecerse áreas recreativas de 1 acre a razón de una por cada 200 familias. (4) Para preservar la ecología del lago, no se puede extraer agua subterránea para las casas o jardines. El presidente de Realco está estudiando la posibilidad de desarrollar una propiedad de 800 acres. El nuevo desarrollo incluirá casas unifamiliares, dobles y triples. Se estima que 15% del área en acres se asignará a calles y áreas para servicios. Realco estima las ganancias producidas por las diferentes unidades de vivienda como sigue:

Unidad de viviendas	Unifamiliares	Dobles	Triples
Ganancia neta por unidad (\$)	10,000	12,000	15,000

El costo de conectar el servicio del agua es proporcional a la cantidad de unidades construidas. Sin embargo, el condado cobra un mínimo de \$100,000 para el proyecto. Adicionalmente, la expansión del sistema de agua por encima de su capacidad actual está limitada a 200,000 galones por día durante los periodos pico. Los siguientes datos resumen el costo de conexión del agua y el consumo, considerando una familia de tamaño

Unidad de viviendas	Unifamiliares	Dobles	Triples	De recreación
Costo de conexión del agua por unidad (\$)	1000	1200	1400	800
Consumo de agua por unidad (gal./día)	400	600	840	450

promedio: Desarrolle un modelo de PL para determinar el plan óptimo para Realco y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.

6. Considere el modelo de Realco del problema 5. Suponga que se pueden adquirir 100 acres más por \$450,000, los cuales incrementarán el área total a 900 acres. ¿Es rentable para Realco este negocio?

### 2.4.5 Mezcla y refinación

Varias aplicaciones de PL tienen que ver con la mezcla de diferentes materiales para fabricar productos que satisfagan ciertas especificaciones, al mismo tiempo que se minimiza el costo y se maximiza la utilidad. Los materiales pueden ser minerales metálicos, chatarras, productos químicos o petróleo crudo, y los productos pueden ser lingotes de metal, pinturas o gasolina de varios grados. Esta sección presenta un modelo (simplificado) de refinación de petróleo. El proceso se inicia con la refinación de petróleo crudo para crear reservas y luego mezclarlas para producir gasolina. La gasolina debe satisfacer ciertas especificaciones de calidad (como el octanaje). Además, los límites de las capacidades de refinación y la demanda afectan directamente el nivel de producción de los diferentes grados de gasolina. Un objetivo del modelo es determinar la mezcla óptima de producción de gasolina que maximice una función de utilidad adecuada. En algunos casos la meta es minimizar una función de costo.

#### Ejemplo 2.4-7 (Refinación de petróleo crudo y mezcla de gasolinas)

La compañía Shale Oil, localizada en la isla de Aruba, produce diariamente 1,500,000 barriles de petróleo crudo. Los productos finales de la refinería incluyen tres tipos de gasolina sin plomo con diferentes octanajes (ON, por sus siglas en inglés): gasolina regular con ON = 87; premium con ON = 89, y súper con ON = 92. El proceso de refinación comprende tres etapas: (1) una torre de destilación que produce una carga de alimentación (ON = 82) a razón de .2 barriles por barril de petróleo crudo; (2) una unidad de desintegración que produce gasolina cruda (ON = 98) utilizando una parte de la carga de alimentación producida por la torre de destilación a razón de 5 barriles por barril por carga de alimentación, y (3) una unidad mezcladora que mezcla la gasolina cruda proveniente de la unidad de desintegración y la carga de destilación proveniente de la torre de destilación. La compañía estima que la utilidad neta por barril de los tres tipos de gasolina deberá ser de \$6.70, \$7.20 y \$8.10, respectivamente. La capacidad de la unidad de desintegración es de 200,000 barriles de carga al día. La demanda de gasolinas regular, premium y súper es de 50,000, 30,000 y 40,000 barriles, respectivamente, por día. Desarrolle un modelo para determinar el programa de producción óptimo para la refinería.

**Modelo matemático:** La figura 2.12 resume los elementos del modelo. Las variables pueden definirse en función de dos corrientes de entrada a la unidad de desintegración (carga de alimentación y gasolina desintegrada) y los tres productos finales. Sea

$x_{ij}$  = cantidad de barriles al día a producir con materia prima obtenida del proceso  $i$  utilizada para mezclar el producto final  $j$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3$

Aplicando esta definición, tenemos

$$\text{Producción diaria de gasolina regular} = x_{11} + x_{21} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina premium} = x_{12} + x_{22} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina súper} = x_{13} + x_{23} \text{ barriles/día}$$

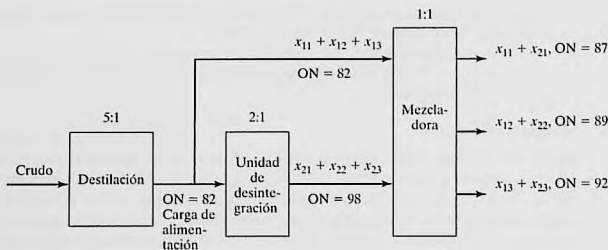


FIGURA 2.12  
Flujo del producto en el problema de la refinería

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{Producción diaria de} \\ \text{la unidad mezcladora} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{l} \text{Producción diaria de} \\ \text{gasolina regular} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Producción diaria de} \\ \text{gasolina premium} \end{array} \right) \\ &+ \left( \begin{array}{l} \text{Producción diaria} \\ \text{de gasolina súper} \end{array} \right) \\ &= (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) + (x_{13} + x_{23}) \text{ barriles/día} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Carga de alimentación} \\ \text{diaria a la mezcladora} \end{array} \right) = x_{11} + x_{12} + x_{13} \text{ barriles/día}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Alimentación diaria de la unidad} \\ \text{de desintegración a la mezcladora} \end{array} \right) = x_{21} + x_{22} + x_{23} \text{ barriles/día}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Carga de alimentación diaria} \\ \text{a la unidad de desintegración} \end{array} \right) = 2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \text{ barriles/día}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Petróleo crudo diario} \\ \text{procesado en la refinería} \end{array} \right) = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \text{ barriles/día}$$

El objetivo del modelo es maximizar la utilidad total producida por la venta de los tres grados de gasolina. De acuerdo con las definiciones dadas antes, obtenemos

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

Las restricciones del problema se desarrollan como sigue:

1. El suministro diario de petróleo crudo no debe exceder de 1,500,000 barriles/día:

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1,500,000$$

2. La capacidad de entrada a la unidad de desintegración no debe exceder 200,000 barriles/día:

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200,000$$

3. La demanda diaria de gasolina regular no debe exceder de 50,000 barriles:

$$x_{11} + x_{21} \leq 50,000$$

4. La demanda diaria de gasolina premium no debe exceder de 30,000 barriles:

$$x_{12} + x_{22} \leq 30,000$$

5. La demanda diaria de gasolina súper no debe exceder de 40,000 barriles:

$$x_{13} + x_{23} \leq 40,000$$

6. El octanaje (ON) de la gasolina regular debe ser por lo menos de 87.

La cantidad de octanos de una gasolina es el promedio ponderado del número de octanos de las corrientes de entrada utilizadas en el proceso de mezcla, y se calcula como sigue:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Octanaje} \\ \text{promedio} \\ \text{de la} \\ \text{gasolina regular} \end{array} \right) = \frac{\begin{array}{c} \text{Octanaje} \\ \text{de la carga} \\ \text{de alimentación} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Carga de} \\ \text{alimentación} \\ \text{barriles/día} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Octanaje en la} \\ \text{unidad de} \\ \text{desintegración} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{Unidad de} \\ \text{desintegración} \\ \text{barriles/día} \end{array}}{\text{Total de barriles por día de gasolina regular}}$$

$$= \frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}}$$

Por lo tanto, la restricción del octanaje para la gasolina regular es

$$\frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 87$$

La restricción se expresa linealmente como

$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$

7. El octanaje de la gasolina premium es mínimo de 89:

$$\frac{82x_{12} + 98x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 89$$

el cual se expresa linealmente como

$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$

8. El octanaje de la gasolina súper es mínimo de 92:

$$\frac{82x_{13} + 98x_{23}}{x_{13} + x_{23}} \geq 92$$

o bien

$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$

De este modo, el modelo completo se resume como

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

sueto a

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1,500,000$$

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200,000$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 50,000$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 30,000$$

$$x_{13} + x_{23} \leq 40,000$$

$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$

$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$

$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Las tres últimas restricciones pueden simplificarse para producir un lado derecho constante.

#### Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando los archivos *toraEx2.4.7.txt* o *amplEx2.4.7.txt*) es  $z = 875,000$ ,  $x_{11} = 34,375$ ,  $x_{21} = 15,625$ ,  $x_{12} = 16,875$ ,  $x_{22} = 13,125$ ,  $x_{13} = 15,000$ ,  $x_{23} = 25,000$ . Esto se traduce a

Utilidad diaria = \$875,000

Cantidad diaria de gasolina regular =  $x_{11} + x_{21} = 34,375 + 15,625 = 50,000$  barriles/día

Cantidad diaria de gasolina premium =  $x_{12} + x_{22} = 16,875 + 13,125 = 30,000$  barriles/día

Cantidad diaria de gasolina súper =  $x_{13} + x_{23} = 15,000 + 25,000 = 40,000$  barriles/día

La solución muestra que la producción de gasolina regular está 20,000 barriles/día lejos de satisfacer la demanda máxima. La demanda de los productos restantes sí se satisface.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4E

1. Hi-V produce tres tipos de jugos enlatados,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , utilizando fresas, uvas y manzanas frescas. El abasto diario se limita a 200 toneladas de fresas, 100 toneladas de uvas y 150 toneladas de manzanas. El costo por tonelada de fresas, uvas y manzanas es de \$200, \$100 y \$90, respectivamente. Cada tonelada rinde 1500 lb de jugo de fresa, 1200 lb de jugo de uva, y 1000 lb de jugo de manzana. La bebida  $A$  es una mezcla de 1:1 de jugo de fresa y jugo de manzana. La bebida  $B$  es una mezcla de 1:1:2 de jugo de fresa, jugo de uva y jugo de manzana. La bebida  $C$  es una mezcla de 2:3 de jugo de uva y jugo de manzana. Todas las bebidas se envasan en latas de 16 oz. (1 lb). El precio por lata es de \$1.15, \$1.25 y \$1.20 de las bebidas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de las tres bebidas, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- \*2. Una ferretería vende bolsas de tornillos, pernos, tuercas y rondanas. Los tornillos vienen en cajas de 100 lb y cuestan \$110 cada caja; los pernos vienen en cajas de 100 lb y cuestan \$150 cada una; las tuercas vienen en cajas de 80 lb y cada una cuesta \$70, y las rondanas vienen en cajas de 30 lb y su costo es de \$20 cada caja. La bolsa debe pesar por lo menos 1 lb e incluir, en peso, por lo menos 10% de tornillos y 25% de pernos; no más de 15% de tuercas y cuando mucho 10% de rondanas. Para balancear la bolsa, la cantidad de pernos no puede exceder a la de tuercas o la de rondanas. El peso de un perno es 10 veces el de una tuerca, y 50 veces el de una rondana. Desarrolle un modelo de PL para determinar la combinación óptima de la bolsa, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
3. All-Natural Coop fabrica tres cereales,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , a partir de cuatro ingredientes: copos de avena, pasas, coco rayado y almendras fileteadas. Las disponibilidades diarias de los ingredientes son 5 toneladas, 2 toneladas, 1 tonelada y 1 tonelada, respectivamente. Los costos correspondientes por tonelada son \$100, \$120, \$110 y \$200. El cereal  $A$  es una mezcla de 50:5:2 de avena, pasas y almendras. El cereal  $B$  es una mezcla de 60:2:3 de avena, coco y almendras. El cereal  $C$  es una mezcla de 60:3:4:2 de avena, pasas, coco y almendras. Los cereales se producen en tamaños jumbo de 5 lb. All-Natural vende los ce-

reales  $A$ ,  $B$  y  $C$  a \$2, \$2.50 y \$3.00 por caja, respectivamente. La demanda diaria mínima de los cereales  $A$ ,  $B$  y  $C$  es de 500, 600 y 500 cajas, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de los cereales, así como las cantidades asociadas de ingredientes, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

4. Una refinera fabrica dos tipos de combustible para aviación,  $F_1$  y  $F_2$ , mezclando cuatro tipos de gasolina,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . El combustible  $F_1$  incluye las gasolinas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en la proporción 1:1:2:4, y el combustible  $F_2$  incluye la proporción 2:2:1:3. Los límites de abasto de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son 1000, 1200, 900 y 1500 barriles/día, respectivamente. Los costos por barril de las gasolinas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son \$120, \$90, \$100 y \$150, respectivamente. Los combustibles  $F_1$  y  $F_2$  se venden a \$200 y \$250 por barril, respectivamente. La demanda mínima de  $F_1$  y  $F_2$  es de 200 y 400 barriles/día, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de  $F_1$  y  $F_2$ , y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
- \*5. Una compañía petrolera destila dos tipos de petróleo crudo,  $A$  y  $B$ , para producir gasolina regular y premium, y combustible para aviación. La disponibilidad diaria de petróleo crudo y la demanda mínima de los productos finales están limitadas. Si la producción no es suficiente para satisfacer la demanda, proveedores externos surten la cantidad faltante con una penalización. La producción excedente no se vende de inmediato y se incurre en un costo de almacenamiento. La siguiente tabla proporciona los datos de la situación:

Crudo	Fracción de rendimiento por barril			Precio/barril (\$)	Barriles/día
	Regular	Premium	Gasavión		
Crudo $A$	.20	.1	.25	30	2500
Crudo $B$	.25	.3	.10	40	3000
Demanda (barriles/día)	500	700	400		
Ingresos (\$/barril)	50	70	120		
Costo de almacenamiento de la producción excedente (\$/barril)	2	3	4		
Penalización por la demanda no satisfecha (\$/barril)	10	15	20		

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de productos óptima para la refinera, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

6. En la situación de la refinera del problema 5, suponga que de la unidad de destilación resultan los productos intermedios nafta y aceite ligero. Un barril de crudo  $A$  produce .35 barriles de nafta y .6 barriles de aceite ligero, y un barril de crudo  $B$  produce .45 barriles de nafta y .5 barriles de aceite ligero. La nafta y el aceite ligero se mezclan para producir los tres productos de gasolina finales: Un barril de gasolina regular tiene una proporción de mezcla de 2:1 (nafta a aceite ligero); un barril de gasolina premium tiene una relación de mezcla de 1:1, y un barril de combustible para aviación tiene una proporción de mezcla de 1:2. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.
7. Hawaii Sugar Company produce azúcar morena, azúcar procesada (blanca), azúcar glas, y melazas a partir del jarabe de caña de azúcar. La compañía compra 4000 toneladas de jarabe semanalmente y la contratan para que suministre cada semana un mínimo de 25 toneladas de cada tipo de azúcar. El proceso de producción se inicia con la fabricación de azúcar morena y melaza a partir del jarabe. Una tonelada de jarabe produce .3 toneladas de azúcar morena y .1 tonelada de melaza. El azúcar blanca resulta de procesar el azúcar morena. Se requiere una tonelada de azúcar morena para producir .8 toneladas de azúcar blanca. El azúcar glas se produce a partir del azúcar blanca mediante un proceso de molienda especial cuya eficiencia de conversión es de 95% (una tonelada de azúcar blanca produce .95 toneladas de azúcar glas). Las utilidades por tonelada de azúcar morena,

azúcar blanca y melaza son \$150, \$200, \$230 y \$35, respectivamente. Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción semanal utilizando AMPL, Solver o TORA.

8. La refinera Shale Oil mezcla dos tipos de petróleo, *A* y *B*, para producir dos gasolinas de alto octanaje, I y II. Los petróleos *A* y *B* se producen a las razones máximas de 450 y 700 barriles/hora, respectivamente. Los octanajes correspondientes son 98 y 89, y las presiones de vapor son de 10 y 8 lb/pulg<sup>2</sup>. La gasolina I y la gasolina II deben tener octanajes de por lo menos 91 y 93, respectivamente. La presión de vapor asociada con ambos productos no deberá exceder las 12 lb/pulg<sup>2</sup>. Las utilidades por barril de las gasolinas I y II son de \$7 y \$10, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la tasa de producción óptima de las gasolinas I y II y sus proporciones de mezcla de los petróleos *A* y *B*. Determine la solución con AMPL, Solver o TORA (*Sugerencia*: La presión de vapor, al igual que el octanaje, es el promedio ponderado de las presiones de vapor de los petróleos mezclados.)
9. Una fundidora de acero, aluminio y hierro colado produce dos tipos de lingotes de metal, I y II, con límites específicos en el contenido de aluminio, grafito y silicio. En el proceso de fundición pueden usarse briquetas de aluminio y silicio para satisfacer las especificaciones deseadas. Las siguientes tablas establecen las especificaciones del problema:

Elemento de entrada	Contenido (%)			Costo/tonelada (\$)	Disponibles (toneladas/día)
	Aluminio	Grafito	Silicio		
Chatarra de acero	10	5	4	100	1000
Chatarra de aluminio	95	1	2	150	500
Chatarra de hierro colado	0	15	8	75	2500
Briqueta de aluminio	100	0	0	900	Cualquier cantidad
Briqueta de silicio	0	0	100	380	Cualquier cantidad

Ingrediente	Lingote I		Lingote II	
	Mínimo (%)	Máximo (%)	Mínimo (%)	Máximo (%)
Aluminio	8.1	10.8	6.2	8.9
Grafito	1.5	3.0	4.1	∞
Silicio	2.5	∞	2.8	4.1
Demanda (toneladas/día)		130	250	

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla óptima que la fundidora debe fundir, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.

10. Se fabrican dos aleaciones, *A* y *B*, con cuatro metales I, II, III y IV de acuerdo con las siguientes especificaciones:

Aleación	Especificaciones	Precio de venta (\$)
<i>A</i>	Máximo 80% de I Máximo 30% de II Mínimo 50% de IV	200
<i>B</i>	Entre 40 y 60% de II Mínimo 30% de III Máximo 70% de IV	300

Los cuatro metales se extraen de tres minerales de acuerdo con los siguientes datos:

Mineral	Cantidad máxima (toneladas)	Constituyentes (%)					Precio/ tonelada (\$)
		I	II	III	IV	Otros	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Desarrolle un modelo de PL para determinar cuánto debe producirse de cada tipo, y determine la solución utilizando AMPL, Solver o TORA. (Sugerencia: Sean  $x_{kj}$  las toneladas de mineral  $i$  asignadas a la aleación  $k$ , y defina  $w_k$  como las toneladas de aleación  $k$  producidas).

## 2.4.6 Aplicaciones de PL adicionales

Las secciones anteriores demostraron aplicaciones de PL representativas en cinco áreas. El conjunto de problemas 2.4F en esta sección proporciona áreas de aplicación adicionales, que van desde agrícolas hasta militares.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4F

- Asignación de espacios de anaquel.** Una tienda de abarrotes debe decidir el espacio de anaquel que se asignará a cada uno de los cinco tipos de cereales para el desayuno. La demanda diaria máxima es de 100, 85, 140, 80 y 90 cajas, respectivamente. El espacio de anaquel en pulgadas cuadradas para las cajas es de 16, 24, 18, 22 y 20. El espacio de anaquel total disponible es de 5000 pulg<sup>2</sup>. La utilidad por unidad es de \$1.10, \$1.30, \$1.08, \$1.25 y \$1.20. Determine la asignación de espacio óptimo para los cinco cereales.
- Votación.** En cierto condado del estado de Arkansas, en la boleta se presentan cuatro opciones a elegir: Construir nuevas carreteras, incrementar el control de armas, aumentar subsidios a granjas y elevar el impuesto a la gasolina. El condado comprende 100,000 votantes urbanos, 250,000 votantes suburbanos, y 50,000 votantes rurales, todos con variables de apoyo y oposición a los temas de elección. Por ejemplo, los votantes rurales se oponen al control de armas y al impuesto a la gasolina, sin embargo están a favor de la construcción de carreteras y de los subsidios a granjas. El condado está planeando una campaña publicitaria de TV con un presupuesto de \$100,000 a un costo de \$1500 por anuncio. La siguiente tabla resume el impacto de un solo anuncio en función de la cantidad de votos a favor y en contra de las diferentes opciones en la boleta.

Tema	Cantidad esperada de votos a favor (+) y votos en contra (-) por anuncio		
	Urbanos	Suburbanos	Rurales
Nuevas carreteras	-30,000	+60,000	+30,000
Control de armas	+80,000	+30,000	-45,000
Control de smog	+40,000	+10,000	0
Impuesto a la gasolina	+90,000	0	-25,000

Una opción será ganadora si acumula el 51% de los votos. ¿Qué opción será aprobada por los votantes, y cuántos anuncios deben asignarse?

3. *Balanceo de una línea de ensamble.* Un producto se ensambla a partir de tres piezas diferentes. Dos departamentos fabrican las piezas a diferentes ritmos de producción, como se indica en la siguiente tabla:

Departamento	Capacidad (h/sem)	Ritmo de producción (unidades/h)		
		Pieza 1	Pieza 2	Pieza 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Determine la cantidad máxima de unidades de ensamble final que pueden producirse a la semana. (*Sugerencia:* Unidades mínimas de ensamble [unidades de la pieza 1, unidades de la pieza 2, y unidades de la pieza 3]. Maximizar  $z = \min \{x_1, x_2\}$  es equivalente a  $\max z$  sujeta a  $z \leq x_1$  y  $z \leq x_2$ .)

4. *Control de contaminación.* Se pulverizan y mezclan tres tipos de carbón, C1, C2 y C3 para producir 50 toneladas por hora necesarias para accionar una planta generadora de electricidad. La combustión del carbón emite óxido de azufre (en partes por millón) la cual debe satisfacer las especificaciones de EPA (por sus siglas en inglés) de un máximo de 2000 partes por millón. La siguiente tabla resume los datos de la situación.

	C1	C2	C3
Azufre (partes por millón)	2500	1500	1600
Capacidad del pulverizador (ton/h)	30	30	30
Costo por tonelada	\$30	\$35	\$33

Determine la mezcla óptima de los carbones.

- \*5. *Control de semáforos, Stark y Nichols (1972).* El tránsito automatizado de tres carreteras, H1, H2 y H3, debe detenerse y esperar una luz verde antes de salir de una carretera de cuota. Las cuotas son de \$3, \$4 y \$5 para los autos que salen de H1, H2 y H3, respectivamente. Las proporciones de flujo de H1, H2 y H3 son de 500, 600 y 400 autos por hora. El ciclo de los semáforos no debe exceder de 2.2 minutos, y la luz verde en cualquier carretera debe permanecer encendida por lo menos durante 25 segundos. La luz amarilla permanece encendida durante 10 segundos. La caseta de cobro puede atender un máximo de 510 automóviles por hora. Suponiendo que los automóviles no se mueven con la luz amarilla, determine el intervalo óptimo para la luz verde en las tres carreteras que maximizará el ingreso de la caseta de cobro por ciclo de tránsito.
6. *Ajuste de una línea recta a datos empíricos (Regresión).* En una clase de mecanografía de 10 semanas para principiantes, la velocidad promedio por estudiante (en palabras por minuto) en función de la cantidad de semanas de clase se da en la siguiente tabla:

Semana, $x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palabras por minuto, $y$	5	9	15	19	21	24	26	30	31	35

Determine los coeficientes  $a$  y  $b$  en la relación de línea recta,  $\hat{y} = ax + b$ , que mejor se ajuste a los datos proporcionados. (*Sugerencia:* Minimice la suma del valor absoluto de las desviaciones entre la  $\hat{y}$  teórica y la  $y$  empírica.  $\min |w|$  equivale a  $\min z$  sujeta a  $z \geq w$  y  $z \geq -w$ ,  $z \geq 0$ . Por otra parte,  $\min |w|$  equivale a  $\min (z^+ + z^-)$  sujeta a  $w = z^+ - z^-$  con  $z^+, z^- \geq 0$ .)

7. *Nivelación del terreno para una carretera nueva, Stark y Nichols (1972).* El Departamento de Carreteras de Arkansas está planeando una nueva carretera de 10 millas por un terreno accidentado como se muestra en el perfil que se muestra en la figura 2.13. El ancho

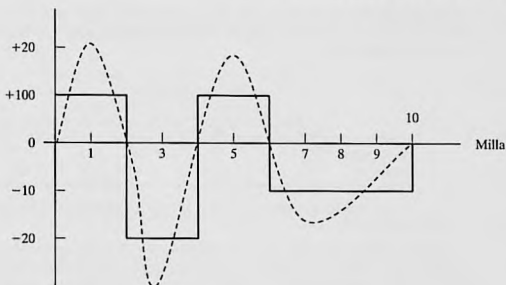


FIGURA 2.13  
Perfil del terreno para el problema 7

del terreno de construcción es aproximadamente de 50 yardas. Para simplificar la situación, el perfil del terreno se puede reemplazar por una función escalonada, como se muestra en la figura. Utilizando maquinaria pesada, la tierra removida del terreno alto se transporta para rellenar áreas bajas. También hay dos fosos de mina, I y II, ubicados en los extremos del tramo de 10 millas, de donde se puede extraer más tierra si es necesario. El foso I tiene una capacidad de 20,000 yardas cúbicas, y la del foso II es de 15,000 yardas cúbicas. Los costos de extracción de tierra de los fosos I y II, respectivamente, son de \$1.50 y \$1.90 por yarda cúbica. El costo de transportación por yarda cúbica por milla es de \$.15, y el costo de utilizar la maquinaria pesada para cargar los camiones es de \$.20 por yarda cúbica. Esto significa que transportar una yarda cúbica 1 milla desde el foso I costará un total de  $(1.5 + .20) + 1 \times .15 = \$1.85$  y transportar una yarda cúbica 1 milla desde una colina hasta el área de relleno costará  $.20 + 1 \times .15 = $.35$ . Desarrolle un plan de costo mínimo para nivelar el tramo de 10 millas.

8. *Planificación militar, Shepard and Associates (1988)*. El ejército rojo (R) está tratando de invadir el territorio defendido por el ejército azul (B), el cual tiene tres líneas de defensa y 200 unidades de combate regulares, y además puede echar mano de una reserva de 200 unidades. El ejército rojo planea atacar en dos frentes, el norte y el sur, y el ejército azul estableció tres líneas de defensa este-oeste, I, II y III. El propósito de las líneas de defensa 1 y 2 es demorar el ataque del ejército rojo por lo menos 4 días en cada línea para maximizar la duración total de la batalla. El tiempo de avance del ejército rojo se calcula mediante la siguiente fórmula empírica:

$$\text{Duración de la batalla en días} = a + b \left( \frac{\text{Unidades azules}}{\text{Unidades rojas}} \right)$$

Las constantes  $a$  y  $b$  son una función de la línea de defensa y el frente norte/sur, como lo muestra la siguiente tabla:

	$a$			$b$		
	I	II	III	I	II	III
Frente norte	.5	.75	.55	8.8	7.9	10.2
Frente sur	1.1	1.3	1.5	10.5	8.1	9.2

Las unidades de reserva del ejército azul pueden usarse sólo en las líneas de defensa II y III. La asignación de unidades por parte del ejército rojo a las tres líneas de defensa se da en la siguiente tabla:

	Cantidad de unidades de ataque del ejército rojo		
	Línea de defensa 1	Línea de defensa 2	Línea de defensa 3
Frente norte	30	60	20
Frente sur	30	40	20

¿Cómo deberá asignar sus recursos el ejército azul entre las tres líneas de defensa y los frentes norte y sur?

9. *Gestión de calidad del agua, Stark and Nicholes (1972)*. Cuatro ciudades descargan aguas residuales en la misma corriente de agua. La ciudad 1 está corriente arriba, la ciudad 2 corriente abajo; luego la ciudad 3, y finalmente la ciudad 4. Medidas a lo largo de la corriente de agua, las ciudades están aproximadamente a 15 millas una de otra. Una medida de la cantidad de contaminantes en las aguas residuales es la demanda de oxígeno bioquímico (BOD, por sus siglas en inglés), lo cual es el peso del oxígeno requerido para estabilizar los constituyentes de desecho en el agua. Una BOD más alta indica una peor calidad del agua. La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) establece una carga de BOD permisible máxima, expresada en lb de BOD por galón. La eliminación de contaminantes del agua residual se realiza en dos formas: (1) actividad de descomposición natural estimulada por el oxígeno en el aire, y (2) plantas de tratamiento en los puntos de descarga antes de que los desechos lleguen a la corriente de agua. El objetivo es determinar la eficiencia más económica de cada una de las cuatro plantas que reducirán la BOD a niveles aceptables. La eficiencia máxima posible de la planta es de 99%.

Para demostrar los cálculos implicados en el proceso, considere las siguientes definiciones para la planta 1:

$Q_1$  = Velocidad de flujo de la corriente (gal/h) en el tramo de 15 millas que conduce a la ciudad 2

$p_1$  = Tasa de descarga de BOD (en lb/h)

$x_1$  = eficiencia de la planta 1 ( $\leq .99$ )

$b_1$  = carga de BOD máxima permisible en el tramo 1-2 (en lb de BOD/gal)

Para satisfacer el requerimiento de carga de BOD en el tramo 1-2, debemos tener

$$p_1(1 - x_1) \leq b_1 Q_1$$

Del mismo modo, la restricción de carga de BOD en el tramo 2-3 se escribe como

$$(1 - r_{12}) \left( \begin{array}{c} \text{Tasa de descarga de BOD} \\ \text{en el tramo 1-2} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Tasa de descarga de BOD} \\ \text{en el tramo 2-3} \end{array} \right) \leq b_2 Q_2$$

o bien

$$(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2) \leq b_2 Q_2$$

El coeficiente  $r_{12}$  ( $< 1$ ) representa la fracción de desechos eliminada en el tramo 1-2 por descomposición. Para el tramo 2-3, la restricción es

$$(1 - r_{23})[(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2)] + p_3(1 - x_3) \leq b_3 Q_3$$

Determine la eficiencia más económica para las cuatro plantas aplicando los siguientes datos (la fracción de BOD eliminada por descomposición es de 6% en los cuatro tramos):

	Tramo 1-2 ( $i = 1$ )	Tramo 2-3 ( $i = 2$ )	Tramo 2-3 ( $i = 3$ )	Tramo 3-4 ( $i = 4$ )
$Q_i$ (gal/h)	215,000	220,000	200,000	210,000
$p_i$ (lb/h)	500	3000	6000	1000
$b_i$ (lb de BOD/gal)	.00085	.0009	.0008	.0008
Costo del tratamiento (\$/lb de BOD eliminada)	.20	.25	.15	.18

10. *Estructura de carga, Stark and Nicholes (1972)*. La grúa elevada que se muestra en la figura 2.14 con dos yugos elevadores, se utiliza para transportar concreto mezclado a un terreno para colar barreras de concreto. La cubeta de concreto cuelga a la mitad del yugo. Los rieles que sostienen los extremos de la grúa pueden soportar un máximo de 25 kips cada uno, y cada cable del yugo tienen una capacidad de 20 kips. Determine la capacidad de carga máxima,  $W_1$  y  $W_2$ . (*Sugerencia*: En equilibrio, la suma de los momentos con respecto a cualquier punto de la viga o el yugo es cero.)
11. *Asignación de aviones a rutas*. Considere el problema de asignar aviones a cuatro rutas, de acuerdo con los siguientes datos:

Tipo de avión	Capacidad (pasajeros)	Capacidad de aviones	Cantidad de viajes diarios en la ruta			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Cantidad diaria de clientes			1000	2000	900	1200

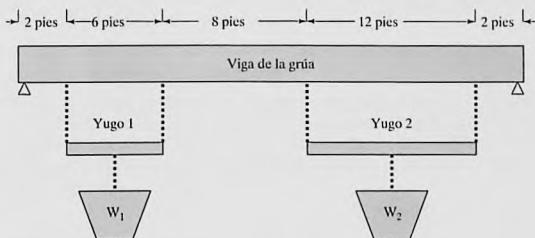


FIGURA 2.14

Grúa elevada con dos yugos (problema 11)

Los costos asociados, incluidas las penalizaciones por la pérdida de clientes debido a la no disponibilidad de espacio, son

Tipo de avión	Costo de operación (\$) por viaje en la ruta			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Penalización (\$) por pasajero perdido	40	50	45	70

Determine la asignación óptima de aviones a las rutas, así como la cantidad asociada de viajes.

## BIBLIOGRAFÍA

- Dantzig, G., y M. Thapa, *Linear Programming I: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.
- Fourer, R., D. Gay, y B. Kernighan, *AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2a. ed., Brooks/Cole-Thomson, Pacific Grove, CA, 2003.
- Laidlaw, C. *Linear Programming for Urban Development Plan Evaluation*, Praegers, Londres, 1972.
- Lewis, T., "Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves", *Interfaces*, vol. 26, Núm. 5, págs. 34-41, 1996.
- Shepard, R., D. Hartley, E. Hasman, L. Thorpe, y M. Bâthe, *Applied Operations Research*, Plenum Press, Nueva York, 1988.
- Stark, R., y R. Nicholes, *Mathematical Programming Foundations for Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.

## CAPÍTULO 3

# Método simplex y análisis de sensibilidad

---

### Aplicación de la vida real-Optimización de la producción de válvulas cardiacas

Las válvulas cardiacas biológicas de diferentes tamaños son bioprótesis fabricadas a partir de corazones porcinos para implantación en humanos. Por el lado del suministro, los corazones porcinos no pueden “producirse” en tamaños específicos. Por otra parte, el tamaño exacto de una válvula fabricada no puede determinarse hasta que se procesa el componente biológico del corazón del cerdo. En consecuencia, puede haber más existencias de algunos tamaños y menos de otros. Se desarrolló un modelo de PL para reducir la cantidad de los tamaños de los que hay más existencias e incrementar la cantidad de los tamaños cuyas existencias son menores. (Los detalles de este estudio se presentan en el caso 2 del capítulo 26, en inglés, del sitio web).

---

### 3.1 MODELO DE PL EN FORMA DE ECUACIÓN

El desarrollo de los cálculos con el método simplex se facilita si se imponen dos requerimientos a las restricciones de programación lineal.

1. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variables son no negativas<sup>1</sup>

**Conversión de las desigualdades en ecuaciones con lado derecho no negativo.** En un modelo de PL económico, el lado derecho representa la disponibilidad de un recurso, y el izquierdo el uso del recurso por todas las actividades del modelo (variables). La cantidad excedente del lado derecho respecto de izquierdo da entonces la cantidad *no utilizada* del recurso.

---

<sup>1</sup> Todos los paquetes comerciales (y TORA) aceptan directamente las restricciones de desigualdad, el lado derecho no negativo y las variables ilimitadas. Cualquier condición previa de las restricciones y las variables se realiza internamente en el software antes de que el método simplex resuelva el problema.

Para convertir una desigualdad ( $\leq$ ) en ecuación se agrega una **variable de holgura** al lado izquierdo de la restricción. Por ejemplo, la restricción  $M1$  del modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) se convierte en ecuación como sigue

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, s_1 \geq 0$$

La variable no negativa  $s_1$  es la holgura (o cantidad no utilizada) del recurso  $M1$ .

A continuación, una restricción ( $\geq$ ) establece un límite inferior en las actividades económicas de la programación lineal, así que la cantidad en la cual el lado izquierdo excede el límite mínimo representa una **superávit**. Así pues, la conversión de ( $\geq$ ) a ( $=$ ) se logra restando una **variable de superávit** no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Por ejemplo, en el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), la variable de exceso  $S_1$  ( $\geq 0$ ) convierte la restricción de la mezcla de alimentos ( $\geq$ ) en la ecuación.

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800, S_1 \geq 0$$

El único requerimiento que falta es que el lado derecho de la ecuación resultante sea no negativo. Si el lado derecho resulta negativo, el requerimiento se satisface multiplicando ambos lados de la ecuación por  $-1$ .

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1A

- \*1. En el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.2-1), considere la solución factible  $x_1 = 3$  toneladas y  $x_2 = 1$  tonelada. Determine el valor de las holguras asociadas para las materias primas  $M1$  y  $M2$ .
2. En el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), determine el superávit de alimento compuesto de 500 lb de maíz y 600 lb de soya.
3. Considere la siguiente desigualdad

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Demuestre que multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $-1$  y luego convertir la desigualdad resultante en ecuación es lo mismo que convertirla primero en ecuación y luego multiplicar ambos lados por  $-1$ .

- \*4. Dos productos diferentes,  $P1$  y  $P2$  pueden ser fabricados por una o dos máquinas diferentes,  $M1$  y  $M2$ . El tiempo de procesamiento de cualquier producto en cualquier máquina es el mismo. La capacidad diaria de la máquina  $M1$  es de 200 unidades (de  $P1$  o de  $P2$ , o una combinación de ambos), y la capacidad diaria de la máquina  $M2$  es de 250 unidades. El supervisor del taller desea balancear el programa de producción de las dos máquinas de modo que la cantidad de unidades producidas en una máquina no sea mayor a 5 unidades de la cantidad producida en la otra. La utilidad por unidad de  $P1$  es de \$10 y la de  $P2$  es de \$15. Plantee el problema como una PL en forma de ecuación.
5. Muestre cómo puede presentarse la siguiente función objetivo en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = \max \{ |x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3| \}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(Sugerencia:  $|a| \leq b$  equivale a  $a \leq b$  y  $a \geq -b$ .)

6. Demuestre que las  $m$  ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

equivalen a las siguientes  $m + 1$  desigualdades:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i$$

**Manejo de variables irrestrictas.** El uso de una variable irrestricta en un modelo de PL se demuestra en el modelo de nivelación de producción durante múltiples periodos del ejemplo 2.4-4, donde la variable irrestricta  $S_i$  representa la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el periodo  $i$ . En el mismo ejemplo, explicamos que la variable irrestricta puede ser reemplazada por dos variables no negativas mediante la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, S_i^- \geq 0, S_i^+ \geq 0$$

En este caso,  $S_i^-$  representa la cantidad de trabajadores contratados y  $S_i^+$  la de trabajadores despedidos. Como se explicó en el ejemplo 2.4-4, es imposible (tanto intuitiva como matemáticamente) que  $S_i^-$  y  $S_i^+$  asuman valores positivos al mismo tiempo.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1B

1. El restaurante de comida rápida McBurger vende hamburguesas cuarto de libra y hamburguesas con queso. Una hamburguesa cuarto de libra se prepara con un cuarto de libra de carne y una hamburguesa con queso se prepara con sólo .2 lb de carne. El restaurante inicia el día con 200 lb de carne pero puede pedir más a un costo adicional de 25 centavos por libra para cubrir el costo de entrega. Toda la carne que sobra al final del día se dona a instituciones de caridad. Las utilidades de McBurger son de 20 centavos por hamburguesa cuarto de libra y de 15 centavos por hamburguesa con queso. McBurger no espera vender más de 900 hamburguesas en cualquier día. ¿Cuántas hamburguesas de cada tipo debe planear McBurger para el día? Resuelva el problema utilizando TORA, Solver o AMPL.
2. En un centro de maquinado se fabrican dos productos. Los tiempos de producción por unidad de los productos 1 y 2 son de 10 y 12 minutos, respectivamente. El tiempo de máquina regular total es de 2500 minutos por día. En cualquier día, el fabricante puede producir entre 150 y 200 unidades del producto 1, pero no más de 45 unidades del producto 2. Se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda a un costo adicional de \$.50 por minuto. Suponiendo que las utilidades unitarias de los productos 1 y 2 son de \$.60 y \$.75, respectivamente, formule el problema como un modelo de PL, luego resuélvalo con TORA, Solver o AMPL para determinar el nivel de producción óptimo de cada producto así como también cualquier tiempo extra necesario en el centro.
- \*3. JoShop fabrica tres productos cuyas utilidades unitarias son de \$2, \$5 y \$3, respectivamente. La compañía presupuestó 80 horas de mano de obra y 65 horas de tiempo de máquina para la producción de los tres productos. Los requerimientos de mano de obra por unidad de los productos 1, 2 y 3 son de 2, 1 y 2 horas, respectivamente. Los requerimientos de tiempo de máquina por unidad son 1, 1 y 2 horas. JoShop considera las horas de mano de obra y máquina presupuestadas como metas que pueden ser sobrepasadas, si es necesario, pero a un costo adicional de \$15 por hora de mano de obra y \$10 por hora de máquina. Formule el problema como una PL y determine su solución óptima aplicando TORA, Solver o AMPL.
4. En una PL en la cual hay algunas variables irrestrictas, una transformación del tipo  $x_j = x_j^- - x_j^+, x_j^-, x_j^+ \geq 0$  duplicará la cantidad correspondiente de variables no negativas.

En su lugar, podemos reemplazar  $k$  variables irrestrictas con exactamente  $k + 1$  variables no negativas por medio de la sustitución  $x_j = x'_j - w$ ,  $x'_j, w \geq 0$ . Use TORA, Solver o AMPL para demostrar que los dos métodos dan la misma solución de la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sueto a

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

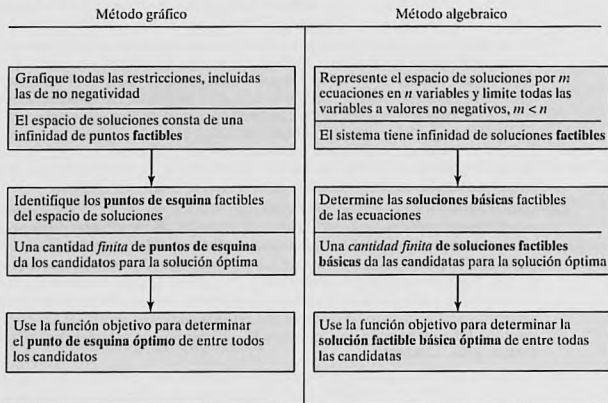
$$x_1 \geq 0, x_2, x_3 \text{ irrestricta}$$

### 3.2 TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA

El desarrollo del método simplex algebraico está basado en ideas transmitidas por la solución gráfica que se muestra en la sección 2.2. La figura 3.1 compara los dos métodos. En el método gráfico el espacio de soluciones es la intersección de los semiplanos que representan las restricciones, y en el método simplex, el espacio de soluciones está representado por  $m$  ecuaciones lineales simultáneas y  $n$  variables no negativas. Podemos visualizar que el espacio de soluciones gráficas tiene una infinidad de puntos de solución, pero ¿cómo sacar una conclusión parecida a partir de la representación algebraica del espacio de soluciones? La respuesta es que, en todas las PL no triviales, la cantidad de ecuaciones  $m$  siempre es menor que la de variables  $n$ , por lo que se obtiene una cantidad infinita de soluciones (siempre que las ecuaciones sean consis-

FIGURA 3.1

Transición de la solución gráfica a la solución algebraica



tes).<sup>2</sup> Por ejemplo, la ecuación  $x + y = 1$  tiene  $m = 1$  y  $n = 2$  y produce una infinitud de soluciones porque cualquier punto sobre la línea recta  $x + y = 1$  es una solución.

En el espacio de soluciones algebraicas (definido por  $m \times n$  ecuaciones,  $m < n$ ), las **soluciones básicas** corresponden a los *puntos de esquina* en el espacio de soluciones gráficas. Se determinan igualando  $n - m$  variables a cero y resolviendo las  $m$  ecuaciones para las  $m$  variables restantes, *siempre que la solución resultante es única*. Esto significa que la cantidad máxima de puntos de esquina es

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Como con los puntos de esquina, las soluciones factibles básicas definen por completo a las candidatas para la solución óptima en el espacio de soluciones algebraicas.

### Ejemplo 3.2-1

Considere la siguiente PL con dos variables

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.2 proporciona el espacio de soluciones gráficas para el problema.

Algebraicamente, el espacio de soluciones de la PL está representado por las siguientes  $m = 2$  ecuaciones y  $n = 4$  variables:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Las soluciones básicas se determinan estableciendo las  $n - m = 4 - 2 = 2$  variables iguales a cero y resolviendo las  $m = 2$  variables restantes. Por ejemplo, si establecemos  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$ , las ecuaciones proporcionan la solución básica única

$$s_1 = 4, s_2 = 5$$

Esta solución corresponde al punto *A* en la figura 3.2 (convéngase de que  $s_1 = 4$  y  $s_2 = 5$  en el punto *A*). Puede determinarse otro punto con  $s_1 = 0$  y  $s_2 = 0$  y resolviendo luego las dos ecuaciones resultantes

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

La solución básica asociada es  $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ , o el punto *C* en la figura 3.2.

<sup>2</sup> Si la cantidad de ecuaciones  $m$  es igual a la de variables  $n$  (y las ecuaciones son consistentes), el sistema tiene exactamente una solución. Si  $m$  es mayor que  $n$ , entonces al menos las ecuaciones  $m - n$  deben ser redundantes.

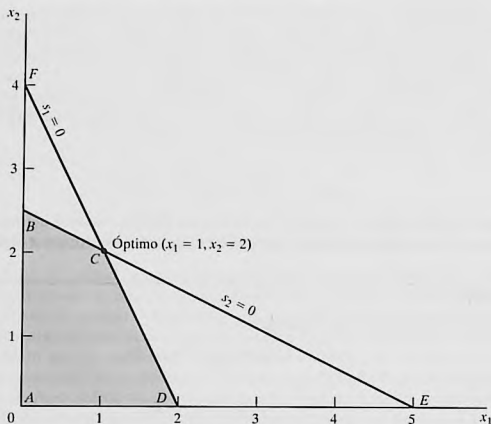


FIGURA 3.2

Espacio de soluciones de PL del ejemplo 3.2-1

Probablemente se pregunte cuáles variables  $n - m$  deben igualarse a cero en busca de un punto de esquina específico. Sin el beneficio del espacio de soluciones gráficas (el cual está disponible a lo sumo sólo con tres variables), no podemos especificar las  $(n - m)$  variables cero asociadas con un punto de esquina dado. Pero eso no nos impide enumerar *todas* los puntos de esquina del espacio de soluciones. Simplemente considere *todas* las combinaciones en las que  $n - m$  variables son iguales a cero y resuelva las ecuaciones resultantes. Una vez hecho, la solución óptima es la solución básica factible (punto de esquina) con el mejor valor objetivo.

En el ejemplo presente tenemos  $C_2^1 = \frac{41}{2121} = 6$  puntos de esquina. Si examinamos la figura 3.2, podemos ver los cuatro puntos de esquina  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Así que, ¿dónde están los dos restantes? De hecho, los puntos  $E$  y  $F$  también son puntos de esquina; pero son *no factibles*, y, por consiguiente, no son candidatos para la solución óptima.

Para completar la transición de la solución gráfica a la algebraica, las  $n - m$  variables cero se conocen como **variables no básicas**. Las  $m$  variables restantes se llaman **variables básicas**, y su solución (obtenida resolviendo las  $m$  ecuaciones) se conoce como **solución básica**. La siguiente tabla muestra todas las soluciones básicas y no básicas de este ejemplo.

Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto de esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, $z$
$(x_1, x_2)$	$(s_1, s_2)$	$(4, 5)$	$A$	Sí	0
$(x_1, s_1)$	$(x_2, s_2)$	$(4, -3)$	$F$	No	—
$(x_1, s_2)$	$(x_2, s_1)$	$(2.5, 1.5)$	$B$	Sí	7.5
$(x_2, s_1)$	$(x_1, s_2)$	$(2, 3)$	$D$	Sí	4
$(x_2, s_2)$	$(x_1, s_1)$	$(5, -6)$	$E$	No	—
$(s_1, s_2)$	$(x_1, x_2)$	$(1, 2)$	$C$	Sí	8

(óptimo)

**Comentarios.** En la ilustración anterior podemos ver que a medida que el tamaño del problema se incrementa, enumerar todos los puntos de esquina se vuelve una tarea prohibitiva. Por ejemplo, para que  $m = 10$  y  $n = 20$ , es necesario resolver  $C_{10}^{20} = 184,756$  conjuntos de  $10 \times 10$  ecuaciones, una tarea abrumadora, sobre todo cuando nos damos cuenta de que una PL de  $(10 \times 20)$  es muy pequeña (las PL reales pueden incluir miles de variables y restricciones). El método simplex atenúa esta carga computacional en forma dramática al investigar sólo un subconjunto de todas las posibles soluciones factibles básicas (puntos de esquina). Esto es lo que hace el algoritmo simplex.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.2A

1. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

suje to a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Exprese el problema en forma de ecuación.  
 (b) Determine todas las funciones básicas del problema, y clasifíquelas como factibles y no factibles.  
 \*(c) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la solución factible básica óptima.  
 (d) Compruebe gráficamente que la solución obtenida en (c) es la solución de PL óptima, y de ese modo se concluye que la solución óptima puede determinarse algebraicamente considerando sólo las soluciones factibles básicas.  
 \*(e) Demuestre cómo se representan las soluciones básicas *no factibles* en el espacio de soluciones gráficas.
2. Determine la solución óptima de cada una de las siguientes PL enumerando todas las soluciones básicas.

(a) Maximizar  $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$

suje to a

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) Minimizar  $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$

suje to a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- \*3. Demuestre algebraicamente que todas las soluciones básicas de la siguiente PL son no factibles.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

$$x_2 \text{ irrestricta}$$

La conversión a la forma de ecuación implica utilizar la sustitución  $x_2 = x_2^- - x_2^+$ . Demuestre que una solución básica no puede incluir a  $x_2^-$  ni a  $x_2^+$  al mismo tiempo.

5. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \text{ no acotada}$$

$$x_2 \geq 0$$

- Determine todas las soluciones factibles básicas del problema.
- Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución básica.
- Resuelva el problema gráficamente, y verifique si la solución obtenida en (c) es la óptima.

### 3.3 MÉTODO SIMPLEX

En lugar de enumerar *todas* las soluciones básicas (puntos de esquina) del problema de PL (como se hizo en la sección 3.2), el método simplex investiga sólo “algunas” de estas soluciones. La sección 3.3.1 describe la naturaleza *iterativa* del método, y la sección 3.3.2 proporciona los detalles computacionales del algoritmo simplex.

### 3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex

La figura 3.3 muestra el espacio de soluciones de la programación lineal del ejemplo 3.2-1. Por lo común, el método simplex se inicia en el origen (punto  $A$ ), donde  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , y el valor objetivo,  $z$ , es cero. La pregunta lógica es si un incremento en  $x_1$  y/o  $x_2$  (o ambas) no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de  $z$ . Podemos responder esta pregunta investigando la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

Un incremento de  $x_1$  o  $x_2$  (o ambas) sobre sus valores actuales de cero *mejorará* el valor de  $z$ . El diseño del método simplex no permite el incremento simultáneo de las variables. En cambio, incrementa *una a la vez*. La variable que va a aumentar es la que tenga mayor grado de *mejora* en  $z$ . En el ejemplo presente, el *grado* de mejora del valor de  $z$  es de 2 unidades para  $x_1$  y de 3 para  $x_2$ . Por lo tanto elegimos  $x_2$  para que crezca (la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas). La figura 3.3 muestra que el valor de  $x_2$  debe incrementarse hasta que se llegue al punto de esquina  $B$  (recordemos que no llegar al punto de esquina  $B$  no es una opción porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina). En el punto  $B$ , el método simplex incrementará el valor de  $x_1$  para llegar al punto de esquina mejorado  $C$ , el cual es el óptimo.

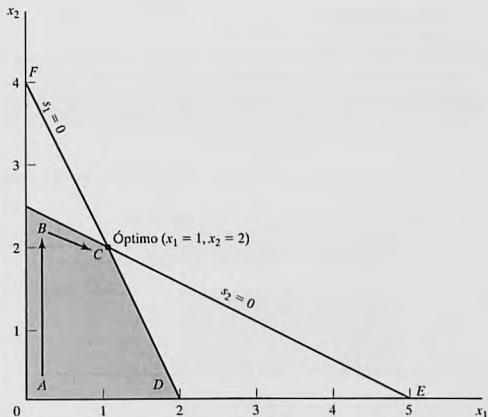


FIGURA 3.3

Proceso iterativo del método simplex

La trayectoria del algoritmo simplex se define como  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una **iteración**. Es importante hacer notar que el método simplex se mueve a lo largo de los **bordes** del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo, es decir, irse directamente de  $A$  a  $C$ .

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3A

1. En la figura 3.3, suponga que la función objetivo se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 4x_2$$

Identifique la trayectoria del método simplex y las variables básicas y no básicas que la definen.

2. Considere la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks dado en la figura 2.2. Identifique la trayectoria del método simplex y las variables no básicas que la definen.
- \*3. Considere el espacio de soluciones PL tridimensional que se muestra en la figura 3.4, cuyos puntos extremos factibles son  $A, B, \dots, J$ .
- (a) ¿Cuáles de los siguientes pares de puntos de esquina no pueden representar iteraciones simplex sucesivas:  $(A, B)$ ,  $(B, D)$ ,  $(E, H)$  y  $(A, I)$ ? Explique la razón.
- (b) Suponga que las iteraciones simplex se inician en  $A$  y que el óptimo ocurre en  $H$ . Indique si alguna de las siguientes trayectorias son *no* legítimas para el algoritmo simplex, y explique la razón.
- (i)  $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H$
- (ii)  $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H$
- (iii)  $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$
4. Para el espacio de soluciones en la figura 3.4 todas las restricciones son del tipo  $\leq$ , y todas las variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son no negativas. Suponga que  $s_1, s_2, s_3$  y  $s_4$  ( $\geq 0$ ) son las holguras asociadas con las restricciones representadas por los planos  $CEIJF$ ,  $BEIHG$ ,  $DFJHG$  e  $IJH$ , respectivamente. Identifique las variables básicas y no básicas asociadas con cada punto de esquina factible del espacio de soluciones.

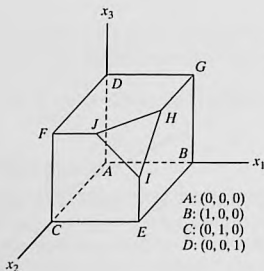


FIGURA 3.4

Espacio de soluciones del problema 3, conjunto 3.2b

5. Para cada una de las funciones objetivo dadas y el espacio de soluciones de la figura 3.4, seleccione la variable no básica que conduce al siguiente punto de esquina simplex, y determine la mejora asociada de  $z$ .

- \*(a) Maximizar  $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
- (b) Maximizar  $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$
- (c) Maximizar  $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$
- (d) Maximizar  $z = x_1 + x_2 + x_3$

### 3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex

En esta sección se explican los detalles de cálculo de una iteración simplex por medio de un ejemplo numérico.

#### Ejemplo 3.3-1

Considere el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) expresado en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \text{ (materia prima } M1) \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \text{ (materia prima } M2) \\ -x_1 + x_2 + s_3 &= 1 \text{ (Límite del mercado)} \\ x_2 + s_4 &= 2 \text{ (Límite de la demanda)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las variables  $s_1, s_2, s_3$  y  $s_4$  son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación escribimos la ecuación objetivo como

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla inicial simplex se representa como sigue:

Básica	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solución	
$z$	1	-5	-4	0	0	0	0	0	Fila $z$
$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila $s_1$
$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila $s_2$
$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1	Fila $s_3$
$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila $s_4$

El diseño de la tabla simplex provee automáticamente la solución en la iteración inicial. La solución se inicia en el origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , por lo que  $(x_1, x_2)$  se definen como las variables no básicas y  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$  como las variables básicas. La variable objetivo  $z$  y las variables básicas

aparecen en la columna de la extrema izquierda (Básica). Los lados derechos de las ecuaciones del modelo dan sus valores, como se muestra en la columna de la extrema derecha (Solución) de la tabla; es decir,  $z = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$ . El resultado puede verse igualando las variables no básicas ( $x_1, x_2$ ) a cero en todas las ecuaciones y también observando la configuración de matriz identidad especial de los coeficientes de las variables básicas (todos los elementos en las diagonales son 1, y todos los elementos fuera de las diagonales son 0).

¿Es óptima la solución inicial? La función objetivo  $z = 5x_1 + 4x_2$  muestra que la solución puede mejorarse si se incrementa el valor de la variable  $x_1$  o de la  $x_2$  no básica por encima de cero. Siguiendo el argumento de la sección 3.3.1,  $x_1$  tiene que incrementarse porque tiene el coeficiente objetivo *más positivo*. De forma equivalente, en la tabla simplex donde la función objetivo aparece como  $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$ , la variable seleccionada es la variable no básica con el coeficiente *más negativo* en la ecuación objetivo. Esta regla define la llamada **condición de optimalidad simplex**. En la terminología del algoritmo simplex,  $x_1$  se conoce como la **variable de entrada** porque ingresa la solución básica.

Si  $x_1$  es la variable de entrada, una de las variables básicas actuales debe salir; es decir, se vuelve no básica a un nivel cero (recordemos que la cantidad de variables no básicas debe ser siempre  $n - m$ ). La mecánica para determinar la **variable de salida** implica calcular las **relaciones** del lado derecho de las ecuaciones (columna *Solución*) con los coeficientes de restricción estrictamente *positivos* (imposibilitando así al cero) bajo la variable de entrada,  $x_1$ , como se muestra en la siguiente tabla:

Básica	$x_1$ entrante	Solución	Relación (o intersección)
$s_1$	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = 4 \leftarrow$ mínimo
$s_2$	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
$s_3$	-1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (denominador negativo, ignorar)
$s_4$	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (denominador cero, ignorar)
Conclusión: $x_1$ entra (en el nivel 4) y $x_2$ sale (en el nivel cero)			

¿Cómo determinan las relaciones calculadas la variable de salida y el valor de la variable de entrada? La figura 3.5 muestra que las relaciones calculadas son en realidad las intersecciones de las líneas de restricción con el eje  $x_1$  (variable de entrada). Podemos ver que el valor de  $x_1$  debe incrementarse hasta la intersección no negativa mínima con el eje  $x_1$  ( $= 4$ ) para alcanzar el punto de esquina  $B$ . Cualquier incremento más allá de  $B$  no es factible. En el punto  $B$ , la variable básica actual  $s_1$  asociada con la restricción 1 asume un valor de cero y se transforma en la **variable de salida**. La regla asociada con las relaciones calculadas se conoce como **condición de factibilidad simplex** porque garantiza la factibilidad de la nueva solución.

El nuevo punto de solución  $B$  se determina "intercambiando" la variable de entrada  $x_1$  y la variable de salida  $s_1$  en la tabla simplex para obtener

Variables no básicas (cero) en  $B$ : ( $s_1, x_2$ )

Variables básicas en  $B$ : ( $x_1, s_2, s_3, s_4$ )

El proceso de intercambio se basa en las **operaciones de filas de Gauss-Jordan**. Identifica la columna de la variable de entrada como **columna pivote** y la fila de la variable de salida como **fila pi-**

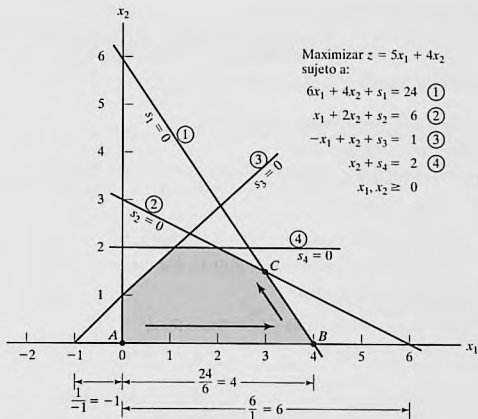


FIGURA 3.5

Interpretación gráfica de las relaciones del método simplex en el modelo de Reddy Mikks

**note.** La intersección de la columna pivote y la fila pivote se conoce como **elemento pivote**. La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

		Entra ↓							
	Básica	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solución
	$z$	1	-5	-4	0	0	0	0	0
Sale ←	$s_1$	0	6	4	1	0	0	0	24
	$s_2$	0	1	2	0	1	0	0	6
	$s_3$	0	-1	1	0	0	1	0	1
	$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Columna pivote

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos.

### 1. Fila pivote

- a. Reemplace la variable de salida en la columna *Básica* con la variable de entrada.
- b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

2. Todas las demás filas, incluyendo  $z$ 

$$\text{Nueva fila} = (\text{Fila actual}) - (\text{Coeficiente de la columna pivote}) \times (\text{Nueva fila pivote})$$

Estos cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Reemplace  $s_1$  en la columna *Básica* con  $x_1$ :

$$\text{Nueva fila } x_1 = \text{Fila } s_1 \text{ actual} \div 6$$

$$= \frac{1}{6}(0 \ 6 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24)$$

$$= (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

2. Nueva fila  $z = \text{Fila } z \text{ actual} - (-5) \times \text{Nueva fila } x_1$ 

$$= (1 \ -5 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) - (-5) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (1 \ 0 \ -\frac{2}{3} \ \frac{5}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 20)$$

3. Nueva fila  $s_2 = \text{Fila } s_2 \text{ actual} - (1) \times \text{Nueva fila } x_1$ 

$$= (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 6) - (1) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ \frac{4}{3} \ -\frac{1}{6} \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)$$

4. Nueva fila  $s_3 = \text{Fila } s_3 \text{ actual} - (-1) \times \text{Nueva fila } x_1$ 

$$= (0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) - (-1) \times (0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ \frac{5}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 1 \ 0 \ 5)$$

5. Nueva fila  $s_4 = \text{Fila } s_4 \text{ actual} - (0) \times \text{Nueva fila } x_1$ 

$$= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) - (0)(0 \ 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)$$

$$= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$$

La nueva solución básica es  $(x_1, s_2, s_3, s_4)$ , y la nueva tabla es

			↓						
	Básica	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solución
	$z$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	$x_1$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
←	$s_2$	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	$s_3$	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	$s_4$	0	0	1	0	0	0	1	2

Observe que la estructura de la nueva tabla es similar a la de la tabla inicial, en el sentido de que los coeficientes de las restricciones de la variable básica forman una matriz de identidad. Por consiguiente, cuando igualamos las nuevas variables no básicas  $x_2$  y  $s_1$  a cero, la columna

*Solución* de forma automática da la nueva solución ( $x_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 5, s_4 = 2$ ).<sup>3</sup> Este "acondicionamiento" de la tabla es el resultado de la aplicación de las operaciones de filas de Gauss-Jordan. El nuevo valor objetivo es  $z = 20$ , el cual es consistente con

$$\begin{aligned} \text{Nueva } z &= \text{Anterior } z + \text{Nuevo valor de } x_1 \times \text{su coeficiente objetivo} \\ &= 0 + 4 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

Por otra parte,  $z = 4 \times \text{valor de } x_1 + 0 \times \text{valor de } s_2 + 0 \times \text{valor de } s_3 + 0 \times \text{valor de } s_4 = 4 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 5 + 0 \times 2 = 20$ .

En la última tabla, la *condición de optimalidad* muestra que  $x_2$  es la variable de entrada. La condición de factibilidad produce la siguiente información:

Básica	Entrante $x_2$	Solución	Relación
$x_1$	$\frac{2}{3}$	4	$x_2 = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
$s_2$	$\frac{1}{3}$	2	$x_2 = 2 \div \frac{1}{3} = 1.5$ (mínima)
$s_3$	$\frac{5}{3}$	5	$x_2 = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
$s_4$	1	2	$x_2 = 2 \div 1 = 2$

Por lo tanto,  $s_2$  sale de la solución básica, y el nuevo valor de  $x_2$  es 1.5. El incremento correspondiente en  $z$  es  $\frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1$ , el cual da la nueva  $z = 20 + 1 = 21$ .

Si reemplazamos  $s_2$  en la columna *Básica* con la  $x_2$  de entrada, se aplican las siguientes operaciones de filas de Gauss-Jordan:

1. Nueva fila pivote  $x_2 = \text{Fila } s_2 \text{ actual} \div \frac{1}{3}$
2. Nueva fila  $z = \text{Fila } z \text{ actual} - (-\frac{2}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
3. Nueva fila  $x_1 = \text{Fila } x_1 \text{ actual} - (\frac{2}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
4. Nueva fila  $s_3 = \text{Fila } s_3 \text{ actual} - (\frac{5}{3}) \times \text{Nueva fila } x_2$
5. Nueva fila  $s_4 = \text{Fila } s_4 \text{ actual} - (1) \times \text{Nueva fila } x_2$

Estos cálculos producen la siguiente tabla:

Básica	$z$	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Solución
$z$	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
$x_1$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
$x_2$	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
$s_3$	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
$s_4$	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

<sup>3</sup> A lo largo de mi experiencia académica, he notado que si bien los estudiantes son capaces de realizar los tediosos cálculos del método simplex, al final algunos no pueden decir cuál es la solución. Para ayudar a vencer esta dificultad potencial, se hace un esfuerzo por "leer" la solución de la PL por la tabla.

Según la condición de optimalidad, *ninguno* de los coeficientes de la fila  $z$  son negativos. De ahí que la última tabla sea óptima.

La solución óptima puede leerse en la tabla simplex de la siguiente manera. Los valores óptimos de las variables en la columna *Basic* aparecen en la columna *Solución* del lado derecho y se interpretan como sigue:

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
$x_1$	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
$x_2$	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
$z$	21	La utilidad diaria es de \$21,000

La solución también da el estado de los recursos. Un recurso se designa como **escaso** si la variable de holgura asociada es cero, es decir, las actividades (variables) del modelo consumieron el recurso por completo. De lo contrario, si la holgura es positiva, entonces el recurso es **abundante**. La siguiente tabla clasifica las restricciones del modelo:

Recurso	Valor de holgura	Estado
Materia prima, $M_1$	$s_1 = 0$	Escaso
Materia prima, $M_2$	$s_2 = 0$	Escaso
Límite del mercado	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de la demanda	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

**Comentarios.** La tabla simplex ofrece mucha información adicional que incluye lo siguiente:

1. *Análisis de sensibilidad*, el cual determina las condiciones que mantendrán la solución actual sin cambios.
2. *Análisis postóptimo*, el cual determina la nueva solución óptima cuando cambian los datos del modelo.

La sección 3.6 se ocupa del análisis de sensibilidad. El análisis postóptimo se trata en el capítulo 4.

### Momento de TORA.

Los cálculos de Gauss-Jordan son tediosos, voluminosos y, sobre todo, aburridos. No obstante, esto no tiene importancia porque en la práctica la computadora realiza estos cálculos. Lo importante es que entienda *cómo* funciona el método simplex. La opción interactiva *guiada para el usuario* de TORA (con retroalimentación instantánea), puede ser de ayuda porque le permite especificar el curso de los cálculos simplex (es decir, determinar las variables de entrada y de salida) sin el agobio de los cálculos de Gauss-Jordan. Para utilizar TORA con el problema de Reddy Mikks, ingrese el modelo y luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione los comandos Solve  $\Rightarrow$  Algebraic  $\Rightarrow$  Iterations  $\Rightarrow$  All-Slack. (La selección All-Slack indica que la solución básica inicial se compone de sólo variables de holgura. Las opciones restantes se presentarán en las secciones 3.4, 4.3, y 7.4-2). A continuación, haga clic en el botón Go To Output Screen. Puede generar una o todas las iteraciones haciendo clic en las opciones Next Iteration o bien All Iterations. Si opta por generar las iteraciones de una en una, puede es-

pecificar de manera interactiva las variables de entrada y de salida haciendo clic en los encabezados de sus columnas y filas respectivas. Si sus selecciones son correctas, la columna se torna de color verde y la fila de color rojo. De lo contrario, aparece un mensaje de error.

---

### 3.3.3 Resumen del método simplex

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso de maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que *máx z* equivale a *mín (-z)*. En cuanto a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

**Condición de optimalidad.** La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila *z*. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila *z* son no negativos (no positivos).

**Condición de factibilidad.** Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la relación mínima no negativa con el denominador *estrictamente positivo*. Los vínculos se rompen arbitrariamente.

#### *Operaciones de filas de Gauss-Jordan*

##### 1. *Fila pivote*

- a. Reemplace la variable de entrada en la columna *Básica* con la variable de entrada.
- b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

##### 2. *Todas las demás filas, incluida la z*

Nueva fila = (Fila actual) – (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nueva fila pivote).

Los pasos del método simplex son

**Paso 0.** Determine la solución factible básica inicial.

**Paso 1.** Seleccione una *variable de entrada* utilizando la condición de optimalidad. Deténgase si no hay variable de entrada; la última condición es óptima. De otro modo, prosiga con el paso 2.

**Paso 2.** Seleccione una *variable de salida* utilizando la condición de factibilidad.

**Paso 3.** Aplique los cálculos de Gauss-Jordan para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3B

1. Este problema está diseñado para reforzar su comprensión de la condición de factibilidad simplex. En la primera tabla del ejemplo 3.3-1 utilizamos la prueba de relación mínima (no negativa) para determinar la variable de salida. La condición garantiza la factibilidad (todos los nuevos valores de las variables básicas permanecen no negativos según lo

estipulado por la definición de la PL). Para demostrar este punto, haga que  $s_2$ , en lugar de  $s_1$ , salga de la solución básica, y realice los cálculos de Gauss-Jordan. En la tabla simplex resultante,  $s_1$  es no factible ( $= -12$ ).

2. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo.

(a) Maximizar  $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$ .

(b) Maximizar  $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$ .

(c) Maximizar  $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$ .

(d) Minimizar  $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$ .

- \*3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_4 + x_6 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_7 = 3$$

$$-x_1 + x_3 - 2x_4 + x_8 = 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_8 \geq 0$$

Sean  $x_5, x_6, \dots, x_8$  una solución factible básica inicial dada. Suponga que  $x_1$  se vuelve básica. ¿Cuáles de las variables básicas dadas deben volverse no básicas al nivel cero para garantizar que todas las variables permanezcan no negativas, y cuál es el valor de  $x_1$  en la nueva solución? Repita este procedimiento para  $x_2, x_3$  y  $x_4$ .

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeto a

$$5x_1 + x_2 = 4$$

$$6x_1 + x_3 = 8$$

$$3x_1 + x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (a) Resuelva el problema *por inspección* (no utilice las operaciones de filas de Gauss-Jordan), y justifique la respuesta en función de las soluciones básicas del método simplex.
- (b) Repita (a) suponiendo que la función objetivo requiere minimizar  $z = x_1$ .
5. Resuelva el siguiente problema *por inspección*, y justifique el método de solución en función de las soluciones básicas del método simplex.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(Sugerencia: Una solución básica se compone de sólo una variable.)

6. La siguiente tabla representa una iteración simplex específica. Todas las variables son no negativas. La tabla no es óptima en cuanto a maximización o minimización. Por lo tanto, cuando una variable no básica entra en la solución, puede o incrementar o reducir  $z$ , o bien dejarla como estaba, según los parámetros de la variable no básica de entrada.

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	Solución
$z$	0	-5	0	4	-1	-10	0	0	620
$x_8$	0	3	0	-2	-3	-1	5	1	12
$x_3$	0	1	1	3	1	0	3	0	6
$x_1$	1	-1	0	0	6	-4	0	0	0

- (a) Clasifique las variables como básicas y no básicas, y proporcione los valores actuales de todas las variables.
- (b) Suponiendo que el problema fuera del tipo de maximización, identifique las variables no básicas que tienen el potencial de mejorar el valor de  $z$ . Si cada una de esas variables entra en la solución básica, determine la variable de salida asociada, si la hay, y el cambio asociado de  $z$ . No utilice operaciones de filas de Gauss-Jordan.
- (c) Repita (b) suponiendo que el problema fuera del tipo de minimización.
- (d) ¿Cuál variable o variables no cambiarán el valor de  $z$  al seleccionarlas para que entren en la solución?
7. Considere el espacio de soluciones bidimensional que se muestra en la figura 3.6.

- (a) Suponga que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Si las iteraciones simplex se inician en el punto  $A$ , identifique la trayectoria que conduce al punto  $E$  óptimo.

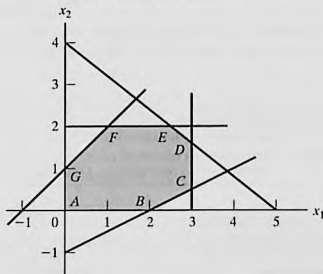


FIGURA 3.6

Espacio de soluciones para el problema 7, conjunto 3.3b

- (b) Determine la variable de entrada, las relaciones correspondientes de la condición de factibilidad, y el cambio del valor de  $z$ , suponiendo que la iteración inicial ocurre en el punto  $A$  y que la función objetivo la da

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_2$$

- (c) Repita (b), suponiendo que la función objetivo fuera

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2$$

8. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 16x_1 + 15x_2$$

suje to a

$$40x_1 + 31x_2 \leq 124$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Resuelva el problema mediante el método simplex, donde la variable de entrada es la variable no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila  $z$ .
- (b) Resuelva el problema mediante el algoritmo simplex, seleccionando siempre la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente *menos* negativo en la fila  $z$ .
- (c) Compare la cantidad de iteraciones en (a) y (b). ¿Conduce la selección de la variable de entrada como las variables no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila  $z$  a un menor número de iteraciones? ¿Qué conclusión puede hacerse con respecto a la condición de optimalidad?
- (d) Suponga que el sentido de optimización se cambia a minimización al multiplicar  $z$  por  $-1$ . ¿Cómo afecta este cambio a las iteraciones de simplex?
- \*9. En el ejemplo 3.3-1, muestre cómo puede determinarse el segundo mejor valor óptimo de  $z$  desde la tabla óptima.
10. ¿Puede ampliar el procedimiento del problema 9 para determinar el tercer mejor valor óptimo de  $z$ ?
11. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradora y mochilas. La elaboración incluye piel y materiales sintéticos, y la piel es la materia prima escasa. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su consumo por los tres productos y las utilidades por unidad.

Recurso	Requerimientos de recursos por unidad			Disponibilidad diaria
	Bolsos de mano	Bolsos para rasuradora	Mochilas	
Piel (pies <sup>2</sup> )	2	1	3	42 pies <sup>2</sup>
Costura (h)	2	1	2	40 h
Acabado (h)	1	.5	1	45 h
Precio de venta (\$)	24	22	45	

- (a) Formule el problema como un programa lineal, y halle la solución óptima (utilice TORA, Excel, Solver o AMPL).
- (b) A partir de la solución óptima, determine el estado de cada recurso.
12. *Experimento con TORA.* Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 4$$

$$5x_1 - 2x_2 \quad + 6x_4 \leq 8$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-x_1 \quad + x_3 + 2x_4 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (a) Aplique la opción de iteraciones de TORA para determinar la tabla óptima.
- (b) Seleccione cualquier variable no básica para que “entre” en la solución básica, y haga clic en la opción Next Iteration para producir la iteración asociada. ¿Cómo se compara el nuevo valor objetivo con el óptimo en (a)? La idea es demostrar que la tabla en (a) es óptima porque ninguna de las variables no básicas puede mejorar el valor objetivo.
13. *Experimento con TORA.* En el problema 12, utilice TORA para determinar la siguiente mejor solución óptima.

### 3.4 SOLUCIÓN ARTIFICIAL INICIAL

Como se demostró en el ejemplo 3.3-1, las PL en las que todas las restricciones son ( $\leq$ ) con lados derechos no negativos ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones ( $=$ ) o ( $\geq$ ) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar PLs de “mal comportamiento” con restricciones ( $=$ ) y ( $\geq$ ) es utilizar **variables artificiales** que desempeñan el papel de holguras en la primera iteración, y que luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: el método  $M$ , y el método de dos fases.

#### 3.4.1 Método $M^4$

El método  $M$  se inicia con la PL en forma de ecuación (sección 3.1). Si la ecuación  $i$  no tiene una holgura (o una variable que pueda desempeñar el papel de una), se agrega una variable artificial,  $R_i$ , para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere un “artificio” de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima (suponiendo que el problema tenga una solución factible). La meta deseada se logra *penalizando* estas variables en la función objetivo utilizando la siguiente regla:

<sup>4</sup> El método  $M$ , una de las técnicas de PL más antiguas, nunca se utiliza en códigos comerciales debido a su inherente error de redondeo. En su lugar se prefiere el método de dos fases (sección 3.4.2). Sin embargo, el uso de penalizaciones, como lo anticipa el método  $M$ , es un importante concepto en muchas instancias de modelado de OR.

**Regla de penalización para variables artificiales**

Dado  $M$ , un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente ( $M \rightarrow \infty$ )), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** apropiada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

**Ejemplo 3.4-1**

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Si utilizamos  $x_3$  como variable de superávit en la segunda restricción y  $x_4$  como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura,  $x_4$ , pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales  $R_1$  y  $R_2$  en las primeras dos ecuaciones y las penalizamos en la función objetivo con  $MR_1 + MR_2$  (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La solución básica inicial es  $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$

Desde un punto de vista de cálculo, la solución del problema con la computadora requiere que reemplace  $M$  con un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, incluidas las siete ediciones de este libro,  $M$  se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad agregada innecesaria la cual puede evitarse sustituyendo

un valor numérico apropiado en lugar de  $M$  (lo que de cualquier modo tenemos que hacer cuando usamos la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar  $M$  algebraicamente y utilizar una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de  $M$  debemos utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización  $M$  debe ser lo bastante grande *con respecto a los coeficientes objetivos originales* para forzar a las variables originales a ser cero en la solución óptima. Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PLs, no es conveniente que  $M$  sea innecesariamente grande ya que ello nos puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de  $x_1$  y  $x_2$  son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer  $M = 100$ .<sup>5</sup>

Utilizando  $M = 100$ , la tabla simplex de inicio se da como sigue (por comodidad, la columna  $z$  se elimina porque no cambia en todas las iteraciones):

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$R_2$	$x_4$	Solución
$z$	-4	-1	0	-100	-100	0	0
$R_1$	3	1	0	1	0	0	3
$R_2$	4	3	-1	0	1	0	6
$x_4$	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila  $z$  debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila  $z$  en la tabla en este momento muestra  $z = 0$ . Sin embargo, dada la solución no básica  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , la solución básica actual es  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 6$  y  $x_4 = 4$ , la cual da  $z = 100 \times 3 + 100 \times 6 + 4 \times 0 = 900$ . Esta inconsistencia se deriva del hecho de que los coeficientes de  $R_1$  y  $R_2$  no son cero ( $-100, -100$ ) en la fila  $z$  (compare con la solución de inicio de total holgura en el ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes en la fila  $z$  de las holguras son cero).

Para eliminar la inconsistencia, tenemos que sustituir  $R_1$  y  $R_2$  en la fila  $z$  por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (100 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

(Convéznase de que esta operación es la misma que sustituir  $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$  y  $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$  en la fila  $z$ .)

Por tanto, la tabla modificada (¡compruébelo!) es:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$R_2$	$x_4$	Solución
$z$	696	399	-100	0	0	0	900
$R_1$	3	1	0	1	0	0	3
$R_2$	4	3	-1	0	1	0	6
$x_4$	1	2	0	0	0	1	4

<sup>5</sup>Técnicamente, el método  $M$  no necesita sustituir  $M$  numéricamente. En su lugar, el coeficiente en la fila objetivo  $i$ -ésimo en una tabla simplex se reduce a calcular las constantes  $a_i$  y  $b_i$  en la expresión algebraica  $a_i M + b_i$ . La comparación de las dos expresiones algebraicas se basará entonces en condiciones que implican sólo las constantes  $a_i$  y  $b_i$ . La razón por la que no se utiliza en la práctica es la potencialmente tremenda carga de cómputo asociada con el cálculo (y comparación) de las constantes  $a_i$  y  $b_i$ .

El resultado es que  $R_1$  y  $R_2$  ahora se sustituyen (tienen coeficientes cero) en la fila  $z$  con  $z = 900$ , como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex, tal como se explicó en la sección 3.3.2. Dado que la función objetivo se minimiza, la variable  $x_1$  que tiene el coeficiente más *positivo* en la fila  $z$  ( $=696$ ) entra en la solución. La relación mínima de la condición de factibilidad específica a  $R_1$  como la variable de salida (¡compruébelo!).

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las conocidas operaciones de Gauss-Jordan.

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$R_2$	$x_4$	Solución
$z$	0	167	-100	-232	0	0	204
$x_1$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
$R_2$	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
$x_4$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que  $x_1$  y  $R_2$  son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo  $x_1 = \frac{2}{5}$ ,  $x_2 = \frac{9}{5}$ ,  $z = \frac{17}{5}$  (¡compruébelo con TORA!).

Observe que las variables artificiales  $R_1$  y  $R_2$  se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

**Comentarios.** El uso de la penalización  $M$  no forzará la variable artificial a cero en la iteración simplex final si la PL no tiene una solución factible (es decir, las restricciones no pueden satisfacerse al mismo tiempo). En este caso, la iteración simplex final incluirá al menos una variable artificial con un valor positivo. En la sección 3.5.4 se explica esta situación.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4A

- Complete las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 con cálculos manuales y obtenga la solución óptima.
- Experimento con TORA.* Genere las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 utilizando el módulo Iterations  $\Rightarrow$  Método  $M$  de TORA (archivo *toraEx3.4-1.txt*). Compare el efecto de utilizar  $M = 1$ ,  $M = 10$ , y  $M = 1000$  en la solución. ¿Qué conclusión se puede sacar de este experimento?
- En el ejemplo 3.4-1, identifique la tabla de inicio en cada uno de los siguientes casos (independientes) y desarrolle la fila  $z$  asociada después de sustituir todas las variables artificiales:
  - La tercera restricción es  $x_1 + 2x_2 \geq 4$ .
  - La segunda restricción es  $4x_1 + 3x_2 \leq 6$ .
  - La segunda restricción es  $4x_1 + 3x_2 = 6$ .
  - La función objetivo es maximizar  $z = 4x_1 + x_2$ .

4. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En cada uno de los siguientes problemas, desarrolle la fila  $z$  después de sustituir las variables artificiales:

- (a) Maximizar  $z = 5x_1 + 6x_2$  sujeto a (1), (3) y (4).  
 (b) Maximizar  $z = 2x_1 + 7x_2$  sujeto a (1), (2) (4) y (5).  
 (c) Minimizar  $z = 3x_1 + 6x_2$  sujeto a (3), (4) y (5).  
 (d) Minimizar  $z = 4x_1 + 6x_2$  sujeto a (1), (2) y (5).  
 (e) Minimizar  $z = 3x_1 + 2x_2$  sujeto a (1) y (5).
5. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resuelva el problema con cada una de las siguientes funciones objetivo:

- (a) Maximizar  $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ .  
 (b) Minimizar  $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$ .  
 (c) Maximizar  $z = x_1 + 2x_2 + x_3$ .  
 (d) Minimizar  $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$ .
- \*6. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema con  $x_1$  y  $x_4$  como las variables básicas de inicio y sin utilizar variables artificiales. (Sugerencia:  $x_3$  y  $x_4$  desempeñan el papel de variables holgura. La diferencia principal es que tienen coeficientes objetivo no cero.)

7. Resuelva el siguiente problema con  $x_3$  y  $x_4$  como variables factibles básicas de inicio. Como en el problema 6, *no* utilice variables artificiales.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

8. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La variable  $x_3$  desempeña el papel de una holgura. Por lo tanto, no se requiere ninguna variable artificial en la primera restricción. En la segunda restricción, se requiere una variable artificial  $R$ . Resuelva el problema con  $x_3$  y  $R$  como variables de inicio.

9. Demuestre que el método  $M$  llegará a la conclusión de que el siguiente problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

### 3.4.2 Método de dos fases

En el método  $M$ , el uso de la penalización,  $M$ , puede conducir a un error de redondeo. El método de dos fases elimina el uso de la constante  $M$ . Como su nombre lo indica, el método resuelve la PL en dos fases; en la fase I se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se invoca la fase II para resolver el problema original.

---

#### Resumen del método de dos fases

**Fase I.** Ponga el problema en forma de ecuación y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones (exactamente como en el método  $M$ ), para tener la certeza de una solución básica. A continuación, determine una solución básica de la ecuación resultante que *siempre* minimice la suma de las variables artificiales, independientemente de si la PL es de maximización o minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, si el valor mínimo es cero, prosiga con la fase II.

**Fase II.** Use la solución factible de la fase I como una solución factible básica inicial para el problema *original*.

---

**Ejemplo 3.4-2**

Utilizamos el mismo problema del ejemplo 3.4-1.

*Fase I*

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La tabla asociada es

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$R_2$	$x_4$	Solución
$r$	0	0	0	-1	-1	0	0
$R_1$	3	1	0	1	0	0	3
$R_2$	4	3	-1	0	1	0	6
$x_4$	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método  $M$ ,  $R_1$  y  $R_2$  se sustituyen en la fila  $r$  mediante las siguientes operaciones de filas:

$$\text{Nueva fila } r = \text{Anterior fila } r + (1 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

La nueva fila  $r$  se utiliza para resolver la fase I del problema, la cual da por resultado la siguiente tabla óptima (compruébelo con la opción Iterations  $\Rightarrow$  Two fase Method): de TORA:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$R_2$	$x_4$	Solución
$r$	0	0	0	-1	-1	0	0
$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
$x_4$	0	0	1	1	-1	1	1

Como el mínimo  $r = 0$ , la fase I produce la solución factible básica  $x_1 = \frac{3}{5}$ ,  $x_2 = \frac{6}{5}$  y  $x_4 = 1$ . En este punto, las variables artificiales ya completaron su misión, y podemos eliminar sus columnas de la tabla y continuar con la fase II.

*Fase II*

Después de eliminar las columnas artificiales, escribimos el problema *original* como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sueto a

$$x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{3}{5}$$

$$x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{6}{5}$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En esencia, la fase I ha transformado las ecuaciones de restricciones originales de tal forma que proporciona una solución factible básica inicial para el problema, si es que existe una. La tabla asociada con la fase II del problema es por consiguiente

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
$z$	-4	-1	0	0	0
$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
$x_4$	0	0	1	1	1

Una vez más, como las variables básicas  $x_1$  y  $x_2$  tienen coeficientes diferentes a cero en la fila  $z$ , deben ser sustituidas, mediante las siguientes operaciones.

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (4 \times \text{fila } x_1 + 1 \times \text{fila } x_2)$$

La tabla inicial de la fase II es por consiguiente

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
$z$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
$x_4$	0	0	1	1	1

Como estamos minimizando,  $x_3$  debe entrar en la solución. La aplicación del método simplex producirá el óptimo en una iteración (compruébelo con TORA).

**Comentarios.** La eliminación de las variables artificiales y sus columnas al final de la fase I sólo puede ocurrir cuando todas son *no básicas* (como lo ilustra el ejemplo 3.4-2). Si una o más variables son *básicas* (al nivel *cero*) al final de la fase I, entonces su eliminación requiere los siguientes pasos adicionales:

**Paso 1.** Seleccione una variable artificial cero que salga de la solución básica y designe su fila como *fila pivote*. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica (y no ar-

tificial) con un coeficiente *diferente de cero* (positivo o negativo) en la fila pivote. Realice la iteración simplex asociada.

- Paso 2.** Elimine la columna de la variable artificial (que acaba de salir) de la tabla. Si ya se eliminaron todas las variables artificiales, continúe con la fase II. De lo contrario, regrese al paso 1.

La lógica detrás del paso I es que la factibilidad de las variables básicas restantes no se verá afectada cuando una variable artificial cero se vuelva no básica independientemente de si el elemento pivote es positivo o negativo. Los problemas 5 y 6, conjunto 3.4b ilustran esta situación. El problema 7 da un detalle adicional sobre los cálculos de la fase I.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4B

- \*1. En la fase I, si la PL es del tipo de maximización, explique por qué no maximiza la suma de las variables artificiales en la fase I.
2. Para cada uno de los casos del problema 4, conjunto 3.4a, escriba la función objetivo correspondiente en la fase I.
3. Resuelva el problema 5, conjunto 3.4a, por el método de dos fases.
4. Escriba la fase I para el siguiente problema, y luego resuélvalo (con TORA por comodidad) para demostrar que el problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

suje to a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

suje to a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que la fase I terminará con una variable artificial *básica* en el nivel cero (puede utilizar TORA por comodidad).
  - (b) Elimine la variable artificial cero antes de iniciar la fase II; luego realice las iteraciones.
6. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a) Demuestre que la fase I termina con dos variables artificiales cero en la solución básica (use TORA por comodidad).
- (b) Demuestre que cuando se aplica el procedimiento del problema 5(b) al final de la fase I, sólo una de las dos variables artificiales cero puede hacerse no básica.
- (c) Demuestre que la restricción original asociada con la variable artificial cero que no puede hacerse básica en (b) debe ser redundante; por consiguiente, su fila y columnas pueden eliminarse al inicio de la fase II.

\*7. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La tabla simplex óptima al final de la fase I es

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$R$	Solución
$r$	-5	0	-2	-1	-4	0	0
$x_2$	2	1	1	0	1	0	2
$R$	-5	0	-2	-1	-4	1	0

Explique por qué las variables no básicas  $x_1, x_3, x_4$  y  $x_5$  nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. Por consiguiente, concluimos que sus columnas pueden eliminarse antes de que iniciemos la fase II. En esencia, la eliminación de estas variables reduce las ecuaciones de restricción del problema a  $x_2 = 2$ , lo que indica que es necesario realizar la fase II en este problema.

8. Considere el modelo de PL

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$

$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre cómo pueden modificarse las desigualdades para un conjunto de ecuaciones que requiere el uso de sólo una variable artificial (en lugar de dos).

### 3.5 CASOS ESPECIALES EN EL MÉTODO SIMPLEX

Esta sección considera cuatro casos especiales que surgen al aplicar el método simplex.

1. Degeneración
2. Óptimos alternativos
3. Soluciones no acotadas
4. Soluciones no existentes (o no factibles)

Para concluir esta sección se presenta una explicación *teórica* de tales situaciones, e incluso se interpreta el significado de estos casos especiales tomando como tema un problema de la vida real.

#### 3.5.1 Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede presentar un empate por la relación mínima, el cual puede romperse arbitrariamente. Cuando esto sucede, al menos una variable *básica* será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución está **degenerada**.

La degeneración puede hacer que las iteraciones simplex ocurran de forma indefinida en **ciclos**, y que el algoritmo nunca se termine. La condición también revela que el modelo tiene por lo menos una restricción *redundante* (vea también el comentario 2 después de este ejemplo).

El siguiente ejemplo explica los impactos prácticos y teóricos de la degeneración.

---

#### Ejemplo 3.5-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizando las variables de holgura  $x_3$  y  $x_4$ , las tablas de solución son

En la iteración 0,  $x_3$  y  $x_4$  empatan como la variable de salida, lo que provoca degeneración en la iteración 1 porque la variable  $x_4$  asume un valor cero. El óptimo se alcanza en una iteración más.

Iteración	Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
0	$z$	-3	-9	0	0	0
$x_2$ entra	$x_3$	1	4	1	0	8
$x_3$ sale	$x_4$	1	2	0	1	4
1	$z$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
$x_1$ entra	$x_2$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
$x_4$ sale	$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	$z$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptimo)	$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	$x_1$	1	0	-1	2	0

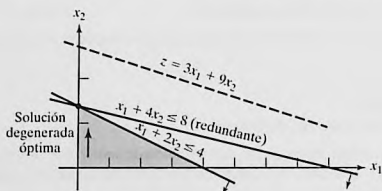


FIGURA 3.7  
Degeneración de la programación lineal en el ejemplo 3.5-1

### Comentarios.

1. ¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Al examinar la solución gráfica por el punto óptimo ( $x_1 = 0, x_2 = 2$ ). Como éste es un problema bidimensional, el punto está *sobredeterminado*, y una de las restricciones es redundante.<sup>6</sup> En la práctica, el simple conocimiento de que algunos recursos son superfluos puede ser valioso durante la fase de implementación de la solución. La información también permite descubrir irregularidades en la construcción del modelo. Por desgracia, no existen técnicas de cómputo eficientes para identificar restricciones redundantes directamente desde la tabla.
2. Desde el punto de vista teórico, la degeneración puede provocar **ciclado**. En las iteraciones simplex 1 y 2, el valor objetivo no mejora ( $z = 180$ ), y por lo tanto es posible que el método simplex entre en una secuencia repetitiva de iteraciones que nunca mejoran el valor objetivo ni satisfacen la condición de optimalidad (vea el problema 4, conjunto 3.5a). Aunque haya métodos para eliminar el ciclado, éstos reducen drásticamente los cálculos.<sup>7</sup>
3. Aun cuando quizá un modelo de PL no se inicie con restricciones redundantes (en el sentido directo que se muestra en la figura 3.7), el error de redondeo provocado por la computadora en realidad puede crear condiciones parecidas a la degeneración durante el curso del proceso de solución de una PL de la vida real. En esos casos las iteraciones se “detendrán” en un punto de solución, como si imitaran un ciclado. Los códigos comerciales tratan de aligerar el problema al perturbar periódicamente los valores de las variables básicas (para más detalles sobre cómo se desarrollan los códigos comerciales vea la sección 3.7).

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5A

- \*1. Considere el espacio de soluciones gráficas que se muestra en la figura 3.8. Suponga que las iteraciones simplex se inician en  $A$  y que la solución óptima ocurre en  $D$ . Además, suponga que la función objetivo se define de modo que en  $A$ ,  $x_1$  ingresa primero la solución.
- (a) Identifique (en la gráfica) los puntos de esquina que definen la trayectoria del método simplex hacia el punto óptimo.
  - (b) Determine el número máximo posible de iteraciones simplex necesarias para alcanzar la solución óptima, suponiendo que no hay ciclado.

<sup>6</sup> Por lo general la redundancia implica que las restricciones pueden eliminarse sin afectar el espacio de soluciones factible. Un ejemplo a veces citado es  $x + y \leq 1, x \geq 1, y \geq 0$ , donde la eliminación de cualquier restricción cambiará el espacio factible desde un punto único a una región. Basta decir que esta condición es cierta sólo si el espacio de soluciones se compone de un solo punto factible, una ocurrencia sumamente improbable en PL grandes (en la vida real).

<sup>7</sup> Vea Bland R., “New Finite Pivoting for the Simplex Method”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm., 2, págs. 103-107, 1977.

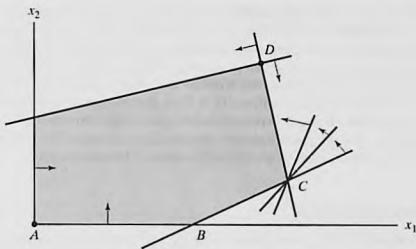


FIGURA 3.8

Espacio de soluciones del problema 1, conjunto 3.5a

2. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Demuestre que las iteraciones simplex asociadas son temporalmente degeneradas (puede utilizar TORA por comodidad).
- (b) Verifique el resultado resolviendo el problema con el módulo gráfico de TORA.
3. *Experimento con TORA.* Considere la PL en el problema 2.
- (a) Use TORA para generar las iteraciones simplex. ¿Cuántas iteraciones se requieren para alcanzar el óptimo?
- (b) Intercambie las restricciones (1) y (3) y vuelva a resolver el problema con TORA. ¿Cuántas iteraciones se requieren para resolverlo?
- (c) Explique por qué los números de iteraciones en (a) y (b) son diferentes.
4. *Experimento con TORA.* Considere la siguiente PL (escrita por E.M. Beale para demostrar el ciclado):

$$\text{Maximizar } z = \frac{1}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeto a

$$\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En el menú SOLVE/MODIFY de TORA, seleccione las opciones Solve  $\Rightarrow$  Algebraic  $\Rightarrow$  Iterations  $\Rightarrow$  All-slack. A continuación, "recorra" las iteraciones simplex sucesivas por medio del comando Next iteration (no utilice All iterations, porque entonces el método simplex entrará en un proceso de ciclado durante un tiempo indefinido). Notará que la solución factible básica inicial con todas las holguras en la iteración 0 reaparecerá de forma idéntica en la iteración 6. Este ejemplo ilustra la ocurrencia de ciclado en las iteraciones simplex y la posibilidad de que el algoritmo nunca converja hacia la solución óptima. (Lo interesante en este ejemplo es que si todos los coeficientes en esta PL se convierten en enteros, el ciclado no ocurre. ¡Haga la prueba!).

### 3.5.2 Óptimos alternativos

Un problema de PL puede tener una cantidad infinita de *óptimos alternativos* cuando la función objetivo es paralela a una restricción *obligatoria* no redundante (es decir, una restricción que se satisface como una ecuación en la solución óptima). El siguiente ejemplo demuestra la importancia práctica de tales soluciones.

#### Ejemplo 3.5-2 (Cantidad infinita de soluciones)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.9 demuestra cómo pueden surgir óptimos alternativos en el modelo de PL cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria. Cualquier punto sobre el segmento de línea BC representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo  $z = 10$ .

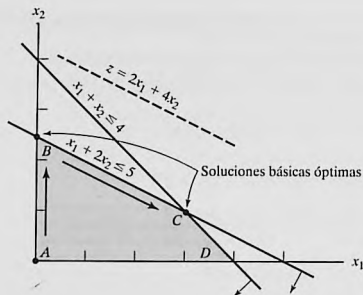


FIGURA 3.9

Óptimos alternativos de PL en el ejemplo 3.5-2

Las iteraciones del modelo se dan en la siguiente tabla.

Iteración	Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
0	$z$	-2	-4	0	0	0
$x_2$ entra	$x_3$	1	2	1	0	5
$x_3$ sale	$x_4$	1	1	0	1	4
1 (óptimo)	$z$	0	0	2	0	10
$x_1$ entra	$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_4$ sale	$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	$z$	0	0	2	0	10
(óptimo alternativo)	$x_2$	0	1	1	-1	1
	$x_1$	1	0	-1	2	3

La iteración 1 proporciona la solución óptima  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  y  $z = 10$  (punto  $B$  en la figura 3.9). La existencia de un óptimo alternativo puede detectarse en la tabla óptima examinando los coeficientes de las variables *no* básicas de la ecuación  $z$ . El coeficiente cero de la  $x_1$  no básica indica que  $x_1$  puede hacerse básica, modificando los valores de las variables básicas sin cambiar el valor de  $z$ . La iteración 2 hace justo eso, aplicando  $x_1$  y  $x_4$  como las variables de entrada y de salida, respectivamente. El nuevo punto de solución ocurre en  $C$  ( $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $z = 10$ ). La opción "Iterations" de TORA permite determinar un óptimo alternativo.)

El método simplex determina sólo puntos de esquina óptimos; es decir, los puntos  $B$  y  $C$  en el presente ejemplo. Podemos determinar de manera matemática todos los puntos  $(x_1, x_2)$  sobre el segmento de línea  $BC$  como un promedio ponderado no negativo de los puntos  $B(x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2})$   $C(x_1 = 3, x_2 = 1)$ , de lo que se concluye

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \alpha(0) + (1 - \alpha)(3) = 3 - 3\alpha \\ \hat{x}_2 &= \alpha\left(\frac{5}{2}\right) + (1 - \alpha)(1) = 1 + \frac{3}{2}\alpha \end{aligned} \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

**Comentarios.** En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque podemos elegir de entre muchas soluciones sin que se deteriore del valor objetivo. Digamos que en este ejemplo la solución en  $B$  muestra que la actividad 2 sólo está en un nivel positivo; en cambio, en  $C$  ambas actividades están en un nivel positivo. Si el ejemplo representa una situación de combinación de productos, puede ser ventajoso comercializar dos productos en lugar de uno.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5B

- \*1. Para la siguiente PL, identifique tres soluciones básicas óptimas alternativas que comprendan estas tres soluciones básicas

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

*Nota:* Aun cuando el problema tiene más de tres soluciones óptimas básicas alternativas, sólo necesita identificar tres de ellas. Puede utilizar TORA por comodidad.

2. Resuelva la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeito a

$$x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

A partir de la tabla óptima, demuestre que no todos los óptimos alternativos son puntos de esquina (es decir, no básicos). Provea una demostración gráfica bidimensional del tipo de espacio de soluciones y de función objetivo que producirá este resultado. (Puede utilizar TORA por comodidad.)

3. Para la siguiente PL demuestre que la solución óptima está degenerada y que las soluciones alternativas no son puntos de esquina (puede utilizar TORA por comodidad).

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + x_2$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

### 3.5.3 Solución no acotada

En algunos modelos de programación lineal, el espacio de soluciones es *no acotado* en por lo menos una variable, es decir que las variables pueden incrementarse de forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones. En este caso el valor objetivo asociado también puede ser no acotado.

Un espacio de soluciones no acotado casi siempre indica que el modelo está mal construido. La irregularidad más probable en tales modelos es que no se han tomado en cuenta algunas restricciones clave. Otra posibilidad es que las estimaciones de los coeficientes de las restricciones quizá no sean precisas.

**Ejemplo 3.5-3 (Valor objetivo no acotado)**

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Iteración de inicio**

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
$z$	-2	-1	0	0	0
$x_3$	1	-1	1	0	10
$x_4$	2	0	0	1	40

En la tabla de inicio, tanto  $x_1$  como  $x_2$  tienen coeficientes negativos en la ecuación  $z$ , lo que significa que al incrementarse sus valores también lo hará el valor objetivo. Aunque  $x_1$  debe ser la variable de entrada (tiene el coeficiente  $z$  más negativo), observamos que *todos* los coeficientes de *restricción* bajo  $x_2$  son  $\leq 0$ ; lo que significa que  $x_2$  puede incrementarse indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones (compare con la interpretación gráfica de la relación mínima en la figura 3.5). El resultado es que  $z$  puede incrementarse indefinidamente. La figura 3.10 muestra el espacio de soluciones no acotado y también que  $x_2$  y  $z$  pueden incrementarse indefinidamente.

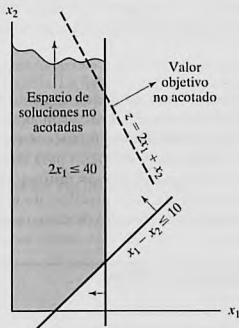


FIGURA 3.10

Solución no acotada de PL en el ejemplo 3.5-3

**Comentarios.** Si se hubiera seleccionado  $x_1$  como la variable de entrada en la iteración de inicio (conforme a la condición de optimalidad), a fin de cuentas, una iteración posterior habría producido una variable de entrada con las mismas propiedades que  $x_2$ . Vea el problema 1, conjunto 3.5c.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5C

1. *Experimento con TORA.* Resuelva el ejemplo 3.5-3 aplicando la opción Iterations de TORA y demuestre que aunque la solución se inicia con  $x_1$  como variable de entrada (conforme a la condición de optimalidad), el algoritmo simplex finalmente apuntará hacia una solución no acotada.

\*2. Considere la PL:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

sujeto a

$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 50$$

$$x_1 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (a) Inspeccionando las restricciones, determine la dirección  $(x_1, x_2$  o  $x_3)$  en que el espacio de soluciones sea no acotado.
  - (b) Sin más cálculos, ¿qué puede concluir con respecto al valor objetivo óptimo?
3. En algunos modelos de PL mal contruidos, el espacio de soluciones puede ser no acotado aun cuando el problema pueda tener un valor objetivo acotado. Semejante ocurrencia apunta hacia posibles irregularidades en la construcción del modelo. En problemas grandes, puede ser difícil detectar la situación de "acotación" por inspección. Idee un procedimiento analítico para determinar si el espacio de soluciones es no acotado.

#### 3.5.4 Solución no factible

Los modelos PL con restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Esta situación no ocurre si *todas* las restricciones son del tipo  $\leq$  con lados derechos no negativos porque las holguras proporcionan una solución factible obvia. Para otros tipos de restricciones, se utilizan variables artificiales penalizadas para iniciar la solución. Si al menos una variable artificial es *positiva* en la iteración óptima, entonces la PL no tiene una solución factible. Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible apunta hacia la posibilidad de que el modelo se formuló de manera incorrecta.

#### Ejemplo 3.5-4 (Espacio de soluciones no factibles)

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

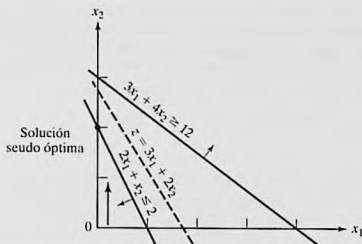


FIGURA 3.11  
Solución no factible del ejemplo 3.5-4

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Aplicando la penalización  $M = 100$  para la variable artificial  $R$ , la siguiente tabla proporciona la iteración simplex del modelo.

Iteración	Básica	$x_1$	$x_2$	$x_4$	$x_3$	R	Solución
0	$z$	-303	-402	100	0	0	-1200
$x_2$ entra	$x_3$	2	1	0	1	0	2
$x_3$ sale	R	3	4	-1	0	1	12
1	$z$	501	0	100	402	0	-396
(seudo óptima)	$x_2$	2	1	0	1	0	2
	R	-5	0	-1	-4	1	4

La iteración óptima 1 muestra que la variable artificial  $R$  es *positiva* ( $= 4$ ), es decir que la PL es no factible. La figura 3.11 ilustra el espacio de soluciones no factibles. Al permitir que la variable artificial sea positiva, el método simplex de hecho ha invertido la dirección de la desigualdad de  $3x_1 + 4x_2 \geq 12$  a  $3x_1 + 4x_2 \leq 12$  (¿puede explicar cómo?). El resultado es lo que podemos llamar una solución **seudo óptima**.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5D

1. \*Toolco produce tres tipos de herramientas,  $T1$ ,  $T2$  y  $T3$ . Las herramientas utilizan dos materias primas,  $M1$  y  $M2$ , según los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Materia prima	Cantidad de unidades de materias primas por herramienta		
	$T1$	$T2$	$T3$
$M1$	3	5	6
$M2$	5	3	4

Las cantidades diarias de materias primas  $M_1$  y  $M_2$  son 1000 unidades y 1200 unidades, respectivamente. La investigación del mercado muestra que la demanda diaria de las tres herramientas debe ser por lo menos de 500 unidades. ¿Puede satisfacer la demanda el departamento de fabricación? Si no, ¿cuál es la máxima cantidad que Toolco puede producir?

2. *Experimento con TORA.* Considere el modelo de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujepto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Active la opción Iterations  $\Rightarrow$  M-Method para mostrar que la solución óptima incluye una variable básica artificial, pero en el nivel cero. ¿Tiene el problema una solución óptima *factible*?

### 3.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En PL, los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima. Esto se conoce como *análisis de sensibilidad* y será el tema de esta sección. Más adelante, en el capítulo 4 estudiaremos el análisis *post óptimo*, el cual tiene que ver con la determinación de la nueva solución óptima cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, y después se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex.

#### 3.6.1 Análisis de sensibilidad gráfica

Esta sección demuestra la idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).
2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Utilizaremos ejemplos individuales para explicar los dos casos.

---

#### Ejemplo 3.6-1 (Cambios en el lado derecho)

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si  $x_1$  y  $x_2$  son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 20x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{Máquina 1})$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8 \quad (\text{Máquina 2})$$

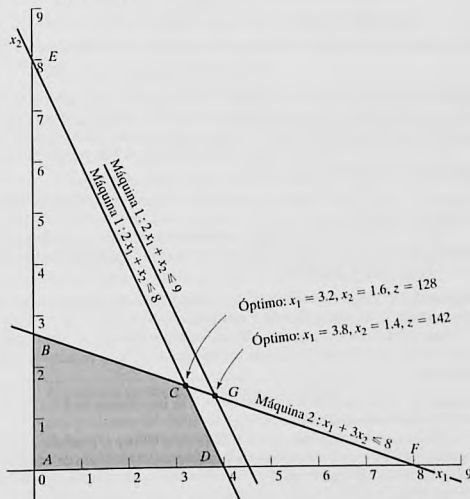
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.12 ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto  $G$ . La tasa de cambio en la  $z$  óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Tasa de cambio del ingreso} \\ \text{a consecuencia del incremento} \\ \text{de la capacidad de la máquina 1} \\ \text{en 1 hora (punto C a punto G)} \end{array} \right) = \frac{z_G - z_C}{(\text{Cambio de la capacidad})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

FIGURA 3.12

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)



La tasa calculada proporciona un vínculo *directo* entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en \$14.00.

El nombre **valor unitario de un recurso** es una descripción apropiada de la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de **precio dual (o sombra)**, y ahora este nombre es un estándar en toda la literatura de PL y en paquetes de "software". La presentación en este libro se ajusta a este estándar.

En la figura 3.12 podemos ver que el precio dual de \$14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea *BF*. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } B = (0,267)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 1 [en } F = (8,0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ h}$$

La conclusión es que el precio dual de \$14/h permanece válido en el intervalo

$$2.67 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 1} \leq 16 \text{ h}$$

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad).

Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de \$2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea *DE*. Ahora,

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } D = (4,0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 2 [en } E = (8,0)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ h}$$

Por lo tanto, el precio dual de \$200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo

$$4 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 2} \leq 24 \text{ h}$$

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como **intervalos de factibilidad**. Todos los paquetes de "software" proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad. La sección 3.6.4 muestra cómo generan esta información AMPL, Solver y TORA.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como las siguientes preguntas lo demuestran:

**Pregunta 1.** Si JOBCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

Según los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en \$14, en comparación con sólo \$2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener la prioridad.

**Pregunta 2.** Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de \$10/h para cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es  $14 - 10 = \$4$ , y para la máquina 2, es  $\$2 - \$10 = -\$8$ . Por consiguiente, sólo la máquina 1 debe considerarse para el incremento de capacidad.

**Pregunta 3.** Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es \$14 y es válido en el intervalo (2.67,16)h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad. Por consiguiente, el incremento del ingreso es  $\$14(13 - 8) = \$70$ , lo que significa que el ingreso total se incrementará de \$128 a \$198 ( $= \$128 + \$70$ ).

**Pregunta 4.** Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas, ¿cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67,16)h. Por lo tanto, sólo podemos hacer una conclusión inmediata con respecto a un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para hallar la respuesta (vea el capítulo 4). Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad *no* significa que el problema no tenga solución, sino que la información disponible no es suficiente para llegar a una conclusión completa.

**Pregunta 5.** ¿Cómo podemos determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos, como se demostrará en la sección 3.6.2.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6A

1. Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. Los ingresos unitarios son \$2 y \$3, respectivamente. Las disponibilidades diarias de dos materias primas, *M1* y *M2*, utilizadas en la fabricación de los dos productos son de 8 y 18 unidades, respectivamente. Una unidad de *A* utiliza 2 unidades de *M1* y 2 unidades de *M2*, y una unidad de *B* utiliza 3 unidades de *M1* y 6 unidades de *M2*.
  - (a) Determine los precios duales de *M1* y *M2* y sus intervalos de factibilidad.
  - (b) Suponga que pueden adquirirse 4 unidades más de *M1* al costo de 30 centavos por unidad. ¿Recomendaría la compra adicional?
  - (c) ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debe pagar por unidad de *M2*?
  - (d) Si la disponibilidad de *M2* se incrementa en 5 unidades, determine el ingreso óptimo asociado.
- \*2. Wild West produce dos tipos de sombreros texanos. Un sombrero tipo *A* requiere dos veces la mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para los dos tipos son 150 y 200 sombreros por día. El ingreso es de \$8 por sombrero tipo 1 y de \$5 por sombrero tipo 2.
  - (a) Use la solución gráfica para determinar la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice el ingreso.
  - (b) Determine el precio dual de la capacidad de producción (en función del sombrero tipo 2) y el intervalo dentro del cual es aplicable.
  - (c) Si el límite de la demanda diaria del sombrero tipo 1 se reduce a 120, use el precio dual para determinar el efecto correspondiente en el ingreso óptimo.
  - (d) ¿Cuál es el precio dual de la participación en el mercado del sombrero tipo 2? ¿Qué tanto se puede incrementar la participación en el mercado al mismo tiempo que se obtiene el valor calculado por unidad?

### Ejemplo 3.6-2 (Cambios en los coeficientes objetivo)

La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones gráficas del problema de JOBCO presentado en el ejemplo 3.6-1. El óptimo ocurre en el punto *C* ( $x_1 = 3.2$ ,  $x_2 = 1.6$ ,  $z = 128$ ). Los cambios en unidades de ingresos (es decir, los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de  $z$ . Sin embargo, como puede verse en la figura, la solución óptima en el punto *C* no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas *BF* y *DE*.

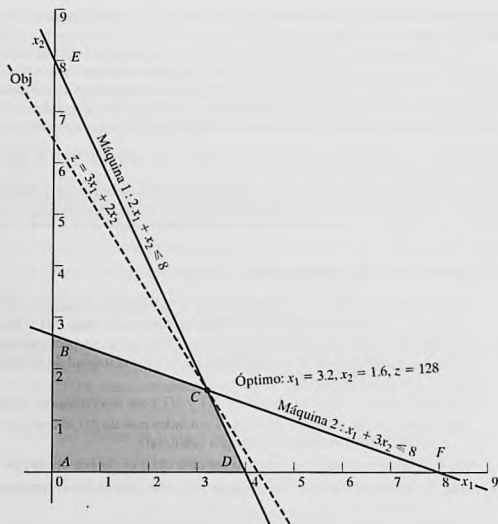


FIGURA 3.13

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

¿Cómo podemos determinar los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán inalterable la función óptima en  $C$ ? Primero, escribimos la función objetivo en el formato general

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine ahora que la línea  $z$  está pivotada en  $C$  y que puede girar en el sentido de las manecillas del reloj, así como en el sentido contrario. La solución óptima permanecerá en el punto  $C$  en tanto  $z = c_1x_1 + c_2x_2$  quede entre las dos líneas  $x_1 + 3x_2 = 8$ , y  $2x_1 + x_2 = 8$ . Esto significa que la relación  $\frac{c_1}{c_2}$  puede variar entre  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{1}$ , lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad**:<sup>8</sup>

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \quad \text{o} \quad .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

<sup>8</sup> La condición de "relación" funciona correctamente en esta situación porque las pendientes para las dos líneas que pasan por el punto óptimo  $C$  tienen el mismo signo. Otras situaciones son más complejas.

Esta información proporciona respuestas inmediatas con respecto a la solución óptima como la siguiente pregunta lo demuestra:

**Pregunta 1.** Suponga que los ingresos unitarios producidos para los productos 1 y 2 cambian a \$35 y \$25, respectivamente. ¿Permanecerá igual el óptimo actual?

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 35x_1 + 25x_2$$

La solución en  $C$  permanecerá óptima porque  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$  permanece dentro del intervalo de optimalidad (.333,2). Cuando la relación queda afuera de este intervalo, se requieren más cálculos para determinar el nuevo óptimo (vea el capítulo 4). Observe que aunque los valores de las variables en el punto óptimo  $C$  no cambian, el valor óptimo de  $z$  cambia a  $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \$152$ .

**Pregunta 2.** Suponga que el ingreso unitario del producto 2 se fija a su valor actual  $c_2 = \$20$ . ¿Cuál es el intervalo de optimalidad asociado para el ingreso unitario del producto 1,  $c_1$ , que mantendrá el óptimo sin cambio?

Sustituyendo  $c_2 = 20$  en la condición  $\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$ , obtenemos

$$\frac{1}{3} \times 20 \leq c_1 \leq 2 \times 20 \text{ o } 6.67 \leq c_1 \leq 40$$

Este intervalo asume implícitamente que  $c_2$  se mantiene fijo en \$20.

Del mismo modo podemos determinar el intervalo de optimalidad para  $c_2$  si fijamos el valor de  $c_1$  en \$30. Por lo tanto,

$$(c_2 \leq 30 \times 3 \text{ y } c_2 \geq \frac{30}{2}) \text{ o } 15 \leq c_2 \leq 90$$

Como en el caso del lado derecho, todos los paquetes de software proporcionan los intervalos de optimalidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo. La sección 3.6.4 muestra cómo AMPL, Solver y TORA generan estos resultados.

**Comentarios.** Aunque el material en esta sección se ocupó de dos variables, los resultados sientan las bases para el desarrollo del análisis de sensibilidad para el problema general de PL en las secciones 3.6.2 y 3.6.3.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6B

- Considere el problema 1, conjunto 3.6a.
  - Determine la condición de optimalidad para  $\frac{c_A}{c_B}$  que mantendrá el óptimo sin cambio.
  - Determine los intervalos de optimalidad para  $c_A$  y  $c_B$ , suponiendo que el otro coeficiente se mantiene constante en su valor actual.
  - Si los ingresos unitarios  $c_A$  y  $c_B$  cambian al mismo tiempo a \$5 y \$4, respectivamente, determine la nueva solución óptima.
  - Si los cambios en (c) se hacen uno a la vez, ¿qué se puede decir sobre la solución óptima?
- En el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1:
  - Determine el intervalo para la relación del ingreso unitario de la pintura para exteriores con el ingreso unitario de la pintura para interiores.

- (b) Si el ingreso por tonelada de pintura para exteriores permanece constante en \$5000 por tonelada, determine el ingreso unitario máximo de la pintura para interiores que mantendrá la solución óptima presente sin cambios.
- (c) Si por razones de comercialización el ingreso unitario de pintura para interiores debe reducirse a \$3000, ¿cambiará la combinación de producción óptima actual?
- \*3. En el problema 2, conjunto 3.6a:
- (a) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de los ingresos unitarios de los dos tipos de sombreros que mantendrá el óptimo actual sin cambiar.
- (b) Con la información en (b), ¿cambiará la solución óptima si el ingreso por unidad es el mismo para ambos tipos?

### 3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica. Cambios en el lado derecho

En la sección 3.6.1, utilizamos la solución gráfica para determinar el *precio dual* (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Esta sección amplía el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de TOYCO) para facilitar la presentación.

#### Ejemplo 3.6-3 (Modelo de TOYCO)

TOYCO utiliza tres operaciones para armar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y carros. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos por unidad de tren, camión y auto de juguete son de \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por auto son (2,0,4) y (1,2,0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y autos, respectivamente, el modelo de PL asociado se da como:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \text{ (Operación 1)}$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460 \text{ (Operación 2)}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 \text{ (Operación 3)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Utilizando  $x_4$ ,  $x_5$  y  $x_6$  como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	4	0	0	1	2	0	1350
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	20

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 autos pero no trenes. El ingreso asociado es \$1350.

**Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad.** Utilizaremos el modelo de TOYCO para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla simplex óptima. Reconociendo que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de TOYCO original puede cambiarse entonces a

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 + D_1 \quad (\text{Operación 1})$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460 + D_2 \quad (\text{Operación 2})$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 + D_3 \quad (\text{Operación 3})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para expresar la tabla simplex óptima del problema modificado en función de los cambios  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ , primero volvemos a escribir la tabla de inicio con los nuevos lados derechos,  $430 + D_1$ ,  $460 + D_2$  y  $420 + D_3$ .

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución			
							RHS	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$z$	-3	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0
$x_4$	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
$x_5$	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
$x_6$	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por consiguiente, si repetimos las *mismas* iteraciones simplex (con las *mismas* operaciones de filas) como en el modelo *original*, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución			
							RHS	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$z$	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	20	-2	1	1

La nueva tabla óptima da la siguiente solución óptima:

$$\begin{aligned}z &= 1350 + D_1 + 2D_2 \\x_2 &= 100 + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2 \\x_3 &= 230 + \frac{1}{2}D_2 \\x_6 &= 20 - 2D_1 + D_2 + D_3\end{aligned}$$

Ahora utilizamos esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

*Precios duales:* El valor de la función objetivo puede escribirse como

$$z = 1350 + 1D_1 + 2D_2 + 0D_3$$

La ecuación muestra que

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ( $D_1 = \pm 1$  min) cambia a  $z$  en \$1.
2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ( $D_2 = \pm 1$  min) cambia a  $z$  en \$2.
3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ( $D_3 = \pm 1$  min) cambia a  $z$  en \$0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 (\$/min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  en la fila  $z$  óptima son exactamente los de las variables de holgura  $x_4$ ,  $x_3$  y  $x_6$ . Esto significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de holgura en la fila  $z$  óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso porque cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

*Intervalo de factibilidad:* La solución actual permanece factible si todas las variables básicas permanecen no negativas, es decir

$$\begin{aligned}x_2 &= 100 + \frac{1}{2}D_1 - \frac{1}{4}D_2 \geq 0 \\x_3 &= 230 + \frac{1}{2}D_2 \geq 0 \\x_6 &= 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0\end{aligned}$$

Los cambios simultáneos de  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina sustituyendo los valores de  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ .

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que el tiempo de fabricación disponible para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces,  $D_1 = 480 - 430 = 50$ ,  $D_2 = 440 - 460 = -20$  y  $D_3 = 400 - 420 = -20$ . Sustituyendo en las condiciones de factibilidad, obtenemos

$$\begin{aligned}x_2 &= 100 + \frac{1}{2}(50) - \frac{1}{4}(-20) = 130 > 0 && \text{(factible)} \\x_3 &= 230 + \frac{1}{2}(-20) = 220 > 0 && \text{(factible)} \\x_6 &= 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 && \text{(no factible)}\end{aligned}$$

Los cálculos demuestran que  $x_6 < 0$ , de ahí que la solución actual no permanezca factible. Se requerirán más cálculos para encontrar la nueva solución (vea el capítulo 4).

Como alternativa, si los cambios de los recursos son tales que  $D_1 = -30$ ,  $D_2 = -12$  y  $D_3 = 10$ , entonces

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}(-30) - \frac{1}{4}(-12) = 88 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (10) = 78 > 0 \quad (\text{factible})$$

La nueva solución factible (óptima) es  $x_1 = 88$ ,  $x_3 = 224$ , y  $x_6 = 68$  con  $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \$1296$ . Observe que el valor objetivo óptimo también puede calcularse utilizando los precios duales como  $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$1296$ .

Las condiciones dadas pueden producir los *intervalos de factibilidad* individuales asociados con cambiar los recursos *uno a la vez* (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio del tiempo de la operación 1 sólo implica que  $D_2 = D_3 = 0$ . Por tanto, las condiciones simultáneas se reducen a

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 &= 230 > 0 \\ x_6 &= 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibilidad  $-200 \leq D_1 \leq 10$ .

Podemos demostrar del mismo modo que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son  $-20 \leq D_2 \leq 400$  y  $-20 < D_3 < \infty$ , respectivamente (¡compruébelo!).

Ahora podemos resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo de TOYCO como sigue:<sup>9</sup>

Recurso	Precio dual (\$)	Intervalo de factibilidad	Cantidad de recurso (minutos)		
			Mínima	Actual	Máxima
Operación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	440
Operación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Operación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	$\infty$

Es importante señalar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio *simultáneo* que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios violen los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios  $D_1 = 30$ ,  $D_2 = -12$  y  $D_3 = 100$  mantendrán la solución factible aun cuando  $D_1 = 30$  viole el intervalo de factibilidad  $-200 \leq D_1 \leq 10$ , como los siguientes cálculos lo demuestran:

$$x_2 = 100 + \frac{1}{2}(30) - \frac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_3 = 230 + \frac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \quad (\text{factible})$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \quad (\text{factible})$$

<sup>9</sup> Los paquetes de programación lineal disponibles suelen presentar esta información como resultados estándar. Prácticamente ninguno proporciona el caso de condiciones simultáneas, quizá porque su visualización es muy pesada en el caso de PL grandes.

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que podemos calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como  $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \$1356$ .

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6C<sup>10</sup>

1. En el modelo de TOYCO, suponga que los cambios  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  se hacen *al mismo tiempo* en las tres operaciones.
  - (a) Si la disponibilidad de las operaciones 1, 2 y 3 se cambia a 438, 500 y 410 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual permanece factible, y determine el cambio del ingreso óptimo mediante los precios duales óptimos.
  - (b) Si la disponibilidad de las tres operaciones se cambia a 460, 440 y 380 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual es no factible.
- \*2. Considere el modelo de TOYCO:
  - (a) Suponga que cualquier tiempo adicional para la operación 1 por encima de su capacidad actual de 430 minutos por día deba hacerse con base en tiempo extra a \$50 por hora. El costo por hora incluye tanto la mano de obra como la operación de la máquina. ¿Es económicamente ventajoso utilizar tiempo extra con la operación 1?
  - (b) Suponga que el encargado de la operación 2 ha acordado trabajar 2 horas de tiempo extra diarias a \$45 por hora. Adicionalmente, el costo de la operación propiamente dicha es de \$10 por hora. ¿Cuál es el efecto neto de esta actividad en el ingreso diario?
  - (c) ¿Es necesario el tiempo extra para la operación 3?
  - (d) Suponga que la disponibilidad diaria de la operación 1 se incrementa a 440 minutos. Cualquier tiempo extra por encima de la capacidad máxima actual costará \$40 por hora. Determine la nueva solución óptima, incluido el ingreso neto asociado.
  - (e) Suponga que la disponibilidad de la operación 2 se reduce en 15 minutos por día y que el costo por hora de la operación durante el tiempo regular es de \$30. ¿Es ventajoso reducir la disponibilidad de la operación 2?
3. Una compañía fabrica tres productos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . El volumen de ventas de  $A$  es como mínimo 50% de las ventas totales de los tres productos. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 75 unidades por día. Los tres productos utilizan una materia prima de la cual la máxima disponibilidad diaria es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de  $A$ , 4 lb por unidad de  $B$ , y 3 lb por unidad de  $C$ . Los precios unitarios de  $A$ ,  $B$  y  $C$  son \$20, \$50 y \$35, respectivamente.
  - (a) Determine la combinación óptima de productos para la compañía.
  - (b) Determine el precio dual de la materia prima y su intervalo permisible. Si la materia prima disponible se incrementa en 120 lb, determine la solución óptima y el cambio del ingreso total mediante el precio dual.
  - (c) Use el precio dual para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto  $A$  en  $\pm 10$  unidades.

<sup>10</sup> En este conjunto de problemas, quizá le convenga generar la tabla simplex óptima con TORA.

4. Una compañía que opera 10 horas al día fabrica tres productos con tres procesos. La siguiente tabla resume los datos del producto.

Producto	Minutos por unidad			Precio unitario
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	10	6	8	\$4.50
2	5	8	10	\$5.00
3	6	9	12	\$4.00

- (a) Determine la combinación de productos óptima.
- (b) Use el precio dual para priorizar los tres procesos para una posible expansión.
- (c) Si pueden asignarse más horas de producción, ¿cuál sería un costo justo por hora adicional para cada proceso?
5. La división de educación continua del Colegio Comunitario de Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Por lo común, los cursos ofrecidos son de dos tipos: prácticos, como carpintería, procesamiento de palabras y mantenimiento automotriz; y humanistas como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las demandas de la comunidad, cada semestre deben ofrecerse como mínimo 10 cursos de cada tipo. La división estima que los ingresos producidos por el ofrecimiento de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de \$1500 y \$1000 por curso, respectivamente.
- (a) Idee un ofrecimiento de cursos óptimo para el colegio.
- (b) Demuestre que el precio dual de un curso adicional es de \$1500, el cual es el mismo que el ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de ofrecer cursos adicionales?
- (c) ¿Cuántos cursos más pueden ofrecerse al mismo tiempo de modo que se garantice que cada uno contribuirá con \$1500 al ingreso total?
- (d) Determine el cambio en ingresos a consecuencia del aumento del requerimiento mínimo de cursos humanistas en un curso.
- \*6. Show & Sell puede anunciar sus productos en la radio y la televisión (TV) locales, o en periódicos. El presupuesto de publicidad está limitado a \$10,000 mensuales. Cada minuto de publicidad en radio cuesta \$15 y cada minuto en TV cuesta \$300. Un anuncio en el periódico cuesta \$50. A Show & Sell le gusta anunciarse en radio al menos el doble de veces que en TV. Mientras tanto, se recomienda el uso de al menos 5 anuncios en el periódico y no más de 30 minutos de publicidad por radio al mes. La experiencia pasada muestra que la publicidad en TV es 50 veces más efectiva que la publicidad en radio, y 10 veces más efectiva que en periódicos.
- (a) Determine la asignación óptima del presupuesto a los tres medios.
- (b) ¿Son los límites impuestos a la publicidad por radio y periódicos económicamente justificables?
- (c) Si el presupuesto mensual se incrementa en 50%, ¿produciría esto un incremento proporcional en la efectividad total de la publicidad?
7. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballeros y blusas para damas para Walmark Discount Stores, que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye corte, costura y empaçado. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el empaçado. La fábrica la-

bora un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla da los requerimientos de tiempo y los precios por unidad de las dos prendas:

Prenda	Minutos por unidad			Precio unitario (\$)
	Corte	Costura	Empacado	
Camisas	20	70	12	8.00
Blusas	60	60	4	12.00

- Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.
  - Determine el valor de 1 hora de corte, costura y empacado, en función del ingreso total.
  - Si puede utilizarse tiempo extra en los departamentos de corte y costura, ¿cuál es la tarifa por hora máxima que Burroughs debe pagar por el tiempo extra?
8. ChemLabs utiliza las materias primas *I* y *II* para producir dos soluciones de limpieza doméstica, *A* y *B*. Las disponibilidades diarias de las materias primas *I* y *II* son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de la solución *A* consume .5 unidades de la materia prima *I* y .6 unidades de la materia prima *II*, y una unidad de la solución *B* usa .5 unidades de la materia prima *I* y .4 unidades de la materia prima *II*. Los precios por unidad de las soluciones *A* y *B* son de \$8 y \$10, respectivamente. La demanda diaria de la solución *A* es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución *B* de entre 40 y 200 unidades.
- Determine las cantidades óptimas de *A* y *B* que ChemLabs debe producir.
  - Use los precios duales para determinar qué límites de demanda de los productos *A* y *B* se deben rebajar para mejorar la rentabilidad.
  - Si pueden adquirirse más unidades de materia prima a \$20 por unidad, ¿es esto aconsejable? Explique.
  - Se sugiere incrementar 25% la materia prima *II* para eliminar un cuello de botella en la producción. ¿Es esto aconsejable? Explique.
9. Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones de trabajo consecutivas produce dos modelos de radio: DiGi-1 y DiGi-2. La siguiente tabla da los tiempos de ensamble para las tres estaciones de trabajo.

Estación de trabajo	Minutos por unidad	
	DiGi-1	DiGi-2
1	6	4
2	5	4
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por estación cada día.

- La compañía desea determinar la combinación óptima de productos que minimizará los tiempos ociosos (o no utilizados) en las tres estaciones de trabajo. Determine la utilización óptima de las estaciones de trabajo. *Sugerencia:* Expresé la suma de los tiempos ociosos (holguras) para las tres operaciones en función de las variables originales.
- Determine el valor de reducir el tiempo de mantenimiento diario de cada estación en un punto porcentual.

- (c) Se propone que el tiempo de operación de las tres estaciones se incremente a 600 minutos por día a un costo adicional de \$1.50 por minuto. ¿Puede mejorarse esta propuesta?
10. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsas para rasuradora y mochilas. La construcción de los tres productos requiere piel y materiales sintéticos, dado que la piel es la materia prima limitante. El proceso de producción utiliza dos tipos de mano de obra calificada: costura y terminado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su uso por los tres productos, y los precios por unidad.

Recurso	Requerimientos de recursos por unidad			Disponibilidad diaria
	<i>Bolso de mano</i>	<i>Bolsa para rasuradora</i>	<i>Mochila</i>	
Piel (pies <sup>2</sup> )	2	1	3	42
Costura (h)	2	1	2	40
Terminado (h)	1	.5	1	45
Precio (\$)	24	22	45	

Formule el problema como una programación lineal, y determine la solución óptima. A continuación, indique si los siguientes cambios en los recursos mantendrán factible la solución actual. En los casos donde la factibilidad se mantiene, determine la nueva solución óptima (valores de las variables y la función objetivo).

- (a) La piel disponible se incrementa a 45 pies<sup>2</sup>.
- (b) La piel disponible se reduce en 1 pie<sup>2</sup>.
- (c) Las horas de costura disponibles se cambian a 38.
- (d) Las horas de costura disponibles se cambian a 46.
- (e) Las horas de terminado disponibles se reducen a 15.
- (f) Las horas de terminado disponibles se incrementan a 50.
- (g) ¿Recomendaría contratar a una costurera más a \$15 la hora?
11. HiDec produce dos modelos de artefactos electrónicos que utilizan resistores, capacitores y "chips". La siguiente tabla resume los datos de la situación:

Recurso	Requerimiento de recursos unitarios		Disponibilidad máxima (unidades)
	<i>Modelo 1 (unidades)</i>	<i>Modelo 2 (unidades)</i>	
Resistores	2	3	1200
Capacitores	2	1	1000
Chips	0	4	800
Precio unitario (\$)	3	4	

Sean  $x_1$  y  $x_2$  las cantidades producidas de los modelos 1 y 2, respectivamente. A continuación se dan el modelo y su tabla simplex óptima asociada.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200 \quad (\text{Resistores})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \quad (\text{Capacitores})$$

$$4x_2 \leq 800 \quad (\text{Chips})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Básica	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	Solución
$z$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1750
$x_1$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	450
$s_3$	0	0	-2	2	1	400
$x_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	100

- (a)** Determine el estado de cada recurso.
- (b)** En función del ingreso óptimo, determine los precios duales para resistores, capacitores y chips.
- (c)** Determine los intervalos de factibilidad para los precios duales obtenidos en (b).
- (d)** Si la cantidad de resistores disponibles se incrementa a 1300 unidades, encuentre la nueva solución óptima.
- (e)** Si la cantidad de chips disponibles se reduce a 350 unidades, ¿podrá determinar la nueva solución óptima directamente con la información dada? Explique.
- (f)** Si el intervalo de factibilidad calculado en (c) limita la disponibilidad de capacitores, determine el intervalo correspondiente del ingreso óptimo y los intervalos correspondientes de las cantidades de unidades de los modelos 1 y 2 que se producirán.
- (g)** Un nuevo contratista ofrece a HiDec más resistores a 40 centavos cada uno, pero sólo si HiDec compra al menos 500 unidades. ¿Debe HiDec aceptar la oferta?
- 12. Regla de la factibilidad de 100%.** Puede usarse una regla simplificada basada en los cambios individuales  $D_1, D_2, \dots, D_m$  en el lado derecho de las restricciones para probar si los cambios simultáneos mantendrán la factibilidad de la solución actual. Suponga que el lado derecho  $b_i$  de la restricción  $i$  se cambia a  $b_i + D_i$  paso a paso, y que  $p_i \leq D_i \leq q_i$  es el intervalo de factibilidad correspondiente obtenido utilizando el procedimiento de la sección 3.6.2. Por definición tenemos  $p_i \leq 0$  ( $q_i \geq 0$ ) porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en  $b_i$ . Luego definimos  $r_i$  como igual a  $\frac{D_i}{p_i}$  si  $D_i$  es negativo, y  $\frac{D_i}{q_i}$  si  $D_i$  es positivo. Por definición, tenemos que  $0 \leq r_i \leq 1$ . La regla del 100% dice por tanto que, dados los cambios,  $D_1, D_2, \dots, D_m$ , una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca factible es que  $r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq 1$ . Si la condición no se satisface, entonces la solución actual puede o no permanecer factible. La regla no es aplicable si  $D_i$  queda fuera del intervalo  $(p_i, q_i)$ .

En realidad, la regla del 100% es demasiado débil como para que sea consistentemente útil. Aun en los casos en que la factibilidad puede confirmarse, seguimos teniendo la necesidad de obtener la nueva solución utilizando las condiciones de factibilidad simplex comunes. Además, los cálculos directos asociados con los cambios simultáneos dados en la sección 3.6.2, son simples y manejables.

Para demostrar la debilidad de la regla, aplíquela a las partes (a) y (b) del problema 1 de este conjunto. La regla no confirma la factibilidad de la solución en (a) y no es válida en (b) porque los cambios de  $D_i$  quedan fuera del intervalo admisible. El problema 13 demuestra aún más este punto.

## 13. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

- (a) Demuestre que la solución básica óptima incluye tanto a  $x_1$  como a  $x_2$  y que los intervalos de factibilidad considerados uno a la vez, son  $-3 \leq D_1 \leq 6$  y  $-3 \leq D_2 \leq 6$ .
- (b) \*Suponga que los dos recursos se incrementan al mismo tiempo en  $\Delta > 0$ . Primero, demuestre que la solución básica permanece factible con todos los incrementos  $\Delta > 0$ . Luego, demuestre que la regla del 100% confirmará la factibilidad sólo si el incremento ocurre en el intervalo  $0 < \Delta \leq 3$  unidades. De lo contrario, la regla falla en el intervalo  $3 < \Delta < 6$  y no es válida para  $\Delta > 6$ .

## 3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica. Función objetivo

En la sección 3.6.1 utilizamos el análisis de sensibilidad gráfica para determinar las condiciones que mantendrán la optimalidad de la solución de una PL de dos variables. En esta sección extendemos estas ideas al problema de programación lineal general.

**Definición de costo reducido.** Para facilitar la explicación del análisis de sensibilidad de la función objetivo, primero tenemos que definir los *costos reducidos*. En el modelo de TOYCO (ejemplo 3.6-2), la ecuación  $z$  objetivo que aparece en la tabla óptima puede escribirse como

$$z = 1350 - 4x_1 - x_4 - 2x_5$$

La solución óptima no produce trenes de juguete ( $x_1 = 0$ ). La razón se pone de manifiesto en la ecuación  $z$ , donde un incremento unitario en  $x_1$  (sobre su valor de cero actual) reduce a  $z$  en \$4, es decir,  $z = 1350 - 4 \times (1) - 1 \times (0) - 2 \times (0) = \$1346$ .

Podemos considerar el coeficiente de  $x_1$  en la ecuación  $z$  ( $= 4$ ) como un *costo* unitario porque reduce el ingreso  $z$ . Pero ¿de dónde proviene este "costo"? Sabemos que el ingreso por unidad de  $x_1$  es de \$3 (según el modelo original). También sabemos que la producción de trenes de juguete incurre en un costo porque consume recursos (tiempo de operaciones). Por consiguiente, desde el punto de vista de la optimización, el "atractivo" de  $x_1$  depende del costo de los recursos consumidos con respecto al ingreso. Esta relación define el llamado **costo reducido** y se formaliza en la literatura de PL como

$$\left( \begin{array}{c} \text{Costo reducido} \\ \text{por unidad} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Costo de los recursos} \\ \text{consumidos por unidad} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Ingreso} \\ \text{por unidad} \end{array} \right)$$

Para apreciar la importancia de esta definición, en el modelo original de TOYCO el ingreso por unidad de camiones de juguete ( $= \$2$ ) es menor que el de trenes de juguete ( $= \$3$ ). No obstante la solución óptima recomienda producir camiones de juguete ( $x_2 = 100$  unidades) y nada de trenes ( $x_1 = 0$ ). La razón es que el costo de los recursos consumidos por un camión de juguete (es decir, tiempo de operaciones) es menor que su precio unitario; al contrario de lo que sucede en el caso de los trenes de juguete.

Con la definición dada de *costo reducido*, podemos ver que una variable no rentable (como  $x_1$ ) puede hacerse rentable de dos maneras:

1. Incrementando el ingreso unitario.
2. Reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos.

En la mayoría de las situaciones, las condiciones del mercado dictan el precio por unidad y puede ser difícil incrementarlo a voluntad. Por otra parte, una opción más viable es reducir el consumo de recursos porque el fabricante puede reducir el costo si hace que el proceso de producción sea más eficiente.

**Determinación de los intervalos de optimalidad.** Ahora nos enfocamos en la determinación de las condiciones que mantendrán una óptima solución. El desarrollo se basa en la definición de *costo reducido*.

En el modelo de TOYCO, sean  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  los cambios de los ingresos unitarios de camiones, trenes y autos, respectivamente. La función objetivo se escribe entonces como

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + (2 + d_2)x_2 + (5 + d_3)x_3$$

Primero consideramos la situación general en la cual todos los coeficientes objetivo cambian *al mismo tiempo*.

Con los cambios simultáneos, la fila  $z$  en la tabla de inicio aparece como:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$-3 - d_1$	$-2 - d_2$	$-5 - d_3$	0	0	0	0

Cuando generamos la tabla simplex con la misma secuencia de las variables de entrada y salida utilizadas en el modelo original (antes de que se realicen los cambios de  $d_i$ ), la iteración óptima aparecerá como sigue (convéngase de que éste si es el caso realizando las operaciones de filas simplex):

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1$	0	0	$1 + \frac{1}{2}d_2$	$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3$	0	$1350 + 100d_2 + 230d_3$
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	$-\frac{1}{4}$	0	0	-2	1	1	20

La nueva tabla óptima es igual a la tabla óptima *original*, excepto por los *costos reducidos* (coeficientes de la ecuación  $z$ ). Esto significa que los cambios en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar sólo la optimalidad del problema. (Compare con la sección 3.6.2, donde los cambios del lado derecho sólo afectan a la factibilidad.)

En realidad no tiene que realizar la operación de filas simplex para calcular los nuevos costos reducidos. Un examen de la nueva fila  $z$  muestra que los coeficientes de  $d_i$  se toman directamente de los coeficientes de las restricciones de la tabla óptima. Una forma conveniente de calcular el nuevo costo reducido es agregar una nueva fila superior y una nueva columna más a la izquierda de la tabla óptima, como lo muestran las áreas sombreadas en la siguiente ilustración.

		$d_1$	$d_2$	$d_3$	0	0	0	
Básica		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
1	$z$	4	0	0	1	2	0	1350
$d_2$	$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$d_3$	$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	$x_6$	2	0	0	-2	1	1	20

Las entradas en la fila superior son los cambios  $d_i$  asociados con la variable  $x_j$ . En la columna a la extrema izquierda, el elemento superior es 1 en la fila  $z$  seguido del cambio  $d_i$  de la variable básica  $x_i$ . Tenga en cuenta que  $d_i = 0$  para la variable de holgura  $x_i$ .

Para calcular el nuevo costo reducido para cualquier variable (o el valor de  $z$ ), multiplique los elementos de su columna por los elementos correspondientes que aparecen en la columna a la extrema izquierda, súmelos y reste el elemento en la fila superior de la suma. Por ejemplo, para  $x_1$ , tenemos

$$\begin{aligned}\text{Costo reducido de } x_1 &= [4 \times 1 + (-\frac{1}{4}) \times d_2 + \frac{3}{2} \times d_3 + 2 \times 0] - d_1 \\ &= 4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1\end{aligned}$$

La solución actual permanece óptima en tanto los costos reducidos (coeficientes de la ecuación  $z$ ) permanezcan no negativos (caso de maximización). Por lo tanto tenemos las siguientes *condiciones de optimalidad simultáneas* correspondientes a las  $x_1$ ,  $x_4$  y  $x_5$  no básicas:

$$\begin{aligned}4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 &\geq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 &\geq 0 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Recuerde que el costo reducido de una variable básica siempre es cero, como lo muestra la tabla óptima modificada.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que la función objetivo de TOYCO cambia de  $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$  a  $z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$ . Entonces,  $d_1 = 2 - 3 = -\$1$ ,  $d_2 = 1 - 2 = -\$1$  y  $d_3 = 6 - 5 = \$1$ . La sustitución en las condiciones dadas presenta el resultado

$$\begin{aligned}4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 &= 4 - \frac{1}{4}(-1) + \frac{3}{2}(1) - (-1) = 6.75 > 0 \quad (\text{satisfecha}) \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 &= 1 + \frac{1}{2}(-1) = .5 > 0 \quad (\text{satisfecha}) \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 &= 2 - \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 2.75 > 0 \quad (\text{satisfecha})\end{aligned}$$

Los resultados muestran que los cambios propuestos mantendrán la solución actual ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 100$ ,  $x_3 = 230$ ) óptima (con un nuevo valor de  $z = 1350 + 100d_2 + 230d_3 = 1350 + 100 \times -1 + 230 \times 1 = \$1480$ ). Si cualquier condición no se satisface, debe determinarse una nueva solución (vea el capítulo 4).

El tema anterior abordó el caso de maximización. La única diferencia en el caso de minimización es que los costos reducidos (coeficientes de la ecuación  $z$ ) deben ser  $\leq 0$  para mantener la optimalidad.

Los *intervalos de optimalidad* que tienen que ver con los cambios de  $d_i$  uno a la vez pueden desarrollarse a partir de las condiciones de optimalidad simultáneas.<sup>11</sup> Por ejemplo, suponga que el coeficiente objetivo de  $x_2$  sólo cambia a  $2 + d_2$ ; es decir que  $d_1 = d_3 = 0$ . Las condiciones de optimalidad simultáneas se reducen por lo tanto a

$$\left. \begin{array}{l} 4 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 16 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -2 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq d_2 \leq 8$$

Del mismo modo, puede verificar que los cambios individuales ( $3 + d_3$ ) y ( $5 + d_3$ ) para  $x_1$  y  $x_3$  dan los intervalos de optimalidad  $d_1 < 4$  y  $d_3 \geq -\frac{8}{3}$ , respectivamente.

Las condiciones individuales dadas pueden traducirse a intervalos de ingresos unitarios totales. Por ejemplo, para los camiones de juguete (variable  $x_2$ ), el ingreso unitario total es  $2 + d_2$ , y su intervalo de optimalidad  $-2 \leq d_2 \leq 8$  se traduce a

$$\$0 \leq (\text{ingreso unitario del camión de juguete}) \leq \$10$$

Se supone que los ingresos unitarios de los trenes y autos de juguete permanecen fijos en \$3 y \$5, respectivamente.

Es importante observar que los cambios  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  pueden estar dentro de sus intervalos individuales permisibles sin satisfacer las condiciones simultáneas y viceversa. Por ejemplo, considere  $z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$ . En este caso  $d_1 = 6 - 3 = \$3$ ,  $d_2 = 8 - 2 = \$6$  y  $d_3 = 3 - 5 = -\$2$ , los cuales quedan dentro de los intervalos individuales permisibles ( $-\infty < d_1 \leq 4$ ,  $-2 \leq d_2 \leq 8$ , y  $-\frac{8}{3}d_3 < \infty$ ). Sin embargo, las condiciones simultáneas correspondientes dan por resultado

$$\begin{array}{ll} 4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \frac{1}{4}(6) + \frac{3}{2}(-2) - 3 = -3.5 < 0 & \text{(no satisfecha)} \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 = 1 + \frac{1}{2}(6) = 4 > 0 & \text{(satisfecha)} \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3 = 2 - \frac{1}{4}(6) + \frac{1}{2}(-2) = -.5 < 0 & \text{(no satisfecha)} \end{array}$$

<sup>11</sup> Los intervalos individuales son resultados estándar en todo software de PL. Por lo común, las condiciones simultáneas no forman parte de los resultados, quizá porque son voluminosas para problemas grandes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6D<sup>12</sup>

1. En el modelo de TOYCO, determine si la solución actual cambiará en cada uno de los siguientes casos:
  - (i)  $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$
  - (ii)  $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$
  - (iii)  $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$
- \*2. La tienda de abarrotes B&K vende tres tipos de refrescos: las marcas Cola A1, Cola A2 y la marca más barata genérica de Cola A3. El precio por lata de A1, A2 y A3 es 80, 70 y 60 centavos, respectivamente. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas de todos los refrescos de cola al día. Aunque A1 es una marca reconocida, los clientes tienden a comprar más A2 y A3 porque son más baratos. Se estima que como mínimo se venden 100 latas de A1 al día y que las ventas de A2 y A3 sobrepasan las de A1 por un margen de al menos 4:2.
  - (a) Demuestre que la solución óptima no requiere vender la marca A3.
  - (b) ¿Qué tanto se debe incrementar el precio por lata de A3 para que B&K la venda?
  - (c) Para competir con otras tiendas, B&K decidió reducir el precio de los tres tipos de refresco de cola en 5 centavos por lata. Calcule de nuevo los costos reducidos para determinar si esta promoción cambiará la solución óptima actual.
3. Baba Furniture Company emplea cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren dos horas-hombre para ensamblar una mesa y 5 horas-hombre para ensamblar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas. Los precios son \$135 por mesa y \$50 por silla. La compañía opera un turno de ocho horas al día.
  - (a) Determine la combinación de producción óptima para los 10 días.
  - (b) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla se reducen en un 10%, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima obtenida en (a) cambiará.
  - (c) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla cambian a \$120 y \$25, ¿cambiará la solución obtenida en (a)?
4. El banco de Elkins va a asignar un máximo de \$200,000 para préstamos personales y para automóvil durante el siguiente mes. El banco cobra 14% por los préstamos personales, y 12% por los préstamos para automóvil. Ambos tipos de préstamos se reembolsan al final del periodo de 1 año. La experiencia muestra que aproximadamente 3% de los préstamos personales y 2% de los préstamos para automóvil no se reembolsan. El banco suele asignar a los préstamos para automóvil el doble de lo que asigna a los préstamos personales.
  - (a) Determine la asignación óptima de fondos entre los dos préstamos, y la tasa neta de rendimiento en todos los préstamos.
  - (b) Si los porcentajes de los préstamos personales y para automóvil se cambian a 4% y 3%, respectivamente, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) cambiará.
- \*5. Electra produce cuatro tipos de motores eléctricos, cada uno en una línea de ensamble distinta. Las capacidades respectivas de las líneas son 500, 500, 800 y 750 motores por día. El motor tipo 1 utiliza 8 unidades de un determinado componente electrónico; el motor tipo 2 utiliza 5 unidades; el motor tipo 3 utiliza 4 unidades, y el motor tipo 4 utiliza 6 unidades.

<sup>12</sup> En este conjunto de problemas, le convendría generar la tabla simplex óptima con TORA.

El proveedor del componente puede surtir 8000 piezas por día. Los precios de los tipos de motor respectivos son \$60, \$40, \$25 y \$30.

- Determine la combinación óptima de producción diaria.
  - El programa de producción actual satisface las necesidades de Electra. Sin embargo, debido a la competencia, es posible que Electra tenga que reducir el precio del motor tipo 2. ¿Cuál es la reducción máxima que puede efectuarse sin que cambie el programa de producción actual?
  - Electra decidió reducir 25% el precio de todos los tipos de motores. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima no cambia.
  - Actualmente el motor tipo 4 ya no se produce. ¿Qué tanto debe incrementarse su precio para incluirlo en el programa de producción?
6. Popeye Canning firmó un contrato para recibir 60,000 lb diarias de tomates maduros a 7 centavos por libra, con los cual produce jugo de tomate enlatado, salsa de tomate y puré de tomate. Los productos enlatados se empaquetan en cajas de 24 latas. Una lata de jugo utiliza 1 lb de tomates frescos, una lata de salsa utiliza  $\frac{1}{2}$  lb, y una lata de puré utiliza  $\frac{3}{4}$  lb. La participación diaria del mercado de la compañía está limitada a 2000 cajas de jugo, 5000 cajas de salsa y 6000 cajas de puré. Los precios de mayoreo por caja de jugo, salsa y puré son \$21, \$9 y \$12, respectivamente.
- Desarrolle un programa de producción diaria óptimo para Popeye.
  - Si el precio por caja de jugo y puré permanece fijo al valor dado en el problema, aplique el análisis de sensibilidad para determinar el intervalo de precio unitario que Popeye debe cobrar por caja de salsa para mantener sin cambios la combinación de productos óptima.
7. Dean's Furniture Company ensambla gabinetes de cocina regulares y de lujo utilizando madera precortada. Los gabinetes regulares se pintan de blanco, y los de lujo se barnizan. Un departamento realiza tanto el pintado como el barnizado. La capacidad diaria del departamento de ensamble es de 200 gabinetes regulares y de 150 de lujo. El barnizado de una unidad de lujo requiere el doble de tiempo que pintar uno regular. Si el departamento de pintura/barnizado se dedica sólo a las unidades de lujo, puede completar 180 unidades diarias. La compañía estima que los ingresos por unidad de los gabinetes regulares y de lujo son de \$100 y \$140, respectivamente.
- Formule el problema como un programa lineal y halle el programa de producción óptimo por día.
  - Suponga que la competencia dicta que el precio por unidad de cada gabinete regular y de lujo se reduzca a \$80. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) permanece sin cambios.
8. *Regla de optimalidad de 100%.* También puede desarrollarse una regla similar a la *regla de factibilidad de 100%* descrita en el problema 12, conjunto 3.6c, para probar el efecto del cambio simultáneo de todas las  $c_j$  a  $c_j + d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , en la optimalidad de la solución actual. Suponga que  $u_j \leq d_j \leq v_j$  es el intervalo de optimalidad obtenido como resultado del cambio de cada  $c_j$  a  $c_j + d_j$ , uno a la vez, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.6.3. En este caso  $u_j \leq 0$  ( $v_j \geq 0$ ), porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en  $c_j$  que mantendrá óptima la solución actual. Para los casos en que  $u_j \leq d_j \leq v_j$ , defina  $r_j$  igual a  $\frac{d_j}{u_j}$  si  $d_j$  es positivo y  $\frac{d_j}{v_j}$  si  $d_j$  es negativo. Por definición,  $0 \leq r_j \leq 1$ . La regla de 100% dice que una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca óptima es que  $r_1 + r_2 + \dots + r_n \leq 1$ . Si la condición no se satisface, la solución actual puede o no permanecer óptima. La regla no aplica si  $d_j$  queda fuera de los intervalos especificados.

Demuestre que la regla de optimalidad de 100% es demasiado débil como para ser consistentemente confiable como herramienta de toma de decisiones al aplicarla a los siguientes casos.

- Los incisos (ii) e (iii) del problema 1
- El inciso (b) del problema 7

### 3.6.4 Análisis de sensibilidad con Tora, Solver, y AMPL

Ahora contamos con todas las herramientas para descifrar los resultados proporcionados por el software de PL, en particular con respecto al análisis de sensibilidad. Utilizaremos el ejemplo de TOYCO para demostrar lo obtenido con TORA, Solver y AMPL.

El reporte de los resultados de PL obtenidos con TORA proporciona los datos del análisis de sensibilidad de forma automática como se muestra en la figura 3.14 (archivo *toraTOYCO.txt*). Los resultados incluyen los costos reducidos y los precios duales así como los intervalos de optimalidad y factibilidad permisibles.

La figura 3.15 muestra el modelo de TOYCO analizado con Solver (archivo *solverTOYCO.xls*) y su reporte del análisis de sensibilidad. Después de hacer clic en la opción Solve en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, puede solicitar el reporte del análisis de sensibilidad en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Luego haga clic en la pestaña **Sensitivity Report 1** para ver los resultados. El reporte es parecido al de TORA, con tres excepciones: (1) El costo reducido tiene un signo opuesto. (2) Utiliza el nombre *shadow price* (precio sombra) en lugar de *dual price* (precio dual). (3) Los intervalos de optimalidad son para los cambios  $d_j$  y  $D_j$  y no para los coeficientes objetivos totales y los lados derechos de las restricciones. Las diferencias son mínimas, y la interpretación de los resultados no cambia.

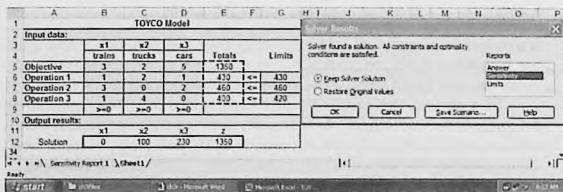
En AMPL, el reporte del análisis de sensibilidad se obtiene de inmediato. El archivo *amplTOYCO.txt* proporciona el código necesario para determinar los resultados obtenidos con el análisis de sensibilidad. Requiere las instrucciones adicionales (el reporte se envía al archivo *a.out*) siguientes:

```
option solver cplex;
option cplex_options 'sensitivity';
solve;
#-----sensitivity analysis
display oper.down,oper.current,oper.up,oper.dual>a.out;
display x.down,x.current,x.up,x.rc>a.out;
```

FIGURA 3.14

Análisis de sensibilidad, realizado con TORA para el modelo de TOYCO

***Sensitivity Analysis***				
Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1:	3.00	-infinity	7.00	4.00
x2:	2.00	0.00	10.00	0.00
x3:	5.00	2.33	infinity	0.00
Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (<):	430.00	230.00	440.00	1.00
2 (<):	460.00	440.00	860.00	2.00
3 (<):	420.00	400.00	infinity	0.00



Adjustable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$12	Solution x1	0	-4	3	4	1E+30
\$C\$12	Solution x2	100	0	2	6	2
\$D\$12	Solution x3	230	0	5	1E+30	2.666666667

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$6	Operation 1 Totals	430	1	430	10	200
\$E\$7	Operation 2 Totals	460	2	460	400	20
\$E\$8	Operation 3 Totals	400	0	420	1E+30	20

FIGURA 3.15

Reporte del análisis de sensibilidad realizado con Excel Solver para el modelo de TOYCO

Se requieren las instrucciones de CPLEX option para obtener el reporte del análisis de sensibilidad estándar. En el modelo de TOYCO, las variables y restricciones con subíndices utilizan los nombres de raíz  $x$  y  $oper.$ , respectivamente. Utilizando estos nombres los sufijos alusivos  $.down$ ,  $.current$  y  $.up$  en las instrucciones generan automáticamente el reporte del análisis de sensibilidad formateado que aparece en la figura 3.16. Los sufijos  $.dual$  y  $.rc$  proporcionan el precio dual y el costo reducido.

: oper.down	oper.current	oper.up	oper.dual	:=	FIGURA 3.16
1	230	430	440	1	Reporte del análisis de sensibilidad obtenido con AMPL para el modelo de TOYCO
2	440	460	860	2	
3	400	420	1e+20p	0	
: x.down	x.current	x.up	x.rc	:=	
1	-1e+20	3	7	-4	
2	0	2	10	0	
3	2.33333	5	1e+20	0	

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6E<sup>13</sup>

1. Considere el problema 1, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si vale la pena incrementar los fondos para el año 4.

<sup>13</sup> Antes de resolver los problemas en este conjunto, se espera que usted genere el reporte del análisis de sensibilidad utilizando AMPL, Solver o TORA.

2. Considere el problema 2, conjunto 2.4a (capítulo 2).
  - (a) Use los precios duales para determinar el rendimiento total sobre la inversión.
  - (b) Si quisiera gastar \$1000 en cosas placenteras al final del año 1, ¿cómo afectaría esto a la suma acumulada al inicio del año 5?
3. Considere el problema 3, conjunto 2.4a (capítulo 2).
  - (a) Dé una interpretación económica de los precios duales del modelo.
  - (b) Demuestre cómo el precio dual asociado con el límite superior del dinero prestado al principio del tercer trimestre puede derivarse a partir de los precios duales asociados con las ecuaciones de balance que representan el flujo de efectivo de entrada y de salida en las cinco fechas designadas del año.
4. Considere el problema 4, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use los precios duales para determinar la tasa de rendimiento asociada con cada año.
- \*5. Considere el problema 5, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para determinar si vale la pena que el ejecutivo invierta más dinero en los planes.
6. Considere el problema 6, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si es aconsejable que el jugador apueste más dinero.
7. Considere el problema 1, conjunto 2.4b (capítulo 2). Relacione los precios duales con los costos de producción unitarios del modelo.
8. Considere el problema 2, conjunto 2.4b (capítulo 2). Suponga que cualquier capacidad adicional de las máquinas 1 y 2 puede obtenerse sólo si se utiliza tiempo extra. ¿Cuál es el costo máximo por hora en que la compañía estaría dispuesta a incurrir para cualquier máquina?
- \*9. Considere el problema 3, conjunto 2.4b (capítulo 2).
  - (a) Suponga que el fabricante puede adquirir más unidades de la materia prima *A* a \$12 por unidad. ¿Sería aconsejable hacer esto?
  - (b) ¿Recomendaría que el fabricante adquiriera más unidades de la materia prima *B* a \$5 por unidad?
10. Considere el problema 10, conjunto 2.4e (capítulo 2).
  - (a) ¿Cuál de las restricciones especificadas tiene un impacto adverso en la solución óptima?
  - (b) ¿Cuál es lo máximo que la compañía debe pagar por tonelada de cada mineral?

### 3.7 TEMAS DE CÁLCULO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL<sup>14</sup>

En este capítulo se han presentado los detalles del algoritmo simplex. Los capítulos siguientes presentan otros algoritmos: El simplex dual (capítulo 4); el simplex revisado (capítulo 7), y el punto interior (capítulo 22 en el sitio web). ¿Por qué la variedad? La razón es que cada algoritmo tiene características específicas que pueden ser beneficiosas en el desarrollo de códigos de computadora robustos.

Un código de PL se considera robusto si satisface dos requerimientos:

1. Velocidad
2. Precisión

Ambos requerimientos presentan retos incluso para las computadoras más avanzadas. Las razones se derivan de la naturaleza de los cálculos algorítmicos y las limitaciones de la computadora. Para estar seguros, el formato de tabla simplex presentado en

<sup>14</sup> Para esta sección se han tomado elementos de R. Bixby, "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress", *Operations Research*, vol. 50, núm. 1, págs. 3-15, 2002.

este capítulo *no es numéricamente estable*, es decir que el error de redondeo cometido por la computadora y la pérdida de dígitos presentan serios problemas de cálculo, en particular cuando los coeficientes del modelo de PL difieren con mucho en magnitud. A pesar de estos retos, de hecho los diferentes algoritmos de PL se han integrado de manera ingeniosa para producir códigos altamente eficientes a fin de resolver PLs extremadamente grandes.

Esta sección explica la transición desde las presentaciones básicas en libros de texto hasta los robustos códigos de PL actuales de última generación. Aborda los temas que afectan la velocidad y la precisión y presenta remedios para aliviar los problemas. También presenta un amplio marco de referencia de los roles de los diferentes algoritmos de programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y punto interior) en el desarrollo de códigos de computadora numéricamente estables. La presentación se mantiene, expresamente, libre de matemáticas y se concentra en los conceptos clave que constituyen el fundamento de los códigos de programación lineal exitosos.

**1. Regla (pivote) de la variable de entrada simplex.** Una nueva iteración simplex determina las variables de entrada y de salida mediante criterios de *optimalidad* y *factibilidad*. Una vez determinadas las dos variables, se utilizan operaciones de fila pivote para generar la siguiente tabla simplex.

En realidad, el *criterio de optimalidad* presentado en la sección 3.3.2 es sólo uno de los muchos que se han utilizado en el desarrollo de códigos de PL. La siguiente tabla resume los tres criterios prominentes.

Regla de la variable de entrada	Descripción
Clásica (sección 3.3.2)	La variable de entrada es la del <i>costo reducido</i> más favorable entre todas las variables no básicas.
Mejora máxima	La variable de entrada es la que produce la <i>mejora total</i> máxima del valor objetivo entre todas las variables no básicas.
Borde más inclinado <sup>15</sup>	La variable de entrada es la que da el <i>costo reducido</i> más favorable entre todas las variables no básicas. El algoritmo se mueve a lo largo del <i>borde más inclinado</i> que va del punto actual a un punto extremo vecino.

En cuanto a la *regla clásica*, la fila objetivo de la tabla simplex proporciona de inmediato los costos reducidos de todas las variables no básicas sin cálculos adicionales. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* requiere una considerable cantidad de cálculos adicionales para determinar primero el valor con el cual una variable no básica entra en la solución y luego la mejora total resultante del valor objetivo. La idea de la *regla del borde más inclinado*, aunque en el “espíritu” de la *regla de la mejora máxima* (en el sentido de que toma en cuenta indirectamente el valor de la variable de entrada), requiere mucho menos cálculos.

<sup>15</sup> Vea D. Goldfarb y J. Reid, “A Practicable Steepest Edge Simplex Algorithm”, *Mathematical Programming*, vol. 12, núm. 1, págs. 361-377, 1977.

El intercambio entre las tres reglas es que la *regla clásica* es la menos costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, requiere la máxima cantidad de iteraciones para llegar al óptimo. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* es la más costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, implica la cantidad mínima de iteraciones simplex. La *regla del borde más inclinado* parece ser el término medio en función de la cantidad de cálculos adicionales y la cantidad de iteraciones simplex. Es interesante observar que los resultados de prueba muestran que los beneficios generados por los cálculos adicionales en la *regla de la mejora máxima* no parecen mejores que los generados por la *regla del borde más inclinado*. Esto es lo que hace que rara vez se implemente la *regla de la mejora máxima* en los códigos de PL.

Aunque la *regla del borde más inclinado* es la regla predeterminada más común para la selección de la variable de entrada, los códigos de PL exitosos tienden a utilizar una *fijación de precios híbrida*. Inicialmente, las iteraciones simplex utilizan (una variación de) la *regla clásica*. Conforme se incrementa la cantidad de iteraciones, se hace un cambio a (una variación de) la *regla del borde más inclinado*. La extensa experiencia de cálculo indica que esta estrategia reditúa en función del tiempo total de computadora necesario para resolver una programación lineal.

**2. Algoritmo primal vs. simplex dual.** El capítulo 3 se concentró principalmente en los detalles de lo que en ocasiones se conoce en la literatura como *método simplex primal*. En el algoritmo primal, la solución básica inicial es factible, pero no óptima. Las iteraciones sucesivas permanecen factibles a medida que avanzan hacia el óptimo. Se desarrolló un algoritmo subsiguiente para PLs, llamado *simplex dual*, que se inicia como no factible pero óptimo y que se dirige hacia la factibilidad, al tiempo que mantiene la optimalidad. La iteración final ocurre cuando se restaura la factibilidad. Los detalles del algoritmo dual se dan en el capítulo 4, sección 4.4.1.

En un inicio, el algoritmo dual se utilizó sobre todo en el análisis post óptimo de PL (sección 4.5) y en la programación lineal entera, (capítulo 9), pero no como un algoritmo independiente para resolver PLs. La razón principal es que su regla para seleccionar la variable de salida era débil. Sin embargo, todo esto cambió cuando se adoptó la idea de la regla del borde más inclinado primal para determinar la variable de salida en el algoritmo simplex dual.<sup>16</sup> En la actualidad, el simplex dual con la adaptación del borde más inclinado ha demostrado que es dos veces más rápido que el simplex dual, y por el momento es el algoritmo simplex dominante en los códigos comerciales más importantes.

**3. Simplex revisado vs. tabla simplex.** Los cálculos simplex presentados al principio de este capítulo (y también en el capítulo 4 para el simplex dual) generan la siguiente tabla simplex a partir de la inmediata anterior. El resultado es que las tablas no son numéricamente estables por tres razones:

- a. La mayoría de los modelos de PL son sumamente dispersos (es decir, contienen un alto porcentaje de coeficientes cero en la iteración de inicio). Los métodos numéricos disponibles pueden reducir la cantidad de cálculos locales al economizar (incluso eliminar) operaciones que implican coeficien-

<sup>16</sup> Vea J. Forrest y D. Goldfarb, "Steepest-Edge Simplex Algorithm for Linear Programming", *Mathematical Programming*, vol. 57, núm. 3, págs. 341-374, 1992.

tes cero, lo que a su vez acelera sustancialmente los cálculos. Ésta es una fuerte oportunidad perdida en cálculos con tablas, porque las tablas sucesivas pronto se saturan de elementos no cero.

- b. El error de redondeo y la pérdida de dígitos, inherentes en todas las computadoras, pueden propagarse con rapidez a medida que crece la cantidad de iteraciones, que llevaría a una grave pérdida de precisión, sobre todo en PL grandes.
- c. Las operaciones de filas simplex realizan más cálculos que los que se requieren para generar la siguiente tabla (recuerde que todo lo que se necesita en una iteración son las variables de entrada y de salida). Estos cálculos extra representan tiempo de computadora desperdiciado.

El algoritmo simplex revisado presentado en la sección 7.2 mejora con respecto a estas desventajas. Aunque el método utiliza las reglas de pivoteo exactas como en el método de tablas (*tableau*), la diferencia principal es que realiza los cálculos aplicando álgebra matricial. En un modelo de  $m$  restricciones, cada solución de punto (de esquina) extremo se calcula resolviendo el conjunto de  $m \times m$  ecuaciones  $\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$  para el vector básico  $\mathbf{X}_B$ . La matriz básica  $\mathbf{B}$  se determina a partir de las columnas de restricciones del modelo *original*, y  $\mathbf{b}$  es el lado derecho *original* de las restricciones. En esencia, sólo  $\mathbf{B}$  cambia entre iteraciones. Esta propiedad única que permite controlar el error de redondeo/pérdida de dígitos, aprovecha la dispersión del modelo original y acelera los cálculos. En realidad, el análisis numérico en el álgebra matricial proporciona métodos robustos y eficientes para resolver  $\mathbf{B}\mathbf{X}_B = \mathbf{b}$  factorizando  $\mathbf{B}$  en matrices triangulares de  $\mathbf{L}$  inferior y  $\mathbf{U}$  superior, de modo que  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ . El método, con toda propiedad llamado descomposición L-U, es particularmente adecuado para matrices dispersas.<sup>17</sup>

Por estas razones el formato de tabla nunca se utiliza en los códigos de PL más destacados disponibles en la actualidad.

**4. Algoritmo de barrera (punto interior) vs. algoritmo simplex.** El algoritmo de punto interior (vea la sección 22.3 en el sitio web) es totalmente diferente del algoritmo simplex en que cruza el espacio factible y poco a poco se mueve (en el límite) hacia el óptimo. Computacionalmente, el algoritmo es *polinomial* en el tamaño del problema. Por otra parte, el algoritmo simplex es *exponencial* en el tamaño del problema (se han construido ejemplos hipotéticos en los que el algoritmo simplex visita *cada* punto de esquina del espacio de soluciones antes de alcanzar el óptimo).

El algoritmo de punto interior se introdujo en 1984 y, sorprendentemente, fue patentado por AT&T y vendido en una computadora especializada (aparentemente por una exuberante cantidad) sin revelar sus detalles computacionales. Al fin, la comunidad científica “se ocupó” y descubrió que el método de punto interior tenía raíces en los primeros algoritmos de programación no lineal de la década de 1960 (vea por ejemplo el algoritmo SUMT en la sección 21.2.5). El resultado es el llamado *método de barrera* con algunas variaciones algorítmicas.

Para problemas en extremo grandes, el método de barrera ha demostrado ser mucho más rápido que el algoritmo simplex dual. La desventaja es que el algoritmo de barrera no produce soluciones de punto de esquina, una restricción que limita su apli-

<sup>17</sup> Vea J. Bunch y J. Jopcroft, “Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication”, *Mathematics of Computation*, vol. 28, págs. 231-236, 1974. Vea también E. Hellerman y D. Rarick, “Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure”, *Mathematical Programming*, vol. 1, págs. 195-216, 1971.

cación en el análisis postóptimo (capítulo 4) y también en la programación entera (capítulo 9). Aunque se han desarrollado métodos para convertir una solución de punto interior óptimo de barrera en una solución de punto de esquina, la carga de computo asociada es enorme, lo que limita su uso en aplicaciones como programación entera, donde la frecuente necesidad de localizar soluciones de punto de esquina es fundamental para el algoritmo. No obstante, todos los códigos comerciales incluyen el algoritmo de barrera como herramienta para resolver PL grandes.

**5. Degeneración.** Como se explicó en la sección 3.5.1, las soluciones básicas generadas pueden generar ciclado, lo que haría que las iteraciones simplex se quedaran atascadas indefinidamente en un punto de esquina degenerado sin alcanzar su término. En las primeras versiones del algoritmo simplex, la degeneración y el ciclado no se incorporaron en la mayoría de los códigos porque se suponía que su ocurrencia en la práctica era rara. A medida que se probaron instancias de problemas más difíciles y más grandes (sobre todo en el área de la programación entera), el error de redondeo producido por las computadoras dio lugar a un comportamiento de tipo ciclado y degeneración que provocó que los cálculos “se quedaran atascados” en el mismo valor objetivo. El problema se evadió interponiendo una perturbación aleatoria condicional y cambiando los valores de las variables básicas.<sup>18</sup>

**6. Acondicionamiento del modelo de entrada (solución previa).** Todos los lenguajes y solucionadores tratan de acondicionar los datos de entrada antes de resolverlos. El objetivo es “simplificar” el modelo de dos maneras clave:<sup>19</sup>

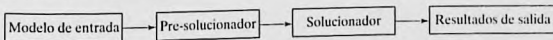
- a. Reduciendo el tamaño del modelo (filas y columnas) mediante la identificación y eliminación de las restricciones redundantes, y posiblemente fijando y sustituyendo las variables.
- b. Ponderando los coeficientes del modelo que sean de magnitud ampliamente diferente para mitigar el efecto adverso de la pérdida de dígitos cuando se manipulan números reales de magnitudes ampliamente diferentes.

La figura 3.17 resume las etapas de solución de un problema de PL. El modelo de entrada puede ser alimentado por medio de un pre-solucionador a un solucionador, tal como CPLEX o XPRESS. Como alternativa puede usarse un lenguaje cómodo de modelado como AMPL, GAMS, MOSEL o MPL, para modelar algebraicamente la PL y luego pre-solucionar de manera interna y transformar sus datos de entrada para ajustarlos al formato del solucionador, el cual entonces produce los resultados de salida en función de las variables y restricciones del modelo de PL *original*.

**7. Avance de las computadoras.** No es de sorprender que en el último cuarto del siglo XX la velocidad de las computadoras se hubiera incrementado más de mil veces.

FIGURA 3.17

Componentes de una PL numérica



<sup>18</sup>Vea P. Harris, “Pivot Selection Methods of the debex LP Code”, *Mathematical Programming*, vol. 5, págs. 1-28, 1974.

<sup>19</sup>Vea L. Bearley, L. Mitra, y H. Williams, “Analysis of Mathematical Programming Problems Prior to Applying Simplex Algorithm”, *Mathematical Programming*, vol. 8, pp. 54-83, 1975.

En la actualidad, una computadora de escritorio es más potente y veloz que las antiguas supercomputadoras. Estos avances (junto con los avances algorítmicos antes citados) han hecho posible resolver enormes PL en cuestión de segundos en comparación con días (¡sí, días!) en el pasado.

## BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Chvátal, V., *Linear Programming*, Freeman, Nueva York, 1983.
- Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- Dantzig, G., y M. Thapa, *Linear Programming I: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.
- Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.
- Taha, H., "Linear Programming", capítulo II-1 en *Handbook of Operations Research*, J. Moder y S. Elmaghraby (eds.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.

# CAPÍTULO 4

## Dualidad y análisis postóptimo

### 4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema **dual** se define sistemáticamente a partir del modelo de PL **primal** (u original). Los dos problemas están estrechamente relacionados en el sentido de que la solución óptima de uno proporciona automáticamente la solución óptima al otro.

En la mayoría de los tratamientos de PL, el dual se define para varias formas del primal según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones ( $\leq$ ,  $\geq$  o  $=$ ), y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas). Este capítulo ofrece una definición *única* que abarca de manera automática *todas* las formas del primal.

Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en la *forma de ecuación* que se presentó en la sección 3.1 (todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas). Este requerimiento es consistente con el formato de la tabla inicial simplex. De ahí que cualesquier resultados obtenidos a partir de la solución óptima primal se aplican directamente al problema dual asociado.

Las ideas clave para construir el dual a partir del primal se resumen como sigue:

1. Asigne una variable dual por cada restricción primal.
2. Construya una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) y el coeficiente objetivo de la variable primal  $j$ -ésima definen respectivamente los lados izquierdo y derecho de la restricción dual  $j$ -ésima.
4. Los coeficientes objetivo duales son iguales a los lados derechos de las ecuaciones de restricción primales.
5. Las reglas que aparecen en la tabla 4.1 rigen el sentido de optimización, la dirección de las desigualdades y los signos de las variables en el dual. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción en el dual (es decir,  $\leq$  o  $\geq$ ) es que si el objetivo dual es de *minimización* (es decir, apunta *hacia abajo*), entonces todas las restricciones serán del tipo  $\geq$  (es decir, *apuntan hacia arriba*). Lo opuesto aplica cuando el objetivo dual es de maximización.

TABLA 4.1 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal <sup>a</sup>	Problema dual		
	Objetivo	Tipo de restricción	Signo de las variables
Maximización	Minimización	$\geq$	irrestricida
Minimización	Maximización	$\leq$	irrestricida

<sup>a</sup>Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

Los siguientes ejemplos demuestran en la tabla 4.1 el uso de las reglas; incluso, muestran que nuestra definición incorpora automáticamente todas las formas del primal.

### Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$ sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$y_1$ $y_2$

### Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeto a

$$\left. \begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ y_1 + 0y_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \text{ irrestricida})$$

### Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$ sujeto a $x_1 + 2x_2 \geq 3$ $2x_1 - 4x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$ sujeto a $x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$ $2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$y_1$ $y_2$

**Problema dual**

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sueto a

$$\left. \begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \\ -y_1 &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 &\text{ irrestricta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \leq 0)$$

**Ejemplo 4.1-3**

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$	Sustituir $x_1 = x_1^- - x_1^+$	
sueto a	Maximizar $z = 5x_1^- - 5x_1^+ + 6x_2$	
$x_1 + 2x_2 = 5$	sueto a	
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$x_1^- - x_1^+ + 2x_2 = 5$	$y_1$
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$-x_1^- + x_1^+ + 5x_2 - x_3 = 3$	$y_2$
$x_1$ irrestricta, $x_2 \geq 0$	$4x_1^- - 4x_1^+ + 7x_2 + x_4 = 8$	$y_3$
	$x_1^-, x_1^+, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

**Problema dual**

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sueto a

$$\left. \begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 &\geq -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 &\leq 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\left. \begin{aligned} -y_2 &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (y_1 \text{ irrestricta}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0)$$

$$y_1, y_2, y_3 \text{ irrestricta}$$

La primera y segunda restricciones son reemplazadas por una ecuación. La regla general es que una variable primal irrestricta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad. A la inversa, una ecuación primal de igualdad produce una variable dual irrestricta, como lo demuestra la primera restricción primal.

**Resumen de las reglas para construir el dual.** La tabla 4.2 resume las reglas del primal-dual como suelen presentarse en la literatura. Un buen ejercicio es verificar que las dos reglas que aparecen en la tabla 4.1 abarcan estas reglas explícitas.

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Problema de maximización		Problema de minimización	
<i>Restricciones</i>			<i>Variables</i>
$\geq$	$\Leftrightarrow$		$\leq 0$
$\leq$	$\Leftrightarrow$		$\geq 0$
$=$	$\Leftrightarrow$		<i>Restricciones</i>
<i>Variables</i>			<i>irrestringidas</i>
$\geq 0$	$\Leftrightarrow$		$\geq$
$\leq 0$	$\Leftrightarrow$		$\leq$
<i>Irrestringidas</i>	$\Leftrightarrow$		$=$

Observe que los encabezados de columna que aparecen en la tabla no utilizan el nombre primal y dual. Lo que importa en este caso es el sentido de optimización. Si el primal es de maximización, entonces el dual es de minimización, y viceversa. Observe también que no hay medidas específicas para incluir variables artificiales en el primal. La razón es que las variables artificiales no cambiarían la definición del dual (vea el problema 5, conjunto 4.1a).

#### CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.1A

- En el ejemplo 4.1-1, derive el problema dual asociado si el sentido de optimización en el problema primal se cambia a minimización.
- En el ejemplo 4.1-2, derive el problema dual asociado dado que el problema primal se incrementa con una tercera restricción,  $3x_1 + x_2 = 4$ .
- En el ejemplo 4.1-3, demuestre que aunque el sentido de optimización en el primal se cambie a minimización, una variable primal irrestringida siempre corresponde a una restricción dual de igualdad.
- Escriba el dual para cada uno de los siguientes problemas primales:

(a) Maximizar  $z = -5x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Minimizar  $z = 6x_1 + 3x_2$

sujeto a

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

\*(c) Maximizar  $z = x_1 + x_2$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \text{ irrestringida}$$

- \*5. Considere el ejemplo 4.1-1. La aplicación del método simplex al primal requiere utilizar una variable artificial en la segunda restricción del primal estándar para asegurar una solución básica inicial. Demuestre que la presencia de una primal artificial en forma de ecuación no afecta la definición del dual porque conduce a una restricción dual redundante.
6. ¿Verdadero o falso?
- El dual del problema dual da por resultado el primal original.
  - Si la restricción primal está originalmente en forma de ecuación, la variable dual correspondiente no necesariamente es irrestricta.
  - Si la restricción primal es del tipo  $\leq$  la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) si la función objetivo primal es de maximización (minimización).
  - Si la restricción primal es del tipo  $\geq$  la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) si la función objetivo primal es de minimización (maximización).
  - Una variable primal irrestricta producirá una restricción dual de igualdad.

## 4.2 RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios realizados en los datos de un modelo de PL pueden afectar la optimalidad y/o factibilidad de la solución óptima actual. Esta sección presenta varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

La sección se inicia con un breve repaso de las matrices, una herramienta muy útil para realizar los cálculos de tabla simplex. Un repaso más detallado de las matrices se da en el apéndice D en el sitio web.

### 4.2.1 Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales: (fila vector)  $\times$  (matriz), (matriz)  $\times$  (columna vector) y (escalar)  $\times$  (matriz). Por comodidad, estas operaciones se resumen. En primer lugar, presentamos algunas definiciones de matriz:

- Una *matriz*, **A**, de tamaño  $(m \times n)$  es un conjunto rectangular de elementos con  $m$  filas y  $n$  columnas.
- Un *vector fila*, **V**, de tamaño  $m$  es una matriz  $(1 \times m)$ .
- Un *vector columna*, **P**, de tamaño  $n$  es una matriz  $(n \times 1)$ .

Estas definiciones pueden representarse matemáticamente como

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_m), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$$

1. **(Vector fila  $\times$  matriz,  $\mathbf{VA}$ ).** La operación es válida sólo si el tamaño del vector fila  $\mathbf{V}$  y la cantidad de filas de  $\mathbf{A}$  son iguales. Por ejemplo,

$$(11, 22, 33) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33, 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33) \\ = (242, 308)$$

2. **(Matriz  $\times$  vector columna,  $\mathbf{AP}$ ).** La operación es válida sólo si la cantidad de columnas de  $\mathbf{A}$  y el tamaño del vector columna  $\mathbf{P}$  son iguales. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

3. **(Escalar  $\times$  matriz,  $\alpha\mathbf{A}$ ).** Dada la cantidad escalar  $\alpha$  (o constante), la operación de multiplicación  $\alpha\mathbf{A}$  da una matriz del mismo tamaño que la matriz  $\mathbf{A}$ . Por ejemplo, dado que  $\alpha = 10$ ,

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2A

1. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_1 = (11, 22), \mathbf{V}_2 = (-1, -2, -3)$$

En cada uno de los siguientes casos, indique si la operación matricial dada es legítima; si lo es, calcule el resultado.

- \*(a)  $\mathbf{AV}_1$
- (b)  $\mathbf{AP}_1$
- (c)  $\mathbf{AP}_2$
- (d)  $\mathbf{V}_1\mathbf{A}$
- \*(e)  $\mathbf{V}_2\mathbf{A}$
- (f)  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$
- (g)  $\mathbf{V}_1\mathbf{P}_1$

### 4.2.2 Diseño de la tabla simplex

La tabla simplex del capítulo 3 es la base para la presentación en este capítulo. La figura 4.1 representa esquemáticamente las tablas simplex *inicial* y *generales*. En la tabla inicial, los coeficientes de restricción bajo las variables iniciales forman una **matriz identidad** (todos los elementos en la diagonal principal son 1, y todos los elementos

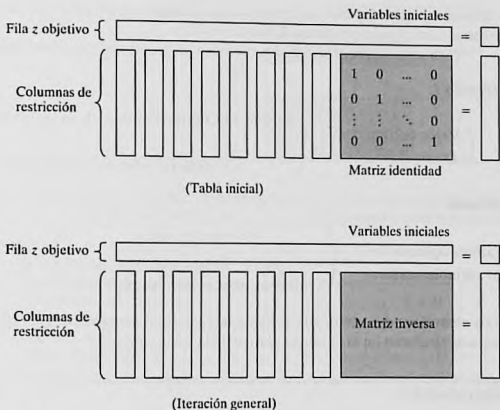


FIGURA 4.1

Representación esquemática de las tablas simplex inicial y general

fuera de la diagonal son cero). Con esta disposición, las iteraciones siguientes de la tabla simplex generadas por las operaciones de filas de Gauss-Jordan (vea el capítulo 3) modifican los elementos de la matriz identidad para producir lo que se conoce como **matriz inversa**. Como veremos en el resto de este capítulo, la matriz inversa es la clave para calcular todos los elementos de la tabla simplex asociada.

#### CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2B

1. Considere la tabla óptima del ejemplo 3.3-1.
  - (a)\* Identifique la matriz inversa óptima.
  - (b) Demuestre que el lado derecho es igual a la inversa multiplicada por el vector del lado derecho original de las restricciones originales.
2. Repita el problema 1 para la última tabla del ejemplo 3.4-1.

#### 4.2.3 Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas en el sentido de que la solución óptima de uno u otro problema da la solución óptima al otro. Así pues, en un modelo de PL en el que la cantidad de variables es considerablemente menor que la de restricciones, pueden ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de

cálculos simplex depende en gran medida (aunque no totalmente) de la cantidad de restricciones (vea el problema 2, conjunto 4.2c).

Esta sección proporciona dos métodos para determinar los valores duales.

### Método 1.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Valor óptimo de} \\ \text{la variable dual } y_i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Coeficiente } z \text{ primal óptimo de la variable inicial } x_i \\ + \\ \text{Coeficiente objetivo original de } x_i \end{array} \right)$$

### Método 2.

$$\left( \begin{array}{l} \text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables duales} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Vector fila de los} \\ \text{coeficientes objetivo originales de las} \\ \text{variables básicas primales óptimas} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{l} \text{Inversa primal} \\ \text{óptima} \end{array} \right)$$

Los elementos del vector fila deben aparecer en el mismo orden en que las variables básicas aparecen en la columna *Básica* de la tabla simplex.

### Ejemplo 4.2-1

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para preparar el problema para su solución mediante el método simplex, agregamos una variable de holgura  $x_4$  en la primera restricción y una variable artificial  $R$  en la segunda. Por consiguiente, el primal resultante y los problemas duales asociados se definen como sigue:

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$	$2y_1 - y_2 \geq 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$	$y_1 + 3y_2 \geq 4$
	$y_1 \geq 0$
	$y_2 \geq -M \ (\Rightarrow y_2 \text{ irrestricta})$

La tabla 4.3 proporciona la tabla primal óptima.

A continuación demostramos cómo se determinan los valores duales óptimos aplicando los dos métodos descritos al inicio de esta sección.

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$R$	Solución
$z$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
$x_1$	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

**Método 1.** En la tabla 4.3, las variables primales iniciales  $x_3$  y  $R$  corresponden sólo a las variables duales  $y_1$  y  $y_2$ , respectivamente. Por lo tanto, determinamos la solución dual óptima como sigue:

Variables básicas primales iniciales	$x_4$	$R$
Coefficientes de la ecuación $z$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
Coefficiente objetivo original	0	$-M$
Variables duales	$y_1$	$y_2$
Valores duales óptimos	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

**Método 2.** La matriz inversa óptima, resultada en la tabla 4.3, bajo las variables iniciales  $x_4$  y  $R$ , es

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El orden de las variables básicas primales óptimas en la columna *Básica* es  $x_2$  seguida por  $x_1$ . Los elementos de los coeficientes objetivo originales para las dos variables deben aparecer en el mismo orden, es decir,

$$\begin{aligned} (\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{ coeficiente de } x_1) \\ &= (12, 5) \end{aligned}$$

Los valores duales óptimos son

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} \text{Coeficientes objetivo} \\ \text{originales de } x_2, x_1 \end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima}) \\ &= (12, 5) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{29}{5}, -\frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$



FIGURA 4.2

Relación entre  $z$  máxima y  $w$  mínima

**Valores objetivo primales-duales.** Para cualquier par de soluciones primales y duales factibles

$$\left( \begin{array}{c} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de maximización} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{c} \text{Valor objetivo en el} \\ \text{problema de minimización} \end{array} \right)$$

En el óptimo, la relación se mantiene como una ecuación estricta, lo que significa que los dos valores objetivo son iguales. Observe que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual. En este caso sólo el sentido de optimización (maximización o minimización) es importante.

El óptimo no puede ocurrir con  $z$  estrictamente menor que  $w$  (es decir,  $z < w$ ) porque, no importa qué tan cerca estén  $z$  y  $w$ , siempre hay la oportunidad de una mejora, lo que contradice la optimalidad como lo demuestra la figura 4.2.

### Ejemplo 4.2-2

En el ejemplo 4.2-1 ( $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{3}$ ) y ( $y_1 = 6, y_2 = 0$ ) son soluciones primales y duales factibles (arbitrarias). Los valores asociados de las funciones objetivo son

$$\begin{aligned} z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5(0) + 12(0) + 4\left(\frac{8}{3}\right) = 10\frac{2}{3} \\ w &= 10y_1 + 8y_2 = 10(6) + 8(0) = 60 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $z (= 10\frac{2}{3})$  en el problema de maximización (primal) es menor que  $w (= 60)$  en el problema de minimización (dual). El valor óptimo de  $z (= 54\frac{1}{3})$  queda en el intervalo  $(10\frac{2}{3}, 60)$ .

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2C

- Determine el valor óptimo de la función objetivo en el siguiente problema al inspeccionar sólo el dual. (No resuelva el dual con el método simplex).

$$\text{Minimizar } z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. Resuelva el dual del siguiente problema, y en seguida halle su solución óptima a partir de la solución del dual. ¿Ofrece ventajas computacionales la solución del dual sobre la solución directa del primal?

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 20$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \geq 30$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 35$$

$$2x_1 + 4x_2 - 15x_3 \geq 10$$

$$12x_1 + 10x_2 \geq 90$$

$$x_2 - 10x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- \*3. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dado que la variable artificial  $x_4$  y la variable de holgura  $x_5$  forman las variables básicas iniciales y que  $M$  se estableció igual a cero al solucionar el problema, la *tabla óptima* se da como:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Solución
$z$	0	23	7	105	0	150
$x_1$	1	5	2	1	0	30
$x_5$	0	-10	-8	-1	1	10

Escriba el problema dual asociado y encuentre su solución óptima de las dos maneras.

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución inicial se compone de las variables artificiales  $x_4$  y  $x_5$  para la primera y segunda restricciones y la variable de holgura  $x_6$  para la tercera restricción. Utilizando  $M = 100$  para las variables artificiales, la tabla óptima se da como sigue:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	0	0	0	-98.6	-100	-.2	3.4
$x_1$	1	0	0	.4	0	-.2	.4
$x_2$	0	1	0	.2	0	.6	1.8
$x_3$	0	0	1	1	-1	1	1.0

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de las dos maneras.

5. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

suje to a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Aplicando  $x_3$  y  $x_4$  como variables iniciales, la tabla óptima se da como

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
$z$	2	0	0	3	16
$x_3$	.75	0	1	-.25	2
$x_2$	.25	1	0	.25	2

Escriba el problema dual asociado, y determine su solución óptima en dos maneras.

\*6. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

suje to a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución inicial se compone de la variable  $x_3$  en la primera restricción y una variable artificial  $x_4$  en la segunda restricción con  $M = 100$ . La tabla óptima se da como

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solución
$z$	0	2	0	99	5
$x_3$	1	2.5	1	-.5	1
$x_1$	0	-.5	0	.5	2

Escriba el problema dual asociado, y determine su solución óptima de las dos maneras.

7. Considere el siguiente conjunto de desigualdades:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 2$$

$$x_1 \text{ irrestricta}$$

$$x_2 \geq 0$$

Se puede determinar una solución factible incrementando la función objetivo trivial, maximizar  $z = x_1 + x_2$  y luego resolviendo el problema. Otra forma es resolver el dual, con el cual puede determinarse una solución para el conjunto de desigualdades. Aplique ambos métodos.

8. Estime un intervalo para el valor objetivo óptimo de las siguientes PL:

**(a)** Minimizar  $z = 5x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**(b)** Maximizar  $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**(c)** Maximizar  $z = 2x_1 + x_2$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**(d)** Maximizar  $z = 3x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

9. En el problema 7(a), sean  $y_1$  y  $y_2$  las variables duales. Determine si los siguientes pares de soluciones primales-duales son óptimos.

**(a)\***  $(x_1 = 3, x_2 = 1; y_1 = 4, y_2 = 1)$

**(b)**  $(x_1 = 4, x_2 = 1; y_1 = 1, y_2 = 0)$

**(c)**  $(x_1 = 3, x_2 = 0; y_1 = 5, y_2 = 0)$

## 4.2.4 Cálculos con la tabla simplex

Esta sección muestra cómo se puede generar *cualquier iteración* de la tabla simplex a partir de los datos *originales* del problema, la *inversa* asociada con la iteración, y el problema dual. Con el diseño de la tabla simplex que se muestra en la figura 4.1, podemos dividir los cálculos en dos tipos:

1. Columnas de restricción (lados izquierdo y derecho).
2. Fila  $z$  objetivo.

**Fórmula 1: Cálculos con la columna de restricción.** En cualquier iteración simplex, una columna izquierda o derecha se calcula como sigue:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Columna de restricción} \\ \text{en iteración } i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Inversa en} \\ \text{la iteración } i \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Columna de} \\ \text{restricción original} \end{array} \right)$$

**Fórmula 2: Cálculos con la fila  $z$  objetivo.** En cualquier iteración simplex, el coeficiente de  $x_j$  en la ecuación objetivo (costo reducido) se calcula como sigue:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Coeficiente de la variable } x_1 \\ \text{en la ecuación } z \text{ primal} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Lado izquierdo de la} \\ \text{restricción dual } j\text{-ésima} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Lado derecho de la} \\ \text{restricción dual } j\text{-ésima} \end{array} \right)$$

**Ejemplo 4.2-3**

Utilizamos la programación lineal del ejemplo 4.2-1 para ilustrar la aplicación de las fórmulas 1 y 2. A partir de la tabla óptima que aparece en la tabla 4.3, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Inversa óptima} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{c} \text{Columna } x_1 \text{ en la} \\ \text{iteración óptima} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \text{Inversa en la} \\ \text{iteración óptima} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Columna } x_1 \\ \text{en original} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puede utilizarse un cálculo similar para generar las columnas óptimas para  $x_2, x_3, x_4, R$ , y el lado derecho (¡compruébelo!).

A continuación demostramos cómo se realizan los cálculos de fila objetivo con la fórmula 2. Los valores óptimos de las variables duales  $(y_1, y_2) = (\frac{29}{5}, -\frac{2}{5})$ , se calcularon en el ejemplo 4.2-1. Estos valores se utilizan en la fórmula 2 para calcular todos los coeficientes  $z$ , como se ilustra aquí para  $x_1$  y  $R$ .

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } x_1 = y_1 + 2y_2 - 5 = \frac{29}{5} + 2 \times -\frac{2}{5} - 5 = 0$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } R = y_2 - (-M) = -\frac{2}{5} - (-M) = -\frac{2}{5} + M$$

Pueden usarse cálculos similares para determinar los coeficientes  $z$  de  $x_2, x_3$  y  $x_4$  (¡compruébelo!).

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2D

1. Genere la primera iteración simplex del ejemplo 4.2-1 (por comodidad puede utilizar la opción Iterations  $\Rightarrow$   $M$ -method con  $M = 100$ ), luego utilice las fórmulas 1 y 2 para verificar todos los elementos de la tabla resultante.
2. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 14x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21$$

$$7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de cada una de las siguientes soluciones básicas.

**(a)** Variables básicas =  $(x_2, x_4)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$

**(b)** Variables básicas =  $(x_2, x_3)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

**(c)** Variables básicas =  $(x_2, x_1)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix}$

**(d)** Variables básicas =  $(x_1, x_4)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

3. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

$$3x_1 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de las siguientes soluciones básicas.

**(a)** Variables básicas =  $(x_4, x_3, x_6)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**(b)** Variables básicas =  $(x_2, x_3, x_1)$ , Inversa =  $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$(c) \text{ Variables básicas} = (x_2, x_3, x_6), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

\*4. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

suje to a

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Calcule la tabla simplex completa asociada con la siguiente solución básica, y compruebe optimalidad y factibilidad.

$$\text{Variables básicas} = (x_1, x_2, x_5), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

suje to a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(a) Identifique la mejor solución de entre las siguientes soluciones factibles básicas:

$$(i) \text{ Variables básicas} = (x_4, x_3), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \text{ Variables básicas} = (x_2, x_1), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(iii) \text{ Variables básicas} = (x_2, x_3), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

(b) ¿Es óptima la solución obtenida en (a) para el modelo de PL?

6. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La siguiente tabla óptima corresponde a valores específicos de  $b_1$  y  $b_2$ :

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Solución
$z$	0	$a$	7	$d$	$e$	150
$x_1$	1	$b$	2	1	0	30
$x_5$	0	$c$	-8	-1	1	10

Determine lo siguiente:

- (a) Los valores del lado derecho,  $b_1$  y  $b_2$ .  
 (b) La solución dual óptima.  
 (c) Los elementos  $a, b, c, d$  y  $e$ .
- \*7. La siguiente es la tabla óptima para un modelo de PL de maximización con tres restricciones ( $\leq$ ) y todas las variables no negativas. Las variables  $x_3, x_4$  y  $x_5$  son las holguras asociadas con las tres restricciones. Determine el valor objetivo óptimo asociado de dos maneras diferentes usando las funciones objetivo primal y dual.

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Solución
$z$	0	0	0	3	2	?
$x_3$	0	0	1	1	-1	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	-1	1	2

8. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Aproveche el problema dual para demostrar que la solución básica  $(x_1, x_2)$  no es óptima.

9. Demuestre que el método 1 de la sección 4.2.3 para determinar los valores duales óptimos en realidad está basado en la fórmula 2 de la sección 4.2.4.

## 4.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

El problema de PL puede considerarse como un modelo de asignación de recursos que busca maximizar los ingresos con recursos limitados. Considerando el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interesantes interpretaciones económicas del modelo de asignación de recursos.

Para formalizar el planteamiento, considere la siguiente representación de los problemas primal y dual:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^m b_i y_i$
sujeto a	sujeto a
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$	$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$
$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$	$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$

Considerado como un modelo de asignación de recursos, el problema primal consta de  $n$  actividades económicas y  $m$  recursos. El coeficiente  $c_j$  en el primal representa el ingreso por unidad de la actividad  $j$ . El recurso  $i$  con disponibilidad  $b_i$  se consume a razón de  $a_{ij}$  unidades por unidad de actividad  $j$ .

#### 4.3.1 Interpretación económica de las variables duales

La sección 4.2.3 establece que para cualquiera de las dos soluciones *factibles* primal y dual, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$$

En el óptimo, los dos valores objetivo son iguales, es decir,  $z = w$ .

En función del modelo de asignación de recursos,  $z$  representa \$ ingresos, y  $b_i$  representa unidades disponibles del recurso  $i$ . Por lo tanto, dimensionalmente,  $z = w$  implica

$$\text{\$ ingresos} = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \sum_{i=1}^m (\text{unidades del recurso } i) \times (\text{\$ por unidad del recurso } i)$$

Esto quiere decir que la variable dual,  $y_i$ , representa el **valor por unidad** del recurso  $i$ .

Como se expone en la sección 3.6, el nombre estándar **precio dual** (o **precio sombra**) del recurso  $i$  reemplaza el nombre (sugestivo) *valor por unidad* en toda la literatura de programación lineal y en los paquetes de software, de ahí que también se adoptó el nombre estándar en este libro.

Utilizando el mismo análisis dimensional, podemos interpretar la desigualdad  $z < w$  (para cualquiera de las dos soluciones primal y dual) como

$$(\text{Ingreso}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Esta relación expresa que en tanto el ingreso total de todas las actividades sea menor que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no serán óptimas. La optimalidad se alcanza sólo cuando los recursos se han explotado por completo. Esto puede suceder sólo cuando la entrada (valor de los recursos) se iguala a la salida (ingreso en dólares).

**Ejemplo 4.3-1**

El modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) y su dual se dan como sigue:

Primal de Reddy Mikks	Dual de Reddy Mikks
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$	Minimizar $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$
sujeto a	sujeto a
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (recurso 1, M1)	$6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (recurso 2, M2)	$4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (recurso 3, mercado)	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
$x_2 \leq 2$ (recurso 4, demanda)	
$x_1, x_2 \geq 0$	
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$	$y_1 = .75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

El modelo de Reddy Mikks se ocupa de la producción de dos tipos de pintura (para interiores y exteriores) con dos materias primas M1 y M2 (recursos 1 y 2) y sujeto a los límites del mercado y a la demanda por la tercera y cuarta restricciones. El modelo determina las cantidades (en toneladas por día) de pinturas para exteriores e interiores que maximizan el ingreso diario (expresado en miles de dólares).

La solución dual óptima muestra que el precio dual (valor por unidad) de la materia prima M1 (recurso 1) es  $y_1 = .75$  (o \$750 por tonelada) y que la materia prima M2 (recurso 2) es  $y_2 = .5$  (o \$500 por tonelada). Estos resultados se mantienen ciertos en *intervalos de factibilidad* específicos como se mostró en la sección 3.6. Para los recursos 3 y 4, que representan los límites del mercado y de la demanda, ambos precios duales son cero, lo que indica que sus recursos asociados son abundantes (es decir, no son críticos al determinar el óptimo y, por consiguiente, su valor por unidad, o precio dual, es cero).

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3A**

- En el ejemplo 4.3-1, calcule el cambio del ingreso óptimo en cada uno de los siguientes casos (utilice el resultado de TORA para obtener los intervalos de factibilidad):
  - La restricción para la materia prima M1 (recurso 1) es  $6x_1 + 4x_2 \leq 22$ .
  - La restricción para la materia prima M2 (recurso 2) es  $x_1 + 2x_2 \leq 4.5$ .
  - La condición del mercado representada por el recurso 4 es  $x_2 \leq 10$ .
- NWAC Electronics fabrica cuatro tipos de cable sencillo para un contratista gubernamental. Cada cable debe pasar a través de cuatro operaciones consecutivas: corte, estañado, encamisado e inspección. La siguiente tabla presenta los datos pertinentes de la situación.

Cable	Minutos por unidad				Ingreso por unidad (\$)
	Corte	Estañado	Encamisado	Inspección	
SC320	10.5	20.4	3.2	5.0	9.40
SC325	9.3	24.6	2.5	5.0	10.80
SC340	11.6	17.7	3.6	5.0	8.75
SC370	8.2	26.5	5.5	5.0	7.80
Capacidad diaria (minutos)	4800.0	9600.0	4700.0	4500.0	

- El contratista garantiza un nivel de producción mínimo de 100 unidades de cada uno de los cuatro cables.
- Formule el problema como un modelo de programación lineal, y determine el programa óptimo de producción.
  - Basado en los precios duales, ¿recomienda incrementar las capacidades diarias de cualquiera de las cuatro operaciones? Explique.
  - ¿Representan los requerimientos mínimos de producción de los cuatro cables una ventaja o una desventaja para NWAC Electronics? Dé una explicación con base en los precios duales.
  - ¿Se puede garantizar la contribución actual de cada unidad al ingreso por el precio dual si incrementamos en 10% la capacidad del proceso de estañado?
3. BagCo produce chamarras y bolsos de mano de piel. Una chamarra requiere 8 m<sup>2</sup> de piel, y un bolso de mano sólo 2 m<sup>2</sup>. Las necesidades de mano de obra para los dos productos son de 12 y 15 horas, respectivamente. Los actuales suministros semanales de piel y mano de obra están limitados a 1200 m<sup>2</sup> y 1850 horas. La compañía vende las chamarras a \$350 y los bolsos de mano a \$120. El objetivo es determinar el programa de producción que maximice el ingreso neto.
- Determine la solución óptima.
  - BagCo planea aumentar la producción. ¿Cuál es el precio de compra máximo que la compañía debe pagar por la piel adicional? ¿Y cuánto por la mano de obra extra?

### 4.3.2 Interpretación económica de las restricciones duales

El significado económico de las restricciones duales puede lograrse utilizando la fórmula 2 de la sección 4.2.4, la cual establece que en cualquier iteración primal,

$$\begin{aligned} \text{El coeficiente objetivo de } x_j &= \left( \text{Lado izquierdo de} \right) - \left( \text{Lado derecho de} \right) \\ & \quad \left( \text{la restricción dual } j \right) \quad \left( \text{la restricción dual } j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j \end{aligned}$$

Una vez más utilizamos el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. El ingreso por unidad,  $c_j$ , de la actividad  $j$  está en dólares por unidad. De ahí que, por consistencia, la cantidad  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$  también debe estar en dólares por unidad. A continuación, como  $c_j$  representa ingreso, la cantidad  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ , con signo opuesto, debe representar costo. Por lo tanto tenemos

$$\text{\$ costo} = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = \sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{l} \text{Consumo del recurso } i \\ \text{por unidad de la actividad } j \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{l} \text{Costo por unidad} \\ \text{del recurso } i \end{array} \right)$$

La conclusión es que la variable dual  $y_1$  representa lo que se conoce en la literatura de PL como **costo imputado** por unidad de recurso  $i$ , y podemos considerar que la cantidad  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$  como el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de la actividad  $j$ . Como se indica en la sección 3.6, la cantidad  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j$  (= costo imputado de la actividad  $j - c_j$ ) se conoce como **costo reducido**

de la actividad  $j$ . La condición de optimalidad de maximización del método simplex plantea que un incremento en el nivel de una actividad  $j$  no utilizada (no básica) puede mejorar el ingreso sólo si su *costo reducido* es negativo. En función de la interpretación precedente, esta condición establece que

$$\left( \begin{array}{c} \text{Costo imputado de} \\ \text{recursos consumidos por} \\ \text{una unidad de la actividad } j \end{array} \right) < \left( \begin{array}{c} \text{Ingreso por unidad} \\ \text{de la actividad } j \end{array} \right)$$

De este modo, la condición de optimalidad de maximización dice que es económicamente ventajoso incrementar el nivel de una actividad si su ingreso unitario excede su costo unitario imputado.

### Ejemplo 4.3-2

TOYCO ensambla tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos, realizando tres operaciones. Los tiempos de ensamble disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos por día, y los ingresos por tren, camión y auto de juguete son \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren para las tres operaciones son 1, 3 y 1 minuto, respectivamente. Los tiempos correspondientes por camión y por auto son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y carros, el modelo de programación lineal asociado y su dual se dan como sigue:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujo a	sujo a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La solución óptima pide que se produzcan 100 camiones y 230 autos, pero ningún tren.

Suponga que a TOYCO también le interesa producir trenes ( $x_1$ ). ¿Cómo se puede lograr esto? Examinando el *costo reducido* de  $x_1$ , un tren de juguete se vuelve económicamente atractivo sólo si su costo unitario imputado es estrictamente menor que su ingreso unitario. TOYCO puede lograr esto si incrementa el precio unitario. También puede reducir el costo imputado de los recursos consumidos ( $= y_1 + 3y_2 + y_3$ ).

Una reducción en el costo unitario imputado conlleva a reducir los tiempos de ensamble utilizados por un tren en las tres operaciones. Sean  $r_1, r_2$  y  $r_3$  las relaciones de las reducciones en las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. La meta es determinar los valores de  $r_1, r_2$  y  $r_3$  de modo que el nuevo costo imputado por tren sea menor que su ingreso unitario, es decir,

$$1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 < 3$$

$$0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1, 0 \leq r_3 \leq 1$$

Para los valores duales óptimos,  $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$ , esta desigualdad se reduce a

$$r_1 + 6r_2 > 4, 0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$$

Todos los valores de  $r_1$  y  $r_2$  que cumplan con estas condiciones harán que los trenes sean rentables. Observe, sin embargo, que quizás esta meta no sea alcanzable porque requiere grandes reducciones en los tiempos de las operaciones 1 y 2 que no parecen ser prácticas. Por ejemplo, incluso una reducción de 50% (es decir,  $r_1 = r_2 = .5$ ) no satisface la condición dada. Entonces la conclusión lógica es que TOYCO no debe producir trenes a menos que las reducciones del tiempo vayan acompañadas de un incremento en el ingreso unitario.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3B

- En el ejemplo 4.3-2, suponga que para los trenes el tiempo por unidad de la operación 2 puede reducirse de 3 a cuando mucho 1.25 minutos. ¿Qué tanto debe reducirse el tiempo por unidad de la operación 1 para que los trenes sean apenas rentables?
- En el ejemplo 4.3-2, suponga que TOYCO está estudiando la posibilidad de introducir un cuarto juguete: camiones de bombero. El ensamble no utiliza la operación 1. Sus tiempos de ensamble unitarios en las operaciones 2 y 3 son 1 y 3 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad es de \$4. ¿Aconsejaría a TOYCO introducir el nuevo producto?
- JoShop utiliza tornos y taladros de banco para producir cuatro tipos de piezas para maquinaria,  $PP1, PP2, PP3$  y  $PP4$ . La siguiente tabla resume los datos pertinentes.

Máquina	Tiempo de maquinado en minutos por unidad de				Capacidad (min)
	$PP1$	$PP2$	$PP3$	$PP4$	
Tornos	2	5	3	4	5300
Taladros de banco	3	4	6	4	5300
Ingreso unitario (\$)	3	6	5	4	

Para las piezas que no se producen por la solución óptima actual, determine la tasa de deterioro del ingreso óptimo por incremento unitario de cada uno de estos productos.

- Considere la solución óptima de JoShop en el problema 3. La compañía estima que por cada pieza que no se produce (conforme a la solución óptima), el tiempo de maquinado puede reducirse 20% mediante mejoras del proceso. ¿Harían estas mejoras que las piezas fueran rentables? De no ser así, ¿cuál es el porcentaje de reducción mínimo necesario para lograr la rentabilidad?

## 4.4 ALGORITMOS SIMPLEX ADICIONALES

El capítulo 3 presenta el algoritmo simplex (primal) que se inicia siendo factible y continúa siéndolo hasta que se alcanza el óptimo. Esta sección presenta dos algoritmos, el **simplex dual** que se inicia como *no factible* (pero mejor que óptimo) y así permanece hasta que se restaura la factibilidad, y el **simplex generalizado**, que combina los métodos simplex primal y dual, los cuales se inician sin ser ni óptimos ni factibles. En los tres algoritmos se utiliza el análisis postóptimo de la sección 4.5.

### 4.4.1 Algoritmo simplex dual

El método simplex dual se inicia con una solución mejor que óptima y una solución básica no factible. Las condiciones de optimalidad y factibilidad están diseñadas para preservar la optimalidad de las soluciones básicas a medida que la solución se mueve hacia la factibilidad.

**Condición dual de factibilidad.** La variable de salida,  $x_r$ , es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen de forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, el algoritmo se termina.<sup>1</sup>

**Condición dual de optimalidad.** Dado que  $x_r$  es la variable de salida, sea  $\bar{c}_j$  el costo reducido de la variable no básica  $x_j$ , y  $\alpha_{rj}$  el coeficiente de restricción en la fila  $x_r$  y en la columna  $x_j$  de la tabla. La variable de entrada es la variable no básica con  $\alpha_{rj} < 0$  que corresponde a

$$\min_{\text{No básica } x_j} \{ |\bar{c}_j / \alpha_{rj}|, \alpha_{rj} < 0 \}$$

(Los empates se rompen arbitrariamente). Si  $\alpha_{rj} \geq 0$  con todas las  $x_j$  no básicas, el problema no tiene una solución factible.

Para iniciar la programación lineal óptima y no factible, se debe cumplir con dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método simplex regular (capítulo 3).
2. Todas las restricciones deben ser del tipo ( $\leq$ ).

Las desigualdades del tipo ( $\geq$ ) se convierten en ( $\leq$ ) al multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $-1$ . Si la PL incluye restricciones ( $=$ ), la ecuación se puede reemplazar por dos desigualdades. Por ejemplo,  $x_1 + x_2 = 1$ , equivale a  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 + x_2 \geq 1$ , o  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $-x_1 + x_2 \leq -1$ . La solución inicial es no factible si al menos uno de los lados derechos de las desigualdades es negativo.

#### Ejemplo 4.4-1

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Como se explicó en la sección 3.7, una condición de factibilidad diferente, conocida como el *borde más inclinado*, ha mejorado tanto la eficiencia de cálculo del algoritmo simplex dual que ahora es el algoritmo dominante (basado en simplex) para resolver PL en todos los códigos comerciales.

En este ejemplo, las primeras dos desigualdades se multiplican por  $-1$  para convertirlas en restricciones ( $\leq$ ). Por tanto, la tabla inicial se da como sigue:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$0$	$0$	$0$
$x_4$	$-3$	$-1$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$-3$
$x_5$	$3$	$-3$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-6$
$x_6$	$1$	$1$	$1$	$0$	$0$	$1$	$3$

La tabla es óptima porque todos los costos reducidos en la fila  $z$  son  $\leq 0$  ( $\bar{c}_1 = -3$ ,  $\bar{c}_2 = -2$ ,  $\bar{c}_3 = -1$ ,  $\bar{c}_4 = 0$ ,  $\bar{c}_5 = 0$ ,  $\bar{c}_6 = 0$ ). También es no factible porque al menos una de las variables básicas es negativa ( $x_4 = -3$ ,  $x_5 = -6$ ,  $x_6 = 3$ ).

De acuerdo con la condición dual de factibilidad,  $x_5 (= -6)$  es la variable de salida. La siguiente tabla muestra cómo se utiliza la condición de optimalidad para determinar la variable de entrada.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Variable no básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Fila $z$ ( $\bar{c}_j$ )	$-3$	$-2$	$-1$
Fila $x_5$ $\alpha_{5j}$	$3$	$-3$	$-1$
Relación, $ \frac{\bar{c}_j}{\alpha_{5j}} $ , $\alpha_{5j} < 0$	$-$	$\frac{2}{3}$	$1$

Las relaciones muestran que  $x_2$  es la variable de entrada.

La siguiente tabla se obtiene al utilizar las conocidas operaciones de filas, las cuales dan

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$-5$	$0$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$4$
$x_4$	$-4$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$1$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$-1$
$x_2$	$-1$	$1$	$\frac{1}{3}$	$0$	$-\frac{1}{3}$	$0$	$2$
$x_6$	$2$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{1}{3}$	$1$	$1$
Relación	$\frac{5}{4}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$-$	$2$	$-$	

La tabla anterior muestra que  $x_4$  sale y  $x_3$  entra, lo que da por resultado la siguiente tabla, la cual es tanto óptima como factible.

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$-3$	$0$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{9}{2}$
$x_3$	$6$	$0$	$1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{3}{2}$
$x_2$	$-3$	$1$	$0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{3}{2}$
$x_6$	$-2$	$0$	$0$	$1$	$0$	$1$	$0$

Observe cómo funciona el simplex dual. En todas las iteraciones la optimalidad se mantiene (todos los costos reducidos son  $\leq 0$ ) ya que cada nueva iteración mueve la solución hacia la factibilidad. En la iteración 3, la factibilidad se restaura por primera vez, y el proceso finaliza con la solución factible óptima dada como  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3}{2}$  y  $z = \frac{9}{2}$ .

### Momento de TORA.

TORA incluye un módulo tutorial para el método simplex dual. A partir del menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve  $\Rightarrow$  Algebraic  $\Rightarrow$  Iterations  $\Rightarrow$  Dual Simplex. Recuerde que necesita convertir las restricciones ( $=$ ) en desigualdades. No tiene que convertir las restricciones ( $\geq$ ) porque TORA lo hará internamente.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4A<sup>2</sup>

1. Considere el espacio de soluciones de la figura 4.3, donde se desea determinar el punto extremo óptimo que utiliza el método simplex *dual* para minimizar  $z = 2x_1 + x_2$ . La solución óptima ocurre en el punto  $F = (0.5, 1.5)$  en la gráfica.
  - (a) ¿Puede el simplex dual iniciarse en el punto A?
  - \* (b) Si el punto  $G$  da la solución básica inicial (no factible pero mejor que óptima) y el punto  $F$  da el óptimo, ¿sería posible que las iteraciones del método simplex dual sigan la trayectoria  $G \rightarrow E \rightarrow F$ ? Explique.
  - (c) Si la solución básica inicial (no factible) empieza en el punto  $L$ , identifique una posible trayectoria del método simplex dual que conduzca al punto factible óptimo en el punto  $F$ .

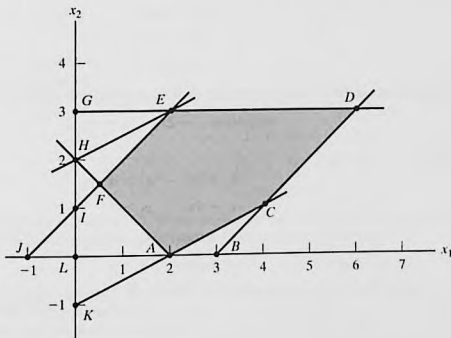


FIGURA 4.3

Espacio de soluciones para el problema 1, conjunto 4.4a

<sup>2</sup>Se le recomienda utilizar el modo tutorial de TORA cuando sea posible, para evitar los tediosos cálculos simplex.

2. Genere las iteraciones simplex dual para los siguientes problemas (utilizando TORA por comodidad), y trace la trayectoria del algoritmo en el espacio de soluciones gráficas.

(a) Minimizar  $z = 2x_1 + 3x_2$   
sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Minimizar  $z = 5x_1 + 6x_2$   
sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(c) Minimizar  $z = 4x_1 + 2x_2$   
sujeto a

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$3x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d) Minimizar  $z = 2x_1 + 3x_2$   
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. *Simplex dual con restricciones artificiales.* Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 4$$

$$-x_1 + 9x_2 - x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución básica inicial compuesta de variables de exceso  $x_4$  y  $x_5$ , y la variable de holgura  $x_6$  es no factible porque  $x_4 = -4$  y  $x_5 = -3$ . Sin embargo, el simplex dual no es aplicable de forma directa, porque  $x_1$  y  $x_3$  no satisfacen la condición de optimalidad de maximización. Demuestre que agregando la restricción artificial  $x_1 + x_3 \leq M$  (donde  $M$  es lo bastante grande como para no eliminar cualesquier puntos factibles en el espacio de soluciones original), y luego utilizando la nueva restricción como fila pivote, la selección de  $x_1$  como la variable de entrada (porque tiene el coeficiente objetivo más negativo), producirá una fila totalmente óptima. A continuación, realice el método simplex dual regular en el problema modificado.

4. Utilizando el procedimiento de restricción artificial presentado en el problema 3, resuelva los siguientes problemas mediante el método simplex dual. En cada caso, indique si la solución resultante es factible, no factible, o no acotada.

(a) Maximizar  $z = 2x_3$

suje to a

$$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Maximizar  $z = x_1 - 3x_2$

suje to a

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\* (c) Minimizar  $z = -x_1 + x_2$

suje to a

$$x_1 - 4x_2 \geq 5$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$

$$2x_1 - 5x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d) Maximizar  $z = 2x_3$

suje to a

$$-x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq 5$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5. Resuelva la siguiente PL de tres maneras diferentes (use TORA por comodidad).  
¿Cuál método parece ser el más eficiente computacionalmente?

$$\text{Minimizar } z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

suje to a

$$5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 12$$

$$x_2 - 5x_3 - 6x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## 4.4.2 Algoritmo simplex generalizado

El algoritmo simplex (primal) en el capítulo 3 se inicia factible pero no óptimo. El simplex dual (sección 4.4-1) se inicia mejor que óptimo y no factible. ¿Y qué pasa si un modelo de programación lineal se inicia no óptimo y no factible al mismo tiempo? Desde luego, podemos utilizar variables y restricciones artificiales para asegurar una solución inicial. Sin embargo, esto no es obligatorio porque la idea clave de los métodos simplex primal y dual es que la solución factible óptima, cuando es finita, siempre ocurre en un punto de esquina (o una solución básica). Esto indica que puede desarrollarse un nuevo algoritmo simplex basado en el uso de uno tras otro de los métodos simplex dual y simplex primal. Primero utilice el algoritmo dual para deshacerse de la no factibilidad (sin preocuparse de la optimalidad). Una vez restaurada la factibilidad, puede usarse el simplex primal para hallar el óptimo. Como alternativa podemos aplicar primero el simplex primal para asegurar la optimalidad (sin preocuparnos de la factibilidad) y luego utilizar el simplex dual para buscar la factibilidad.

## Ejemplo 4.4-2

Considere el modelo de PL de maximización del problema 4(a), conjunto 4.4a. El modelo puede ponerse en el siguiente formato de tabla en el cual la solución básica de inicio ( $x_4, x_5, x_6$ ) es al mismo tiempo no óptima (debido a las variables  $x_3$  no básica) y no factible (debido a la variable básica  $x_4$ ).

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	0	0	-2	0	0	0	0
$x_4$	1	-2	2	1	0	0	-8
$x_5$	-1	1	1	0	1	0	4
$x_6$	2	-1	4	0	0	1	10

Podemos resolver el problema sin el uso de variables o restricciones artificiales, teniendo asegurada primero la factibilidad al aplicar el simplex dual y buscando luego la optimalidad si utilizamos el simplex primal. El simplex dual selecciona a  $x_4$  como la variable de salida. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica con un coeficiente de restricción negativo en la fila  $x_4$ . En este ejemplo,  $x_2$  tiene un coeficiente negativo en la fila  $x_4$  y se le selecciona como la variable de entrada. Por tanto, la siguiente tabla se calcula como

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	0	0	-2	0	0	0	0
$x_2$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
$x_5$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0
$x_6$	$\frac{3}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	14

La nueva solución ahora es factible pero no óptima y podemos utilizar el simplex primal para determinar la solución óptima. Por lo común, si no hubiéramos restaurado la factibilidad en la tabla anterior, repetiríamos el procedimiento como fuera necesario hasta que se satisficiera la factibilidad o hasta que hubiera pruebas de que el problema no tiene una solución factible (lo

cual sucede si una variable básica es negativa y todos sus coeficientes de restricciones son no negativos).

**Comentarios.** La esencia del ejemplo 4.4-2 es que el método simplex no es rígido. La literatura abunda con variaciones del método simplex (por ejemplo, el método primal-dual, el método simétrico, el método entrecruzado y el método multiplex) que dan la impresión de que cada procedimiento es diferente, cuando, en realidad, todos buscan una solución de punto de esquina, con una tendencia hacia los cálculos automáticos y, quizás, eficiencia computacional.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4B

1. El modelo de PL del problema 4(c), conjunto 4.4a, no tiene solución factible. Demuestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.
2. El modelo de programación lineal del problema 4(d), conjunto 4.4a, no tiene solución acotada. Demuestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.

## 4.5 ANÁLISIS POSTÓPTIMO

En la sección 3.6 nos ocupamos de la sensibilidad de la solución óptima al determinar los intervalos de los diferentes parámetros de PL que mantendrían las variables básicas óptimas sin cambiar. En esta sección nos ocuparemos de los cambios de los parámetros del modelo y de la determinación de la nueva solución óptima. Considere, por ejemplo, un caso en la industria avícola, donde comúnmente se utiliza un modelo de programación lineal para determinar la mezcla de alimentos óptima por pollo (vea el ejemplo 2.2-2). El consumo semanal por pollo varía de .26 lb (120 gramos) para un pollo de una semana de edad hasta 2.1 lb (950 gramos) para un pollo de ocho semanas de edad. Además, el costo de los ingredientes en la mezcla puede cambiar periódicamente. Estos cambios requieren un nuevo cálculo periódico de la solución óptima. El *análisis postóptimo* determina la nueva solución de una manera eficiente. Los nuevos cálculos tienen su raíz en el uso de las relaciones duales y primales-duales dadas en la sección 4.2.

La siguiente tabla lista esos casos que pueden surgir en el análisis postóptimo y las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que existe una):

Condiciones después de que cambian los parámetros	Acción recomendada
La solución actual permanece óptima y factible.	No es necesaria ninguna otra acción.
La solución actual se vuelve no factible.	Use el simplex dual para recuperar factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Use el simplex primal para recuperar optimalidad.
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo.	Use el método simplex generalizado para recuperar optimalidad y factibilidad.

En esta sección se investigan los primeros tres casos. El cuarto caso, por ser una combinación de los casos 2 y 3, se trata en el problema 6, conjunto 4.5a.

Se utilizará el modelo de TOYCO del ejemplo 4.3-2 para explicar los diferentes procedimientos. Recuerde que el problema tiene que ver con el ensamble de tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos. En el ensamble intervienen tres operaciones. El modelo y su dual se repiten aquí por comodidad.

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeito a	sujeito a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La tabla óptima asociada para el primal se da como

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	4	0	0	1	2	0	1350
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$x_3$	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	20

#### 4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución óptima actual se ve afectada sólo si cambia el lado derecho de las restricciones, o se agrega una nueva restricción al modelo. En ambos casos, la no factibilidad ocurre cuando una o más de las variables básicas actuales se vuelven negativas.

**Cambios en el lado derecho.** Este cambio requiere volver a calcular el lado derecho de la tabla aplicando la fórmula 1 de la sección 4.2.4:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Nuevo lado derecho de} \\ \text{la tabla en la iteración } i \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Inversa en} \\ \text{la iteración } i \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Nuevo lado derecho} \\ \text{de las restricciones} \end{array} \right)$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla muestra los valores de las variables básicas.

#### Ejemplo 4.5-1

**Situación 1.** Suponga que TOYCO incrementa la capacidad diaria de las operaciones 1, 2 y 3 a 600, 640 y 590 minutos, respectivamente. ¿Cómo afectaría este cambio al ingreso total?

Con estos restricciones, el único cambio que tendrá lugar en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Por tanto, la nueva solución básica se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 640 \\ 590 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 320 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Así, las variables básicas actuales,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ , permanecen factibles con los nuevos valores 140, 320 y 30 unidades, respectivamente. El ingreso óptimo asociado es \$1880.

**Situación 2.** Aunque la nueva solución es atractiva desde el punto de vista del ingreso incrementado, TOYCO reconoce que su nueva implementación puede llevarse tiempo. Otra propuesta desplaza la capacidad de la operación 3 ( $x_6 = 20$  minutos) a la capacidad de la operación 1. ¿Cómo impactaría este cambio la solución óptima?

Las capacidades de las tres operaciones cambian a 450, 460, y 400 minutos respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

La solución resultante es no factible porque  $x_6 = -40$ , la cual requiere aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad. Primero, modificamos el lado derecho de la tabla como se muestra por medio de la columna sombreada. Observe que el valor asociado es  $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = \$1370$ .

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	4	0	0	1	2	0	1370
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	-40

Según el dual simplex,  $x_6$  sale y  $x_4$  entra, lo que da la siguiente tabla factible óptima (por lo común, el simplex dual puede requerir más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1350
$x_2$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_4$	-1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

La solución óptima (en función de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ ) permanece igual que en el modelo original. Esto quiere decir que el cambio propuesto de la asignación de la capacidad no es ventajoso, porque simplemente cambia la capacidad excedente de la operación 3 a una capacidad de superávit en la operación 1. La conclusión entonces es que la operación 2 es el cuello de botella, y que puede ser ventajoso cambiar el superávit a la operación 2 (vea el problema 1, conjunto 4.5a).

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5A

- En el modelo de TOYCO que aparece al inicio de la sección 4.5, ¿sería más ventajoso asignar la capacidad de superávit de 20 minutos de la operación 3 a la operación 2 en lugar de la operación 1?
- Suponga que TOYCO desea cambiar las capacidades de las tres operaciones a los siguientes casos:

$$(a) \begin{pmatrix} 460 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 600 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 300 \\ 800 \\ 200 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 450 \\ 700 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Utilice el análisis postóptimo para determinar la solución óptima en cada caso.

- Considere el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2-1.1. Su tabla óptima se da en el ejemplo 3.3-1. Si las disponibilidades diarias de las materias primas  $M1$  y  $M2$  se incrementan a 28 y 8 toneladas, respectivamente, utilice el análisis postóptimo para determinar la nueva solución óptima.
- Ozark Farm tiene 20,000 pollos que alimenta durante ocho semanas antes de enviarlos al mercado. La alimentación semanal por pollo varía según el programa siguiente:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
lb/pollo	.26	.48	.75	1.00	1.30	1.60	1.90	2.10

Para que el pollo alcance el peso deseado en ocho semanas, los alimentos deben satisfacer necesidades nutricionales específicas. Aunque una lista de alimentos es grande, por simplicidad limitaremos el modelo a sólo tres ingredientes: piedra caliza (carbonato de calcio), maíz y soya. Las necesidades nutricionales también se limitarán a tres tipos: calcio, proteína y fibra. La siguiente tabla resume el contenido nutritivo de los ingredientes seleccionados junto con sus costos.

Ingrediente	Contenido (lb) por libra de			\$ por libra
	Calcio	Proteína	Fibra	
Piedra caliza	.380	.00	.00	.12
Maíz	.001	.09	.02	.45
Soya	.002	.50	.08	1.60

La mezcla alimenticia debe contener al menos .8% pero no más de 1.2% de calcio, un mínimo de 22% de proteína, y cuando mucho 5% de fibra cruda.

Resuelva la PL para la semana 1 y luego aplique el análisis postóptimo para desarrollar un programa óptimo para las 7 semanas restantes.

- Demuestre que la regla de factibilidad de 100% del problema 12, conjunto 3.6c (capítulo 3) está basada en la condición

$$\begin{pmatrix} \text{Inversa} \\ \text{óptima} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Vector del lado} \\ \text{derecho original} \end{pmatrix} \geq 0$$

- Análisis postóptimo para casos que afectan tanto la optimalidad como la factibilidad.* Suponga que se dan los siguientes cambios simultáneos en el modelo de Reddy Mikks. El ingreso por tonelada de pinturas para exteriores e interiores es de \$1000 y \$4000, respec-

tivamente, y las disponibilidades diarias máximas de las materias primas  $M_1$  y  $M_2$  son de 28 y 8 toneladas, respectivamente.

- (a) Demuestre que los cambios propuestos darán la solución óptima actual tanto no óptima como no factible.
- (b) Use el *algoritmo simplex generalizado* (sección 4.4-2) para determinar la nueva solución factible óptima.

**Adición de una nueva restricción.** Agregar una nueva restricción nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual. Si la nueva restricción es *redundante*, no afectará la solución actual. Además, la solución actual no satisface la nueva restricción, y debe determinarse una nueva solución mediante el método simplex dual.

### Ejemplo 4.5-2

**Situación 1.** Suponga que TOYCO cambia el diseño de sus juguetes y que el cambio requerirá agregar una cuarta operación de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es de 500 minutos y los tiempos por unidad de los tres productos en esta operación son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante porque la satisface la solución óptima actual  $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$ . Por consiguiente, la solución óptima actual no cambia.

**Situación 2.** Suponga, en cambio, que los tiempos de TOYCO por unidad en la cuarta operación se cambian a 3, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los datos restantes del modelo no cambian.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

La solución óptima actual no satisface esta restricción, y se agrega a la tabla óptima actual como sigue ( $x_7$  es una variable de holgura):

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Solución
$z$	4	0	0	1	2	0	0	1350
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
$x_3$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	0	20
$x_7$	3	3	1	0	0	0	1	500

La tabla muestra que  $x_7 = 500$ , lo cual es consistente con los valores de  $x_2$  y  $x_3$  en el resto de la tabla. La razón es que las variables básicas  $x_2$  y  $x_3$  no se han sustituido en la nueva restricción. Esta sustitución se logra realizando la siguiente operación:

$$\text{Nueva fila } x_7 = \text{Anterior fila } x_7 - (3 \times (\text{fila } x_2) + 1 \times (\text{fila } x_3))$$

Esta operación es exactamente la misma que si se utilizara la sustitución

$$x_2 = 100 - \left(-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5\right)$$

$$x_3 = 230 - \left(\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5\right)$$

La nueva tabla es por consiguiente

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Solución
$z$	4	0	0	1	2	0	0	1350
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	0	20
$x_7$	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	-30

La aplicación del método simplex dual producirá la nueva solución óptima  $x_1 = 0, x_2 = 90, x_3 = 230$ , y  $z = \$1370$  (¡compruébelo!). La solución muestra que agregar la operación 4 reduce los ingresos de \$1350 a \$1330.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5B

- En el modelo de TOYCO, suponga que las especificaciones de la cuarta operación son las siguientes: La tasa de producción máxima basada en 480 minutos al día es de 120 unidades del producto 1, 480 unidades del producto 2, o 240 unidades del producto 3. Determine la solución óptima, suponiendo que la capacidad diaria está limitada a

\*(a) 570 minutos

(b) 548 minutos

- Restricciones secundarias.** En lugar de resolver un problema utilizando todas sus restricciones, podemos empezar identificando las llamadas *restricciones secundarias*. Éstas son las restricciones que sospechamos son menos restrictivas en función de la solución óptima. El modelo se resuelve utilizando las restricciones (primarias) restantes. Entonces podemos agregar las restricciones secundarias de una en una. Una restricción secundaria se desecha si satisface la solución óptima disponible. El proceso se repite hasta que se tienen en cuenta todas las restricciones secundarias.

Aplique el procedimiento propuesto a la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 50$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

$$7x_1 + 6x_2 - 9x_3 \leq 30$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 35$$

$$12x_1 + 6x_2 \leq 90$$

$$x_2 - 9x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

### 4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad

Esta sección considera la realización de cambios de los coeficientes objetivos y la adición de una nueva actividad económica (variable).

**Cambios en los coeficientes de la función objetivo.** Estos cambios afectan sólo la optimalidad de la solución y requieren que se calculen de nuevo los coeficientes de la fila  $z$  (costos reducidos) de acuerdo con el siguiente procedimiento:

1. Calcule los valores duales aplicando el método 2, sección 4.2.3.
2. Sustituya los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos costos reducidos (coeficientes de la fila  $z$ ).

Si la nueva fila  $z$  satisface la condición de optimalidad, la solución no cambia (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar). Si no la satisface, se utiliza el simplex primal para recuperar la optimalidad.

#### Ejemplo 4.5-3

**Situación 1.** En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía tiene una nueva política de fijación de precios para enfrentar la competencia. Los ingresos unitarios son \$2, \$3 y \$4 por los trenes, camiones y autos de juguete, en ese orden.

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Así,

$$(\text{Nuevos coeficientes objetivo de las variables básicas } x_2, x_3 \text{ y } x_6) = (3, 4, 0)$$

Aplicando el método 2, sección 4.2.3, las nuevas variables duales se calculan como

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right)$$

Los coeficientes de la fila  $z$  se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario calcular de nuevo los coeficientes de fila objetivo de las variables básicas ( $x_2, x_3$  y  $x_6$ ) porque siempre son cero, independientemente de cualquier cambio realizado en los coeficientes objetivo (¡compruébelo!).

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 2 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 2 = \frac{13}{4}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

Observe que el lado derecho de la primera restricción dual es 2, el *nuevo* coeficiente en la función objetivo modificada.

Los cálculos demuestran que la solución actual,  $x_1 = 0$  trenes,  $x_2 = 100$  camiones y  $x_3 = 230$  autos, permanece óptima. El nuevo ingreso correspondiente se calcula como  $2 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = \$1220$ . No se recomienda la nueva política de fijación de precios porque disminuye el ingreso.

**Situación 2.** Suponga ahora que la función objetivo de TOYCO se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

¿Cambiará la solución óptima?

Tenemos

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right)$$

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 6 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 6 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

El nuevo costo reducido de  $x_1$  muestra que la solución actual no es óptima.

Para determinar la nueva solución, la fila  $z$  se cambia como se resalta en la siguiente tabla:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	2	0	0	-2	1	1	20

Los elementos resaltados son los nuevos costos reducidos y el nuevo valor objetivo. Todos los demás elementos son los mismos que aparecen en la tabla óptima original. La nueva solución óptima se determina entonces si  $x_1$  entra y  $x_6$  sale, lo que da la solución  $x_1 = 10, x_2 = 102.5, x_3 = 215$  y  $z = \$12270.50$  (¡compruébelo!). Aunque la nueva solución recomienda la producción de los tres juguetes, el ingreso óptimo es menor que cuando se fabricaban sólo dos juguetes.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5C

- Investigue la optimalidad de la solución de TOYCO para cada una de las siguientes funciones objetivo. Donde sea necesario, aplique el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo (La tabla óptima de TOYCO aparece al inicio de la sección 4.5).
  - $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$
  - $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$
  - $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$
- Investigue la optimalidad de la solución de Reddy Miks (ejemplo 4.3-1) para cada una de las siguientes funciones objetivo. Si es necesario, aplique el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo. (La tabla óptima del modelo se da en el ejemplo 3.3-1).
  - $z = 3x_1 + 2x_2$

(b)  $z = 8x_1 + 10x_2$

(c)  $*z = 2x_1 + 5x_2$

3. Demuestre que la regla de optimalidad de 100% (problema 8, conjunto 3.6d, capítulo 3) se deriva de (costos reducidos)  $\geq 0$  para problemas de maximización y (costos reducidos)  $\leq 0$  para problemas de minimización.

**Adición de una nueva actividad.** Una nueva actividad supone agregar una nueva variable al modelo. Por intuición, agregar una nueva actividad es deseable sólo si es rentable. Esta condición puede verificarse aplicando la fórmula 2, sección 4.2.4, para calcular el costo reducido de la nueva variable. La nueva actividad no es rentable si satisface la condición de optimalidad. De lo contrario, la nueva actividad incrementará el ingreso.

#### Ejemplo 4.5-4

TOYCO reconoce que en la actualidad los trenes de juguete no se están produciendo porque no son rentables. La compañía desea reemplazarlos con un nuevo producto, un camión de bomberos de juguete, que se ensamblará en las instalaciones existentes. TOYCO estima que el ingreso por camión de bomberos de juguete será de \$4 y que los tiempos de ensamble por unidad serán de 1 minuto en cada una de las operaciones 1 y 2, y de 2 minutos en la operación 3.

Sea  $x_7$  el nuevo producto de camión de bomberos. Dado que  $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$  son los valores duales óptimos, tenemos

$$\text{Costo reducido de } x_7 = 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1$$

El resultado muestra que es rentable incluir  $x_7$  en la solución básica óptima. Para obtener el nuevo óptimo, primero calculamos su columna de restricción aplicando la fórmula 1, sección 4.2.4 como

$$\text{Columna de restricciones } x_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la tabla simplex actual debe modificarse como sigue:

Básica	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_7$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Solución
$z$	4	0	0	-1	1	2	0	1350
$x_2$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
$x_3$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
$x_6$	2	0	0	1	-2	1	1	20

El nuevo óptimo se determina si consideramos que  $x_7$  entra en la solución básica, en cuyo caso  $x_6$  debe salir. La nueva solución es  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 125, x_7 = 210$ , y  $z = \$1465$  (¡compruébelo!), lo cual mejora los ingresos en \$115.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5D

- \*1. En el modelo original de TOYCO, los trenes de juguete no forman parte de la combinación óptima de productos. La compañía reconoce que la competencia del mercado no permitirá elevar el precio unitario del juguete. En su lugar, la compañía desea concentrarse en mejorar la operación de ensamble. Esto implica reducir el tiempo de ensamble por unidad en cada una de las tres operaciones en un porcentaje especificado,  $p\%$ . Determine el valor de  $p$  que hará que los trenes apenas sean rentables. (La tabla óptima del modelo de TOYCO aparece al principio de la sección 4.5).
2. En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía reduce los tiempos por unidad en las operaciones 1, 2 y 3 para los trenes de juguete a partir de los niveles actuales de 1, 3 y 1 minutos a .5, 1 y .5 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad permanece en \$3. Determine la nueva solución óptima.
3. En el modelo de TOYCO, suponga que un juguete (el camión de bomberos) requiere 3, 2 y 4 minutos, en ese orden, en las operaciones 1, 2 y 3. Determine la solución óptima cuando el ingreso por unidad sea de
- \* (a) \$5  
(b) \$10
4. En el modelo de Reddy Mikks, la compañía está considerando producir una marca más económica de pintura para exteriores cuyos requerimientos de entrada por tonelada incluyen .75 toneladas de cada una de las materias primas  $M_1$  y  $M_2$ . Las condiciones del mercado siguen dictando que el exceso de pintura exterior sobre la producción de *ambos* tipos de pintura para exteriores se limite a una tonelada diaria. El ingreso por tonelada de la nueva pintura para exteriores es de \$3500. Determine la nueva solución óptima. (El modelo se explica en el ejemplo 4.5-1, y su tabla óptima aparece en el ejemplo 3.3-1).

## BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Bradley, S., A. Hax, y T. Magnanti, *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
- Diwckar, U., *Introduction to Applied Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
- Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems*, Academic Press, Boston, 1992.
- Vanderbei, R., *Linear Programming: Foundation and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

# CAPÍTULO 5

## Modelo de transporte y sus variantes

---

### Aplicación de la vida real. Programación de citas en eventos comerciales australianos

La Comisión de Turismo Australiana (ATC, por sus siglas en inglés) organiza eventos comerciales alrededor del mundo para que sirvan de foro donde se puedan reunir los vendedores australianos con los compradores internacionales de productos turísticos. Durante estos eventos los vendedores se sitúan en cubículos y los compradores los visitan de acuerdo con citas programadas. Debido a la limitación de tiempo disponible en cada evento y al hecho de que la cantidad de compradores y vendedores puede ser muy grande, la ATC procura programar las citas entre vendedor y comprador con anticipación para maximizar las preferencias. El modelo ha resultado muy satisfactorio tanto para los compradores como para los vendedores. (El caso 3 del capítulo 26, en inglés, del sitio web contiene los detalles del estudio).

---

### 5.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE

La red que aparece en la figura 5.1 representa el problema. Hay  $m$  orígenes y  $n$  destinos, cada uno representado por un **nodo**. Los **arcos** representan las rutas que unen los orígenes con los destinos. El arco  $(i, j)$  que une el origen  $i$  con el destino  $j$  transporta dos piezas de información: el costo de transporte por unidad,  $c_{ij}$  y la cantidad transportada,  $x_{ij}$ . La cantidad de la oferta en el origen  $i$  es  $a_i$  y la cantidad de la demanda en el destino  $j$  es  $b_j$ . El objetivo del modelo es minimizar el costo de transporte total al mismo tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda.

---

#### Ejemplo 5.1-1

MG Auto cuenta con tres plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleans, y dos importantes centros de distribución en Denver y Miami. Las capacidades trimestrales de las tres plantas son 1000, 1500 y 1200 automóviles, y las demandas de los dos centros de distribución durante el mismo periodo son de 2300 y 1400 automóviles. La distancia en millas entre las plantas y los centros de distribución aparece en la tabla 5.1.

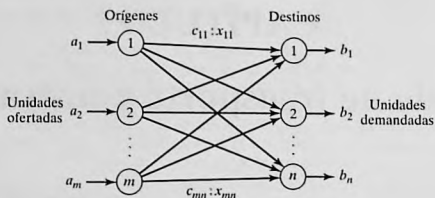


FIGURA 5.1

Representación del modelo de transporte con nodos y arcos

TABLA 5.1 Gráfica de distancia en millas

	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleáns	1275	850

La compañía transportista cobra 8 centavos por milla por automóvil. En la tabla 5.2 se dan los costos de transporte por automóvil en las diferentes rutas, redondeados al dólar más cercano. El modelo de PL del problema es

$$\text{Minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 1000 \text{ (Los Ángeles)} \\ x_{21} + x_{22} &= 1500 \text{ (Detroit)} \\ + x_{31} + x_{32} &= 1200 \text{ (Nueva Orleáns)} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 2300 \text{ (Denver)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1400 \text{ (Miami)} \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \end{aligned}$$

Todas estas restricciones son ecuaciones porque la oferta total desde los tres orígenes ( $= 1000 + 1500 + 1200 = 3700$  automóviles) es igual a la demanda total en los dos destinos ( $= 2300 + 1400 = 3700$  automóviles).

TABLA 5.2 Costo de transporte por automóvil

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
Nueva Orleáns (3)	\$102	\$68

TABLA 5.3 Modelo de transporte de MG

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80	215	1000
	$x_{11}$	$x_{12}$	
Detroit	100	108	1500
	$x_{21}$	$x_{22}$	
Nueva Orleáns	102	68	1200
	$x_{31}$	$x_{32}$	
Demanda	2300	1400	3700

La estructura especial del problema de transporte permite una representación compacta del problema utilizando el formato **tabla de transporte** que aparece en la tabla 5.3. Este formato permite modelar muchas situaciones que no tienen que ver con bienes de transporte, como se demuestra con los ejemplos de la sección 5.2.

La solución óptima en la figura 5.2 (obtenida por TORA<sup>1</sup>) envía 1000 automóviles de Los Ángeles a Denver ( $x_{11} = 1000$ ), 1300 de Detroit a Denver ( $x_{21} = 1300$ ), 200 de Detroit a Miami ( $x_{22} = 200$ ) y 1200 de Nueva Orleáns a Miami ( $x_{32} = 1200$ ). El costo de transporte mínimo asociado se calcula como  $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313.200$ .

**Balanceo del modelo de transporte.** La representación de la tabla de transporte asume que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo está desbalanceado, podemos agregar un origen o un destino ficticios para restaurar el balance.

### Ejemplo 5.1-2

En el modelo de MG, suponga que la capacidad de la planta de Detroit es de 1300 automóviles (en lugar de 1500). La oferta total (= 3500) es menor que la demanda total (= 3700), lo que significa que no se satisfará una parte de la demanda en Denver y Miami.

Como la demanda excede la oferta, se agrega un origen (planta) ficticio con una capacidad de 200 automóviles (=  $3700 - 3500$ ) para balancear el modelo de transporte. El costo de transporte por unidad de la planta ficticia a los destinos es cero porque la planta no existe.

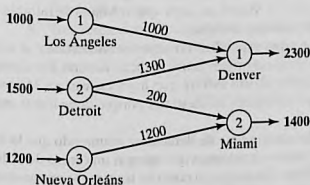


FIGURA 5.2  
Solución óptima del modelo de MG Auto

<sup>1</sup>Para utilizar TORA, en el comando **Main Menu** seleccione la opción **Transportation Model**. En el menú **SOLVE/MODIFY** seleccione las opciones **Solve** ⇒ **Final solution** para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se da una descripción detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

TABLA 5.4 Modelo de MG con una planta ficticia

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 1000	215	1000
Detroit	100 1300	108	1300
Nueva Orleáns	102	68 1200	1200
Planta ficticia	0	0	
Demanda	2300	200 1400	200

TABLA 5.5 Modelo de MG con un destino ficticio

	Denver	Miami	Ficticio	
Los Ángeles	80 1000	215	0	1000
Detroit	100 900	108 200	0 400	1500
Nueva Orleáns	102	68 1200	0	1200
Demanda	1900	1400	400	

La tabla 5.4 da el modelo balanceado junto con su solución óptima. La solución muestra que la planta ficticia envía 200 automóviles a Miami, es decir que a Miami le faltarán 200 automóviles para satisfacer su demanda de 1400 automóviles.

Podemos estar seguros de que un destino específico no experimente escasez al asignar un costo de transporte por unidad muy alto desde el origen ficticio a dicho destino. Por ejemplo, una penalización de \$1000 en la celda ficticia de Miami evitará que haya escasez en Miami. Desde luego, no podemos utilizar este "artificio" con todos los destinos, porque debe haber escasez en alguna parte.

El caso en que la oferta excede la demanda se puede demostrar asumiendo que la demanda en Denver es de sólo 1900 automóviles. Entonces, tenemos que agregar un centro de distribución ficticio para que "reciba" la oferta excedente. De nuevo, el costo de transporte por unidad al centro de distribución ficticio es cero, a menos que una fábrica "envíe todas sus existencias". En este caso, se asigna un costo alto de transporte por unidad de la fábrica designada al destino ficticio.

La tabla 5.5 da el nuevo modelo y su solución óptima (obtenida por TORA). La solución muestra que la planta de Detroit tendrá un excedente de 400 automóviles.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.1A<sup>2</sup>

- ¿Cierto o falso?
  - Para balancear un modelo de transporte, puede ser necesario agregar tanto un origen como un destino ficticios.
  - Las cantidades enviadas a un destino ficticio representan un excedente en el origen que hace el envío.
  - Las cantidades enviadas por un origen ficticio representan faltantes en los destinos que reciben el envío.
- En cada uno de los siguientes casos, determine si debe agregarse un origen ficticio o un destino ficticio para balancear el modelo.
  - Oferta:  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 5$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 6$   
Demanda:  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = 7$ ,  $b_4 = 9$
  - Oferta:  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 44$   
Demanda:  $b_1 = 25$ ,  $b_2 = 30$ ,  $b_3 = 10$
- En la tabla 5.4 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega una planta ficticia, ¿qué significa la solución cuando la planta ficticia "envía" 150 automóviles a Denver y 50 a Miami?
- \*4. En la tabla 5.5 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega un destino ficticio, suponga que la planta de Detroit debe enviar *toda* su producción. ¿Cómo se puede implementar esta restricción en el modelo?
- En el ejemplo 5.1-2, suponga que en el caso en que la demanda excede la oferta (tabla 5.4), se aplica una penalización a razón de \$200 y \$300 por cada automóvil no entregado en Denver y Miami, respectivamente. Además, no se hacen envíos de Los Ángeles al centro de distribución de Miami. Elabore el modelo, y determine el programa de envíos óptimo para el problema.
- \*6. Tres plantas de energía eléctrica de 25, 40 y 30 millones de kWh abastecen electricidad a tres ciudades. Las demandas máximas en las tres ciudades se estiman en 30, 35 y 25 millones de kWh. El precio por millón de kWh en las tres ciudades se da en la tabla 5.6. Durante el mes de agosto la demanda se incrementa 20% en cada una de las tres ciudades, la cual puede satisfacerse adquiriendo electricidad de otra red a un precio más elevado de \$1000 por millón de kWh. La red no está enlazada a la ciudad 3. La compañía eléctrica desea determinar el plan más económico para la distribución y compra de energía adicional.
  - Formule el problema como un modelo de transporte.
  - Determine un plan de distribución óptimo para la compañía eléctrica.
  - Determine el costo de la energía adicional adquirida por cada una de las tres ciudades.
- Resuelva el problema 6, suponiendo que se pierde 10% de la energía que se transmite a través de la red.
- Tres refinerías con capacidades diarias de 6, 5 y 8 millones de galones, respectivamente, abastecen a su vez a tres áreas de distribución con demandas diarias de 4, 8 y 7 millones

TABLA 5.6 Precio/millón de kWh para el problema 6

		Ciudad		
		1	2	3
Planta	1	\$600	\$700	\$400
	2	\$320	\$300	\$350
	3	\$500	\$480	\$450

<sup>2</sup>En este conjunto puede utilizar TORA para determinar la solución óptima. Los modelos del problema de transporte obtenidos con AMPL y Solver se presentarán al final de la sección 5.3.2.

TABLA 5.7 Distancia en millas para el problema 8

		Área de distribución		
		1	2	3
Refinería	1	120	180	—
	2	300	100	80
	3	200	250	120

de galones, respectivamente. La gasolina se transporta a las tres áreas de distribución a través de una red de oleoductos. El costo de transporte es de 10 centavos por 1000 galones por milla de oleoducto. La tabla 5.7 presenta la distancia en millas entre las refinerías y las áreas de distribución. La refinería 1 no está conectada al área de distribución 3.

- (a) Construya el modelo de transporte asociado.  
 (b) Determine el programa de envíos óptimo en la red.
- \*9. En el problema 8, suponga que la capacidad de la refinería 3 es de sólo 6 millones de galones y que el área de distribución debe recibir toda su demanda. Adicionalmente, las cantidades faltantes en las áreas 2 y 3 incurrirán en una penalización de 5 centavos por galón.  
 (a) Formule el problema como un modelo de transporte.  
 (b) Determine el programa de envíos óptimo.
10. En el problema 8, suponga que la demanda diaria en el área 3 disminuye a 4 millones de galones. La producción excedente en las refinerías 1 y 2 se envía a otras áreas de distribución por medio de camiones cisterna. El costo de transporte por 100 galones es de \$1.50 desde la refinería 1 y de \$2.20 desde la refinería 2. La refinería 3 puede enviar su producción excedente a otros procesos químicos dentro de la planta.  
 (a) Formule el problema como un modelo de transporte.  
 (b) Determine el programa de envíos óptimo.
11. Tres huertas abastecen a cuatro detallistas con cajas de naranjas. La demanda diaria de los cuatro detallistas es de 150, 150, 400 y 100 cajas, respectivamente. Las ofertas en las tres huertas dependen de la mano de obra regular disponible y se estiman en 150, 200 y 250 cajas diarias. Sin embargo, las huertas 1 y 2 indicaron que podrían abastecer más cajas, si es necesario, recurriendo a mano de obra extra. La huerta 3 no ofrece esta opción. Los costos de transporte por caja de las huertas a los detallistas se dan en la tabla 5.8.  
 (a) Formule el problema como un modelo de transporte.  
 (b) Resuelva el problema.  
 (c) ¿Cuántas cajas deben abastecer las huertas 1 y 2 si utilizan tiempo extra?
12. Tres centros de distribución envían automóviles a cinco concesionarios. El costo de envío depende de la distancia en millas entre los orígenes y los destinos, y es independiente de si el camión hace el viaje con cargas parciales o completas. La tabla 5.9 resume la distancia en millas entre los centros de distribución y los concesionarios junto con las cifras de

TABLA 5.8 Costo de transporte/caja para el problema 11

		Detallista			
		1	2	3	4
Huerta	1	\$1	\$2	\$3	\$2
	2	\$2	\$4	\$1	\$2
	3	\$1	\$3	\$5	\$3

TABLA 5.9 Distancia en millas, y oferta y demanda para el problema 12

	Concesionario					Oferta
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	400
Centro 2	50	70	60	65	80	200
3	40	90	100	150	130	150
Demanda	100	200	150	160	140	

oferta y demanda mensuales dadas en número de automóviles. Una carga completa comprende 18 automóviles. El costo de transporte por milla de camión es de \$25.

- (a) Formule el modelo de transporte asociado.  
 (b) Determine el programa de envíos óptimo.
13. MG Auto, del ejemplo 5.1-1, produce cuatro modelos de automóviles:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  y  $M_4$ . La planta de Detroit produce los modelos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_4$ . Los modelos  $M_1$  y  $M_2$  también se producen en Nueva Orleáns. La planta de Los Ángeles fabrica los modelos  $M_3$  y  $M_4$ . Las capacidades de las plantas y las demandas en los centros de distribución aparecen en la tabla 5.10.

La distancia en millas es la misma que la de la gráfica del ejemplo 5.1-1, y la tarifa de transporte se mantiene en 8 centavos por milla de camión para todos los modelos. Además, es posible satisfacer un porcentaje de la demanda de algunos modelos con la oferta de otros de acuerdo con las especificaciones de la tabla 5.11.

- (a) Formule el modelo de transporte correspondiente.  
 (b) Determine el programa de envíos óptimo.  
 (Sugerencia: Agregue cuatro nuevos destinos correspondientes a las nuevas combinaciones  $[M_1, M_2]$ ,  $[M_3, M_4]$ ,  $[M_1, M_2]$  y  $[M_2, M_4]$ . Las demandas en los destinos nuevos se determinan a partir de los porcentajes dados).

TABLA 5.10 Capacidades y demandas para el problema 13

	Modelo.				Totales
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	
<b>Planta</b>					
Los Ángeles	—	—	700	300	1000
Detroit	500	600	—	400	1500
Nueva Orleáns	800	400	—	—	1200
<b>Centro de distribución</b>					
Denver	700	500	500	600	2300
Miami	600	500	200	100	1400

TABLA 5.11 Modelos intercambiables para el problema 13

Centro de distribución	Porcentaje de la demanda	Modelos intercambiables
Denver	10	$M_1, M_2$
	20	$M_3, M_4$
Miami	10	$M_1, M_2$
	5	$M_2, M_4$

## 5.2 MODELOS DE TRANSPORTE NO TRADICIONALES

La aplicación del modelo de transporte no se limita al *transporte* de artículos. Esta sección presenta dos aplicaciones no tradicionales en las áreas de control de producción e inventarios y el servicio de afilado de herramientas.

**Ejemplo 5.2-1 (Control de producción e inventarios)**

Boralis fabrica mochilas para ciclistas. La demanda de su producto durante el periodo pico de marzo a junio de cada año es de 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. La compañía utiliza mano de obra de tiempo parcial para acomodarse a las fluctuaciones de la demanda. Se estima que Boralis puede producir 50, 180, 280 y 270 unidades de marzo a junio. La demanda del mes en curso se puede satisfacer de tres maneras.

1. La producción del mes en curso al costo de \$40 por mochila.
2. La producción excedente de un mes anterior a un costo de retención adicional de \$.50 por mochila.
3. La producción excedente en un mes posterior (pedido en espera) a un costo de penalización adicional de \$2.00 por mochila por mes.

Boralis desea determinar el programa de producción óptimo durante los cuatro meses.

La siguiente tabla resume los paralelismos entre los elementos del problema de producción e inventario y el modelo de transporte:

Transporte	Producción-inventario
1. Origen $i$	1. Periodo de producción $i$
2. Destino $j$	2. Periodo de demanda $j$
3. Cantidad de abasto en el origen $i$	3. Capacidad de producción en el periodo $i$
4. Demanda en el destino $j$	4. Demanda en el periodo $j$
5. Costo de transporte por unidad del origen $i$ al destino $j$	5. Costo unitario (producción + retención + penalización) en el periodo $i$ para el periodo $j$ .

El modelo de transporte resultante se da en la tabla 5.12.

**TABLA 5.12** Modelo de transporte para el ejemplo 5.2-1

	1	2	3	4	Capacidad
1	\$40.00	\$40.50	\$41.00	\$41.50	<b>50</b>
2	\$42.00	\$40.00	\$40.50	\$41.00	<b>180</b>
3	\$44.00	\$42.00	\$40.00	\$40.50	<b>280</b>
4	\$46.00	\$44.00	\$42.00	\$40.00	<b>270</b>
<b>Demanda</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>180</b>	<b>300</b>	

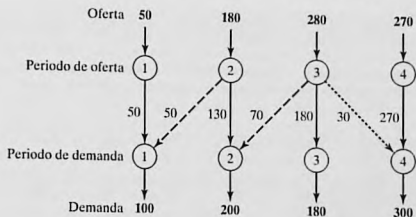


FIGURA 5.3

Solución óptima del modelo de producción e inventario

El costo de "transporte" por unidad del periodo  $i$  al periodo  $j$  se calcula como

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en } i, & i = j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de retención de } i \text{ a } j, & i < j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{penalización de } i \text{ a } j, & i > j \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$c_{11} = \$40.00$$

$$c_{24} = \$40.00 + (\$.50 + \$.50) = \$41.00$$

$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

La solución óptima se resume en la figura 5.3. Las líneas de rayas indican pedidos en espera, las líneas punteadas indican producción para un periodo futuro, y las líneas continuas muestran la producción en un periodo en curso. El costo total es de \$31,455.

### Ejemplo 5.2-2 (Afilado de herramientas)

Arkansas Pacific opera un aserradero que produce tablas de diferentes tipos de madera. Según el tipo de madera que se esté aserrando, la demanda de hojas de sierra afiladas varía de un día a otro de acuerdo con los siguientes datos de una semana (7 días):

Día	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sáb.	Dom.
Demanda (hojas de sierra)	24	12	14	20	18	14	22

El aserradero puede satisfacer la demanda diaria de cuatro maneras:

1. Hojas nuevas a \$12 cada una.
2. Servicio de afilado nocturno a \$6 por hoja.
3. Servicio de afilado en un día a \$5 por hoja.
4. Servicio de afilado en dos días a \$3 por hoja.

La situación puede representarse como un modelo de transporte con ocho orígenes y siete destinos. Los destinos representan los 7 días de la semana. Los orígenes del modelo se definen

TABLA 5.13 Problema de afilado de herramientas, expresado como un modelo de transporte.

	1 Lun.	2 Mar.	3 Mié.	4 Jue.	5 Vie.	6 Sáb.	7 Dom.	8 Desecho	
1-Nuevas	\$12 24	\$12 12	\$12	\$12	\$12	\$12	\$12	\$0 88	\$0 124
2-Lun.	<i>M</i>	\$6	\$5	\$3	\$3	\$3	\$3	\$0	24
3-Mar.	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6	\$5	\$3	\$3	\$3	\$0	12
4-Mié.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6	\$5	\$3	\$3	\$0	14
5-Jue.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	10	4				14
6-Vie.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$6	\$5	\$0	20
7-Sáb.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	14	4	\$6	18
8-Dom.	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	\$0	14
	24	12	14	20	18	14	22	22	22

como sigue: El origen 1 corresponde a la compra de hojas nuevas que, en el caso extremo, pueden satisfacer la demanda de los siete días ( $= 24 + 12 + 14 + 20 + 18 + 14 + 22 = 124$ ). Los orígenes 2 a 8 corresponden a los 7 días de la semana. La cantidad de oferta de cada uno de estos orígenes es igual a la de hojas utilizadas al final del día asociado. Por ejemplo, el origen 2 (lunes) tendrá una oferta de hojas utilizadas igual a la demanda del lunes. El "costo de transporte" por unidad para el modelo es de \$12, \$6 o \$3, según si la hoja es nueva o se afiló. La columna "desecho" es un destino ficticio para balancear el modelo. El modelo completo y su solución se dan en la tabla 5.13.

La siguiente tabla resume la solución óptima a un costo total de \$818 (archivo *torEx5.2.txt*).

Periodo	Cantidad de hojas afiladas (por día)				Desecho
	<i>Nuevas</i>	<i>Nocturno</i>	<i>1-día</i>	<i>2-días</i>	
Lun.	24 (Lun.)	0	14 (Mié.)	10 (Jue.)	0
Mar.	12 (Jue.)	0	0	12 (Vie.)	0
Mié.	0	10 (Jue.)	4 (Vie.)	0	0
Jue.	0	2 (Vie.)	0	18 (Dom.)	0
Vie.	0	14 (Sáb.)	4 (Dom.)	0	0
Sáb.	0	0	0	0	14
Dom.	0	0	0	0	22

**Comentarios.** El modelo que aparece en la tabla 5.13 supone sólo una semana de operaciones. Para varias semanas el modelo debe ocuparse de la naturaleza *rotatoria* de los días de la semana, en el sentido de que los días pueden actuar como orígenes para la demanda de la siguiente semana. Una forma de manejar esta situación es asumir que la primera semana de operación se inicia con todas las hojas de sierra nuevas para cada día. De ahí en adelante utilizamos un modelo compuesto de exactamente 7 orígenes y 7 destinos que correspondan a los días de la semana. El nuevo modelo será como el de la tabla 5.13, menos el origen “Nuevas” y el destino “Deshecho”. Inclusive, sólo se bloquearán las celdas en las diagonales (costo unitario =  $M$ ). Las celdas restantes tendrán un costo unitario de \$3.00, \$5.00 o \$6.00.

Intuitivamente, y sin resolver el nuevo modelo de transporte en absoluto, es obvio que el servicio de afilado más barato (2 días) puede usarse para satisfacer toda la demanda a partir de la semana 2. Esta conclusión intuitiva puede confirmarse resolviendo el nuevo modelo (archivo *toraEx5.2-2a.txt*).

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.2A<sup>3</sup>

1. En el ejemplo 5.2-1, suponga que el costo de retención por unidad depende del periodo y que es de 40, 30 y 70 centavos en los periodos 1, 2 y 3, respectivamente. La penalización y los costos de producción son los que se dieron en el ejemplo. Determine la solución óptima e interprete los resultados.
- \*2. En el ejemplo 5.2-2, suponga que el servicio de afilado es de 3 días a \$1 por hoja el lunes y el martes (días 1 y 2). Reformule el problema e interprete la solución óptima.
3. En el ejemplo 5.2-2, si no se utiliza una hoja el día que se afiló, se incurre en un costo de retención de 50 centavos por día. Reformule el modelo e interprete la solución óptima.
4. JoShop desea asignar cuatro categorías diferentes de máquinas a cinco tipos de tareas. La cantidad de máquinas disponibles en las cuatro categorías son 25, 30, 20 y 30. La cantidad de operaciones en las cinco tareas son 20, 20, 30, 10 y 25. A la categoría de la máquina 4 no se le puede asignar la tarea de tipo 4. La tabla 5.14 proporciona el costo unitario (en dólares) de asignar una categoría de máquina a un tipo de tarea. El objetivo del problema es determinar la cantidad óptima de máquinas en cada categoría que se ha de asignar a cada tipo de tarea. Resuelva el problema e interprete la solución.
- \*5. La demanda de un artículo perecedero durante los próximos cuatro meses es de 400, 300, 420 y 380 toneladas, en ese orden. La capacidad de abasto para los mismos meses es de 500, 600, 200 y 300 toneladas. El precio de compra por tonelada varía cada mes y se

TABLA 5.14 Costos unitarios para el problema 4

		Tipo de tarea				
		1	2	3	4	5
Categoría de máquina	1	10	2	3	15	9
	2	5	10	15	2	4
	3	15	5	14	7	15
	4	20	15	13	—	8

<sup>3</sup>En este conjunto puede utilizar TORA para determinar la solución óptima. Los modelos resueltos con AMPL y Solver para el problema de transporte se presentarán al final de la sección 5.3.2.

estima en \$100, \$140, \$120 y \$150, respectivamente. Como el artículo es perecedero, el abasto del mes en curso debe consumirse dentro de los 3 meses siguientes (a partir del mes en curso). El costo de almacenamiento por tonelada es de \$3 por mes. La naturaleza del artículo no permite aceptar pedidos en espera. Resuelva el problema como un modelo de transporte y determine el programa de entregas óptimo para el artículo durante los próximos 4 meses.

6. La demanda de un pequeño motor especial durante los próximos cinco trimestres es de 200, 150, 300, 250 y 400 unidades, respectivamente. El fabricante que surte el motor tiene capacidades de producción diferentes estimadas en 180, 230, 430, 300 y 300 para los cinco trimestres. No se aceptan pedidos en espera, pero si es necesario, el fabricante puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. Los costos de producción por unidad en los cinco periodos son de \$100, \$96, \$116, \$102 y \$106, respectivamente. El costo de producción con tiempo extra por motor es 50% más alto que el costo de producción regular. Si ahora se produce un motor para su uso en periodos posteriores se incurre en un costo de almacenamiento adicional de \$4 por motor por periodo. Formule el problema como un modelo de transporte. Determine la cantidad óptima de motores que se deben producir durante el tiempo regular y el tiempo extra de cada periodo.
7. Se realiza mantenimiento preventivo periódico en motores de avión, donde se debe reemplazar un componente importante. La cantidad de aviones programados para tal mantenimiento durante los siguientes seis meses se estima en 200, 180, 300, 198, 230 y 290, respectivamente. Todo el trabajo de mantenimiento se realiza durante el primer día del mes, donde un componente usado se puede reemplazar por uno nuevo o uno reparado. La reparación de los componentes usados puede hacerse en un taller de reparación local, donde estarán listos para usarse al principio del siguiente mes, o bien se envían a un taller central de reparación, donde se espera una demora de 3 meses (incluido el mes en que ocurre el mantenimiento). El costo de reparación en el taller local es de \$120 por componente, y en el taller central es de sólo \$35 por componente. Un componente reparado utilizado en un mes posterior incurrirá en un costo de almacenamiento adicional de \$1.50 por unidad por mes. Pueden adquirirse componentes nuevos a \$200 cada uno en el mes 1, con un incremento de 5% en el precio cada 2 meses. Formule el problema como un modelo de transporte, y determine el programa óptimo para satisfacer la demanda del componente durante los siguientes seis meses.
8. El Servicio de Parques Nacionales recibe cuatro ofertas para talar tres bosques de pinos en Arkansas. Los tres bosques incluyen 10,000, 20,000 y 30,000 acres. Un solo licitador puede ofrecer ofertas para a lo sumo 50% del total de acres disponible. Las ofertas por acre en los tres bosques se dan en la tabla 5.15. El licitador 2 no desea hacer ofertas en el bosque 1, y el licitador 3 no puede ofertar en el bosque 2.
  - (a) En la presente situación, tenemos que *maximizar* el ingreso por las ofertas totales para el Servicio de Parques. Muestre cómo puede formularse el problema como un modelo de transporte.
  - (b) Determine la superficie en acres que se asignará a cada uno de los cuatro licitadores.

TABLA 5.15 Ofertas por acre para el problema 8

		Bosque		
		1	2	3
Licitador	1	\$520	\$210	\$570
	2	—	\$510	\$495
	3	\$650	—	\$240
	4	\$180	\$430	\$710

5.3 ALGORITMO DE TRANSPORTE<sup>4</sup>

Los pasos básicos del algoritmo de transporte son exactamente iguales a los del método simplex (capítulo 3). Sin embargo, en lugar de utilizar la tabla simplex regular, aprovechamos la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más conveniente.

- Paso 1.** Determine una solución factible básica *inicial* y vaya al paso 2.
- Paso 2.** Use la condición de optimalidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables no básicas. Si se satisfacen las condiciones de optimalidad, deténgase. De lo contrario, avance al paso 3.
- Paso 3.** Use la condición de factibilidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables básicas actuales, y halle la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Los detalles del algoritmo se explican en las secciones 5.3.1 y 5.3.2 por medio del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.3-1 (SunRay Transport)**

SunRay Transport Company transporta granos de tres silos a cuatro molinos. La oferta (en camiones cargados) y la demanda (también en camiones cargados) junto con los costos de transporte por unidad por camión cargado en las diferentes rutas, se resumen en la Tabla 5.16. Los costos de transporte por unidad,  $c_{ij}$  (que se muestran en la esquina de cada casilla) están en cientos de dólares. El modelo busca el programa de envíos a un costo mínimo entre los silos y los molinos.

TABLA 5.16 Modelo de transporte de SunRay

		Molino				Oferta
		1	2	3	4	
Silo	1	10 $x_{11}$	2 $x_{12}$	20 $x_{13}$	11 $x_{14}$	15
	2	7 $x_{21}$	9 $x_{22}$	20 $x_{23}$		25
	3	4 $x_{31}$	14 $x_{32}$	16 $x_{33}$	18 $x_{34}$	10
Demanda		5	15	15	15	

<sup>4</sup>El algoritmo de transporte especial se desarrolló cuando los cálculos manuales eran la norma y los atajos estaban garantizados. En la actualidad, los poderosos códigos de computadora pueden resolver modelos de transporte de cualquier tamaño como una PL regular. De hecho, TORA maneja todos los cálculos necesarios en segundo plano por medio del método simplex y utiliza el formato del modelo de transporte sólo como "filtro". No obstante, el algoritmo de transporte, aparte de su importancia histórica, da una idea de primera mano del uso de las relaciones primales-duales teóricas (que se presentaron en la sección 4.2) para alcanzar un resultado final práctico, el de mejorar los cálculos manuales. El ejercicio es teóricamente intrigante. Además, el formato de tabla de transporte especial facilita el modelado de varias situaciones que no tienen que ver directamente con artefactos que se transportan, como lo demuestra la sección 5.2.

### 5.3.1 Determinación de la solución de inicio

Un modelo de transporte general con  $m$  orígenes y  $n$  destinos tiene  $m + n$  ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda) una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a  $m + n - 1$  ecuaciones independientes y  $m + n - 1$  variables básicas. En el ejemplo 5.3-1, la solución inicial tiene  $3 + 4 - 1 = 6$  variables básicas.

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos:<sup>5</sup>

1. Método de la esquina noroeste
2. Método del costo mínimo
3. Método de aproximación de Vogel

El primer método es de naturaleza “mecánica”, y los dos restantes son heurísticos que buscan una solución inicial de mejor calidad que dé un valor objetivo más pequeño. Por lo general, el método heurístico Vogel es mejor que el heurístico de costo mínimo. Por otra parte, el método de esquina noroeste implica la cantidad mínima de cálculos.

**Método de la esquina noroeste.** El método se inicia en la celda de la *esquina noroeste* (ruta) de la tabla (variable  $x_{11}$ ).

- Paso 1.** Asigne lo más posible a la celda seleccionada, y ajuste las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.
- Paso 2.** Tache la columna o fila con oferta o demanda cero para indicar que no se hagan más asignaciones en esa fila o columna. Si una fila y una columna dan cero al mismo tiempo, *tache sólo una*, y deje una oferta (demanda) cero en la fila (columna) no tachada.
- Paso 3.** Si se deja sin tachar *exactamente una* fila o columna, deténgase. De lo contrario, muévase a la celda a la derecha si acaba de tachar una columna, o abajo si acaba de tachar una fila. Vaya al paso 1.

---

#### Ejemplo 5.3-2

La aplicación del procedimiento al modelo del ejemplo 5.3-1 da la solución básica inicial en la tabla 5.17. Las flechas muestran el orden en que se generan las cantidades asignadas.

La solución básica inicial es

$$x_{11} = 5, x_{12} = 10$$

$$x_{22} = 5, x_{23} = 15, x_{24} = 5$$

$$x_{34} = 10$$

El costo asociado del programa es

$$z = 5 \times 10 + 10 \times 2 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 10 \times 18 = \$520.$$


---

<sup>5</sup>Los tres métodos se realizan en TORA. Vea el final de la sección 5.3.3.

TABLA 5.17 Solución inicial obtenida con el método de la esquina noroeste

	1	2	3	4	Oferta
1	10 5 →	2 10	20	11	15
12	7	9 ↓	20		
2		5 →	15 →	5	25
4	14	16	18	↓	
3				10	10
Demanda	5	15	15	15	

**Método del costo mínimo.** El método del costo mínimo determina una mejor solución inicial al concentrarse en las rutas más económicas. Asigna lo más posible a la celda con el costo unitario mínimo (los empates se rompen arbitrariamente). Luego se tacha la fila o columna satisfecha y se ajustan las cantidades de oferta y demanda como corresponda. Si una fila o una columna se satisfacen al mismo tiempo, *sólo se tacha una*, igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación, seleccione la celda no tachada con el costo unitario mínimo y repita el proceso hasta que se deje sin tachar exactamente una fila o columna.

### Ejemplo 5.3-3

El método del costo mínimo se aplica al ejemplo 5.3-1.

1. La celda (1,2) tiene el costo unitario mínimo en la tabla ( $= \$2$ ). Lo máximo que puede enviarse a través de (1,2) es  $x_{12} = 15$  camiones cargados, con lo que se satisfacen tanto la fila 1 como la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la figura 1.
2. La celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo no tachado ( $= \$4$ ). Asigne  $x_{31} = 5$ , y tache la columna 1 porque se satisface, y ajuste la demanda de la fila 3 a  $10 - 5 = 5$  camiones cargados.
3. Continuando de la misma manera, asignamos sucesivamente 15 camiones cargados a la celda (2,3), 0 a la celda (1,4), 5 a la celda (3,4), y 10 a la celda (2,4) (¡compruébelo!).

La solución inicial resultante se resume en la tabla 5.18. Las flechas indican el orden en el cual se hacen las asignaciones. La solución inicial (compuesta de 6 variables básicas) es

TABLA 5.18 Solución inicial de costo mínimo

	1	2	3	4	Oferta
1	10	(inicio) 2 15	20	11	15
12	12	7	9	(final) 20	
2			15	10	25
4	14	16	18	5	
3	5			5	10
Demanda	5	15	15	15	

$x_{12} = 15, x_{14} = 0, x_{23} = 15, x_{24} = 10, x_{31} = 5, x_{34} = 5$ . El valor objetivo asociado es  $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$ , el cual es mejor que la solución obtenida con el método de la esquina noroeste.

**Método de aproximación de Vogel (MAV).** Este método es una versión mejorada del método del costo mínimo que por lo general, pero no siempre, produce mejores soluciones iniciales.

- Paso 1.** Para cada fila (columna) determine una *medida de penalización* restando el elemento de costo unitario *mínimo* en la fila (columna) del *siguiente elemento de costo mínimo* en la misma fila (columna).
- Paso 2.** Identifique la fila o columna con la penalización máxima, que rompa los empates arbitrariamente. Asigne lo más posible a la variable con el costo unitario mínimo en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila o columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de las dos, y a la fila restante (columna) se le asigna una oferta (demanda) cero.
- Paso 3.** (a) Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.  
 (b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) *positiva* permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) mediante el método del costo mínimo. Deténgase.  
 (c) Si todas las filas y columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Deténgase.  
 (d) De lo contrario, vaya al paso 1.

### Ejemplo 5.3-4

El método de aproximación de Vogel se aplica al ejemplo 5.3-1. La tabla 5.19 calcula el primer conjunto de penalizaciones.

Como la fila 3 tiene la penalización máxima (= 10) y la celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo en esa fila, se asigna la cantidad 5 a  $x_{31}$ . Ahora la columna está satisfecha y se debe tachar. Luego se vuelven a calcular nuevas penalizaciones como en la tabla 5.20.

TABLA 5.19 Penalizaciones en filas y columnas con el MAV

	1	2	3	4	Penalización en las filas
1	10	2	20	11	10 - 2 = 8
2	12	7	9	20	15
3	4	14	16	18	9 - 7 = 2
	5				25
					14 - 4 = 10
					10
	5	15	15	15	
Penalización en las columnas	10 - 4 = 6	7 - 2 = 5	16 - 9 = 7	18 - 11 = 7	

TABLA 5.20 Primera asignación en el MAV ( $x_{31} = 5$ )

	1	2	3	4	Penalización en las filas
1	10	2	20	11	9
2	12	7	9	20	2
3	4	14	16	18	2
Penalización en las columnas	5	15	15	15	10
	—	5	7	7	

La tabla 5.20 muestra que la fila 1 tiene la penalización máxima (= 9). Por consiguiente, asignamos la cantidad máxima posible a la celda (1,2), la cual da  $x_{12} = 15$  y al mismo tiempo satisface tanto a la fila 1 como a la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la fila 1.

Continuando de la misma manera, la fila 2 producirá la penalización máxima (= 11), y asignamos  $x_{13} = 15$ , la cual tacha la columna 3 y deja 10 unidades en la fila 2. Sólo queda la columna 4, y tiene una oferta positiva de 15 unidades. Aplicando el método del costo mínimo a esa columna, asignamos sucesivamente  $x_{14} = 0$ ,  $x_{34} = 5$  y  $x_{14} = 10$  (¡compruébelo!). El valor objetivo asociado con esta solución es

$$z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$$

Sucede que esta solución tiene el mismo valor objetivo que se obtuvo con el método del costo mínimo.

*(a)				(b)				(c)			
0	2	1	6	1	2	6	7	5	1	8	12
2	1	5	7	0	4	2	12	2	4	0	14
2	4	3	7	3	1	5	11	3	6	7	4
5	5	10		10	10	10		9	10	11	

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3A

- Compare las soluciones iniciales obtenidas con los métodos de esquina noroeste, de costo mínimo y de Vogel para cada uno de los siguientes modelos.

#### 5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte

Después de determinar la solución inicial (siguiendo alguno de los métodos de la sección 5.3.1), utilizamos el siguiente algoritmo para determinar la solución óptima:

**Paso 1.** Utilice la condición de *optimalidad* inicial para determinar la *variable de entrada*. Si la condición de optimalidad se satisface, deténgase. De lo contrario, continúe con el paso 2.

**Paso 2.** Determine la *variable de salida* utilizando la *condición de factibilidad* simplex. Cambie la base, y regrese al paso 1.

Las condiciones de optimalidad y factibilidad no implican las conocidas operaciones de filas utilizadas en el método simplex. En su lugar, la estructura especial del modelo de transporte permite cálculos (manuales) más simples.

TABLA 5.21 Iteración inicial

	1	2	3	4	Oferta
1	10 5	2 10	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5	25
3	4	14	16	18 10	10
Demanda	5	15	15	15	

**Ejemplo 5.3-5**

Resuelva el modelo de transporte del ejemplo 5.3-1, comenzando con la solución de la esquina noroeste.

La tabla 5.21 presenta la solución inicial de la esquina noroeste tal como aparece en la tabla 5.17, ejemplo 5.3-2. La determinación de la variable de entrada de entre las variables no básicas actuales (las que no forman parte de la solución básica inicial) se realiza calculando los coeficientes no básicos en la fila  $z$ , por medio del **método de multiplicadores** (el cual, como se muestra en la sección 5.3.3, tiene su raíz en la teoría de dualidad de la PL).

En el método de multiplicadores, asociamos los multiplicadores  $u_i$  y  $v_j$  con la fila  $i$  y la columna  $j$  de la tabla de transporte. Para cada variable *básica* actual  $x_{ij}$ , los multiplicadores se muestran en la sección 5.3.3 para satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \text{ básica}$$

Como se muestra en la tabla 5.21, la solución inicial tiene 6 variables básicas, lo cual conduce a 6 ecuaciones con 7 incógnitas. Para resolver estas ecuaciones, el método de multiplicadores requiere que cualquiera de ellos se iguale a cero. Arbitrariamente estableceremos  $u_1 = 0$ , y luego resolveremos las variables restantes como se muestra en la siguiente tabla:

Variable básica	Ecuación ( $u, v$ )	Solución
$x_{11}$	$u_1 + v_1 = 10$	Conjunto $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 10$
$x_{12}$	$u_1 + v_2 = 2$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2$
$x_{22}$	$u_2 + v_2 = 7$	$v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5$
$x_{23}$	$u_2 + v_3 = 9$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4$
$x_{24}$	$u_2 + v_4 = 20$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_4 = 15$
$x_{34}$	$u_3 + v_4 = 18$	$v_4 = 15 \Rightarrow u_3 = 3$

Resumiendo, tenemos

$$u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = 3$$

$$v_1 = 10, v_2 = 2, v_3 = 4, v_4 = 15$$

A continuación, utilizamos  $u_i$  y  $v_j$  para evaluar las variables no básicas calculando

$$u_i + v_j - c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \text{ no básica}$$

Los resultados de estas evaluaciones se muestran en la tabla siguiente:

Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
$x_{13}$	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16$
$x_{14}$	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4$
$x_{21}$	$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3$
$x_{31}$	$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = 9$
$x_{32}$	$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9$
$x_{33}$	$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9$

La información precedente, junto con el hecho de que  $u_i + v_j - c_{ij} = 0$  para  $x_{ij}$  no básica, equivale en realidad a calcular la fila  $z$  de la tabla simplex, como lo muestra el siguiente resumen:

Básica	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
$z$	0	0	-16	4	3	0	0	0	9	-9	-9	0

Como el modelo de transporte *minimiza* el costo, la variable de entrada es la que tiene el coeficiente *más positivo* en la fila  $z$ , es decir  $x_{31}$  es la variable de entrada.

Los cálculos anteriores se suelen hacer directamente en la tabla de transporte como se muestra en la tabla 5.22, lo que implica que no es necesario escribir las ecuaciones ( $u$ ,  $v$ ) en forma explícita. En su lugar, comenzamos con  $u_1 = 0$ .<sup>6</sup> Entonces podemos calcular los valores  $v$  de todas las columnas que tienen variables *básicas* en la fila 1, es decir,  $v_1$  y  $v_2$ . Luego calculamos  $u_2$  basados en la ecuación ( $u, v$ ) de la  $x_{22}$  básica. Ahora, dada  $u_2$ , calculamos  $v_3$  y  $v_4$ . Por último, determinamos  $u_3$  aplicando la ecuación básica de  $x_{33}$ . El paso siguiente es para evaluar las variables no básicas al calcular  $u_i + v_j - c_{ij}$  para cada  $x_{ij}$  no básica, como se muestra en la tabla 5.22, en la casilla situada en la esquina sudeste de cada celda.

Con  $x_{31}$  identificada como la variable de entrada, tenemos que determinar la variable de salida. Recuerde que si  $x_{31}$  entra en la solución para volverse básica, una de las variables básicas actuales debe salir como no básica (en el nivel cero).

TABLA 5.22 Cálculos en la iteración 1

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	10 5	2 10	20 -16	11 4	15
$u_2 = 5$	12 3	7 5	9 15	20 5	25
$u_3 = 3$	4 9	14 -9	16 -9	18 10	10
Demanda	5	15	15	15	

<sup>6</sup>El módulo tutorial de TORA está diseñado para demostrar que si se asigna un valor inicial cero a cualquier  $u$  o  $v$  se produce la misma  $u + v - c$  para todas las variables no básicas. Vea el *Momento de TORA* después de este ejemplo.

La selección de  $x_{31}$  como la variable de entrada significa que transportar por esta ruta reduce el costo de transporte total. ¿Cuánto es lo máximo que podemos transportar a través de la nueva ruta? Observe en la tabla 5.22 que si la ruta (3,1) transporta  $\theta$  unidades (es decir,  $x_{31} = \theta$ ), entonces el valor máximo de  $\theta$  se determina con base en dos condiciones:

1. Los límites de la oferta y los requerimientos de la demanda permanecen satisfechos.
2. Los transportes a través de todas las rutas permanecen no negativos.

Estas dos condiciones determinan el valor máximo de  $\theta$  y la variable de salida como sigue: Primero construimos un *lazo cerrado* (también conocido como *circuito de  $\theta$* ), que se inicia y termina en la celda de la variable de entrada (3,1). El lazo se compone sólo de segmentos horizontales y verticales conectados (no se permiten diagonales) cuyos elementos de esquina (excluyendo la celda de la variable de entrada) cuyos elementos de esquina deben coincidir con una variable básica actual.<sup>7</sup> La tabla 5.23 muestra el lazo para  $x_{31}$ . Existe exactamente un lazo para una variable de entrada dada.

Luego asignamos la cantidad  $\theta$  a la celda de la variable de entrada (3,1). Para que los límites de la oferta y la demanda permanezcan satisfechos, debemos alternar entre restar y sumar la cantidad  $\theta$  en las *esquinas* sucesivas del lazo que se muestra en la tabla 5.23 (es indiferente si el lazo se traza en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario). Para  $\theta \geq 0$ , los nuevos valores de todas las variables permanecen no negativos si

$$x_{11} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{22} = 5 - \theta \geq 0$$

$$x_{34} = 10 - \theta \geq 0$$

El valor máximo correspondiente de  $\theta$  es 5, el cual ocurre cuando tanto  $x_{11}$  como  $x_{22}$  alcanzan un nivel cero. Ya sea que  $x_{11}$  o que  $x_{22}$  salgan de la solución, y seleccionamos arbitrariamente  $x_{11}$  como la variable de salida.

Los valores de las variables básicas en las esquinas del lazo cerrado se ajustan para aceptar  $x_{31} = 5$ , como se muestra en la tabla 5.24. Como cada unidad transportada por la ruta (3,1) reduce el costo de transporte en \$9 ( $= u_3 + v_1 - c_{31}$ ), el costo total asociado con el nuevo itinerario es  $\$9 \times 5 = \$45$  menos que el itinerario anterior. Así, el nuevo costo es  $\$520 - \$45 = \$475$ .

Dada la nueva solución básica, repetimos el cálculo de los multiplicadores  $u$  y  $v$ , como se muestra en la tabla 5.24. La variable de entrada es  $x_{14}$ . El lazo cerrado muestra que  $x_{14} = 10$  y que  $x_{24}$  es la variable de salida.

TABLA 5.23 Determinación del lazo cerrado para  $x_{31}$

	$v_1 = 10$	$v_2 = 4$	$v_3 = 15$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	10 5 - 0 ←	2 10 + 0	20	11	15
$u_2 = 5$	12	7 5 - 0 ←	9	20	25
$u_3 = 3$	4	14	16	18 10 - 0	10
Demanda	5	15	15	15	-

<sup>7</sup>El módulo tutorial de TORA permite determinar, de forma interactiva, las celdas de esquina del *lazo cerrado*, con confirmación inmediata de la validez de sus selecciones. Vea el Momento de TORA en la pág. 196.

TABLA 5.24 Cálculos en la iteración 2

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	10 -9	2 15 - $\theta$	20 -16	11 $\theta$ 4	15
$u_2 = 5$	12 -6	7 $0 + \theta$	9 15	20 -10 - $\theta$	25
$u_3 = 3$	4 5	14 -9	16 -9	18 5	10
Demanda	5	15	15	15	

TABLA 5.25 Cálculos en la iteración 3 (óptima)

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	Oferta
$u_1 = 0$	10 -13	2 5	20 -16	11 10	15
$u_2 = 5$	12 -10	7 10	9 15	20 -4	25
$u_3 = 7$	4 5	14 -5	16 -5	18 5	10
Demanda	5	15	15	15	

La nueva solución, que se muestra en la tabla 5.25, cuesta  $\$4 \times 10 = \$40$  menos que la anterior, y así el nuevo costo es  $\$475 - \$40 = \$435$ . Los nuevos valores de  $u_i + v_j - c_{ij}$  ahora son negativos para todas las  $x_{ij}$  no básicas. Por lo tanto, la solución dada en la tabla 5.25 es óptima. La siguiente tabla resume la solución óptima.

Del silo	Al molino	Cantidad de camiones cargados
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5

Costo óptimo = \$435

**Modelo de transbordo.** El modelo de transporte considera transportes *directos* entre los orígenes y los destinos. Quizá éste no sea el caso en muchas situaciones donde puede ser más barato *transbordar* a través de nodos intermedios antes de llegar al destino final. Puede usarse un artificio de modelado basado en el uso de *zonas*

*intermedias* para convertir el modelo de transbordo en uno de transporte regular. La idea de la conversión es teóricamente interesante, pero rara vez se pone en práctica porque el modelo de transbordo (y, de hecho, el modelo de transporte mismo) es un caso especial de un modelo de red capacitado de costo mínimo altamente eficiente que se presenta en la sección 22.1 en el sitio web. No obstante, para que quede completo, el modelo de transbordo se presenta como apéndice al final de la sección 22.1.

### Momento de TORA.

En el comando *Solve/Modify Menu*, seleccione las opciones *Solve*  $\Rightarrow$  *Iterations*, y luego uno de los tres métodos (esquina noroeste, costo mínimo, Vogel) para iniciar las iteraciones del modelo de transporte. El módulo de iteraciones ofrece dos útiles funciones interactivas:

1. Puede establecer cualquier  $u$  o  $v$  igual a cero antes de generar la iteración 2 (el valor predeterminado es  $u_1 = 0$ ). Aunque los valores de  $u_i$  y  $v_j$  cambian, la evaluación de las celdas no básicas ( $= u_i + v_j - c_{ij}$ ) no cambia.
2. Puede someter a prueba su comprensión de por qué selecciona el *lazo cerrado*, haciendo clic (en cualquier orden) en las celdas de *esquina* que comprenden la ruta. Si su selección es correcta, la celda cambiará de color (verde para la variable de entrada, roja para la variable de salida, y gris si no corresponde).

### Momento de Solver.

La figura 5.4 muestra la plantilla de Excel Solver para el ejemplo 5.3-1 (archivo *solverEx5.3-1.xls*), junto con todas las fórmulas y la definición de los nombres de intervalos.

En la sección de entrada, los datos incluyen la matriz de costo unitario (celdas B4:E6), los nombres de los orígenes (celdas A4:A6), nombres de los destinos (celdas B3:E3), oferta (celdas F4:F6), y demanda (celdas B7:E7). En la sección de salida, las celdas B11:E13 proporcionan la solución óptima en forma de matriz. La fórmula del costo total se encuentra en la celda A10.

### Momento de AMPL.

Los archivos *amplEx5.3-1a.txt* y *amplEx5.3-1b.txt* proporcionan el modelo de AMPL para el ejemplo 5.3-1. Los detalles del modelo se explican en la sección C.9 en el sitio web.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3B

1. Considere los modelos de transporte que aparecen en la tabla 5.26.
  - (a) Siga el método de la esquina noroeste para determinar la solución inicial.
  - (b) Desarrolle las iteraciones que conducen a la solución óptima.
  - (c) *Experimento con TORA.* Utilice el módulo de iteraciones de TORA para comparar el efecto de utilizar la regla de la esquina noroeste, el método del costo mínimo y el método de Vogel en la cantidad de iteraciones que conducen a la solución óptima.
  - (d) *Experimento con Solver.* Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*.
  - (e) *Experimento con AMPL.* Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1b.txt*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	<b>Solver Transportation Model (Example 5.3-1)</b>									
2	<b>Input data:</b>									
3	<b>Unit Cost Matrix</b>	<b>D1</b>	<b>D2</b>	<b>D3</b>	<b>D4</b>	<b>Supply</b>				
4	S1	10	2	20	11	15				
5	S2	12	7	9	20	25				
6	S3	4	14	16	18	10				
7	<b>Demand</b>	5	15	15	15					
8	<b>Optimum solution:</b>									
9	<b>Total cost</b>									
10	435	D1	D2	D3	D4	rowSum				
11	S1	0	5	0	10	15				
12	S2	0	10	15	0	25				
13	S3	5	0	0	5	10				
14	colSum	5	15	15	15					
15										
16	<b>Range name</b>	<b>Cells</b>								
17	totalCost	A10	Cell	<b>Formula</b>			<b>Copy to</b>			
18	unitCost	B4:E6	B10	= B3			C10:E10			
19	supply	F4:F6	A11	= A4			A12:A13			
20	demand	B7:E7	F11	= SUM(B811:SE11))			F12:F13			
21	rowSum	F11:F13	B14	= SUM(B511:B513))			C14:E14			
22	colSum	B14:E14	A10	= SUMPRODUCT(unitCost,shipment)						
23	shipment	B11:E13								

**Solver Parameters** ✕

Set Target Cell:

Equal To:  Max  Min  Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

colSum = demand  
 rowSum = supply  
 shipment >= 0

FIGURA 5.4

Solución obtenida con Excel Solver del modelo de transporte del ejemplo 5.3-1 (Archivo *solverEx5.3-1.xls*)

TABLA 5.26 Modelos de transporte para el problema 1

(i)				(ii)				(iii)			
\$0	\$2	\$1	6	\$10	\$4	\$2	8	—	\$3	\$5	4
\$2	\$1	\$5	9	\$2	\$3	\$4	5	\$7	\$4	\$9	7
\$2	\$4	\$3	5	\$1	\$2	\$0	6	\$1	\$8	\$6	19
5	5	10		7	6	6		5	6	19	

TABLA 5.27 Datos para el problema 2

\$5	\$1	\$7	10
\$6	\$4	\$6	80
\$3	\$2	\$5	15
75	20	50	

- En el problema de transporte que se muestra en la tabla 5.27, la demanda total excede la oferta total. Suponga que los costos de penalización por unidad de la demanda no satisfecha son \$5, \$3 y \$2 para los destinos 1, 2 y 3, respectivamente. Aplique la solución inicial de costo mínimo, y calcule las iteraciones que conducen a la solución óptima.
- En el problema 2, suponga que no hay costos de penalización, pero que la demanda en el destino 3 debe ser satisfecha por completo.
  - Encuentre la solución óptima.
  - Experimento con Solver.* Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*
  - Experimento con AMPL.* Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1.xls*
- En el problema de transporte desbalanceado de la tabla 5.28, si no se transporta una unidad de un origen (a cualquiera de los destinos) se incurre en un costo de almacenamiento a razón de \$5, \$4 y \$3 por unidad para los orígenes 1, 2 y 3, respectivamente. Además, toda la oferta del origen 2 se debe transportar en su totalidad para que haya espacio para un nuevo producto. Aplique la solución inicial de Vogel, y determine todas las iteraciones que conducen al programa de transporte óptimo.
- \*5. En un problema de transporte de  $3 \times 3$ , sea  $x_{ij}$  la cantidad transportada del origen  $i$  al destino  $j$ , y  $c_{ij}$  el costo de transporte por unidad correspondiente. Las cantidades de la oferta en los orígenes 1, 2 y 3, son 15, 30 y 85 unidades, respectivamente, y las demandas en los destinos 1, 2 y 3 son 20, 30 y 80 unidades, respectivamente. Suponga que la solución inicial de esquina noroeste es óptima y que los valores asociados de los multiplicadores se dan como  $u_1 = -2$ ,  $u_2 = 3$ ,  $u_3 = 5$ ,  $v_1 = 2$ ,  $v_2 = 5$ , y  $v_3 = 10$ .
  - Encuentre el costo óptimo asociado.
  - Determine el valor mínimo de  $c_{ij}$  para cada variable no básica que mantendrá la optimalidad de la solución de la esquina noroeste.
- El problema de transporte que se muestra en la tabla 5.29 da la solución básica *degenerada* indicada (es decir, al menos una de las variables básicas es cero). Suponga que los

TABLA 5.28 Datos para el problema 4

\$1	\$2	\$1	20
\$3	\$4	\$5	40
\$2	\$3	\$3	30
30	20	20	

TABLA 5.29 Datos para el problema 6

10			10
	20	20	40
10	20	20	

TABLA 5.30 Datos para el problema 7

\$1	\$1	\$2	5
\$6	\$5	\$1	6
2	7	1	

multiplicadores asociados con esta solución son  $u_1 = 1, u_2 = -1, v_1 = 2, v_2 = 2$  y  $v_3 = 5$  y que el costo unitario para todas las variables  $x_{ij}$  *cero* (básicas y no básicas) es

$$c_{ij} = i + j\theta, \quad -\infty < \theta < \infty$$

- (a) Si la solución dada es óptima, determine el valor óptimo asociado de la función objetivo.
- (b) Determine el valor de  $\theta$  que garantizará la optimalidad de la solución dada. (*Sugerencia:* Localice la variable básica *cero*.)
7. Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{todas las } i \text{ y } j$$

Quizá parezca lógico suponer que la solución óptima requerirá que el primer (segundo) conjunto de desigualdades sea reemplazado con ecuaciones si  $\sum a_i \geq \sum b_j$  ( $\sum a_i \leq \sum b_j$ ). El ejemplo contrario que aparece en la tabla 5.30 muestra que esta suposición no es correcta.

Demuestre que la aplicación del procedimiento sugerido da la solución  $x_{11} = 2, x_{12} = 3, x_{22} = 4$ , y  $x_{23} = 2$ , con  $z = \$27$ , la cual es peor que la solución factible  $x_{11} = 2, x_{12} = 7$  y  $x_{23} = 6$ , con  $z = \$15$ .

### 5.3.3 Explicación del método de los multiplicadores con el método simplex

La relación entre el método de los multiplicadores y el método simplex puede explicarse con base en las relaciones primal-dual (sección 4.2). Por la estructura especial de la programación lineal que representa el modelo de transporte (vea el ejemplo 5.1-1 para una ilustración), el problema dual asociado se escribe como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \text{para toda } i \text{ y } j$$

$$u_i \text{ y } v_j \text{ irrestrictas}$$

donde

$a_i$  = Oferta en el origen  $i$

$b_j$  = Demanda en el destino  $j$

$c_{ij}$  = Costo de transporte por unidad del origen  $i$  al destino  $j$

$u_i$  = Variable dual de la restricción asociada con el origen  $i$

$v_j$  = Variable dual de la restricción asociada con el destino  $j$

De acuerdo con la fórmula 2, sección 4.2.4, los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos) de la variable  $x_{ij}$  son iguales a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente; es decir,  $u_i + v_j - c_{ij}$ . Sin embargo, sabemos que esta cantidad debe ser igual a cero para cada *variable básica*, lo que produce el siguiente resultado:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ para cada variable básica } x_{ij}$$

Hay  $m + n - 1$  ecuaciones como esas cuya solución (después de suponer un valor arbitrario  $u_1 = 0$ ) dan por resultado los multiplicadores  $u_i$  y  $v_j$ . Una vez calculados estos multiplicadores, la variable de entrada se determina a partir de todas las variables *no básicas* como la que tiene el máximo valor positivo  $u_i + v_j - c_{ij}$ .

La asignación de un valor arbitrario a una de las variables duales (es decir,  $u_1 = 0$ ) puede parecer inconsistente con la forma en que se calculan las variables duales siguiendo el método 2 de la sección 4.2.3. En otras palabras, para una solución básica dada (y, por consiguiente, la inversa), los valores duales deben ser únicos. El problema 2, conjunto 5.3c, aborda este punto.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3C

1. Escriba el problema dual para la programación lineal del problema del transporte del ejemplo 5.3-5 (tabla 5.21). Calcule el valor objetivo *dual* óptimo asociado utilizando los valores duales óptimos dados en la tabla 5.25, y demuestre que es igual al costo óptimo dado en el ejemplo.
2. En el modelo de transporte, una de las variables duales asume un valor arbitrario. Esto quiere decir que para la misma solución básica, los valores de las variables duales asociadas no son únicos. El resultado parece contradecir la teoría de programación lineal, donde los valores duales se determinan como el producto del vector de los coeficientes objetivo de las variables básicas y la matriz básica inversa asociada (vea el método 2, sección 4.2.3). Demuestre que para el modelo de transporte, aunque la base inversa es única, el vector de los coeficientes objetivo *básicos* no tiene que ser así. Específicamente, demuestre que si  $c_{ij}$  se cambia a  $c_{ij} + k$  para toda  $i$  y  $j$ , donde  $k$  sea una constante, entonces los valores óptimos de  $x_{ij}$  no cambiarán. Por consiguiente, el uso de un valor arbitrario para una variable dual es implícitamente equivalente a asumir que se agrega una constante específica  $k$  a todas las  $c_{ij}$ .

## 5.4 MODELO DE ASIGNACIÓN

El modelo de asignación clásico se ocupa de compaginar a los trabajadores (con diversas habilidades) con los trabajos. Presumiblemente, la variación de la habilidad afecta el costo de completar un trabajo. La meta es determinar la asignación de costo mínimo de los trabajadores a los trabajos. El modelo de asignación general con  $n$  trabajadores y  $n$  trabajos está representado en la tabla 5.31. El elemento  $c_{ij}$  representa el costo de asignar el trabajador  $i$  al trabajo  $j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). No se pierde la generalidad al suponer que la cantidad de trabajadores y la de los trabajos son iguales, porque siempre podemos agregar trabajadores o trabajos ficticios para satisfacer esta suposición.

TABLA 5.31 Modelo de asignación

		Trabajos				
		1	2	...	$n$	
Trabajador	1	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	1
	2	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$	1
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$N$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nn}$	1
		1	1	...	1	

El modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, donde los trabajadores representan los orígenes y los trabajos representan los destinos. La oferta (demanda) en cada origen (destino) es igual a 1. El costo de “transportar” al trabajador  $i$  al trabajo  $j$  es  $c_{ij}$ . De hecho, el modelo de asignación puede resolverse de forma directa como un modelo de transporte (o como una PL regular). Sin embargo, el hecho de que la oferta y la demanda sean iguales a 1 conduce al desarrollo de un algoritmo de solución simple llamado **método húngaro**. Aunque el nuevo método de solución parece totalmente ajeno al modelo de transporte, en realidad el algoritmo tiene su origen en el método simplex, al igual que el modelo de transporte.

#### 5.4.1 Método húngaro<sup>B</sup>

Utilizaremos dos ejemplos para presentar la mecánica del nuevo algoritmo. La siguiente sección proporciona una explicación del procedimiento basada en simplex.

##### Ejemplo 5.4-1

Los tres hijos de Joe Klyne, John, Karen y Terri, desean ganar algún dinero para sus gastos personales. El señor Klyne eligió tres tareas para sus hijos: podar el césped, pintar la puerta de la cochera y lavar los automóviles de la familia. Para evitar la competencia anticipada entre los hermanos, les pide que presenten licitaciones individuales (secretas) por lo que consideren un pago

TABLA 5.32 Problema de asignación del señor Klyne

	Podar	Pintar	Lavar
John	\$15	\$10	\$9
Karen	\$9	\$15	\$10
Terri	\$10	\$12	\$8

<sup>B</sup>Como con el método de transporte, el método húngaro clásico (diseñado principalmente para cálculos *manuales*) es algo del pasado, y se presenta aquí por razones históricas. En la actualidad no se requiere ese tipo de cálculos, ya que el problema puede resolverse mediante códigos de computadora de PL altamente eficientes. Tal vez el beneficio de estudiar estas técnicas clásicas es que están basadas en una teoría compleja que reduce los pasos de solución a reglas simples adecuadas para cálculos manuales.

TABLA 5.33 Aplicación del método húngaro al problema de asignación del ejemplo 5.4-1

Paso 1:

	Podar	Pintar	Lavar	Fila mín.
John	15	10	9	$p_1 = 9$
Karen	9	15	10	$p_2 = 9$
Terri	10	12	8	$p_3 = 8$

Paso 2:

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0

Columna máx.  $q_1 = 0$   $q_2 = 1$   $q_3 = 0$

Paso 3:

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

justo por cada una de las tres tareas. La tabla 5.32 resume las licitaciones recibidas. Los niños respetarán la decisión de su padre con respecto a la asignación de las tareas.

El problema de asignación se resolverá por el método húngaro.

- Paso 1.** Determine  $p_i$ , el elemento de costo mínimo en la fila  $i$  de la matriz de costos original, y réstelo de todos los elementos de la fila  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .
- Paso 2.** Para la matriz creada en el paso 1, determine  $q_j$ , el elemento de costo mínimo de la columna  $j$ , y réstelo de todos los elementos de la columna  $j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .
- Paso 3.** A partir de la matriz del paso 2, intente determinar una asignación *factible* entre todas las entradas cero resultantes.
- 3a.** Si puede hallarse esa asignación, es óptima.
- 3b.** De lo contrario, se requieren más cálculos (como se explicará en el ejemplo 5.4-2).

La tabla 5.33 demuestra la aplicación de los dos pasos al problema actual.

Las celdas con entradas cero subrayadas en el paso 3 dan la solución óptima (*factible*): John obtiene el trabajo de pintar, Karen el de podar el césped, y Terri obtiene el de lavar los automóviles de la familia. El costo total para el señor Klyne es  $9 + 8 + 8 = \$27$ . Esta cantidad siempre será igual  $(p_1 + p_2 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3) = (9 + 9 + 8) + (0 + 1 + 0) = \$27$ . (Una justificación de este resultado se da en la siguiente sección.)

Como se indica en el paso 3 del método húngaro, los ceros creados por los pasos 1 y 2 pueden no dar una solución factible de forma directa. En este caso, se necesitan más pasos para determinar la asignación óptima (*factible*). El siguiente ejemplo demuestra esta situación.

### Ejemplo 5.4-2

Suponga que la situación analizada en el ejemplo 5.4-1 se amplía a cuatro niños y cuatro tareas. La tabla 5.34 resume los elementos de costo del problema.

TABLA 5.34 Modelo de asignación

		Tarea			
		1	2	3	4
Niño	1	\$1	\$4	\$6	\$3
	2	\$9	\$7	\$10	\$9
	3	\$4	\$5	\$11	\$7
	4	\$8	\$7	\$8	\$5

TABLA 5.35 Matriz de asignaciones reducida

		Tarea			
		1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

La aplicación de los pasos 1 y 2 a la matriz de la tabla 5.34 (con  $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 4, p_4 = 5, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 3$  y  $q_4 = 0$ ) da por resultado la matriz reducida de la tabla 5.35 (¡compruébelo!).

Las ubicaciones de las entradas cero no permiten asignar tareas únicas a todos los niños. Por ejemplo, si asignamos al niño 1 la tarea 1, entonces se eliminará la columna 1, y el niño tres no tendrá una entrada cero en las tres columnas restantes. Este obstáculo puede superarse agregando el siguiente paso al procedimiento dado en el ejemplo 5.4-1:

**Paso 3b.** Si no pueden encontrarse asignaciones de elemento cero factibles,

- Trace el *mínimo* de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida para cubrir *todas* las entradas cero.
- Seleccione la entrada *mínima no cubierta* y réstela de cada entrada no cubierta, y luego súmela a cada entrada en la intersección de dos líneas.
- Si no puede determinarse una asignación factible entre las entradas cero resultantes, repita el paso 3a.

La aplicación del paso 3b a la última matriz produce las celdas sombreadas en la tabla 5.36. La entrada mínima no sombreada (que se muestra subrayada) es igual a 1. Esta entrada se suma a la celda de intersección y se resta de las celdas sombreadas restantes para producir la matriz de la tabla 5.37, y la solución óptima indicada por los ceros subrayados.

TABLA 5.36 Aplicación del paso 3b

		Tarea			
		1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

TABLA 5.37 Asignación óptima

		Tarea			
		1	2	3	4
Niño	1	0	2	1	1
	2	3	0	0	2
	3	0	0	3	2
	4	4	2	0	0

**Momento de AMPL.**

El archivo *amplEx5.4-2.txt* proporciona el modelo AMPL para el modelo de asignación. El modelo es parecido al del modelo de transporte.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.4A**

- Resuelva los modelos de asignación de la tabla 5.38.
  - Resuélvalos por el método húngaro.
  - Experimento con TORA.* Expresé el problema como una PL y resuélvalo con TORA.
  - Experimento con TORA.* Utilice TORA para resolver el problema como un modelo de transporte.
  - Experimento con Solver.* Modifique el archivo *solverEx5.3-1.xls* para resolver el problema.
  - Experimento con AMPL.* Modifique el archivo *amplEx5.3b-1.txt* para resolver el problema.
- JoShop necesita asignar 4 trabajos a 4 trabajadores. El costo de realizar un trabajo es una función de las habilidades de los trabajadores. La tabla 5.39 resume el costo de las asignaciones. El trabajador 1 no puede realizar el trabajo 3, y el trabajador 3 no puede realizar el trabajo 4. Determine la asignación óptima siguiendo el método húngaro.

TABLA 5.38 Datos del problema 1

(i)					(ii)				
\$3	\$8	\$2	\$10	\$3	\$3	\$9	\$2	\$2	\$7
\$6	\$5	\$2	\$7	\$5	\$6	\$1	\$5	\$6	\$6
\$6	\$4	\$2	\$7	\$5	\$9	\$4	\$7	\$10	\$3
\$8	\$4	\$2	\$3	\$5	\$2	\$5	\$4	\$2	\$1
\$7	\$8	\$6	\$7	\$7	\$9	\$6	\$2	\$4	\$6

TABLA 5.39 Datos del problema 2

		Trabajo			
		1	2	3	4
Trabajador	1	\$50	\$50	—	\$20
	2	\$70	\$40	\$20	\$30
	3	\$90	\$30	\$50	—
	4	\$70	\$20	\$60	\$70

TABLA 5.40 Datos para el problema 5

Fecha de partida de Dallas	Fecha de regreso a Dallas
Lunes, 3 de junio	Viernes, 7 de junio
Lunes, 10 de junio	Miércoles, 12 de junio
Lunes, 17 de junio	Viernes, 21 de junio
Martes, 25 de junio	Viernes, 28 de junio

- En el modelo de JoShop del problema 2, suponga que se dispone de un (quinto) trabajador más para realizar las cuatro tareas a los costos respectivos de \$60, \$45, \$30 y \$80. ¿Es económico reemplazar a uno de los cuatro trabajadores actuales con el nuevo?
- En el modelo del problema 2, suponga que JoShop acaba de recibir un quinto trabajo y que los costos respectivos de realizarlo por los cuatro trabajadores actuales son \$20, \$10, \$20 y \$80. ¿Debe tener la prioridad el nuevo trabajo sobre cualquiera de los cuatro trabajos que ya tiene JoShop?
- \*Un ejecutivo de negocios debe hacer los cuatro viajes redondos que se muestran en la tabla 5.40 entre la oficina principal en Dallas y una sucursal en Atlanta.

El precio del boleto de viaje redondo saliendo de Dallas es de \$400. Se ofrece un descuento de 25% si las fechas de llegada y partida de un boleto cubren una semana (sábado y domingo). Si la estancia en Atlanta dura más de 21 días, el descuento se incrementa a 30%. Un boleto de viaje sencillo entre Dallas y Atlanta (en cualquier dirección) cuesta \$250. ¿Cómo debe comprar los boletos el ejecutivo?

- \*La figura 5.5 muestra la distribución esquemática de un taller con sus centros de trabajo existentes designados por los cuadrados 1, 2, 3 y 4. Se tienen que agregar cuatro nuevos

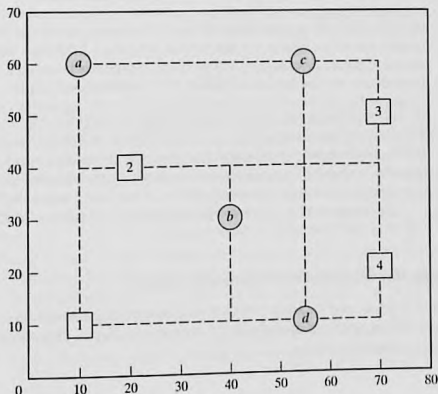


FIGURA 5.5

Distribución del taller para el problema 6, conjunto 5.4a

TABLA 5.41 Datos para el problema 6

		Centro nuevo			
		I	II	III	IV
Centro existente	1	10	2	4	3
	2	7	1	9	5
	3	0	8	6	2
	4	11	4	0	7

centros de trabajo, I, II, III y IV, al taller en los lugares designados por los círculos  $a, b, c$  y  $d$ . El objetivo es asignar los nuevos centros a los lugares propuestos para minimizar el tráfico total de manejo de materiales entre los centros existentes y los propuestos. La tabla 5.41 resume la frecuencia de los viajes entre los centros nuevos y los anteriores. El equipo de manejo de materiales viaja a lo largo de los pasillos rectangulares que se cortan en las ubicaciones de los centros. Por ejemplo, la distancia del viaje en un sentido (en metros) entre el centro 1 y la ubicación  $b$  es  $30 + 20 = 50$  m.

7. En el Departamento de Ingeniería Industrial en la Universidad de Arkansas, INEG 4904 es un curso de diseño culminante pensado para que equipos de estudiantes apliquen el conocimiento y las habilidades aprendidas en el programa de estudios de licenciatura a un problema práctico. Los miembros de cada equipo seleccionan un director de proyecto, identifican el alcance apropiado de su proyecto, redactan y presentan una propuesta, realizan las tareas necesarias para satisfacer los objetivos del proyecto, y redactan y presentan un informe final. El profesor del curso identifica proyectos potenciales y proporciona hojas de información apropiadas a cada uno, incluyendo el contacto en la organización patrocinadora, el resumen del proyecto y las habilidades potenciales necesarias para completar el proyecto. Se requiere que cada equipo de diseño presente un informe que justifique la selección de los miembros y del director del equipo. El informe también proporciona una clasificación de cada proyecto en orden de preferencia, incluida una justificación con respecto a la compaginación apropiada de las habilidades del equipo con los objetivos del proyecto. En un semestre específico se identificaron los siguientes proyectos: Boeing F-15, Boeing F-18, Boeing Simulation, Cargil, Cobb-Vantress, ConAgra, Cooper, DaySpring (diseño), DaySpring (manejo de materiales), J.B. Hunt, Raytheon, Tyson South, Tyson East, Walmart y Yellow Transportation. Los proyectos de Boeing y Raytheon requieren que todos los miembros del equipo sean ciudadanos estadounidenses. De los once equipos de diseño disponibles en este semestre, cuatro no cumplen con este requisito.

Idee un procedimiento para asignar proyectos a equipos, y justifique los argumentos que proponga para llegar a una conclusión.

### 5.4.2 Explicación del método húngaro con simplex

El problema de asignación en el cual se determinan  $n$  trabajadores a  $n$  trabajos puede representarse como un modelo de PL como sigue: Sea  $c_{ij}$  el costo de asignar el trabajador  $i$  al trabajo  $j$ , y defina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el trabajador } i \text{ es asignado al trabajo } j \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Entonces el modelo de PL se da como

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1$$

La solución óptima del modelo de PL anterior no cambia si se agrega una constante a o se resta de cualquier fila o columna de la matriz de costos ( $c_{ij}$ ). Para probar este punto, sean  $p_i$  y  $q_j$  las constantes restadas de la fila  $i$  y la columna  $j$ . Por lo tanto, el elemento de costo  $c_{ij}$  cambia a

$$c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

Ahora

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} &= \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \left( \sum_j x_{ij} \right) - \sum_j q_j \left( \sum_i x_{ij} \right) \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i (1) - \sum_j q_j (1) \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \text{constante} \end{aligned}$$

Como la nueva función objetivo difiere de la original por una constante, los valores óptimos de  $x_{ij}$  son los mismos en ambos casos. El desarrollo muestra que los pasos 1 y 2 del método húngaro, el cual pide restar  $p_i$  de la fila  $i$  y luego restar  $q_j$  de la columna  $j$ , produce un modelo de asignación equivalente. A este respecto, si puede hallarse una solución factible entre las entradas cero de la matriz de costos creada por los pasos 1 y 2, entonces debe ser óptima (porque el costo en la matriz modificada no puede ser menor que cero).

Si las entradas cero creadas no pueden dar una solución factible (como el ejemplo 5.4-2 lo demuestra), entonces debe aplicarse el paso 2a (que tiene que ver con la cobertura de las entradas cero). La validez de este procedimiento tiene de nuevo su raíz en el método simplex de programación lineal y puede explicarse por la teoría de la dualidad (capítulo 4) y el teorema de holgura complementaria (capítulo 7). No presentaremos aquí los detalles de la comprobación porque son un tanto complicados.

La razón por la que  $(p_1 + p_2 + \dots + p_n) + (q_1 + q_2 + \dots + q_n)$  da por resultado el valor objetivo óptimo es que representa la función objetivo dual de modelo de asignación. Este resultado puede verse mediante una comparación con la función objetivo dual del modelo de transporte dado en la sección 5.3.3. [Para los detalles, vea Bazaraa and Associates (2009)].

## BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
- Hansen, P., y R. Wendell, "A Note on Airline Commuting", *Interfaces*, vol. 12, núm. 1, págs. 85-87, 1982.
- Murty, K., *Network Programming*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

# CAPÍTULO 6

## Modelo de redes

---

### Aplicación de la vida real. Ahorro de recursos federales para viáticos

---

Las oficinas del gobierno federal de Estados Unidos están localizadas en la mayoría de las ciudades en los Estados Unidos, y se requiere que los empleados federales asistan a conferencias de desarrollo y cursos de capacitación que se ofrecen por todo el país. La ubicación de la ciudad donde se efectuarán las conferencias y eventos de capacitación puede impactar los viáticos. El objetivo del estudio es determinar la ubicación óptima de la ciudad anfitriona de una conferencia o evento de entrenamiento programado. Se estima que para el año fiscal de 1997, el modelo desarrollado ahorró al menos \$400,000. El caso 4 del capítulo 26 en el sitio web proporciona los detalles.

---

#### 6.1 ALCANCE Y DEFINICIÓN DE MODELOS DE REDES

Muchas situaciones de investigación de operaciones pueden modelarse y resolverse como redes (nodos conectados por ramas); a continuación tenemos algunos ejemplos de aplicación:

1. Diseño de una red de oleoductos para gas natural a una determinada distancia de la costa para conectar los cabezales de los pozos en el Golfo de México a un punto de distribución costero con el objetivo de minimizar el costo de construcción de los oleoductos.
2. Determinación de la ruta más corta entre dos ciudades en una red existente de carreteras.
3. Determinación de la capacidad máxima (en toneladas por año) de una red de oleoductos para lodos de carbón que unen minas de carbón en Wyoming con plantas eléctricas en Houston (los oleoductos para lodos transportan carbón al bombear agua a través de tuberías especialmente diseñadas).
4. Determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) para las actividades de un proyecto de construcción.
5. Determinación del itinerario de flujo de costo mínimo desde campos petroleros hasta refinerías a través de una red de oleoductos.

La solución de estas situaciones se logra por medio de varios algoritmos de optimización de redes. Este capítulo presenta cuatro de estos algoritmos.

1. Árbol de mínima expansión (situación 1)
2. Algoritmo de la ruta más corta (situación 2)
3. Algoritmo de flujo máximo (situación 3)
4. Algoritmo de la ruta crítica (CPM) (situación 4)

Para la quinta situación, el algoritmo de red capacitada de costo mínimo se presenta en la sección 22.1 en el sitio web.

**Definiciones de red.** Una red se compone de un conjunto de **nodos** unidos por **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es  $(N, A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos, y  $A$  es el conjunto de arcos. A guisa de ilustración, la red de la figura 6.1, se describe como

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$$

Asociado con cada red hay un **flujo** (por ejemplo, los productos de petróleo por un oleoducto y el tráfico de automóviles fluye por las carreteras). El flujo máximo en una red puede ser finito o infinito, según la capacidad de sus arcos.

Se dice que un arco está **dirigido** u **orientado** si permite el flujo positivo sólo en una dirección. Una **red dirigida** tiene todos los arcos dirigidos.

Una **ruta** es un conjunto de arcos que unen dos nodos distintos, y que pasan a través de otros nodos en la red. Por ejemplo, en la figura 6.1 los arcos  $(1,2)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,4)$  y  $(4,5)$  forman una ruta entre los nodos 1 y 5. Una ruta forma un **ciclo** o un **bucle** si conecta un nodo de vuelta a sí mismo a través de otros nodos. En la figura 6.1, los arcos  $(2,3)$ ,  $(3,4)$  y  $(4,2)$  forman un ciclo.

Se dice que una red está **conectada** si cada dos nodos distintos están conectados en al menos una ruta. La red en la figura 6.1 muestra este tipo de red. Un **árbol** es una red conectada *libre de ciclos* compuesta de un *subconjunto* de todos los nodos, y un **árbol de expansión** es un árbol que une *todos* los nodos de la red. La figura 6.2 proporciona ejemplos de un árbol y un árbol de expansión de la red de la figura 6.1.

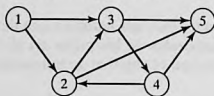


FIGURA 6.1  
Ejemplo de una red  $(N, A)$

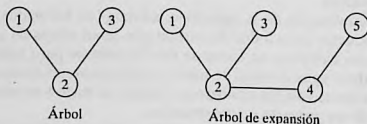


FIGURA 6.2

Ejemplos de un árbol y un árbol de expansión

### Ejemplo 6.1-1 (Puentes de Königsberg)

La ciudad prusiana de Königsberg (actualmente Kaliningrado en Rusia) fue fundada en 1254 en las riberas del río Pregel con siete puentes que conectan sus cuatro secciones (designadas *A*, *B*, *C*, y *D*) como se muestra en la figura 6.3. Surgió una pregunta sobre si podría construirse un *viaje redondo* para visitar las cuatro secciones de la ciudad, cruzando cada puente exactamente una vez. Una sección podría ser visitada varias veces, si fuese necesario.

A mediados del siglo XVIII, el afamado matemático Leonhard Euler desarrolló un argumento de “construcción de rutas” para demostrar que sí era posible construir semejante viaje. Más tarde, a principios del siglo XIX, el mismo problema se resolvió presentando de nuevo la situación como una red con nodos que representan las secciones y arcos (distintos) que representan los puentes, como se muestra en la figura 6.4.

La representación en forma de red implica el hallazgo de una respuesta a la pregunta planteada. El número de arcos incidentes en cada nodo es *impar*. Esto hace posible entrar y salir de todas las secciones utilizando puentes distintos. Por consiguiente, el viaje redondo deseado no puede construirse.<sup>1</sup>

FIGURA 6.3

Puentes de Königsberg

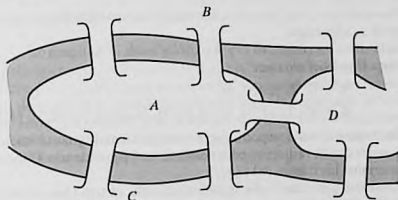
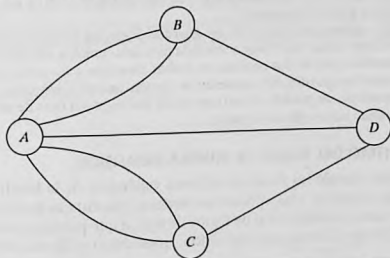


FIGURA 6.4

Representación en forma de red del problema de Königsberg



<sup>1</sup>Solución general: Existe un recorrido que se inicia y termina en un nodo si el número de arcos incidentes en cada nodo es *par*. Hay un viaje que se inicia en un nodo y termina en *otro* si el número de arcos incidentes en estos dos nodos es *impar*. De lo contrario, no hay solución. Vea B. Hopkins y R. Wilson, “The Truth about Königsberg”, *College Math Journal*, Vol. 35, núm. 3, págs. 198-207, 2004.

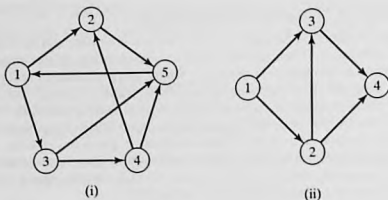


FIGURA 6.5  
Redes para el problema 1, conjunto 6.1a

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.1A

1. Para cada red de la figura 6.5, determine (a) una ruta, (b) un ciclo, (c) un árbol, y (d) un árbol de expansión.
2. Determine los conjuntos  $N$  y  $A$  para las redes de la figura 6.5.
3. Trace la red definida por

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (5, 6)\}$$

4. En el ejemplo 6.1-1, especifique la cantidad mínima y las ubicaciones de los puentes adicionales que se requieren para construir un viaje redondo. Construya la red resultante, y determine los tramos del viaje.
5. Considere ocho cuadrados iguales dispuestos en tres filas, con dos cuadrados en la primera fila, cuatro en la segunda, y dos en la tercera. Los cuadrados de cada fila están acomodados simétricamente alrededor del eje vertical. Marque los cuadros con números distintos del 1 al 8, de modo que dos cuadrados *adyacentes* verticales, horizontales o diagonales no tengan números consecutivos. Use una representación de red para hallar una solución de una forma sistemática.
6. Tres reclusos escoltados por dos guardias deben ser transportados por un bote desde tierra firme hasta una isla penitenciaria para que cumplan sus sentencias. El bote no puede transferir más de dos personas en ambas direcciones. Es seguro que los reclusos dobleguen a los guardias si los superan en número en cualquier parte y en cualquier momento. Desarrolle un modelo de red que diseñe los viajes del bote de modo que garantice el traslado seguro de los reclusos.

## 6.2 ALGORITMO DEL ÁRBOL DE MÍNIMA EXPANSIÓN

Este árbol vincula los nodos de una red valiéndose de la longitud mínima total de las ramas de conexión. Una aplicación común se presenta en la pavimentación de carreteras que unen poblaciones, o de forma directa, o que pasan por otras poblaciones. La solución del árbol de mínima expansión proporciona el diseño del sistema de carreteras.

Sea  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto de nodos de la red y defina

$C_k$  = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en la iteración  $k$

$\bar{C}_k$  = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración  $k$ .

Los siguientes pasos describen al algoritmo del árbol de mínima expansión:

**Paso 0.** Establezca  $C_0 = \emptyset$  y  $\bar{C}_0 = N$ .

**Paso 1.** Inicie con *cualquier* nodo  $i$  en el conjunto no conectado  $\bar{C}_0$  y establezca  $C_1 = \{i\}$ , lo que produce  $\bar{C}_1 = N - \{i\}$ . Establezca  $k = 2$ .

**Paso general  $k$ .** Seleccione un nodo,  $j^*$ , en el conjunto no conectado  $\bar{C}_{k-1}$ , que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto  $C_{k-1}$  conectado. Vincule  $j^*$  permanentemente a  $C_{k-1}$  y elimínelo de  $\bar{C}_{k-1}$  para obtener  $C_k$  y  $\bar{C}_k$ , respectivamente. Deténgase si  $\bar{C}_k$  está vacío; de lo contrario, establezca  $k = k + 1$  y repita el paso.

### Ejemplo 6.2-1

Midwest TV Cable Company va a proporcionar servicio de cable a cinco desarrollos habitacionales. La figura 6.6 ilustra las posibles conexiones de TV a las cinco áreas, con las millas de cable anexadas a cada arco. El objetivo es determinar la red de cables más económica.

El algoritmo se inicia en el nodo 1 (en realidad, cualquier otro nodo puede ser un punto de inicio), el cual da por resultado

$$C_1 = \{1\} \text{ y } \bar{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 6.7. Los arcos delgados proporcionan todos los candidatos entre  $C$  y  $\bar{C}$ . Los arcos gruesos son los vínculos permanentes del conjunto conectado  $C$ , y el arco de rayas es el nuevo vínculo (permanente) agregado en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1, 2) es el vínculo más corto (= 1 milla) entre todas las ramas candidatas del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4, 5 y 6 en el conjunto no conectado  $\bar{C}_1$ . De ahí que el vínculo (1, 2) se hace permanente y  $j^* = 2$ , de lo cual resulta

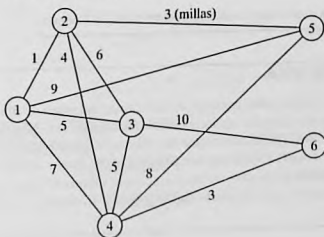
$$C_2 = \{1, 2\}, \bar{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

El árbol de mínima expansión que se muestra en la iteración 6 de la figura 6.7 da la solución. Las millas de cable mínimas resultantes que se necesitan para proporcionar el servicio de cable deseado son  $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$  millas.

**Comentarios.** En teoría, un árbol de mínima expansión puede formularse y resolverse como un programa lineal. Sin embargo, la PL no es una opción práctica porque deben agregarse numerosas restricciones para excluir todos los ciclos y el resultado es una PL enorme, aun para redes pequeñas.

FIGURA 6.6

Conexiones de cable para Midwest TV Company



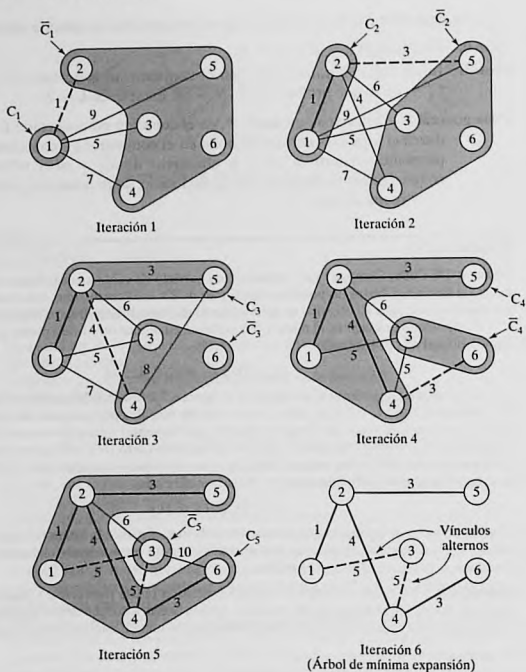


FIGURA 6.7

Iteraciones para determinar la solución para Midwest TV Company

### Momento de TORA

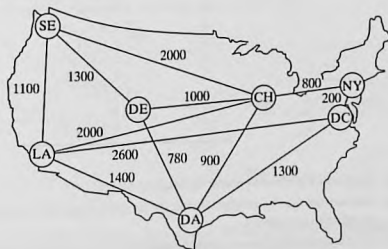
Puede utilizar TORA para generar las iteraciones del árbol de mínima expansión. En la barra de Main Menu, seleccione las opciones Network models  $\Rightarrow$  Minimal spanning tree. Luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem  $\Rightarrow$  Go to output screen. En la pantalla de resultados seleccione Starting node, luego utilice las opciones Next iteration o bien All iterations para generar las iteraciones sucesivas. Puede reiniciar las iteraciones seleccionando un nuevo nodo de inicio Starting Node. El archivo *toraEx6.2-1.txt* da los datos para el ejemplo 6.2-1.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.2A

- Resuelva el ejemplo 6.2-1 iniciando en el nodo 5 (en lugar de en el nodo 1), y demuestre que el algoritmo produce la misma solución.
- Determine el árbol de mínima expansión de la red del ejemplo 6.2-1 conforme cada una de las siguientes condiciones distintas:
  - Los nodos 5 y 6 están unidos por un cable de 2 millas.
  - Los nodos 2 y 5 no pueden unirse.
  - Los nodos 2 y 6 están unidos por un cable de 4 millas.
  - El cable entre los nodos 1 y 2 es de 8 millas de largo.
  - Los nodos 3 y 5 están unidos por un cable de 2 millas.
  - El nodo 2 no puede unirse directamente a los nodos 3 y 5.
- En el transporte intermodal, los camiones de remolque cargados se transportan entre terminales ferroviarias sobre plataformas especiales. La figura 6.8 muestra la ubicación de las principales terminales ferroviarias en los Estados Unidos y las vías de ferrocarril existentes. El objetivo es decidir qué vías deben ser "revitalizadas" para manejar el tráfico intermodal. En particular, la terminal de Los Ángeles (LA) debe vincularse directamente a Chicago (CH) para acomodar el tráfico pesado esperado. Aparte de esa, todas las terminales restantes pueden vincularse directa o indirectamente, de modo que la longitud total (en millas) de las vías seleccionadas se minimice. Determine los segmentos de las vías ferroviarias que deben incluirse en el programa de revitalización.
- La figura 6.9 da la distancia en millas de los vínculos factibles que conectan nueve cabezales de pozos de gas natural localizados a una cierta distancia de la costa con un punto de distribución costero. Como el cabezal del pozo 1 es el más cercano a la costa, dispone de una suficiente capacidad de bombeo y almacenamiento para bombear la producción de los ocho pozos restantes al punto de distribución. Determine la red de oleoductos mínima que vincule los cabezales de los pozos al punto de distribución.
- En la figura 6.9 del problema 4, suponga que los cabezales de los pozos pueden dividirse en dos grupos según la presión del gas: un grupo de alta presión que incluye los pozos 2, 3, 4 y 6, y un grupo de baja presión que incluye los pozos, 5, 7, 8 y 9. Debido a la diferencia de presión, no es posible vincular los pozos de los dos grupos. Al mismo tiempo,

FIGURA 6.8

Red para el problema 3, conjunto 6.2a



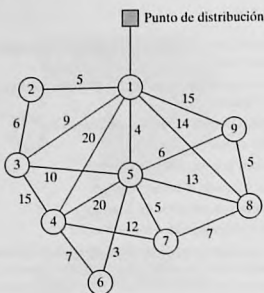


FIGURA 6.9

Red para el problema 4, conjunto 6.2a

ambos grupos deben conectarse al punto de distribución a través del pozo 1. Determine la red de oleoductos mínima para esta situación.

6. Electro produce 15 piezas electrónicas en 10 máquinas. La compañía desea agrupar las máquinas en celdas para minimizar las “disparidades” entre las piezas procesadas en cada celda. Una medida de “disparidad”,  $d_{ij}$ , entre las piezas procesadas con las máquinas  $i$  y  $j$  puede expresarse como

$$d_{ij} = 1 - \frac{n_{ij}}{n_{ij} + m_{ij}}$$

donde  $n_{ij}$  es la cantidad de piezas compartidas entre las máquinas  $i$  y  $j$ , y  $m_{ij}$  es la cantidad de piezas procesadas o por la máquina  $i$  o por la máquina  $j$  únicamente.

La siguiente tabla asigna las piezas a las máquinas:

Máquina	Piezas asignadas
1	1, 6
2	2, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15
3	3, 5, 10, 14
4	2, 7, 8, 11, 12, 13
5	3, 5, 10, 11, 14
6	1, 4, 5, 9, 10
7	2, 5, 7, 8, 9, 10
8	3, 4, 15
9	4, 10
10	3, 8, 10, 14, 15

- (a) Exprese el problema como un modelo de red.  
 (b) Demuestre que la determinación de las celdas puede basarse en la solución del árbol de mínima expansión.  
 (c) Para los datos dados en la tabla anterior, construya las soluciones de dos y tres celdas.

## 6.3 PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Este problema determina la ruta más corta entre un origen y un destino en una red de transporte. El mismo modelo puede representar otras situaciones, como se ilustra con los siguientes ejemplos.

### 6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta

#### Ejemplo 6.3-1 (Reemplazo de equipo)

RentCar está desarrollando una política de reemplazo para su flota de automóviles en un horizonte de planeación de 4 años. Al inicio de cada año, un automóvil se reemplaza o se conserva en operación durante un año más. Un automóvil debe estar en servicio de 1 a 3 años. La siguiente tabla proporciona el costo de reemplazo como una función del año en que se adquiere un automóvil y los años en operación.

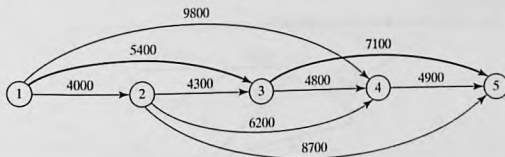
Equipo adquirido al inicio del año	Costo de reemplazo (\$) para años dados en operación		
	1	2	3
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

El problema puede formularse como una red en la que los nodos 1 a 5 representan el inicio de los años 1 a 5. Los arcos a partir del nodo 1 (año 1) pueden llegar a los nodos 2, 3 y 4 porque un automóvil puede estar en operación de 1 a 3 años. Los arcos a partir de los demás nodos pueden interpretarse del mismo modo. La longitud de cada arco es igual al costo de reemplazo. La solución del problema es equivalente a determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 5.

La figura 6.10 muestra la red resultante. Utilizando TORA,<sup>2</sup> la ruta más corta es 1 → 3 → 5. La solución indica que un automóvil adquirido al inicio del año 1 (nodo 1) debe reemplazarse después de 2 años al inicio del año 3 (nodo 3). El automóvil de reemplazo se mantendrá enton-

FIGURA 6.10

Problema de reemplazo de equipo como un modelo de la ruta más corta



<sup>2</sup>En la barra de menús Main, seleccione las opciones Network models ⇒ Shortest route. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Shortest routes.

ces en servicio hasta finales del año 4. El costo total de esta política de reemplazo es de \$12,500 (= \$5400 + \$7100).

### Ejemplo 6.3-2 (Ruta más confiable)

I. Q. Smart va en auto diariamente al trabajo. Habiendo completado un curso de análisis de redes, Smart es capaz de determinar la ruta más corta al trabajo. Por desgracia, la ruta seleccionada está fuertemente patrullada por la policía, y con todas las multas pagadas por exceso de velocidad, la ruta más corta puede no ser la mejor opción. Smart ha decidido por lo tanto elegir una ruta que maximice la probabilidad de *no* ser detenido por la policía.

La red en la figura 6.11 muestra las posibles rutas de la casa al trabajo y la probabilidad asociada de no ser detenido en cada segmento. La probabilidad de no ser detenido en la ruta es el producto de las probabilidades de sus segmentos. Por ejemplo, la probabilidad de no ser multado en la ruta  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$  es  $.9 \times .3 \times .25 = .0675$ . El objetivo de Smart es seleccionar la ruta que *maximice* la probabilidad de no ser multado.

El problema puede formularse como un modelo de la ruta más corta por medio de una transformación logarítmica para convertir el producto de las probabilidades en la suma de los logaritmos de las probabilidades, esto es,  $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k$  se transforma en  $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \dots + \log p_k$ .

Las dos funciones  $p_{1k}$  y  $\log p_{1k}$  son monótonas y decrecen en  $k$ , así pues, maximizar  $p_{1k}$  es equivalente a maximizar  $\log p_{1k}$ , lo que a su vez equivale a *minimizar*  $\log p_{1k}$ . Por lo tanto, al reemplazar  $p_j$  con  $\log p_j$  para todas las  $j$  en la red, el problema se convierte en la red de la ruta más corta en la figura 6.12.

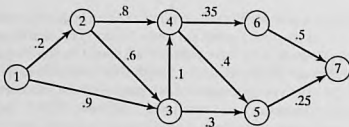


FIGURA 6.11  
Modelo de red de la ruta más confiable

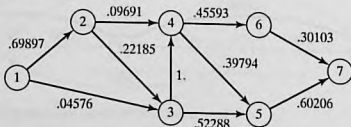


FIGURA 6.12  
Representación de la ruta más confiable como un modelo de la ruta más corta

Utilizando TORA, la ruta más corta en la figura 6.12 pasa por los nodos 1, 3, 5 y 7 con una "longitud" correspondiente de 1.1707, o  $\log p_{17} = -1.1707$ . Así, la probabilidad máxima de no ser detenido es  $p_{17} = 10^{-1.1707} = .0675$ , ¡una noticia no muy alentadora para Smart!

### Ejemplo 6.3-3 (Acertijo de las tres jarras)

Una jarra de 8 galones está llena de líquido. Dado que hay dos jarras vacías de 5 y 3 galones, dividida los 8 galones de líquido en dos partes iguales utilizando sólo las tres jarras. ¿Cuál es el mínimo de transferencias (decantaciones) necesarias para obtener este resultado?

Probablemente pueda resolver este acertijo mediante inspección. No obstante, el proceso de solución puede ser sistematizado al representar la cuestión como un problema de la ruta más corta.

Se define un nodo mediante un subíndice triple que representa las cantidades de líquido en las jarras de 8, 5 y 3 galones, respectivamente. Esto quiere decir que la red se inicia con el nodo (8,0,0) y termina con la solución deseada (4,4,0). Se genera un nuevo nodo a partir del nodo actual decantando líquido de una jarra a otra.

La figura 6.13 muestra las diferentes rutas que llevan del nodo de inicio (8,0,0) al nodo final (4,4,0). El arco entre dos nodos sucesivos representa una sola transferencia, y de ahí que podemos suponer que tenemos una longitud de una unidad. El problema se reduce por lo tanto a determinar la ruta más corta entre el nodo (8,0,0) y el nodo (4,4,0).

La solución óptima dada por la ruta de la figura 6.13 requiere 7 decantaciones.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3A

- \*1. Reconstruya el modelo de reemplazo de equipo del ejemplo 6.3-1 suponiendo que un automóvil debe mantenerse en servicio al menos durante 2 años con una vida de servicio máxima de 4. El horizonte de planificación abarca desde el principio del año 1 hasta finales del año 5. La siguiente tabla proporciona los datos necesarios.

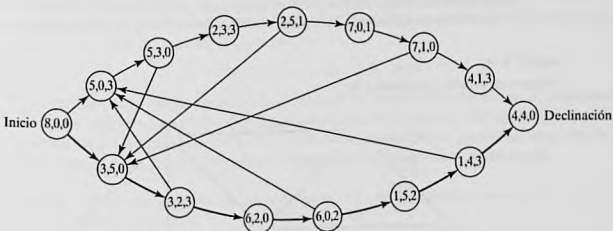


FIGURA 6.13

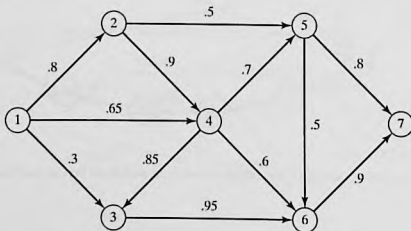
Representación del acertijo de las tres jarras como un modelo de la ruta más corta

Año de adquisición	Costo de reemplazo (\$) para años dados en operación		
	2	3	4
1	3800	4100	6800
2	4000	4800	7000
3	4200	5300	7200
4	4800	5700	—
5	5300	—	—

- La figura 6.14 muestra la red de comunicación entre dos estaciones, 1 y 7. La probabilidad de que un enlace en la red opere sin fallas se muestra en cada arco. Se envían mensajes de la estación 1 a la estación 7, y el objetivo es determinar la ruta que maximice la probabilidad de una transmisión exitosa. Formule la situación como un modelo de la ruta más corta, y determine la solución óptima.
- Planificación de la producción.** DirectCo vende mercancía cuyas demandas a lo largo de los próximos 4 meses son 100, 140, 210 y 180 unidades, respectivamente. La compañía puede mantener existencias suficientes para satisfacer la demanda de cada mes, o bien tener existencias de más para satisfacer la demanda de dos o más meses consecutivos. En el último caso, se carga un costo de retención de \$1.20 por cada unidad de más por mes. Direct Co estima que los precios de compra unitarios durante los siguientes 4 meses deben ser de \$15, \$12, \$10 y \$14, respectivamente. Se incurre en un costo de preparación de \$200 cada vez que se coloca un pedido de compra. La compañía desea desarrollar un plan de compra que minimice los costos totales de colocar un pedido, comprar y retener la mercancía en existencia. Formule el problema como un modelo de la ruta más corta, y use TORA para determinar la solución óptima.
- Problema de Knapsack.** Un ciclista utiliza una mochila de 5 pies<sup>3</sup> y tiene que decidir sobre los artículos más valiosos que hay que llevar en un viaje. Hay tres artículos a escoger. Sus volúmenes son de 2, 3 y 4 pies<sup>3</sup>; el ciclista estima que sus valores asociados en una escala del 0 al 100 son 30, 50 y 70, respectivamente. Expresé el problema como una red de la ruta más larga, y determine la solución óptima. (*Sugerencia:* Un nodo en la red puede definirse como  $[i, v]$ , donde  $i$  es el número del artículo considerado para empacarse y  $v$  es el volumen restante inmediatamente antes de decidir sobre  $i$ . Para resolverlo con

FIGURA 6.14

Red para el problema 2, conjunto 6.3a



TORA, convierta el problema de ruta más larga en uno de ruta más corta, utilizando una longitud de arco negativa.)

- Un tostador eléctrico antiguo tiene dos puertas de gozne accionadas por resorte. Las dos puertas se abren hacia afuera en direcciones opuestas lejos del elemento calefactor. Una rebanada de pan se tuesta por un lado a la vez, al empujar una de las puertas para que se abra y colocar la rebanada con la otra mano. Después de que se tuesta un lado, se le da vuelta a la rebanada para tostar el otro lado. El objetivo es determinar la secuencia de operaciones (colocar, tostar, dar vuelta y sacar) necesarias para tostar las tres rebanadas de pan en el menor tiempo posible. Formule el problema como un modelo de ruta más corta, aplicando los siguientes tiempos elementales de las diferentes operaciones:

Operación	Tiempo (segundos)
Colocar una rebanada en cualquier lado del tostador	3
Tostar un lado	30
Darle vuelta a la rebanada que ya está en el tostador	1
Sacar la rebanada de cualquier lado del tostador	3

### 6.3.2 Algoritmos de la ruta más corta

Esta sección presenta dos algoritmos para resolver tanto redes cíclicas (es decir, que contienen bucles) como redes acíclicas:

- El algoritmo de Dijkstra para determinar las rutas más cortas entre el nodo origen y los demás nodos en la red.
- El algoritmo de Floyd para determinar la ruta más corta entre dos nodos *cualquiera* en la red.

En esencia, el algoritmo de Floyd incluye a Dijkstra.

**Algoritmo de Dijkstra.** Sea  $u_i$  la distancia más corta del nodo origen 1 al nodo  $i$ , y defina  $d_{ij}$  ( $\geq 0$ ) como la longitud del arco  $(i,j)$ . El algoritmo define la etiqueta para un nodo  $j$  que sigue inmediatamente como

$$[u_j, i] = [u_i + d_{ij}, i], d_{ij} \geq 0$$

La etiqueta para el nodo de inicio es  $[0, 2]$ , que indica que el nodo no tiene predecesor.

Las etiquetas de nodo en el algoritmo de Dijkstra son de dos tipos: *temporales* y *permanentes*. Una etiqueta temporal en un nodo se modifica si puede hallarse una ruta más corta al nodo. De lo contrario, el estado temporal cambia a permanente.

**Paso 0.** Etiquete el nodo de origen (nodo 1) con la etiqueta *permanente*  $[0, -]$ . Establezca  $i = 1$ .

**Paso general  $i$ :**

- Calcule las etiquetas *temporales*  $[u_i + d_{ij}, i]$  para cada nodo  $j$  con  $d_{ij} > 0$ , siempre que  $j$  no esté etiquetado permanentemente. Si el nodo  $j$  ya tiene una etiqueta temporal existente  $[u_j, k]$  hasta otro nodo  $k$  y si  $u_i + d_{ij} < u_j$ , reemplace  $[u_j, k]$  con  $[u_i + d_{ij}, i]$ .

- (b) Si *todos* los nodos tienen etiquetas *permanentes* deténgase. De lo contrario, seleccione la etiqueta  $[u_r, s]$  que tenga la distancia más corta ( $= u_r$ ) entre todas las etiquetas *temporales* (rompa los empates arbitrariamente). Establezca  $i = r$  y repita el paso *i*.

### Ejemplo 6.3-4

La red de la figura 6.15 da las rutas permisibles y sus longitudes en millas entre la ciudad 1 (nodo 1) y las otras cuatro ciudades (nodos 2 a 5). Determine las rutas más cortas entre la ciudad 1 y cada una de las cuatro ciudades restantes.

**Iteración 0.** Asigne una etiqueta *permanente*  $[0, -]$  al nodo 1.

**Iteración 1.** Se puede llegar a los nodos 2 y 3 desde el nodo 1 (el último etiquetado permanentemente). Así, la lista de nodos etiquetados (temporales y permanentes) es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	$[0, -]$	Permanente
2	$[0 + 100, 1] = [100, 1]$	Temporal
3	$[0 + 30, 1] = [30, 1]$	Temporal

Para las dos etiquetas temporales  $[100, 1]$  y  $[30, 1]$ , el nodo 3 da la distancia mínima ( $u_3 = 30$ ). De este modo, el estado del nodo 3 cambia a permanente.

**Iteración 2.** Se puede llegar a los nodos 4 y 5 desde el nodo 3, y la lista de los nodos etiquetados es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	$[0, -]$	Permanente
2	$[100, 1]$	Temporal
3	$[30, 1]$	Permanente
4	$[30 + 10, 3] = [40, 3]$	Temporal
5	$[30 + 60, 3] = [90, 3]$	Temporal

La etiqueta temporal  $[40, 3]$  en el nodo 4 ahora es permanente ( $u_4 = 40$ ).

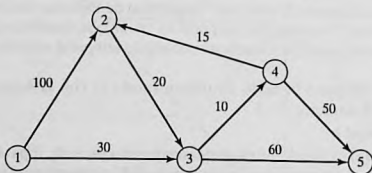


FIGURA 6.15

Ejemplo de red para el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra

**Iteración 3.** Desde el nodo 4 se puede llegar a los nodos 2 y 5. Así, la lista de los nodos etiquetados se actualiza como

Nodo	Etiqueta	Estado
1	[0, -]	Permanente
2	$[40 + 15, 4] = [55, 4]$	Temporal
3	[30, 1]	Permanente
4	[40, 3]	Permanente
5	[90, 3] o $[40 + 50, 4] = [90, 4]$	Temporal

En el nodo 2, la nueva etiqueta [55, 4] reemplaza a la etiqueta temporal [100, 1] de la iteración 1 porque proporciona una ruta más corta. Además, en la iteración 3 el nodo 5 tiene dos etiquetas alternativas con la misma distancia ( $u_5 = 90$ ). La etiqueta temporal [55, 4] en el nodo 2 ahora es permanente ( $u_2 = 55$ ).

**Iteración 4.** Sólo el nodo 3 permanentemente etiquetado puede ser alcanzado desde el nodo 2. Por consiguiente el nodo 3 no puede ser reetiquetado. La nueva lista de etiquetas permanece como estaba en la iteración 3 excepto que la etiqueta en el nodo 2 ahora es permanente. Esto deja al nodo 5 como la única etiqueta temporal. Como el nodo 5 no conduce a otros nodos, su etiqueta se hace permanente, y el proceso termina.

Los cálculos del algoritmo pueden realizarse directamente en la red, como lo demuestra la figura 6.16.

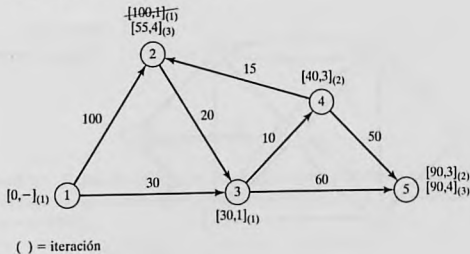
La ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red se determina partiendo del nodo destino deseado y retrocediendo hasta el nodo de inicio utilizando la información en las etiquetas permanentes. Por ejemplo, la siguiente secuencia determina la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2:

$$(2) \rightarrow [55, 4] \rightarrow (4) \rightarrow [40, 3] \rightarrow (3) \rightarrow [30, 1] \rightarrow (1)$$

Por lo tanto, la ruta deseada es  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  con una distancia total de 55 millas.

FIGURA 6.16

Procedimiento de etiquetado en el algoritmo de Dijkstra



### Momento de TORA

Puede usarse TORA para generar las iteraciones de Dijkstra. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem  $\Rightarrow$  Iterations  $\Rightarrow$  Dijkstra's algorithm. El archivo *toraEx3-4.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.3-4.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3B

- La red de la figura 6.17 presenta las distancias en millas entre pares de ciudades 1,2,...,8. Use el algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta entre las siguientes ciudades:
  - Ciudades 1 y 8
  - Ciudades 1 y 6
  - Ciudades 4 y 8
  - Ciudades 2 y 6
- Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar la ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red de la figura 6.18.
- Utilice el algoritmo de Dijkstra para determinar la solución óptima de cada uno de los siguientes problemas:
  - Problema 1, conjunto 6.3a.
  - Problema 2, conjunto 6.3a.
  - Problema 4, conjunto 6.3a.

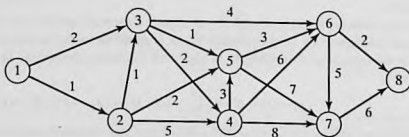


FIGURA 6.17

Red para el problema 1, conjunto 6.3b

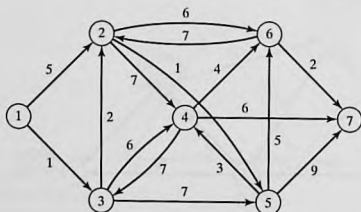


FIGURA 6.18

Red para el problema 2, conjunto 6.3b

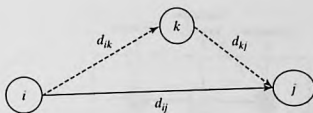


FIGURA 6.19  
Operación triple de Floyd

**Algoritmo de Floyd.** Este algoritmo es más general que el Dijkstra porque determina la distancia entre dos nodos *cualesquiera* en la red. El algoritmo representa una red de  $n$  nodos como una matriz cuadrada con  $n$  filas y  $n$  columnas. La entrada  $(i, j)$  de la matriz da la distancia  $d_{ij}$  del nodo  $i$  al nodo  $j$ , la cual es finita si  $i$  está vinculado directamente a  $j$ , e infinita en caso contrario.

La idea del algoritmo de Floyd es simple. Dados tres nodos,  $i, j$  y  $k$  en la figura 6.19 con las distancias de conexión que se muestran en los tres arcos, es más corto llegar de  $j$  a  $i$  pasando por  $k$  si

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$$

En este caso es óptimo reemplazar la ruta directa de  $i \rightarrow j$  con la ruta indirecta  $i \rightarrow k \rightarrow j$ . Este intercambio de **operación triple** se aplica a la matriz de distancias por medio de los siguientes pasos:

**Paso 0.** Defina la matriz de la distancia de inicio  $D_0$  y la matriz de secuencia de nodos  $S_0$  (todos los elementos en las diagonales están bloqueados). Establezca  $k = 1$ .

	1	2	...	$j$	...	$n$
1	—	$d_{12}$	...	$d_{1j}$	...	$d_{1n}$
2	$d_{21}$	—	...	$d_{2j}$	...	$d_{2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$D_0 = I$	$d_{i1}$	$d_{i2}$	...	$d_{ij}$	...	$d_{in}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N$	$D_{n1}$	$d_{n2}$	...	$d_{nj}$	...	—

	1	2	...	$j$	...	$n$
1	—	2	...	$j$	...	$n$
2	1	—	...	$j$	...	$n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_0 =$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i$	1	2	...	$j$	...	$n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	1	2	...	$j$	...	—

**Paso general  $k$ .** Defina la fila  $k$  y la columna  $k$  como *fila pivote* y *columna pivote*. Aplique la *operación triple* a cada elemento  $d_{ij}$  en  $D_{k-1}$ , para todas las  $i$  y  $j$ . Si la condición

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}, (i \neq k, j \neq k, y i \neq j)$$

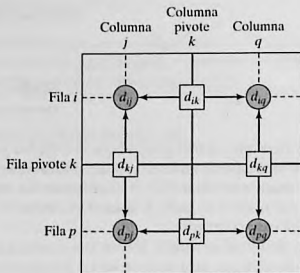


FIGURA 6.20

Implementación de la operación triple en forma de matriz

se satisface, realice los siguientes cambios:

- Cree  $D_k$  reemplazando  $d_{ij}$  en  $D_{k-1}$  con  $d_{ik} + d_{kj}$ .
- Cree  $S_k$  reemplazando  $s_{ij}$  en  $S_{k-1}$  con  $k$ . Establezca  $k = k + 1$ . Si  $k = n + 1$ , deténgase; de lo contrario repita el paso  $k$ .

El paso  $k$  del algoritmo puede explicarse representando  $D_{k-1}$  como se muestra en la figura 6.20. Aquí, la fila  $k$  y la columna  $k$  definen la fila y columna pivote actuales. La fila  $i$  representa cualquiera de las filas  $1, 2, \dots, k - 1$ , y la fila  $p$  representa cualquiera de las filas  $k + 1, k + 2, \dots, n$ . Asimismo, la columna  $j$  representa cualquiera de las columnas  $1, 2, \dots, k - 1$ , y la columna  $q$  representa cualquiera de las columnas  $k + 1, k + 2, \dots, n$ . La *operación triple* puede aplicarse como sigue: Si la suma de los elementos en la fila pivote y la columna (mostrados por cuadrados) es menor que el elemento de intersección asociado (mostrado por un círculo), entonces es óptimo reemplazar la distancia de intersección por la suma de las distancias pivote.

Después de  $n$  pasos, podemos determinar la ruta más corta entre los nodos  $i$  y  $j$  a partir de las matrices  $D_n$  y  $S_n$  aplicando las siguientes reglas:

- $d_{ij}$ , a partir de  $D_n$ , da la ruta más corta entre los nodos  $i$  y  $j$ .
- A partir de  $S_n$ , determine el nodo intermedio  $k = s_{ij}$  que da en resultado la ruta  $i \rightarrow k \rightarrow j$ . Si  $s_{ik} = k$  y  $s_{kj} = j$ , deténgase; todos los nodos intermedios de la ruta han sido encontrados. De lo contrario, repita el procedimiento entre los nodos  $i$  y  $k$  y entre los nodos  $k$  y  $j$ .

### Ejemplo 6.3-5

Para la red de la figura 6.21, halle las rutas más cortas entre cada dos nodos. Las distancias (en millas) se dan en los arcos. El arco (3,5) es direccional, es decir, no se permite el tráfico del nodo 5 al nodo 3. Todos los demás arcos permiten el tráfico en dos direcciones.

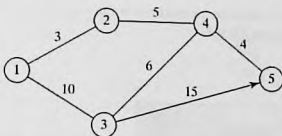


FIGURA 6.21  
Red para el ejemplo 6.3-5

**Iteración 0.** Las matrices  $D_0$  y  $S_0$  dan la representación inicial de la red.  $D_0$  es simétrica, excepto que  $d_{53} = \infty$  porque no se permite tráfico del nodo 5 al nodo 3.

	$D_0$				
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	$\infty$	$\infty$
2	3	—	$\infty$	5	$\infty$
3	10	$\infty$	—	6	15
4	$\infty$	5	6	—	4
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	—

	$S_0$				
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

**Iteración 1.** Establezca  $k = 1$ . La fila y columna pivotes se muestran por la primera fila y la primera columna ligeramente sombreadas en la matriz  $D_0$ . Las celdas más oscuras,  $d_{23}$  y  $d_{32}$ , son las únicas que la *operación triple* puede mejorar. Por lo tanto,  $D_1$  y  $S_1$  se obtienen desde  $D_0$  y  $S_0$  como sigue:

1. Reemplace  $d_{23}$  con  $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$  y establezca  $s_{23} = 1$ .
2. Reemplace  $d_{32}$  con  $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$  y establezca  $s_{32} = 1$ .

Estos cambios se muestran en negritas en las matrices  $D_1$  y  $S_1$ .

	$D_1$				
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	$\infty$	$\infty$
2	3	—	<b>13</b>	5	$\infty$
3	10	<b>13</b>	—	6	15
4	$\infty$	5	6	—	4
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	—

	$S_1$				
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	<b>1</b>	4	5
3	1	<b>1</b>	—	4	5
4	<b>1</b>	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

**Iteración 2.** Establezca  $k = 2$ , como se muestra mediante la fila y columna ligeramente sombreada en  $D_1$ . La *operación triple* se aplica a las celdas más oscuras en  $D_1$  y  $S_1$ . Los cambios resultantes se muestran en negritas en  $D_2$  y  $S_2$ .

	$D_2$				
	1	2	3	4	5
1	—	3	10	<b>8</b>	$\infty$
2	3	—	13	5	$\infty$
3	10	13	—	6	15
4	<b>8</b>	5	6	—	4
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	—

	$S_2$				
	1	2	3	4	5
1	—	2	3	<b>2</b>	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	<b>2</b>	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

**Iteración 3.** Establezca  $k = 3$ , como se muestra por la fila y columna sombreadas en  $D_2$ . Las nuevas matrices son  $D_3$  y  $S_3$ .

		$D_3$				
		1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	25	
2	3	—	13	5	28	
3	10	13	—	6	15	
4	8	5	6	—	4	
5	∞	∞	∞	4	—	

		$S_3$				
		1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	3	
2	1	—	1	4	3	
3	1	1	—	4	5	
4	2	2	3	—	5	
5	1	2	3	4	—	

**Iteración 4.** Establezca  $k = 4$ , como se muestra por la fila y columna sombreadas en  $D_3$ . Las nuevas matrices son  $D_4$  y  $S_4$ .

		$D_4$				
		1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	12	
2	3	—	11	5	9	
3	10	11	—	6	10	
4	8	5	6	—	4	
5	12	9	10	4	—	

		$S_4$				
		1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	4	
2	1	—	4	4	4	
3	1	4	—	4	4	
4	2	2	3	—	5	
5	4	4	4	4	—	

**Iteración 5.** Establezca  $k = 5$ , como se muestra mediante la fila y columna sombreadas en  $D_4$ . No son posibles más mejoras en esta iteración.

Las matrices finales  $D_4$  y  $S_4$  contienen toda la información necesaria para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. Por ejemplo, desde  $D_4$ , la distancia más corta del nodo 1 al nodo 5 es  $d_{15} = 12$  millas. Para determinar la ruta asociada, recordemos que un segmento  $(i, j)$  representa un vínculo directo sólo si  $s_{ij} = j$ . De lo contrario,  $i$  y  $j$  están vinculados por al menos otro nodo intermedio. Como  $s_{15} = 4 \neq 5$ , la ruta inicialmente se da como  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ . Ahora, como  $s_{14} = 2 \neq 4$ , el segmento  $(1, 4)$  no es un vínculo *directo*, y  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  reemplaza a  $1 \rightarrow 4$ , y la ruta  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  ahora se vuelve  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ . Luego, como  $s_{12} = 2, s_{24} = 4, y s_{45} = 5$ , no se requieren más "disecciones", y  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$  define la ruta más corta.

### Momento de TORA

Como en el algoritmo de Dijkstra, TORA puede usarse para generar las iteraciones de Floyd. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem  $\Rightarrow$  Iterations  $\Rightarrow$  Floyd's algorithm. El archivo *torEx6.3-5.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.3-5.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3C

- En el ejemplo 6.3-5, use el algoritmo de Floyd para determinar las rutas más cortas entre cada uno de los siguientes pares de nodos:
  - Del nodo 5 al nodo 1.
  - Del nodo 3 al nodo 5.

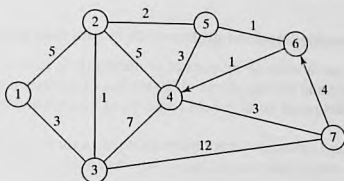


FIGURA 6.22

Red para el problema 2, conjunto 6.3c

- (c) Del nodo 5 al nodo 3.  
 (d) Del nodo 5 al nodo 2.
2. Aplique el algoritmo de Floyd a la red de la figura 6.22. Los arcos (7,6) y (6,4) son unidireccionales, y todas las distancias están en millas. Determine la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
- (a) Del nodo 1 al nodo 7.  
 (b) Del nodo 7 al nodo 1.  
 (c) Del nodo 6 al nodo 7.
3. La compañía de telefonía celular Tell-All da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias de satélite (en millas) entre las seis áreas se dan en la figura 6.23. Tell-All necesita determinar las rutas más eficientes para enviar los mensajes que deban establecerse entre cada dos áreas en la red.
- \*4. Seis niños, Joe, Kay, Jim, Bob, Rae y Kim juegan una variante del juego infantil de *las escondidas*. Sólo algunos de los niños conocen el escondite de un niño. Luego un niño hace pareja con otro con el objetivo de encontrar el escondite del compañero. Esto puede lograrse mediante una cadena de otros niños que finalmente permitirá descubrir el escondite del niño designado. Por ejemplo, suponga que Joe tiene que encontrar a Kim y que Joe sabe dónde está escondido Jim, quien a su vez sabe dónde está escondido Kim. Por lo tanto, Joe puede encontrar a Kim si halla primero a Jim, quien a su vez conducirá a Joe al escondite de Kim. La siguiente lista proporciona los paraderos de los niños:
- Joe conoce los escondites de Bob y Kim.
  - Kay conoce los escondites de Bob, Jim y Rae.
  - Jim y Bob conocen sólo el escondite de Kay.
  - Rae conoce el escondite de Kim.
  - Kim conoce los escondites de Joe y Bob.

Idee un plan para que cada niño encuentre a todos los demás niños utilizando el número mínimo de contactos. ¿Cuál es el número máximo de contactos?

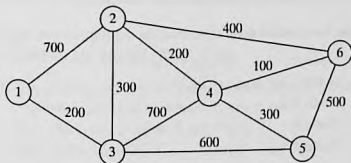


FIGURA 6.23

Red para el problema 3, conjunto 6.3c

### 6.3.3 Formulación de programación lineal del problema de la ruta más corta

Esta sección proporciona un modelo de PL para el problema de la ruta más corta. El modelo es general en el sentido de que puede utilizarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. Al respecto, es equivalente al algoritmo de Floyd.

Deseamos determinar la ruta más corta entre cualquiera de dos nodos  $s$  y  $t$  en una red de  $n$  nodos. La PL asume que una unidad de flujo entra a la red por el nodo  $s$  y que sale por el nodo  $t$ .

Defina

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \text{cantidad de flujo en el arco } (i, j) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si el arco } (i, j) \text{ está en la ruta más corta} \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \\ c_{ij} &= \text{longitud del arco } (i, j) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función objetivo del programa lineal es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{\substack{\text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} c_{ij}x_{ij}$$

Las restricciones representan la **ecuación de la conservación del flujo** en cada nodo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

Matemáticamente, esto se traduce así para el nodo  $j$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Entrada externa} \\ \text{al nodo } j \end{array} \right) + \sum_{\substack{\text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} x_{ij} = \left( \begin{array}{l} \text{Salida externa} \\ \text{del nodo } j \end{array} \right) + \sum_{\substack{\text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (j, k)}} x_{jk}$$

#### Ejemplo 6.3-6

En la red del ejemplo 6.3-4, supongamos que deseamos determinar la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2; es decir,  $s = 1$  y  $t = 2$ . La figura 6.24 muestra cómo entra la unidad de flujo en el nodo 1 y sale en el nodo 2.

En la red podemos ver que la ecuación de la conservación del flujo da por resultado

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1:} & \quad 1 = x_{12} + x_{13} \\ \text{Nodo 2:} & \quad x_{12} + x_{42} = x_{23} + 1 \\ \text{Nodo 3:} & \quad x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35} \\ \text{Nodo 4:} & \quad x_{34} = x_{42} + x_{45} \\ \text{Nodo 5:} & \quad x_{35} + x_{45} = 0 \end{aligned}$$

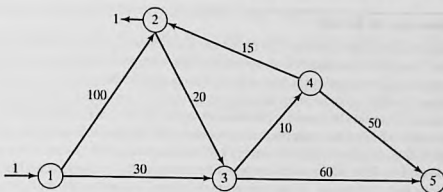


FIGURA 6.24

Inserción de un flujo unitario para determinar la ruta más corta entre el nodo  $s = 1$  y el nodo  $t = 2$

La PL completa se expresa como

	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{42}$	$x_{45}$	
Minimizar $z =$	100	30	20	10	60	15	50	
Nodo 1	1	1						$= 1$
Nodo 2	-1					-1		$= -1$
Nodo 3		-1	-1	1	1			$= 0$
Nodo 4				-1		1	1	$= 0$
Nodo 5					-1		-1	$= 0$

Observe que la columna  $x_{ij}$  tiene exactamente un "1" en la fila  $i$  y un "-1" en la fila  $j$ , una propiedad típica de una PL de red.

La solución óptima (obtenida por TORA, archivo *toraEx6.3-6.txt*) es

$$z = 55, x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1$$

Esta solución ofrece la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2 como  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ , y la distancia asociada es  $z = 55$  (millas).

**Comentarios.** En la PL dada, la restricción del nodo 5 indica que  $x_{15} = x_{45} = 0$ . El tamaño de la PL puede reducirse si se eliminan las columnas  $x_{35}$  y  $x_{45}$  (lo cual elimina automáticamente la restricción del nodo 5).

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3D

- En el ejemplo 6.3-6, use programación lineal para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
  - Nodo 1 al nodo 5.
  - Nodo 2 al nodo 5.

### Momento de Solver

La figura 6.25 proporciona la hoja de cálculo Excel Solver para encontrar la ruta más corta entre el nodo N1 de *inicio* y el nodo N2 de *terminación* del ejemplo 6.3-6 (archivo *solverEx6.3.xls*). Los datos de entrada del modelo son la matriz de distancias en las celdas B3:E6. El nodo N1 no tiene ninguna columna porque no tiene arcos de entrada, y el nodo 5 no tiene ninguna fila porque no tiene arcos de salida. Una celda en blanco representa un segmento de ruta no existente (es decir, un arco de longitud infinita). (En breve veremos cómo se reconoce la presencia de celdas en blanco en las fórmulas de la hoja de cálculo.) Los nodos N1 y N2 se designan como nodos de *inicio* y *terminación* ingresando un 1 en F3 y B7, respectivamente. Estas designaciones pueden cambiarse como se desee. Por ejemplo, para determinar la ruta más corta del nodo N2 al nodo N4, ingrese 1 en F4 y D7.

Como se explica en la PL del ejemplo 6.3-6, las restricciones del problema tienen la forma general:

$$(\text{Flujo de salida neto}) - (\text{Flujo de entrada neto}) = 0$$

Esta definición se adapta al diseño de la hoja de cálculo al incorporar el flujo unitario externo directamente al *flujo de salida neto* y al *flujo de entrada neto* de la ecuación, es decir,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{flujo de arcos de} \\ \text{salida de Ni a todos} \\ \text{los demás nodos} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{flujo de} \\ \text{entrada externo} \\ \text{a Ni} \end{array} \right] - \left[ \left[ \begin{array}{l} \text{flujo de arcos de} \\ \text{entrada a Ni de todos} \\ \text{los demás nodos} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{flujo de} \\ \text{salida externo} \\ \text{de Ni} \end{array} \right] \right]$$

En la hoja de cálculo, B3:E6 designa la matriz de *distancias de entrada*, B9:E12 designa las celdas de *solución*, F3:F6 designa el flujo unitario de *salida* (externo), y B7:E7 designa el flujo unitario de *entrada* (externo). Por lo tanto,

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Solver Shortest-Route Model (Example 6.3-6)</b>							
2	distance	N2	N3	N4	N5		Range	Cells
3	N1	100	30			1	distance	B3:E6
4	N2		20				solution	B9:E12
5	N3			10	60		netFlow	H9:H13
6	N4	15			50		totalDist	G14
7		1						
8	solution	N2	N3	N4	N5	outFlow	inFlow	netFlow
9	N1	0	1	0	0	4.6E-12	0	4.6E-12
10	N2	0	0	0	0	0	5E-12	-5E-12
11	N3	0	0	1	0	1	1	0
12	N4	1	0	0	0	1	1	0
13	N5					0	0	0
14		5E-12	1	1	0	totalDist=	55	

Solver Parameters		
Set Target Cell:	totalDist	
Equal To:	Max <input type="radio"/> Min <input type="radio"/> Val Of <input type="radio"/>	
By Changing Variable Cells:	solution	
Subject to the Constraints:	netFlow = 0 solution >= 0	
Cell	Formula	Copy to
B8	= B2	C8:E8
A9	= A3	A10:A12
F9	= SUMIF(B3:E3,">0",B9:E9)-F3	F10:F12
B14	= SUMIF(B3:B5,">0",B9:B12)-B7	C14:E14
G10	= OFFSET(A\$14,0,ROW(A1))	G11:G13
H9	= F9-G9	H10:H13
G14	= SUMPRODUCT(distance,solution)	

FIGURA 6.25

Solución obtenida con Excel Solver de la ruta más corta entre los nodos 1 y 2 en el ejemplo 6.3-6 (archivo *solverEx6.3-6.xls*)

Ecuación del nodo N1:  $[SUM(B9:E9) - F3] - [0 - 0] = 0$

Ecuación del nodo N2:  $[SUM(B10:E10) - F4] - [SUM(B9:B12) - B7] = 0$

Ecuación del nodo N3:  $[SUM(B11:E11) - F5] - [SUM(C9:C12) - C7] = 0$

Ecuación del nodo N4:  $[SUM(B12:E12) - F6] - [SUM(D9:D12) - D7] = 0$

Ecuación del nodo N5:  $[0 - 0] - [SUM(E9:E12) - E7] = 0$

La suposición de esta hoja de cálculo es que las celdas en blanco en la matriz de distancias B3:E6 representan rutas bloqueadas. Podemos utilizar SUMIF en lugar de SUM, para tener en cuenta de forma automática esta condición.<sup>3</sup> Las dos instrucciones siguientes muestran cómo se ingresan las fórmulas modificadas en la hoja de cálculo.

1. Ingrese = SUMIF (B3 : E3 , ">0" , B9 : E9) - F3 en la celda F9 y cópielo en las celdas F10:F12.
2. Ingrese = SUMIF (B3 : B6 , ">0" , B9 : B12) - B7 en la celda B14 y cópiela en las celdas C14:E14.

El resto de las fórmulas de la hoja de cálculo se ingresan como sigue:

1. Ingrese = OFFSET (A\$14 , 0 , ROW (A1) ) en la celda G10 y cópiela en las celdas G11:G13 para transponer el flujo de entrada a la columna G.
2. Ingrese 0 en G9 y F13 para indicar que N1 no tiene arcos de *entrada* ni flujo unitario de *salida* externo y que N5 no tiene arcos de *salida* o flujo de *entrada* unitario externo.
3. Ingrese = F9 - G9 en la celda H9 y cópiela en las celdas H10:H13 para calcular el flujo neto.
4. Para la función objetivo, ingrese en la celda G14 =SUMPRODUCT (B3 : E6 , B9 : E12) o, de forma equivalente, =SUMPRODUCT (distance , solution) .

La hoja de cálculo ya está lista para la aplicación de Solver en la figura 6.25. Las celdas B9:E12 representan la solución del modelo. Si la celda (Ni,Nj) = 1, entonces el segmento (Ni,Nj) está en la ruta más corta. La pantalla de resultados en la figura 6.25 da la solución (N1 - N3 = 1, N3 - N4 = 1 y N4 - N2 = 1). La ruta óptima es 1 → 3 → 4 → 2, con una distancia total de 55 millas.<sup>4</sup>

**Comentarios.** En la mayoría de los libros de texto, los arcos explícitos (nodo *i*, nodo *j*, distancia) definen la red como un modelo incómodo de manejar, sobre todo cuando la cantidad de arcos es grande. Nuestro modelo está controlado por la matriz de distancias compacta (B3:E6) y sus flujos externos (E3:E6) y B7:E7). Se puede argumentar, sin embargo, que nuestro modelo podría manejar una cantidad mucho más grande de variables. Digamos que el ejemplo 6.3-6 tiene 7 arcos y por consiguiente 7 variables, en contraste con  $4 \times 4 = 16$  variables en nuestra formulación. Tenga en cuenta que si se utiliza SUMIF, las restricciones del flujo son *exactamente las mismas* que en otras presentaciones. Esto quiere decir que las 9 variables adicionales aparecen sólo en la función objetivo y con coeficientes cero (entradas en blanco en B3:B6). En consecuencia, los *pre-resolvedores* en paquetes de software comerciales detectarán esta "peculiaridad" y de forma automática excluirán las variables adicionales de la función objetivo antes de resolver el problema, con lo que producirán el *mismo modelo* como en otras presentaciones.

<sup>3</sup>La idea es que la hoja de cálculo trata una celda en blanco como un valor cero. Si sucede que un problema tiene una distancia cero entre nodos, la distancia cero puede reemplazarse con un valor positivo muy pequeño.

<sup>4</sup>La solución del modelo presenta una curiosa ocurrencia. Si la restricción *netFlow* = 0 se reemplaza con *outFlow* = *inFlow* en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, Solver no determina una solución factible, incluso si se ajusta la *precisión* en el cuadro de diálogo **Solver Option**. (Para reproducir esta experiencia, las celdas de *solución* B9:E12 deben ser cero o estar vacías.) Aún más curioso, si las restricciones se reemplazan con *inFlow* = *outFlow*, se encuentra la solución óptima. No está claro por qué ocurre esta peculiaridad, pero el problema puede estar relacionado con error de redondeo.

### Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.3-6a.txt* proporciona el modelo para resolver el ejemplo 6.3-6. El modelo es general en el sentido de que puede usarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en un problema de cualquier tamaño. El modelo se explica en la sección C.9 en el sitio web.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3E

1. Modifique el archivo *solverEx6.3-6.xls* para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
  - (a) Nodo 1 a nodo 5.
  - (b) Nodo 4 a nodo 3.
2. Adapte el archivo *amplEx6.3-6b.txt* para el problema 2, conjunto 6.3a, para hallar la ruta más corta entre el nodo 1 y el nodo 7. Los datos de entrada deben ser las probabilidades puras. Use las funciones de programación para imprimir y visualizar en pantalla la ruta de transmisión óptima y su probabilidad de éxito.

## 6.4 MODELO DE FLUJO MÁXIMO

Considere una red de oleoductos que transporta petróleo crudo desde pozos hasta refinerías. Se instalan estaciones intermedias de reforzamiento y bombeo a distancias apropiadas para mover el crudo en la red. Cada segmento de tubería tiene una velocidad de descarga finita (o capacidad) de flujo de crudo. Un segmento de tubería puede ser unidireccional o bidireccional, según su diseño. La figura 6.26 muestra una red de oleoductos típica. El objetivo es determinar la capacidad de flujo máxima de la red.

La solución del problema propuesto requiere agregar una sola fuente y un solo sumidero o vertedero, utilizando arcos de capacidad infinita unidireccionales, como se muestra mediante los arcos de rayas en la figura 6.26.

Para el arco  $(i, j)$ , la notación  $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$  proporciona las capacidades de flujo en las dos direcciones  $i \rightarrow j$  y  $j \rightarrow i$ . Para eliminar la ambigüedad, colocamos a  $\bar{C}_{ij}$  junto al nodo  $i$  y a  $\bar{C}_{ji}$  junto al nodo  $j$ , como se muestra en la figura 6.27.

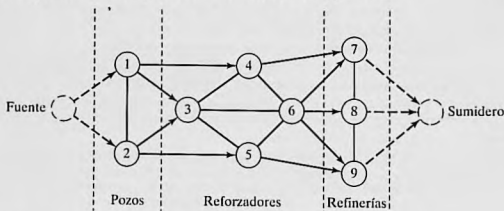


FIGURA 6.26

Red capacitada que conecta los pozos y las refinerías por medio de estaciones reforzadoras

## 6.4.1 Enumeración de cortes

Un **corte** define un conjunto de arcos cuya eliminación de la red interrumpe el flujo entre los nodos fuente y sumidero. La **capacidad de corte** es igual a la suma de las capacidades de su conjunto de arcos. Entre *todos* los cortes posibles en la red, el corte con la **capacidad mínima** es el cuello de botella que determina el flujo máximo en la red.

## Ejemplo 6.4-1

Considere la red de la figura 6.28. Las capacidades bidireccionales se muestran en los arcos respectivos por medio de la convención utilizada en la figura 6.27. Por ejemplo, el límite de flujo para el arco (3,4) es de 10 unidades de 3 a 4, y de 5 unidades de 4 a 3.

La figura 6.28 ilustra tres cortes con las siguientes capacidades:

Corte	Arcos asociados	Capacidad
1	(1, 2), (1, 3), (1, 4)	$20 + 30 + 10 = 60$
2	(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5)	$30 + 10 + 40 + 30 = 110$
3	(2, 5), (3, 5), (4, 5)	$30 + 20 + 20 = 70$

La única información de los tres cortes es que el flujo máximo en la red no puede exceder de 60 unidades. Para determinar el flujo máximo es necesario enumerar *todos* los cortes, una tarea difícil para la red general. Por lo tanto, la necesidad de un algoritmo eficiente es imperativa.

## CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4A

- \*1. Para la red de la figura 6.28, determine dos cortes más y encuentre sus capacidades.



FIGURA 6.27  
Flujos de arcos  $C_{ij}$  de  $i \rightarrow j$  y  $C_{ji}$  de  $j \rightarrow i$

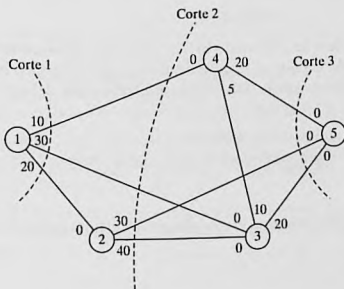


FIGURA 6.28  
Ejemplos de cortes en redes de flujo

## 6.4.2 Algoritmo de flujo máximo

Este algoritmo se basa en el hallazgo de **rutas de avance** con flujo *positivo* entre los nodos fuente y sumidero. Cada ruta destina una parte de o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.

Considere el arco  $(i, j)$  con las capacidades bidireccionales (de diseño)  $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ . Como algunas partes de estas capacidades se destinan al flujo en el arco, los **residuos** (capacidades no utilizadas, o flujo remanente) del arco se actualizan. Utilizamos la notación  $(c_{ij}, c_{ji})$  para representar los residuos.

Para un nodo  $j$  que recibe flujo del nodo  $i$ , anexamos la etiqueta  $[a_j, i]$  donde  $a_j$  es el flujo del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

- Paso 1.** Para todos los arcos, iguale la capacidad residual a la capacidad de diseño, esto es  $(c_{ij}, c_{ji}) = (\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ . Sea  $a_1 = \infty$ , y etiquete el nodo fuente con  $[\infty, -]$ .  
Diseñe  $i = 1$ , y continúe con el paso 2.
- Paso 2.** Determine  $S_i$ , el conjunto de nodos no etiquetados  $j$  al que se puede llegar directamente desde  $i$  por medio de arcos con residuos *positivos* (es decir,  $c_{ij} > 0$  para todas las  $j \in S_i$ ). Si  $S_i \neq \emptyset$ , continúe con el paso 3. De lo contrario, una ruta parcial termina en el nodo  $i$ . Continúe con el paso 4.
- Paso 3.** Determine  $k \in S_i$  de modo que

$$c_{ik} = \max_{j \in S_i} \{c_{ij}\}$$

Diseñe  $a_k = c_{ik}$  y etiquete el nodo  $k$  con  $[a_k, i]$ . Si  $k = n$ , el nodo sumidero ha sido etiquetado, y se ha encontrado una *ruta de avance*, continúe con el paso 5. De lo contrario, diseñe  $i = k$ , y vaya al paso 2.

- Paso 4. (Retroceso).** Si  $i = 1$ , no es posible avanzar; continúe con el paso 6. De lo contrario, sea  $r$  el nodo (en la ruta parcial) que se etiquetó *inmediatamente* antes del nodo actual  $i$ , y elimine  $i$  del conjunto de nodos adyacentes a  $r$ . Diseñe  $i = r$ , y regrese al paso 2.
- Paso 5. (Determinación de los residuos).** Defina los nodos de la ruta de avance  $p$ -ésima del nodo 1 al nodo  $n$  como  $N_p = (1, k_1, k_2, \dots, n)$ . Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula como

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_n\}$$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de avance se reduce en  $f_p$  en la dirección del flujo, y se *incrementa* en  $f_p$  en la dirección inversa; es decir, para los nodos  $i$  y  $j$  en la ruta, el flujo residual cambia del actual  $(c_{ij}, c_{ji})$  a

(a)  $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$  si el flujo es de  $i$  a  $j$

(b)  $(c_{ij} + f_p, c_{ji} - f_p)$  si el flujo es de  $j$  a  $i$

Restablezca los nodos que se eliminaron en el paso 4. Diseñe  $i = 1$ , y regrese al paso 2.

- Paso 6. (Solución).**

(a) Dado que se determinaron  $m$  rutas de avance, el flujo máximo en la red es

$$F = f_1 + f_2 + \dots + f_m$$

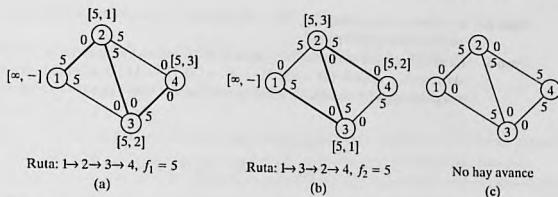


FIGURA 6.29

Uso de los residuos para calcular el flujo máximo

- (b) Utilizando las *capacidades de diseño* (iniciales) y los *residuos* finales del arco  $(i, j)$ ,  $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ , y  $(c_{ij}, c_{ji})$ , respectivamente, el flujo óptimo en el arco  $(i, j)$  se determina calculando  $(\alpha, \beta) = (\bar{C}_{ij} - c_{ij}, \bar{C}_{ji} - c_{ji})$ . Si  $\alpha > 0$ , el flujo óptimo de  $i$  a  $j$  es  $\alpha$ . Por otra parte, si  $\beta > 0$ , el flujo óptimo de  $j$  a  $i$  es  $\beta$ . (Es imposible que  $\alpha$  y  $\beta$  sean positivos al mismo tiempo.)

El proceso de retroceso del paso 4 se invoca cuando el algoritmo termina en un nodo intermedio. El ajuste del flujo en el paso 5 puede explicarse mediante la red de flujo simple de la figura 6.29. La red (a) proporciona la primera ruta de avance  $N_1[1, 2, 3, 4]$  con su flujo máximo  $f_1 = 5$ . Por lo tanto, los residuos de cada uno de los arcos  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  y  $(3, 4)$  cambian de  $(5, 0)$  a  $(0, 5)$ , de acuerdo con el paso 5. La red (b) da ahora la segunda ruta de avance  $N_2 = [1, 2, 3, 4]$  con  $f_2 = 5$ . Después de hacer los ajustes del flujo necesarios, obtenemos la red (c), donde ya no son posibles más rutas de avance. Lo que sucedió en la transición de (b) a (c) no fue sino una cancelación del flujo previamente comprometido en la dirección  $2 \rightarrow 3$ , y en esencia ello permite el flujo sólo en las rutas  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  y  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  (flujo máximo  $= 5 + 5 = 10$ ). El algoritmo “recuerda” que un flujo de 2 a 3 se comprometió previamente debido a un ajuste anterior de la capacidad en la dirección inversa (de acuerdo con el paso 5).

### Ejemplo 6.4-2

Determine el flujo máximo en la red del ejemplo 6.4-1 (figura 6.28). La figura 6.30 proporciona un resumen gráfico de las iteraciones del algoritmo. Verá que es útil comparar la descripción de las iteraciones con el resumen gráfico.

**Iteración 1.** Iguale los residuos iniciales  $(c_{ij}, c_{ji})$  a las capacidades iniciales  $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ .

**Paso 1.** Establezca  $a_1 = \infty$  y etiquete el nodo 1 con  $[\infty, -]$ . Establezca  $i = 1$ .

**Paso 2.**  $S_1 = \{2, 3, 4\}$  ( $\neq \emptyset$ ).

**Paso 3.**  $k = 3$ , porque  $c_{13} = \max\{c_{12}, c_{13}, c_{14}\} = \max\{20, 30, 10\}$ . Establezca  $a_3 = c_{13} = 30$  y etiquete el nodo 3 con  $[30, 1]$ . Establezca  $i = 3$  y repita el paso 2.

**Paso 2.**  $S_3 = (4, 5)$ .

**Paso 3.**  $k = 5$  y  $a_5 = c_{35} = \max [10, 20] = 20$ . Etiquete el nodo 5 con  $[20, 3]$ . Se logra el avance. Continúe con el paso 5.

**Paso 5.** La ruta de avance se determina a partir de las etiquetas iniciando en el nodo 5 y regresando al nodo 1; es decir  $(5) \rightarrow [20, 3] \rightarrow (3) \rightarrow [30, 1] \rightarrow (1)$ . De este modo,  $N_1 = [1, 3, 5]$  y  $f_1 = \min[a_1, a_3, a_5] = \min[\infty, 30, 20] = 20$ . Las capacidades residuales a lo largo de la ruta  $N_1$  son

$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$

$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

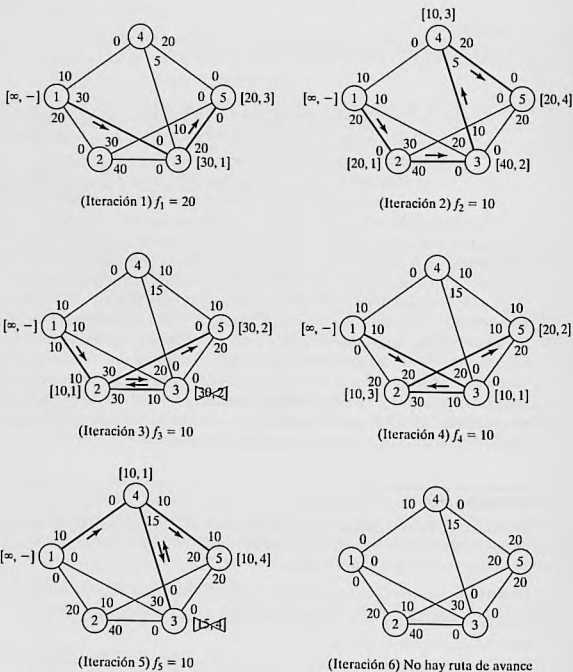


FIGURA 6.30

Iteraciones del algoritmo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2

**Iteración 2.**

- Paso 1.** Establezca  $a_1 = \infty$ , y etiquete el nodo 1 con  $[\infty, -]$ . Establezca  $i = 1$ .
- Paso 2.**  $S_1 = \{2, 3, 4\}$ .
- Paso 3.**  $k = 2$  y  $a_2 = c_{12} = \text{máx} \{20, 10, 10\}$ . Establezca  $i = 2$ , y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_2 = \{3, 5\}$ .
- Paso 3.**  $k = 3$  y  $a_3 = c_{23} = 40$ . Etiquete el nodo 3 con  $[40, 2]$ . Designe  $i = 3$  y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_3 = \{4\}$  (observe que  $c_{35} = 0$ , de ahí que el nodo 5 no pueda incluirse en  $S_3$ ).
- Paso 3.**  $k = 4$  y  $a_4 = c_{34} = 10$ . Etiquete el nodo 4 con  $[10, 3]$ . Establezca  $i = 4$ , y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_4 = \{5\}$  (observe que los nodos 1 y 3 ya están etiquetados, por lo tanto, no pueden incluirse en  $S_4$ ).
- Paso 3.**  $k = 5$  y  $a_5 = c_{45} = 20$ . Etiquete el nodo 5 con  $[20, 4]$ . Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.
- Paso 5.**  $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $f_2 = \text{mín} \{\infty, 20, 40, 10, 20\} = 10$ . Los residuos a lo largo de la ruta de  $N_2$  son

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10, 0 + 10) = (30, 10)$$

$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0, 15)$$

$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

**Iteración 3.**

- Paso 1.** Establezca  $a_1 = \infty$ , y etiquete el nodo 1 con  $[\infty, -]$ . Establezca  $i = 1$ .
- Paso 2.**  $S_1 = \{2, 3, 4\}$ .
- Paso 3.**  $k = 2$  y  $a_2 = c_{12} = \text{máx} \{10, 10, 10\}$ . (Aunque los empates se rompen arbitrariamente, TORA siempre selecciona el nodo empatado con el índice menor. Utilizaremos esta convención a lo largo del ejemplo.) Etiquete el nodo 2 con  $[10, 1]$ . Haga  $i = 2$ , y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_2 = \{3, 5\}$ .
- Paso 3.**  $k = 3$  y  $a_3 = c_{23} = 30$ . Etiquete el nodo 3 con  $[30, 2]$ . Establezca  $i = 3$ , y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_3 = \emptyset$  (porque  $c_{34} = c_{35} = 0$ ). Vaya al paso 4 para retroceder.
- Paso 4.** *Retroceso.* La etiqueta  $[30, 2]$  en el nodo 3 da el nodo inmediatamente anterior  $r = 2$ . Elimine el nodo 3 tachándolo para ya no considerarlo *en esta iteración*. Establezca  $i = r = 2$ , y repita el paso 2.
- Paso 2.**  $S_2 = \{5\}$  (observe que el nodo 3 se eliminó en el paso de retroceso).
- Paso 3.**  $k = 5$  y  $a_5 = c_{25} = 30$ . Etiquete el nodo 5 con  $[30, 2]$ . Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.
- Paso 5.**  $N_2 = \{1, 2, 5\}$  y  $c_5 = \text{mín} \{\infty, 10, 30\} = 10$ . Los residuos a lo largo de la ruta de  $N_3$  son

$$(c_{12}, c_{21}) = (10 - 10, 10 + 10) = (0, 20)$$

$$(c_{25}, c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20, 10)$$

**Iteración 4.**

Esta iteración da  $N_4 = \{1, 3, 2, 5\}$  con  $f_4 = 10$  (¡compruébelo!).

**Iteración 5.**

Esta iteración da por resultado  $N_5 = \{1,4,5\}$  con  $f_5 = 10$  (¡compruébelo!).

**Iteración 6.**

Todos los arcos que parten del nodo 1 tienen residuos cero. Por lo tanto, no son posibles más rutas de avance. Procedemos al paso 6 para determinar la solución.

**Paso 6.** El flujo máximo en la red es  $F = f_1 + f_2 + \dots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$  unidades. El flujo en los arcos individuales se calcula restando los últimos residuos  $(c_{ij}, c_{ji})$  en la iteración 6 de las capacidades de diseño  $(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji})$ , como lo muestra la siguiente tabla.

Arco	$(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	Cantidad de flujo	Dirección
(1,2)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	1 → 2
(1,3)	$(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)$	30	1 → 3
(1,4)	$(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)$	10	1 → 4
(2,3)	$(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)$	0	—
(2,5)	$(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)$	20	2 → 5
(3,4)	$(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)$	10	3 → 4
(3,5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	3 → 5
(4,3)	$(5, 10) - (15, 0) = (-10, 10)$	0	—
(4,5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	4 → 5

**Momento de TORA**

Podemos utilizar TORA para resolver el modelo de flujo máximo en un modo automático una iteración a la vez. Seleccione el menú SOLVE/MODIFY y la opción Solve Problem. Después de especificar el formato de salida, vaya a la pantalla de resultados y seleccione la opción Maximum Flows o Iterations. El archivo *toraEx6.4-2.txt* contiene los datos para el ejemplo 6.4-2.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4B**

- \*1. En el ejemplo 6.4-2.
  - (a) Determine las capacidades excedentes para todos los arcos.
  - (b) Determine la cantidad de flujo a través de los nodos 2, 3, y 4.
  - (c) ¿Puede incrementarse el flujo a través de la red si se aumentan las capacidades en las direcciones 3 → 5 y 4 → 5?
2. Determine el flujo máximo y el flujo óptimo en cada arco para la red de la figura 6.31.
3. Tres refineras envían un producto de gasolina a dos terminales de distribución a través de una red de oleoductos. Cualquier demanda que no puede ser satisfecha por medio de

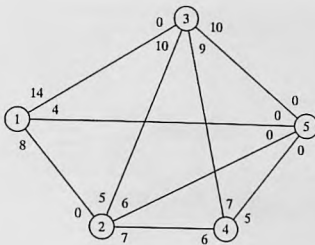


FIGURA 6.31

Red para el problema 2, conjunto 6.4b

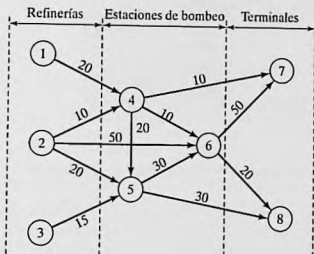


FIGURA 6.32

Red para el problema 3, conjunto 6.4b

la red se adquiere de otras fuentes. Tres estaciones de bombeo le dan servicio a la red, como se muestra en la figura 6.32. El producto fluye en la red en la dirección indicada por las flechas. La capacidad de cada segmento de ducto (mostrada directamente en los arcos) está en millones de barriles por día. Determine lo siguiente:

- (a) La producción diaria que iguala la capacidad máxima de la red.
  - (b) La demanda diaria en cada terminal que iguala la capacidad máxima de la red.
  - (c) La capacidad diaria de cada bomba que iguala la capacidad máxima de la red.
4. Suponga que la capacidad diaria máxima de la bomba 6 en la red de la figura 6.33 está limitada a 50 millones de barriles por día. Remodele la red para incluir esta restricción. Luego determine la capacidad máxima de la red.
  5. Se transporta alimento para gallinas por medio de camiones desde tres silos hasta cuatro granjas. Algunos de los silos no pueden mandar los envíos directamente a algunas de las granjas. Las capacidades de las demás rutas están limitadas por la cantidad de camiones

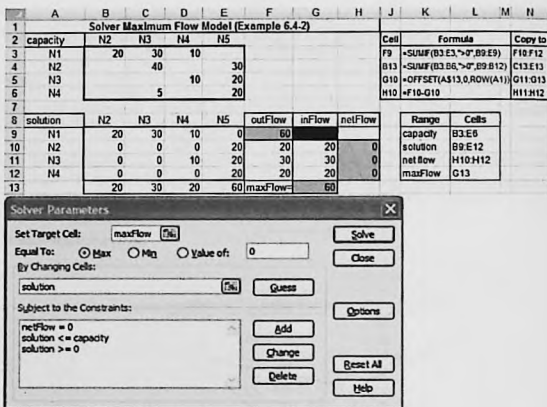


FIGURA 6.33

Solución obtenida con Excel Solver del modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx4.2.xls*)

disponibles y el número de viajes realizados diariamente. La siguiente tabla muestra las cantidades diarias de abasto en los silos y la demanda en las granjas (en miles de libras). Las entradas en las celdas de la tabla especifican las capacidades diarias de las rutas asociadas.

		Granja				
		1	2	3	4	
Silo	1	30	5	0	40	20
	2	0	0	5	90	20
	3	100	40	30	40	200
		200	10	60	20	

- (a) Determine el programa que satisface la demanda máxima.
- (b) ¿Satisfará el programa propuesto toda la demanda de la granja?
6. En el problema 5, suponga que se permite el transbordo entre los silos 1 y 2 y los silos 2 y 3. Suponga además que se permite el transbordo entre las granjas 1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4. La capacidad diaria en dos direcciones máxima en las rutas de transbordo propuestas es de 50 (mil) lb. ¿Cuál es el efecto del transbordo en las demandas no satisfechas en las granjas?
- \*7. Un padre tiene cinco hijos (adolescentes) y cinco tareas domésticas que encomendarles. La experiencia pasada ha demostrado que obligar a un hijo a que realice una tarea es contraproducente. Con esto en mente, el padre les pide a sus hijos que enumeren sus preferencias entre las cinco tareas, como lo muestra la siguiente tabla:

Hijo	Tarea preferida
Rif	3, 4 o 5
Mai	1
Ben	1 o 2
Kim	1, 2 o 5
Ken	2

El objetivo del padre ahora es terminar la mayor parte posible de tareas, al tiempo que respeta las preferencias de sus hijos.

8. Cuatro fábricas producen cuatro tipos de juguetes. La siguiente tabla da una lista de los juguetes que cada fábrica puede producir.

Fábrica	Combinación de producciones de juguetes
1	1, 2, 3
2	2, 3
3	1, 4
4	3, 4

Todos los juguetes requieren de alguna manera la misma mano de obra y material por unidad. Las capacidades diarias de las cuatro fábricas son de 250, 180, 300 y 100 juguetes, respectivamente. Las demandas diarias de los cuatro juguetes son 200, 150, 350 y 100 unidades, respectivamente. Determine los programas de producción de las fábricas que más satisfarán las demandas de los cuatro juguetes.

9. El consejo académico en la Universidad de Arkansas está buscando representantes entre seis estudiantes que estén afiliados a sociedades honoríficas. La representación ante el consejo académico incluye tres áreas: matemáticas, arte e ingeniería. Cuando mucho dos estudiantes de cada área pueden estar en el consejo. La siguiente tabla muestra la membresía de los seis estudiantes en las cuatro sociedades honoríficas:

Sociedad	Estudiantes afiliados
1	1, 2, 3
2	1, 3, 5
3	3, 4, 5
4	1, 2, 4, 6

Los estudiantes calificados en las áreas de matemáticas, arte e ingeniería se muestran en la siguiente tabla:

Área	Estudiantes calificados
Matemáticas	1, 2, 4
Arte	3, 4
Ingeniería	4, 5, 6

Un estudiante capacitado en más de un área debe ser asignado exclusivamente a sólo un área. ¿Pueden estar representadas las cuatro sociedades honoríficas en el consejo?

10. **Flujo máximo/mínimo en redes con límites inferiores.** El algoritmo de flujo máximo dado en esta sección asume que todos los arcos tienen límites inferiores de cero. En algunos modelos los límites inferiores pueden ser estrictamente positivos, y podemos estar interesados en determinar el flujo máximo o mínimo en la red (vea el caso 6-3 en el apéndice E). La presencia del límite inferior plantea una dificultad porque puede que la red no tenga un flujo factible en absoluto. El objetivo de este ejercicio es demostrar que cualquier modelo de flujo máximo o mínimo con límites inferiores positivos puede ser resuelto siguiendo dos pasos.

**Paso 1.** Determine una solución factible para la red con límites inferiores positivos.

**Paso 2.** Con la solución factible del paso 1, determine el flujo máximo o mínimo en la red original.

- (a) Demuestre que un arco  $(i, j)$  con flujo limitado por  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  puede estar representado de forma equivalente por un *sumidero* con demanda mínima  $l_{ij}$  en el nodo  $i$  y una *fuentes* con abasto  $l_{ij}$  en el nodo  $j$  con flujo limitado por  $0 \leq u_{ij} - l_{ij}$ .
- (b) Demuestre que hallar una solución factible para la red original equivale a determinar el flujo máximo  $x'_{ij}$  en la red después de (1) modificar los límites en  $x_{ij}$  a  $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$ , (2) “concentrar” todas las fuentes resultantes en una súper fuente con capacidades de arco salientes  $l_{ij}$ , (3) “concentrar” todos los sumideros resultantes en un súper sumidero con capacidades de arco entrantes  $l_{ij}$ , y (4) conectar el nodo terminal  $t$  al nodo fuente  $s$  en la red original mediante un arco de capacidad infinita de retorno. Existe una solución factible si el flujo máximo en la nueva red es igual a la suma de los límites inferiores en la red original. Aplique el procedimiento a la siguiente red y encuentre una solución de flujo factible:

Arco $(i, j)$	$(l_{ij}, u_{ij})$
(1, 2)	(5, 20)
(1, 3)	(0, 15)
(2, 3)	(4, 10)
(2, 4)	(3, 15)
(3, 4)	(0, 20)

- (c) Use la solución factible de la red en (b) junto con el algoritmo de flujo máximo para determinar el flujo *mínimo* en la red original. (*Sugerencia:* Primero calcule la red residuo dada la solución factible inicial. Luego determine el flujo máximo *del nodo final al nodo inicial*. Esto equivale a determinar el flujo máximo que se debe cancelar del nodo inicial al nodo final. Ahora, combinando las soluciones factible y de flujo máximo se obtiene el flujo mínimo en la red original.)
- (d) Use la solución factible de la red en (b) junto con el modelo de *flujo máximo* para determinar el flujo máximo en la red original. (*Sugerencia:* Como en (c), inicie con la red residuo. Luego aplique el algoritmo de avance a la red residuo resultante, exactamente como en el modelo de flujo máximo regular.)

### 6.4.3 Formulación de programación lineal en el modo de flujo máximo

Defina  $x_{ij}$  como la cantidad de flujo en el arco  $(i, j)$  con capacidad  $C_{ij}$ . El objetivo es determinar  $x_{ij}$  para toda  $i$  y  $j$  que maximice el flujo entre el nodo de inicio  $s$  y el nodo terminal  $t$  sujeto a restricciones de flujo (flujo de entrada = flujo de salida) en todos excepto en los nodos  $s$  y  $t$ .

**Ejemplo 6.4-3**

En el modelo de flujo máximo de la figura 6.30 (ejemplo 6.4-2),  $s = 1$  y  $t = 5$ . La siguiente tabla resume la PL asociada con dos funciones objetivo diferentes, pero equivalentes, según si maximizamos la salida del modo de inicio 1 ( $= z_1$ ) o la entrada al nodo terminal 5 ( $= z_2$ ).

	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{23}$	$x_{25}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{43}$	$x_{45}$
Maximizar $z_1 =$	1	1	1						
Maximizar $z_2 =$					1		1		1
Nodo 2	1			- 1	- 1				= 0
Nodo 3		1		1		- 1	- 1	1	= 0
Nodo 4			1			1		- 1	- 1 = 0
Capacidad	20	30	10	40	30	10	20	5	20

La solución óptima utilizando una u otra función objetiva es

$$x_{12} = 20, x_{13} = 30, x_{14} = 10, x_{25} = 20, x_{34} = 10, x_{35} = 20, x_{45} = 20$$

El flujo máximo asociado es  $z_1 = z_2 = 60$ .

**Momento de Solver**

La figura 6.33 proporciona el modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx6.4-2.xls*). La idea general es parecida a la del modelo de la ruta más corta, que se detalla siguiendo el ejemplo 6.3-6. Las diferencias principales incluyen las siguientes: (1) no hay ecuaciones de flujo para el nodo inicial 1 y el nodo final 5, y (2) el objetivo es maximizar el flujo de salida total en el nodo inicial 1 (F9) o, de forma equivalente, el flujo de entrada total en el nodo terminal 5 (G13). El archivo *solverEx6.4-2* utiliza G13 como celda objetivo. Trate de ejecutar el modelo con G13 reemplazando a F9.

**Momento de AMPL**

El archivo *amplEx6.4-2.txt* proporciona el modelo para el problema de flujo máximo entre cualquiera de los dos nodos en la red del ejemplo 6.4-2. El modelo se aplica a cualquier cantidad de nodos. La explicación del modelo se detalla en la sección C.9 en el sitio web.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4C**

1. Modele cada uno de los siguientes problemas como un programa lineal, luego resuélvalo utilizando Solver o AMPL.
  - (a) Problema 2, conjunto 6.4b.
  - (b) Problema 5, conjunto 6.4b.
  - (c) Problema 9, conjunto 6.4b.

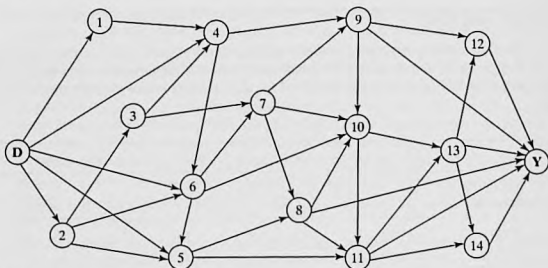


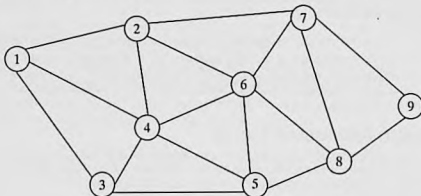
FIGURA 6.34

Red para el problema 2, conjunto 6.4c

2. Jim vive en Denver, Colorado, y le gusta pasar sus vacaciones anuales en el Parque Nacional de Yellowstone en Wyoming. Por ser un amante de la naturaleza, Jim toma una ruta escénica diferente cada año. Después de consultar los mapas apropiados, Jim representó sus rutas preferidas entre Denver (D) y Yellowstone (Y) por medio de la red de la figura 6.34. Los nodos 1 a 14 representan ciudades intermedias. Aunque la distancia de manejo no es un factor, la estipulación de Jim es que las rutas seleccionadas entre D y Y no incluyan ciudades comunes. Determine (por medio de AMPL o Solver) todas las rutas distintas disponibles para Jim. (*Sugerencia:* Modifique el modelo de programación lineal de flujo máximo para determinar el máximo de rutas únicas entre D y Y.)
3. (Guéret and Associates, 2002, sección 12.1) En la figura 6.35 se aparece un sistema de telecomunicación militar que conecta 9 sitios. Los sitios 4 y 7 deben continuar comunicándose

FIGURA 6.35

Red para el problema 3, conjunto 6.4c



se incluso si otros tres sitios son destruidos por acciones enemigas. ¿Satisface este requisito la red de comunicaciones actual? Utilice AMPL y Solver para resolver el problema.

## 6.5 CPM Y PERT

El método de la ruta crítica (CPM, por sus siglas en inglés) y la técnica de evaluación y revisión de programas (PERT, por sus siglas en inglés) son métodos basados en redes diseñados para ayudar a planificar, programar y controlar proyectos. Un proyecto se define como un conjunto de actividades interrelacionadas donde cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo de CPM y PERT es idear herramientas analíticas para programar las actividades. La figura 6.36 resume los pasos de las técnicas. Primero definimos las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y sus requerimientos de tiempo. Luego se modelan las relaciones de precedencia entre las actividades como una red. El tercer paso implica cálculos específicos para desarrollar el cronograma. Durante la fase de ejecución real, es posible que la ejecución de las actividades no discorra como se planeó, en el sentido de que algunas de las actividades pueden ser despachadas o demoradas. Cuando esto sucede, el programa se actualiza para reflejar las realidades en el terreno. Ésta es la razón por la que se incluye un bucle de retroalimentación en la figura 6.36.

Las dos técnicas, CPM y PERT, se desarrollaron de forma independiente. Difieren en que CPM asume duraciones de actividad determinísticas y PERT supone duraciones probabilísticas.

### 6.5.1 Representación en forma de red

Cada actividad está representada por un arco que apunta en la dirección del avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades. Se dispone de tres reglas para construir la red.

**Regla 1.** Cada actividad está representada por uno, y sólo un arco.

**Regla 2.** Cada actividad debe estar identificada por dos nodos terminales distintos.

La figura 6.37 muestra cómo puede usarse una **actividad ficticia** para representar de forma única dos actividades concurrentes, *A* y *B*. Por definición, una actividad ficticia (representada por líneas de rayas) no consume tiempo ni recursos. La inserción de

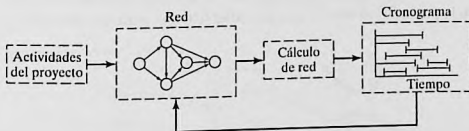


FIGURA 6.36

Fases para la planificación de un proyecto con CMP-PERT

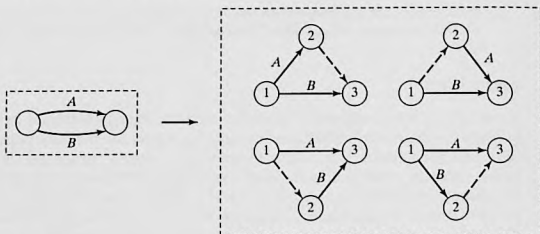


FIGURA 6.37

Uso de una actividad ficticia para representar de forma única actividades concurrentes

una actividad ficticia en una de las cuatro maneras mostradas en la figura 6.37 mantiene la concurrencia de *A* y *B* y proporciona nodos terminales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

**Regla 3.** Para mantener las relaciones de precedencia correctas, hay que contestar las siguientes preguntas a medida que se agrega cada actividad a la red.

- ¿Qué actividades preceden inmediatamente a la actividad actual?
- ¿Qué actividades siguen inmediatamente a la actividad actual?
- ¿Qué actividades son concurrentes con la actividad actual?

Las respuestas a estas preguntas pueden requerir el uso de actividades ficticias para garantizar la precedencia correcta entre las actividades. Por ejemplo, considere el siguiente segmento de un proyecto:

- La actividad *C* se inicia inmediatamente después de que las actividades *A* y *B* se han completado.
- La actividad *E* puede iniciarse después de que se complete la actividad *B*.

La parte (a) de la figura 6.38 muestra la representación incorrecta de la relación de precedencia porque requiere que *A* y *B* se completen antes de que *E* pueda iniciarse. En la parte (b), el uso de una actividad ficticia rectifica la situación.

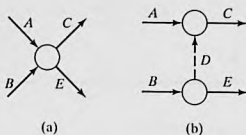


FIGURA 6.38

Uso de una actividad ficticia para garantizar la relación de precedencia correcta

**Ejemplo 6.5-1**

Un editor firmó un contrato con un autor para publicar un libro de texto. El autor somete a consideración una copia impresa de un archivo de computadora del manuscrito. Las actividades (simplificadas) asociadas con la producción del libro de texto se resumen en la siguiente tabla.

Actividad	Precesora(s)	Duración (semanas)
A: Corrección del manuscrito, por parte del editor	—	3
B: Preparación de páginas muestra	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las ilustraciones	—	3
E: Aprobación del manuscrito editado y de páginas muestra, por parte del autor	A, B	2
F: Formación del libro	E	4
G: Revisión de las páginas formadas, por parte del autor	F	2
H: Revisión de las ilustraciones por el autor	D	1
I: Producción de las placas de impresión	G, H	2
J: Producción y encuadernación del libro	C, I	4

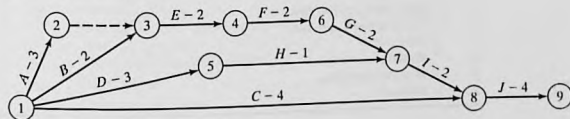
La figura 6.39 proporciona la red del proyecto. Una actividad ficticia (2,3) produce nodos terminales únicos para las actividades concurrentes A y B. Conviene numerar los nodos en orden ascendente en la dirección de avance del proyecto.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5A**

- Construya la red del proyecto compuesta de las actividades A a L, con las siguientes relaciones de precedencia:
  - A, B y C, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
  - A y B preceden a D.
  - B precede a E, F y H.
  - F y C preceden a G.
  - E y H preceden a I y J.
  - C, D, F y J preceden a K.
  - K precede a L.
  - I, G y L son las actividades terminales del proyecto.

FIGURA 6.39

Red del proyecto para el ejemplo 6.5-1



2. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades  $A$  a  $P$  que satisfaga las siguientes relaciones de precedencia:
- $A$ ,  $B$  y  $C$ , las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
  - $D$ ,  $E$  y  $F$  vienen después de  $A$ .
  - $I$  y  $G$  vienen después de  $B$  y  $D$ .
  - $H$  viene después de  $C$  y  $G$ .
  - $K$  y  $L$  vienen después de  $I$ .
  - $J$  viene después de  $E$  y  $H$ .
  - $M$  y  $N$  vienen después de  $F$ , pero no pueden iniciarse hasta que  $E$  y  $H$  se completen.
  - $O$  viene después de  $M$  e  $I$ .
  - $P$  viene después de  $J$ ,  $L$  y  $O$ .
  - $K$ ,  $N$  y  $P$  son las actividades terminales del proyecto.
- \*3. Los cimientos de un edificio pueden completarse en cuatro secciones consecutivas. Las actividades de cada sección incluyen (1) cavar; (2) colocar el acero, y (3) verter el concreto. El cavado de una sección no puede iniciarse hasta que se haya completado el de la sección precedente. La misma restricción se aplica al vertido del concreto. Desarrolle la red del proyecto.
4. En el problema 3, suponga que 10% del trabajo de plomería puede iniciarse al mismo tiempo del cavado de la primera sección, pero antes de verter el concreto. Después de que se completa cada una de las secciones de los cimientos, puede iniciarse un 5% adicional de la plomería, siempre que se termine el 5% precedente. La plomería restante puede completarse al final del proyecto. Construya la red del proyecto.
5. Una encuesta de opinión implica diseñar e imprimir cuestionarios, contratar y capacitar personal, seleccionar a los participantes, enviar por correo los cuestionarios, y analizar los datos. Construya la red del proyecto, mencionando todos los supuestos.
6. Las actividades en la siguiente tabla describen la construcción de una casa nueva. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Limpiar el terreno	—	1
B:	Llevar los servicios al terreno	—	2
C:	Excavar	A	1
D:	Colar los cimientos	C	2
E:	Plomería externa	B, C	6
F:	Armar la estructura de la casa	D	10
G:	Instalar el cableado eléctrico	F	3
H:	Colocar el piso	G	1
I:	Colocar el techo	F	1
J:	Plomería interior	E, H	5
K:	Colocar tejas	I	2
L:	Recubrimiento aislante exterior	F, J	1
M:	Instalar ventanas y puertas externas	F	2
N:	Enladrillar	L, M	4
O:	Aislar muros y cielo raso	G, J	2
P:	Cubrir muros y cielo raso	O	2
Q:	Aislar techo	I, P	1
R:	Terminar interiores	P	7
S:	Terminar exteriores	I, N	7
T:	Jardinería	S	3

7. Una compañía está preparando un presupuesto para lanzar un nuevo producto. La siguiente tabla muestra las actividades asociadas y su duración. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Pronosticar volumen de ventas	—	10
B:	Estudiar el mercado competitivo	—	7
C:	Diseñar artículo e instalaciones	A	5
D:	Preparar el programa de producción	C	3
E:	Estimar el costo de la producción	D	2
F:	Fijar precio de venta	B, E	1
G:	Preparar presupuesto	E, F	14

8. Las actividades implicadas en un servicio coral a la luz de las velas se dan en la siguiente tabla. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Seleccionar la música	—	2
B:	Aprenderse la música	A	14
C:	Sacar copias y comprar libros	A	14
D:	Audiciones	B, C	3
E:	Ensayos	D	70
F:	Rentar candelabros	D	14
G:	Decorar los candelabros	F	1
H:	Instalar las decoraciones	D	1
I:	Pedir atuendos para el coro	D	7
J:	Verificar el sistema de sonido	D	7
K:	Seleccionar las pistas de música	J	14
L:	Instalar el sistema de sonido	K	1
M:	Ensayo final	E, G, L	1
N:	Reunión del coro	H, L, M	1
O:	Programa final	I, N	1

9. La ampliación de una sección de una carretera requiere recolocar ("reconducir") 1700 pies de una línea de transmisión primaria elevada de 13.8 kV. La siguiente tabla resume las actividades del proyecto. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Revisión del trabajo	—	1
B:	Avisar a los clientes del corte temporal de corriente	A	$\frac{1}{2}$
C:	Tiendas de requisición	A	1
D:	Explorar el trabajo	A	$\frac{1}{2}$
E:	Asegurar los postes y materiales	C, D	3
F:	Distribuir los postes	E	$3\frac{1}{2}$
G:	Coordinar la ubicación de postes	D	$\frac{1}{2}$
H:	Clavar estacas	G	$\frac{1}{2}$
I:	Cavar agujeros	H	3

Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
<i>J</i> : Colocar los postes	<i>F, I</i>	4
<i>K</i> : Cubrir los conductores viejos	<i>F, I</i>	1
<i>L</i> : Halar los conductores nuevos	<i>J, K</i>	2
<i>M</i> : Instalar el material restante	<i>L</i>	2
<i>N</i> : Deflexión de cable	<i>L</i>	2
<i>O</i> : Podar árboles	<i>D</i>	2
<i>P</i> : Reconectar la energía y conmutar líneas	<i>B, M, N, O</i>	$\frac{1}{10}$
<i>Q</i> : Energizar y conmutar la nueva línea	<i>P</i>	$\frac{1}{2}$
<i>R</i> : Limpiar	<i>Q</i>	1
<i>S</i> : Retirar los conductores viejos	<i>Q</i>	1
<i>T</i> : Retirar los postes viejos	<i>S</i>	2
<i>U</i> : Regresar el material a las tiendas	<i>R, T</i>	2

10. La siguiente tabla presenta las actividades para adquirir un automóvil nuevo. Construya la red del proyecto.

Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
<i>A</i> : Realizar estudio de factibilidad	—	3
<i>B</i> : Encontrar un comprador potencial para el automóvil actual	<i>A</i>	14
<i>C</i> : Poner en lista los posibles modelos	<i>A</i>	1
<i>D</i> : Entrevistarse con el mecánico	<i>C</i>	3
<i>E</i> : Reunir publicidad del concesionario	<i>C</i>	1
<i>F</i> : Compilar los datos pertinentes	<i>C</i>	2
<i>G</i> : Completar los datos pertinentes	<i>D, E, F</i>	1
<i>H</i> : Escoger tres modelos	<i>G</i>	1
<i>I</i> : Realizar prueba de manejo de las tres opciones	<i>H</i>	3
<i>J</i> : Conseguir garantía y datos de financiamiento	<i>H</i>	2
<i>K</i> : Escoger un automóvil	<i>I, J</i>	2
<i>L</i> : Elegir el concesionario	<i>K</i>	2
<i>M</i> : Buscar el color y opciones deseadas	<i>L</i>	4
<i>N</i> : Realizar prueba de manejo del modelo una vez más	<i>L</i>	1
<i>O</i> : Comprar el automóvil nuevo	<i>B, M, N</i>	3

### 6.5.2 Cálculos del método de la ruta crítica (CPM)

El resultado final en el CPM es un cronograma para el proyecto (vea la figura 6.36). Para lograr este objetivo se realizan cálculos especiales para obtener la siguiente información:

1. Duración total necesaria para completar el proyecto.
2. Clasificación de las actividades del proyecto como *críticas* o *no críticas*.

Una actividad es **crítica** si sus tiempos de inicio y terminación están predeterminados (fijos). Una actividad es **no crítica** si puede ser programada en un espacio de tiempo mayor que su duración, lo que permite tiempos de inicio y terminación flexibles (dentro de los límites). Una demora en el tiempo de inicio de una actividad crítica definitivamente retrasa la terminación del proyecto, en tanto que una demora en una actividad no crítica quizá no afecte la fecha de terminación del proyecto.

Para realizar los cálculos necesarios, definimos un **evento** como un punto en el tiempo en el cual se completan las actividades y se inician las subsiguientes. En función de la red, un evento corresponde a un nodo. Sean

$\square_j$  = Tiempo de ocurrencia más temprano del evento  $j$

$\Delta_j$  = Tiempo de ocurrencia más tardío del evento  $j$

$D_{ij}$  = Duración de la actividad  $(i,j)$

Todos los tiempos de ocurrencia se miden a partir del inicio del proyecto. El lapso  $(\square_j, \Delta_j)$  define el periodo de tiempo durante el cual se programa la actividad  $(i,j)$  de duración  $D_{ij}$ . Si la actividad  $(i,j)$  es crítica, entonces  $D_{ij} = \Delta_j - \square_j$ . De lo contrario,  $D_{ij} < \Delta_j - \square_j$  para la actividad no crítica  $(i,j)$ .

Los cálculos de la ruta crítica implican dos pasos: El **paso adelantado** determina los tiempos de ocurrencia *más tempranos* de los eventos y el **paso retrasado** calcula sus tiempos de ocurrencia *mas tardíos*.

**Paso adelantado (tiempos de ocurrencia más tempranos,  $\square$ ).** Los cálculos se inician en el nodo 1 y avanzan recursivamente hacia el nodo  $n$ .

**Paso inicial.** Establezca  $\square_j = 0$  para indicar que el proyecto se inicia en el tiempo 0.

**Paso general  $j$ .** Dado que los nodos  $p, q, \dots$  y  $v$  están vinculados directamente al nodo  $j$  por las actividades entrantes  $(p,j)$ ,  $(q,j)$ , ..., y  $(v,j)$  y que los tiempos de ocurrencia más temprano de los eventos (nodos)  $p, q, \dots$ , y  $v$  ya se calcularon, entonces el tiempo más temprano de ocurrencia del evento  $j$  se calcula como

$$\square_j = \text{máx} \{ \square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \dots, \square_v + D_{vj} \}$$

El paso adelantado se completa cuando se ha calculado  $\square_j$  en el nodo  $n$ . Por definición,  $\square_j$  es la ruta más larga (duración) al nodo  $j$ .

**Paso retrasado (tiempos de ocurrencia más tardíos,  $\Delta$ ).** Los cálculos del paso retrasado se inician en el nodo  $n$  y terminan en el nodo 1.

**Paso inicial.** Establezca  $\Delta_n = \square_n$  para indicar que las ocurrencias más tardías del último nodo son iguales a la duración del proyecto.

**Paso general  $j$ .** Dado que los nodos  $p, q, \dots$ , y  $v$  están vinculados *directamente* al nodo  $j$  por las actividades *salientes*  $(j,p)$ ,  $(j,q)$ , ..., y  $(j,v)$  y que los tiempos de ocurrencia más tardíos de los nodos  $p, q, \dots$ , y  $v$  ya se calcularon, el tiempo de ocurrencia más tardío del nodo  $j$  se calcula como

$$\Delta_j = \text{mín} \{ \Delta_p - D_{jp}, \Delta_q - D_{jq}, \dots, \Delta_v - D_{jv} \}$$

El paso retrasado termina con  $\Delta_1 = 0$  en el nodo 1.

Con base en los cálculos anteriores, una actividad  $(i,j)$  será crítica si satisface tres condiciones.

1.  $\Delta_i = \square_i$
2.  $\Delta_j = \square_j$
3.  $\Delta_j - \square_i = D_{ij}$

Las tres condiciones establecen que los tiempos de ocurrencia más tempranos y más tardíos de los nodos finales  $i$  y  $j$  son iguales y que la duración  $D_{ij}$  encaja "perfectamente" en el espacio de tiempo especificado. Una condición que no satisface las tres condiciones es *no crítica*.

Por definición, las actividades críticas de una red constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto desde el inicio hasta la terminación.

### Ejemplo 6.5-2

Determine la ruta crítica para la red del proyecto que se muestra en la figura 6.40. Todas las duraciones están en días.

#### Paso adelantado

**Nodo 1.** Establezca  $\square_1 = 0$

**Nodo 2.**  $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

**Nodo 3.**  $\square_3 = \max\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \max\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$

**Nodo 4.**  $\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$

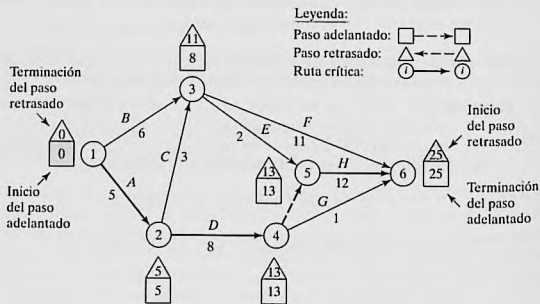
**Nodo 5.**  $\square_5 = \max\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \max\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$

**Nodo 6.**  $\square_6 = \max\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\}$   
 $= \max\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$

Los cálculos muestran que el proyecto puede completarse en 25 días.

FIGURA 6.40

Cálculos de paso adelantado y paso retrasado para el proyecto del ejemplo 6.5-2



**Paso retrasado**

**Nodo 6.** Establezca  $\Delta_6 = \square_6 = 25$

**Nodo 5.**  $\Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$

**Nodo 4.**  $\Delta_4 = \min \{ \Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45} \} = \min \{ 25 - 1, 13 - 0 \} = 13$

**Nodo 3.**  $\Delta_3 = \min \{ \Delta_6 - D_{36}, \Delta_5 - D_{35} \} = \min \{ 25 - 11, 13 - 2 \} = 11$

**Nodo 2.**  $\Delta_2 = \min \{ \Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23} \} = \min \{ 13 - 8, 11 - 3 \} = 5$

**Nodo 1.**  $\Delta_1 = \min \{ \Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_{12} \} = \min \{ 11 - 6, 5 - 5 \} = 0$

Los cálculos correctos siempre terminarán con  $\Delta_1 = 0$ . Los cálculos pueden hacerse directamente en la red como se muestra en la figura 6.40.

Aplicando las reglas para determinar las actividades críticas, la ruta crítica es  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ , la cual, como se esperaba, abarca la red desde el inicio (nodo 1) hasta la terminación (nodo 6). La suma de las duraciones de las actividades críticas [(1,2), (2,4), (4,5) y (5,6)] es igual a la duración del proyecto (= 25 días). Observe que la actividad (4,6) satisface las dos primeras condiciones para una actividad crítica ( $\Delta_4 = \square_4 = 13$ ) y ( $\Delta_6 = \square_6 = 25$ ) pero no la tercera ( $\Delta_6 - \square_4 \neq D_{46}$ ). De ahí que la actividad es no crítica.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5B**

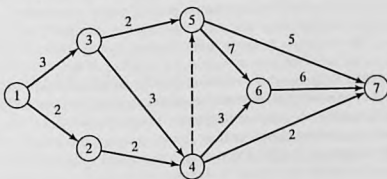
- \*1. Determine la ruta crítica para la red de proyecto de la figura 6.41.
2. Determine la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.42.
3. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6, conjunto 6.5a.
4. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 8, conjunto 6.5a.
5. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 9, conjunto 6.5a.
6. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 10, conjunto 6.5a.

**6.5.3 Construcción del cronograma**

Esta sección muestra cómo puede usarse la información obtenida a partir de los cálculos en la sección 6.5.2 para el desarrollo del cronograma. Reconocemos que para una

FIGURA 6.41

Red del proyecto para el problema 1, conjunto 6.5b



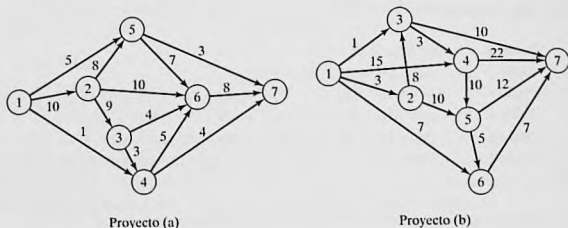


FIGURA 6.42  
Redes del proyecto para el problema 2, conjunto 6.5

actividad  $(i, j)$ ,  $\square_i$  representa el tiempo de inicio más temprano, y  $\Delta_j$  representa el tiempo de inicio más tardío. Por lo tanto, el intervalo  $(\square_i, \Delta_j)$  define el espacio de tiempo (máximo) durante el cual la actividad  $(i, j)$  puede programarse sin demorar todo el proyecto.

**Construcción de un programa preliminar.** El método para construir un programa preliminar se ilustra con un ejemplo.

### Ejemplo 6.5-3

Determine el cronograma para el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.40).

Podemos obtener un cronograma preliminar para las diferentes actividades del proyecto definiendo sus respectivos espacios de tiempo como se muestra en la figura 6.43.

1. Las actividades críticas (mostradas por las líneas sólidas) están escalonadas una justo después de la otra para garantizar que el proyecto se complete dentro de la duración especificada de 25 días.
2. Las actividades no críticas (mostradas por las líneas de rayas) tienen lapsos de tiempo permisibles mayores que sus respectivas duraciones, lo que permite una holgura (o "margen") al programarlas dentro de sus intervalos de tiempo asignados.

¿Cómo programamos las actividades no críticas dentro de sus respectivos espacios de tiempo? Normalmente, es preferible iniciar cada actividad no crítica lo más pronto posible. De esta manera los periodos de holgura restantes pueden usarse para compensar las demoras inesperadas en la actividad. Puede ser necesario, sin embargo, retrasar el inicio de una actividad no crítica más allá de su tiempo de inicio más temprano. Por ejemplo, en la figura 6.43, suponga que cada una de las actividades no críticas  $E$  y  $F$  requiere el uso de una excavadora y que sólo una está disponible. Programar tanto  $E$  como  $F$  tan pronto como sea posible, requiere dos excavadoras entre los tiempos 8 y 10. Podemos eliminar el traslape iniciando  $E$  en el tiempo 8 y moviendo el tiempo de inicio de  $F$  a alguna parte entre los tiempos 10 y 14.

Si todas las actividades no críticas pueden programarse lo más pronto posible, el programa resultante siempre es factible. De lo contrario, pueden violarse algunas relaciones de precedencia si las actividades no críticas se demoran más allá de su tiempo de inicio más temprano.

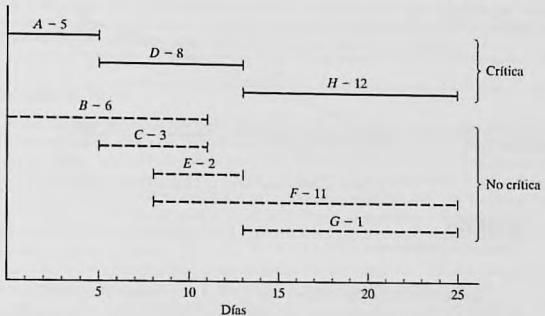


FIGURA 6.43

Cronograma preliminar para el proyecto del ejemplo 6.5-2

Considere, por ejemplo, las actividades  $C$  y  $E$  en la figura 6.43. En la red de proyecto (figura 6.40), aunque  $C$  debe completarse antes que  $E$ , los espacios de tiempo de  $C$  y  $E$  en la figura 6.43 permiten programar  $C$  entre los tiempos 6 y 9, y  $E$  entre los tiempos 8 y 10, lo cual viola el requisito de que  $C$  preceda a  $E$ . Por lo tanto, es evidente la necesidad de una “señal roja” que revele de forma automática el conflicto en el programa. Tal información se obtiene calculando los *flotantes* (también conocidos como holguras) para las actividades no críticas.

**Determinación de los flotantes.** Los flotantes son los tiempos de *holgura* disponibles dentro del espacio asignado de la actividad no crítica. Los tipos más comunes son el *flotante total* y el *flotante libre*.

La figura 6.44 da un resumen conveniente para calcular el flotante total ( $TF_{ij}$ ) y el flotante libre ( $FF_{ij}$ ) para una actividad  $(i, j)$ .

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$$

$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

Por definición  $FF_{ij} \leq TF_{ij}$ .

**Regla de la señalización roja.** Para una actividad no crítica  $(i, j)$ , si  $FF_{ij} < TF_{ij}$ , entonces su inicio puede demorarse en cuanto mucho  $FF_{ij}$ , con respecto a su tiempo de inicio más temprano  $\square_i$ , sin provocar un conflicto en el programa. Cualquier demora mayor que  $FF_{ij}$  (pero no mayor que  $TF_{ij}$ ) debe acoplarse con una demora igual (con respecto a  $\square_j$ ) en el tiempo de inicio de todas las actividades que salen del nodo  $j$ .

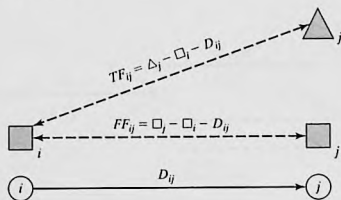


FIGURA 6.44  
Cálculo de los flotes total y libre

La implicación de la regla es que, si  $FF_{ij} = TF_{ij}$ , puede programarse una actividad no crítica  $(i,j)$  en cualquier parte del intervalo  $(\square_i, \Delta_j)$  sin provocar conflictos en el programa. De lo contrario, si  $FF_{ij} < TF_{ij}$ , la actividad  $(i,j)$  recibe una señal roja por la posibilidad de demorar el tiempo de inicio de las actividades que salen del nodo  $j$ .

#### Ejemplo 6.5-4

Calcule los flotes para las actividades no críticas de la red del ejemplo 6.5-2, y exponga su uso al finalizar un programa para el proyecto.

La siguiente tabla resume los cálculos de los flotes total y libre. Para cálculos manuales, conviene más realizar los cálculos directamente en la red siguiendo el procedimiento mostrado en la figura 6.40.

Actividad no crítica	Duración	Flotante total ( $TF_{ij}$ )	Flotante libre ( $FF_{ij}$ )
$B(1,3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
$C(2,3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
$E(3,5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
$F(3,6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
$G(4,6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Los cálculos ponen una señal roja en las actividades  $B$  y  $C$  porque su  $FF < TF$ . Las actividades restantes ( $E, F$  y  $G$ ) tienen  $FF = TF$  y por consiguiente pueden programarse en cualquier parte entre sus tiempos de terminación más tempranos y más tardíos.

Para investigar la importancia de las actividades marcadas con una señal roja, considere la actividad  $B$  con  $TF = 5$  días y  $FF = 2$  días. Esta actividad puede iniciarse en cualquier tiempo entre 0 y 2 (su  $FF$ ). Por otra parte, si  $B$  se inicia después del tiempo 2 hasta el tiempo 5 (su  $TF$ ), los tiempos de inicio de las actividades inmediatamente subsiguientes  $E$  y  $F$  deben moverse hacia adelante con respecto a su tiempo de inicio más temprano ( $= 8$ ) por al menos un periodo de demora igual.

En cuanto a la actividad *C* marcada con una señal roja, su *FF* cero significa que *cualquier* demora al iniciar *C* después de su tiempo de inicio más temprano (= 5) debe acoplarse con al menos una demora igual del tiempo de inicio de las actividades de su sucesor.

## Momento de TORA

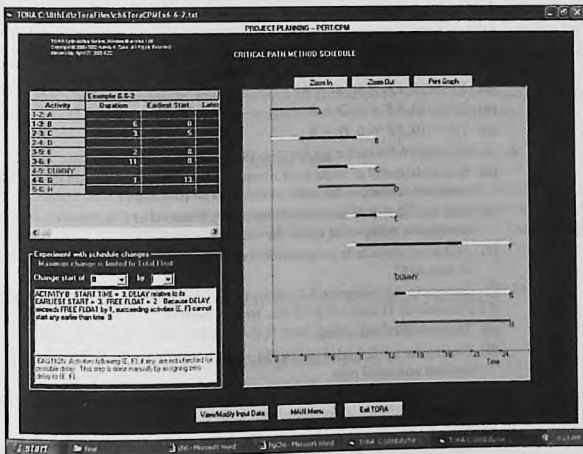
TORA incluye herramientas tutoriales útiles para cálculos de CPM y para construir el cronograma. Para utilizarlas seleccione las opciones Project Planning ⇒ CPM – Critical Path Method en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar CPM Calculations para producir cálculos paso a paso del paso adelantado, el paso retrasado, y los flotantes o la opción CPM Bar Chart para construir y experimentar con el cronograma.

El archivo *toraEx6.5-2* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-2. Si elige generar los resultados con la opción Next Step TORA lo guiará a través de los detalles de los cálculos de paso adelantado y paso retrasado.

La figura 6.45 proporciona el programa producido por la opción CPM Bar Chart de TORA para el proyecto del ejemplo 6.5-2. La gráfica de barras predeterminada programa de forma automática todas las actividades no críticas tan pronto como es posible. Así puede estudiar el

FIGURA 6.45

Resultados obtenidos con la opción “bar chart” de TORA para el ejemplo 6.5-2 (archivo *toraEx6.5-2.txt*)



impacto de demorar el tiempo de inicio de una actividad no crítica por medio de listas desplegables auto explicativas en el lado izquierdo de la pantalla. El impacto de demorar una actividad no crítica se mostrará directamente en la gráfica de barras junto con una explicación. Por ejemplo, si demora el inicio de la actividad  $B$  en más de 2 unidades de tiempo, las actividades subsiguientes  $E$  y  $F$  se demorarán en una cantidad igual a la diferencia entre la demora y el flotante libre de la actividad  $B$ . Específicamente, dado que el flotante libre de  $B$  es de 2 unidades de tiempo, si  $B$  se demora en 3 unidades de tiempo, entonces el inicio de  $E$  y  $F$  debe demorarse en al menos  $3 - 2 = 1$  unidad de tiempo. Esta situación se demuestra en la figura 6.45.

### Momento de AMPL

El archivo `amplEx6.52.txt` proporciona el modelo para la CPM. Los datos del ejemplo 6.5-2 controlan el modelo. Este modelo de AMPL es una aplicación única porque no es un problema de optimización. Los detalles del modelo se dan en el apéndice C.9 en el sitio web.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5C

- Dada una actividad  $(i, j)$  con duración  $D_{ij}$  y su tiempo de inicio más temprano  $\square_i$ , así como su tiempo de terminación más tardío  $\Delta_j$ , determine los tiempos de terminación más temprano y de inicio más tardío de  $(i, j)$ .
- ¿Cuáles son los flotantes total y libre de una actividad crítica? Explique.
- Para cada una de las siguientes actividades, determine la demora máxima del tiempo de inicio con respecto a su tiempo de inicio más temprano que permitirá que todas las actividades inmediatamente subsiguientes se programen en cualquier parte entre sus tiempos más temprano y más tardío de terminación.
  - $TF = 10, FF = 10, D = 4$
  - $TF = 10, FF = 5, D = 4$
  - $TF = 10, FF = 0, D = 4$
- En el ejemplo 6.5-4 utilice los flotantes para responder lo siguiente:
  - Si la actividad  $B$  se inicia en el tiempo 1 y la actividad  $C$  se inicia en el tiempo 5, determine los tiempos de inicio más tempranos para  $E$  y  $F$ .
  - Si la actividad  $B$  se inicia en el tiempo 3, y la actividad  $C$  se inicia en el tiempo 7, determine los tiempos de inicio más tempranos para  $E$  y  $F$ .
  - ¿Cómo se impacta la programación de otras actividades si la actividad  $B$  se inicia en el tiempo 6?
- En el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.42), suponga que la duración de las actividades  $B$  y  $F$  cambia de 11 días a 20 y 25 días, respectivamente.
  - Determine la ruta crítica.
  - Determine los flotantes total y libre para la red, e identifique las actividades marcadas con una señal roja.
  - Si la actividad  $A$  se inicia en el tiempo 5, determine los tiempos de inicio más tempranos posibles para las actividades  $C, D, E$  y  $G$ .
  - Si las actividades  $F, G$  y  $H$  requieren el mismo equipo, determine el mínimo de unidades necesarias de este equipo.
- Calcule los flotantes e identifique las actividades marcadas con una señal roja para los proyectos (a) y (b) de la figura 6.44; luego desarrolle los cronogramas en las siguientes condiciones:

**Proyecto (a)**

- (i) La actividad (1,5) no puede iniciarse antes que el tiempo 14.
- (ii) Las actividades (5,6) y (5,7) utilizan el mismo equipo, del cual sólo una unidad está disponible.
- (iii) Todas las demás actividades se inician lo más pronto posible.

**Proyecto (b)**

- (i) La actividad (1,3) debe programarse a su tiempo de inicio más temprano al mismo tiempo que se observa el requisito de que (1,2), (1,3) y (1,6) utilizan una pieza de equipo especial, de la cual sólo hay una (1) unidad disponible.
  - (ii) Todas las demás actividades se inician lo más pronto posible.
7. (*Programación de tareas en un taller*). Tres tareas, J1, J2 y J3 se procesan en 3 máquinas, M1, M2 y M3, de acuerdo con las siguientes secuencias (los tiempos de procesamiento se muestran entre paréntesis):

$$J1: M3(3) - M1(4) - M2(6)$$

$$J2: M2(1) - M3(5) - M2(9)$$

$$J3: M3(8) - M2(8) - M1(7)$$

El orden en el cual se procesan las tareas en las diferentes máquinas está predeterminado como:

$$M1: J1 - J2 - J3$$

$$M2: J2 - J3 - J1$$

$$M3: J3 - J1 - J2$$

- (a) Represente el problema como una red de CPM para la cual la ruta crítica determina el espacio de trabajo de las tres tareas.
- (b) Use los cálculos de ruta crítica para programar las tareas (gráfica de Gantt) suponiendo que cada operación se programa a su tiempo de inicio más temprano.

### 6.5.4 Formulación de programación lineal de CPM

El modelo CPM busca la ruta *más larga* entre los nodos de inicio y de terminación de la red del proyecto. Por tanto, su formulación como una PL es semejante a la PL del modelo de la ruta más corta (sección 6.3.3). La única diferencia es que la función objetivo se maximiza en lugar de minimizarse.

Defina

$x_{ij}$  = Cantidad de flujo de la actividad ( $i,j$ ) para toda  $i$  y  $j$  definidas

$D_{ij}$  = Duración de la actividad ( $i,j$ ) para toda  $i$  y  $j$  definidas

Por lo tanto, la función objetivo del programa lineal es

$$\text{Maximizar } z = \sum_{\substack{\text{todas las actividades} \\ \text{definidas } (i,j)}} D_{ij}x_{ij}$$

Para cada nodo hay una restricción que representa la conservación del flujo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

Todas las variables,  $x_{ij}$ , son no negativas.

**Ejemplo 6.5-5**

A continuación se da la formulación de PL del proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.40). Observe que los nodos 1 y 6 son los nodos de inicio y de terminación, respectivamente.

	A	B	C	D	E	F	Ficticia	G	H
	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{35}$	$x_{36}$	$x_{45}$	$x_{46}$	$x_{56}$
Maximizar $z =$	6	6	3	8	2	11	0	1	12
Nodo 1	-1	-1							= -1
Nodo 2	1		-1	-1					= 0
Nodo 3		1	1		-1	-1			= 0
Nodo 4				1			-1	-1	= 0
Nodo 5					1		1		-1 = 0
Nodo 6						1		1	1 = 1

La solución óptima es

$$z = 25, x_{12}(A) = 1, x_{24}(D) = 1, x_{45}(\text{ficticia}) = 1, x_{56}(H) = 1, \text{ y todas las demás} = 0$$

La solución define la ruta crítica como  $A \rightarrow D \rightarrow \text{Ficticia} \rightarrow H$ , y la duración del proyecto es de 25 días, pero no proporciona los datos necesarios para construir la gráfica de CPM.

**CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5D**

1. Utilice PL para determinar la ruta crítica para la red del proyecto de la figura 6.43.
2. Utilice PL para determinar la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.44.

**6.5.5 Redes PERT**

PERT difiere de CPM en que asume tiempos de duración probabilísticos basados en tres estimaciones:

1. **Tiempo optimista**,  $a$ , el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente bien.
2. **Tiempo más probable**,  $m$ , el cual ocurre cuando la ejecución se realiza en condiciones normales.
3. **Tiempo pesimista**,  $b$ , el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente deficiente.

El tiempo más probable,  $m$ , queda en el intervalo  $(a, b)$ .

Basado en las estimaciones, el tiempo de duración promedio,  $\bar{D}$ , y varianza,  $v$ , se aproximan como

$$\bar{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

Los cálculos de CPM dados en las secciones 6.5.2 y 6.5.3 pueden aplicarse directamente, con  $\bar{D}$ , reemplazando a la estimación única  $D$ .

Dado que la variable aleatoria  $e_j$  que representa el tiempo de ocurrencia más temprano del nodo, la probabilidad de que  $j$  ocurrirá en un tiempo programado,  $S_j$ , puede estimarse como sigue: Suponga que todas las actividades en la red son estadísticamente independientes, y calcule primero la media  $E[e_j]$  y la varianza,  $\text{var}[e_j]$ . Si sólo hay una ruta del nodo de inicio al nodo  $j$ , entonces la media es la suma de las duraciones esperadas,  $\bar{D}$ , de todas las actividades a lo largo de esta ruta y la varianza es la suma de las varianzas,  $v$ , de las mismas actividades. Si más de una ruta conduce al nodo  $j$ , entonces es necesario determinar la distribución estadística de la duración de la ruta más larga, un problema un tanto difícil porque implica determinar la distribución del máximo de al menos dos variables aleatorias. Una suposición simplificadora requiere seleccionar la ruta al nodo  $j$  que tiene la duración *promedio* más larga. Si dos o más rutas tienen la misma media, se selecciona la de la mayor varianza porque refleja la incertidumbre máxima y, por consiguiente, conduce a una estimación más conservadora de las probabilidades.

Dadas la media y la varianza de la ruta al nodo  $j$ ,  $E[e_j]$  y  $\text{var}[e_j]$ , la probabilidad de que el nodo  $j$  ocurra en el tiempo  $S_j$  está representada de forma aproximada por la distribución normal estándar,  $z$  (vea la sección 14.4.4), es decir,

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - E[e_j]}{\sqrt{\text{var}[e_j]}} \leq \frac{S_j - E[e_j]}{\sqrt{\text{var}[e_j]}}\right\} = P\{z \leq K_j\}$$

La justificación para el uso de la distribución normal es que  $e_j$  es la suma de variables aleatorias independientes. De acuerdo con el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4),  $e_j$  está distribuida normalmente de una manera aproximada.

### Ejemplo 6.5-6

Considere el proyecto del ejemplo 6.5-2. Para no repetir los cálculos de ruta crítica, los valores de  $a$ ,  $m$  y  $b$  que aparecen en la tabla se seleccionan para obtener  $\bar{D}_{ij} = D_{ij}$  para toda  $i$  y  $j$  en el ejemplo 6.5-2.

Actividad	$i-j$	$(a, m, b)$	Actividad	$i-j$	$(a, m, b)$
A	1-2	(3, 5, 7)	E	3-5	(1, 2, 3)
B	1-3	(4, 6, 8)	F	3-6	(9, 11, 13)
C	2-3	(1, 3, 5)	G	4-6	(1, 1, 1)
D	2-4	(5, 8, 11)	H	5-6	(10, 12, 14)

La media  $\bar{D}_{ij}$  y la varianza  $v_{ij}$  de las diferentes actividades se presentan en la siguiente tabla. Observe que una actividad ficticia con  $(a, m, b)$  tiene media y varianza cero.

Actividad	$i-j$	$\bar{D}_{ij}$	$v_{ij}$	Actividad	$i-j$	$\bar{D}_{ij}$	$v_{ij}$
A	1-2	5	.444	E	3-5	2	.111
B	1-3	6	.444	F	3-6	11	.444
C	2-3	3	.444	G	4-6	1	.000
D	2-4	8	1.000	H	5-6	12	.444

La siguiente tabla presenta la ruta más larga del nodo 1 a los diferentes nodos, junto con su media y desviación estándar asociadas.

Nodo	Ruta más larga basada en las duraciones medias	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta
2	1-2	5.00	0.67
3	1-2-3	8.00	0.94
4	1-2-4	13.00	1.20
5	1-2-4-5	13.00	1.20
6	1-2-4-5-6	25.00	1.37

La siguiente tabla calcula la probabilidad de que cada nodo se realice en el tiempo  $S_j$  (especificado por el analista).

Nodo $j$	Ruta más larga	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta	$S_j$	$K_j$	$P[z \leq K_j]$
2	1-2	5.00	0.67	5.00	0	.5000
3	1-2-3	8.00	0.94	11.00	3.19	.9993
4	1-2-4	13.00	1.20	12.00	-.83	.2033
5	1-2-4-5	13.00	1.20	14.00	.83	.7967
6	1-2-4-5-6	25.00	1.37	26.00	.73	.7673

### Momento de TORA

TORA incluye un módulo para realizar cálculos PERT. Para utilizar este módulo, seleccione las opciones Project Planning  $\Rightarrow$  PERT – Program Evaluation and Review Technique en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar Activity Mean/Var para calcular la media y varianza de cada actividad, o la opción PERT Calculations para calcular la media y varianza de la ruta más larga a cada nodo en la red. El archivo *torax6.5-6.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-6.

### CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5E

1. Considere el problema 2, conjunto 6.5b. Las estimaciones  $(a, m, b)$  se enlistan a continuación. Determine las probabilidades de que los diferentes nodos del proyecto se realicen sin demora.

Proyecto (a)				Proyecto (b)			
Actividad	$(a, m, b)$	Actividad	$(a, m, b)$	Actividad	$(a, m, b)$	Actividad	$(a, m, b)$
1-2	(5, 6, 8)	3-6	(3, 4, 5)	1-2	(1, 3, 4)	3-7	(12, 13, 14)
1-4	(1, 3, 4)	4-6	(4, 8, 10)	1-3	(5, 7, 8)	4-5	(10, 12, 15)
1-5	(2, 4, 5)	4-7	(5, 6, 8)	1-4	(6, 7, 9)	4-7	(8, 10, 12)
2-3	(4, 5, 6)	5-6	(9, 10, 15)	1-6	(1, 2, 3)	5-6	(7, 8, 11)
2-5	(7, 8, 10)	5-7	(4, 6, 8)	2-3	(3, 4, 5)	5-7	(2, 4, 8)
2-6	(8, 9, 13)	6-7	(3, 4, 5)	2-5	(7, 8, 9)	6-7	(5, 6, 7)
3-4	(5, 9, 19)			3-4	(10, 15, 20)		

## BIBLIOGRAFÍA

- Ahuja, R., T. Magnati, y J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.
- Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flow*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.
- Chames, A., y W. Cooper, "Some Network Characterization for Mathematical Programming and Accounting Applications to Planning and Control", *The Accounting Review*, vol. 42, núm. 3, págs. 24-52, 1967.
- Evans, J., y E. Minieka, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*, 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1992.
- Guéret, C., C. Prins, y M. Sevaux, *Applications of Optimization with Xpress-MP*, traducido y revisado por Susanne Heipke, Dash Optimization Ltd., Londres, 2002.
- Glover, F., D. Klingman, y N. Phillips, *Network Models and Their Applications in Practice*, Wiley, Nueva York, 1992.
- Robinson, E., L. Gao, y S. Muggenborg, "Designing an Integrated Distribution System at DowBrands, Inc.", *Interfaces*, vol. 23, núm. 3, págs. 107-117, 1993.