

CAPÍTULO 16

Modelos de inventario probabilísticos

Aplicación de la vida real. Decisiones de inventario en la cadena de abasto de Dell

Dell, Inc. implementa un modelo de negocio de ventas directas en el que las computadoras personales se venden directamente a los clientes en los Estados Unidos. Cuando llega un pedido de un cliente, las especificaciones se envían a una planta de manufactura en Austin, Texas, donde la computadora se construye, prueba y empaca en, aproximadamente, 8 horas. Dell maneja poco inventario. A sus proveedores, que por lo común se ubican en el sureste asiático, se les pide que manejen lo que se conoce como inventario "revolvente" disponible en *revolvedores* (almacenes) cerca de las plantas de manufactura. Estos revolvedores son propiedad de Dell y los rentan a los proveedores. Dell entonces "saca" las partes que necesita de los revolvedores, y la responsabilidad de los proveedores es reponer el inventario para satisfacer la demanda de Dell. Aunque Dell no posee el inventario guardado en los revolvedores, su costo se transfiere de manera indirecta a los clientes mediante la fijación de precios de los componentes. Por lo tanto, cualquier reducción del inventario beneficia directamente a los clientes de Dell con la reducción de los precios de los productos. La solución propuesta ha dado por resultado un estimado de \$2.7 millones en ahorros anuales. (El caso 13 del capítulo 26, en el sitio web de este libro, detalla este estudio).

16.1

MODELOS DE REVISIÓN CONTINUA

Esta sección presenta dos modelos: (1) una versión "probabilizada" del modelo EOQ determinístico (sección 13.3-1) que utiliza existencias de reserva para satisfacer las demandas probabilísticas, y (2) un modelo EOQ probabilístico más exacto que incluye la demanda aleatoria directamente en la formulación.

16.1.1

Modelo EOQ "probabilizado"

Algunos profesionales han buscado adaptar el modelo EOQ determinístico (sección 13.3.1) para representar de forma aproximada la naturaleza probabilística de la demanda. El periodo crítico durante el ciclo de inventario ocurre entre la colocación y la

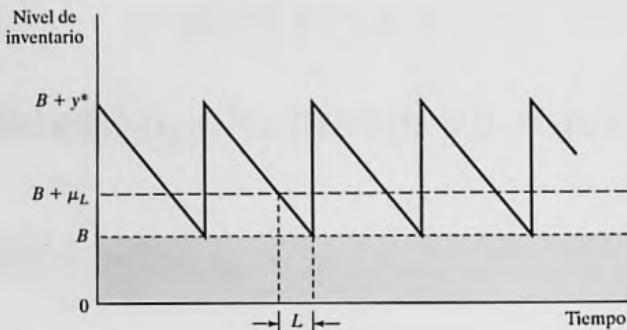


FIGURA 16.1

Existencias de reserva, B , impuestas al modelo EOQ clásico

recepción de pedidos. Éste es el lapso de tiempo en que se podrían presentar los faltantes (agotamiento de las existencias). La idea entonces es mantener existencias de seguridad constantes que eviten la probabilidad de faltantes. Por intuición, una probabilidad de pocos faltantes implica mayores existencias de reserva, y viceversa.

La figura 16.1 ilustra la relación entre las existencias de reserva, B , y los parámetros del modelo EOQ determinístico que incluyen el tiempo de espera, L ; la demanda promedio durante el tiempo de espera, μ_L , y la cantidad económica de pedido (EOQ), y^* . Observe que L es el tiempo de espera efectivo definido en la sección 13.3.1.

La suposición principal del modelo es que la demanda por unidad de tiempo es normal con media D y desviación estándar σ ; es decir, $N(D, \sigma)$. Con arreglo a esta suposición, la demanda durante el tiempo de espera L también debe ser normal con media $\mu_L = DL$ y desviación estándar $\sigma_L = \sqrt{L\sigma^2}$. La fórmula para σ_L supone que L es (representado de forma aproximada si es necesario por) un valor entero.

El tamaño de las existencias de reserva B se determina de modo que la probabilidad de faltantes durante L sea a lo sumo α . Si x_L es la demanda durante el tiempo de espera L , entonces

$$P[x_L \geq B + \mu_L] \leq \alpha$$

Utilizando $N(0, 1)$, $z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$ (como se define en la sección 14.4.4), obtenemos

$$P\left\{ z \geq \frac{B}{\sigma_L} \right\} \leq \alpha$$

Definiendo el parámetro K_α para la distribución normal estándar de modo que $P[z \geq k_\alpha] \leq \alpha$ (vea la figura 16.2) se desprende que

$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$

La cantidad $\sigma_L K_\alpha$ proporciona el valor mínimo de B . (El valor de K_α puede determinarse desde la tabla normal estándar que aparece en el apéndice A, o utilizando el archivo *excelStatTables.xls*.)

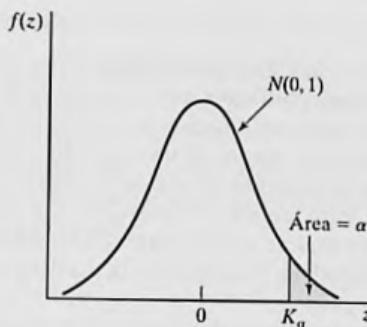


FIGURA 16.2

Probabilidad de que se agoten las existencias, $P[z \leq K_\alpha] = \alpha$

Ejemplo 16.1-1

En el ejemplo 13.3-1, donde se determina la política de inventario de las luces de neón, la cantidad económica de pedido es de 1000 unidades. Suponga que la demanda diaria es $N(100, 10)$; es decir, $D = 100$ unidades y que la desviación estándar es $\sigma = 10$ unidades. Determine el tamaño de las existencias de reserva, B , utilizando $\alpha = .05$.

Según el ejemplo 13.3-1, el tiempo de espera efectivo es $L = 2$ días. Por lo tanto,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ unidades}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ unidades}$$

Si $K_{.05} = 1.645$, las existencias de reserva se calculan como

$$B \geq 14.14 \times 1.645 \approx 23 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario óptimo (de reserva) requiere pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 223 ($= B + \mu_L = 23 + 2 \times 100$) unidades.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1A

- En el ejemplo 16.1-1, determine la política de inventario óptima en cada uno de los siguientes casos:
 - Tiempo de espera = 15 días.
 - Tiempo de espera = 23 días.
 - Tiempo de espera = 8 días.
 - Tiempo de espera = 10 días.
- La demanda diaria de un popular CD en una tienda de música es aproximadamente $N(200, 20)$. El costo de conservar el CD en los anaquellos es de \$.04 por disco por día. A la tienda le cuesta \$100 colocar un nuevo pedido. El tiempo de espera para la entrega es de 7 días. Determine la política de inventario óptima de la tienda dado que la tienda desea limitar la probabilidad de un faltante a cuando mucho .02.
- La demanda diaria de rollos de película para cámara en una tienda de regalos es $N(300, 5)$. El costo de retener un rollo en la tienda es de \$.02 por día, y el costo fijo de colocar un pedido de reposición es de \$30. La política de inventario de la tienda es pedir 150 rollos siempre que el nivel del inventario se reduzca a 80 unidades. Al mismo tiempo, mantiene siempre una existencia de reserva de 20 rollos.
 - Determine la probabilidad de quedarse sin existencias.
 - Dados los datos de la situación, recomiende la política de inventario para la tienda, puesto que la probabilidad de que haya faltantes no puede exceder el .10.

16.1.2 Modelo EOQ probabilístico

La base para el desarrollo del modelo EOQ "probabilizado" en la sección 16.1.1 es "plausible", pero no hay razón alguna para creer que el modelo produce una política de inventario óptima. El hecho de que la información pertinente en relación con la naturaleza probabilística de la demanda se ignore en un principio, sólo para ser "revivida" de una manera totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, basta para refutar la optimalidad. Para remediar la situación, esta sección presenta un modelo más preciso en el cual la naturaleza probabilística de la demanda se incluye directamente en la información del modelo. Por supuesto, la precisión más alta se obtiene a expensas de cálculos más complejos.

La figura 16.3 ilustra un cambio típico del nivel de inventario con el tiempo. Pueden o no ocurrir faltantes durante los tiempos de espera (posiblemente aleatorios), como se ilustra por los ciclos 1 y 2, respectivamente. La política exige pedir la cantidad y , siempre que la cantidad del inventario disponible se reduzca a un nivel R . Como en el caso determinístico, el nivel de volver a pedir R es una función del tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido. Los valores óptimos de y y R se determinan minimizando la suma esperada de los costos de retención y los costos de faltantes por unidad de tiempo.

El modelo está basado en tres suposiciones:

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de espera se pone en rezago.
2. No se permite más de un pedido pendiente.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de espera permanece estacionaria con el tiempo.

Para desarrollar la función de costo total por unidad de tiempo, sean

$$f(x) = \text{fpd de la demanda, } x, \text{ durante el tiempo de espera}$$

D = Demanda esperada por unidad de tiempo

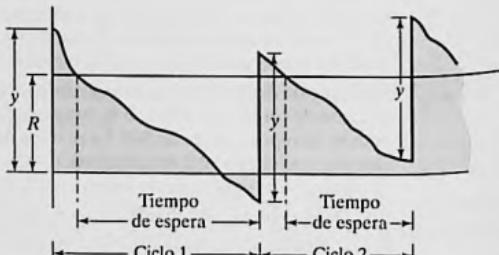
h = Costo de retención por unidad de inventario por unidad de tiempo

p = Costo por faltantes por unidad de inventario

K = Costo de preparación por pedido

FIGURA 16.3

Modelo de inventario probabilístico con faltantes



Ahora se determinan los elementos de la función de costos.

- Costo de preparación.* La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{y}$, de modo que el costo de preparación por unidad de tiempo es aproximadamente $\frac{KD}{y}$.
- Costo de retención esperado.* Si I es el nivel de inventario promedio, el costo de retención esperado por unidad de tiempo es hI . El nivel de inventario promedio se calcula como

$$I = \frac{(y + E[R - x]) + E[R - x]}{2} = \frac{y}{2} + R - E[x]$$

La fórmula promedia los inventarios inicial y final esperados en un ciclo, el cual es $y + E[R - x]$ y $E[R - x]$, respectivamente. Como una aproximación, la expresión ignora el caso en que $R - E[x]$ pueda ser negativo.

- Costo por faltantes esperado.* Los faltantes ocurren cuando $x > R$. Su valor esperado por ciclo se calcula como

$$S = \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx$$

Debido a que se supone que p es proporcional sólo a la cantidad faltante, el costo esperando por ciclo es pS , y, basándose en $\frac{D}{y}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo por faltante por unidad de tiempo es $\frac{pS}{y/D} = \frac{pDS}{y}$.

La función de costo total resultante por unidad de tiempo es

$$TCU(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E[x]\right) + \frac{pD}{y} \int_R^{\infty} (x - R) f(x) dx$$

Los valores óptimo, y^* y R^* , se determinan a partir de

$$\frac{\partial TCU}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial TCU}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right) \int_R^{\infty} f(x) dx = 0$$

Estas dos ecuaciones dan por resultado

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \quad (1)$$

$$\int_R^{\infty} f(x) dx = \frac{hy^*}{pD} \quad (2)$$

Los valores óptimos de y^* y R^* no pueden determinarse en formas cerradas. Se aplica un algoritmo iterativo, desarrollado por Hadley y Whitin (1963, págs. 169-174) a

las ecuaciones (1) y (2) para determinar la solución. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones, siempre que haya una solución factible.

Para $R = 0$, las ecuaciones (1) y (2) producen

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE[x])}{h}}$$

$$\tilde{y} = \frac{PD}{h}$$

Los valores óptimos únicos de y y R existen cuando $\tilde{y} \geq \hat{y}$. El valor mínimo de y^* es $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$, el cual ocurre cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son

Paso 0. Use la solución inicial $y_1 = y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, y sea $R_0 = 0$. Establezca $i = 1$, y continúe con el paso i .

Paso i. Use y_i para determinar R_i a partir de la ecuación (2). Si $R_i \approx R_{i-1}$, deténgase; la solución óptima es $y^* = y_i$ y $R^* = R_i$. De lo contrario, use R_i en la ecuación (1) para calcular y_{i+1} . Establezca $i = i + 1$, y repita el paso i .

Ejemplo 16.1-2

Electro utiliza resina en su proceso de fabricación a razón de 1000 galones por mes. Colocar un pedido le cuesta \$100 a Electro. El costo de retención por galón por mes es de \$2, y el costo por faltante por galón es de \$10. Los datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de espera es uniforme en el rango (0, 100) galones. Determine la política de colocación de pedidos óptima para Electro.

Utilizando los símbolos del modelo, tenemos

$$D = 1000 \text{ galones por mes}$$

$$K = \$100 \text{ por pedido}$$

$$h = \$2 \text{ por galón por mes}$$

$$p = \$10 \text{ por galón}$$

$$f(x) = \frac{1}{100}, 0 \leq x \leq 100$$

$$E[x] = 50 \text{ galones}$$

Primero tenemos que verificar si el problema tiene una solución única. Con las ecuaciones de \hat{y} y \tilde{y} obtenemos

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10 \times 50)}{2}} = 774.6 \text{ galones}$$

$$\tilde{y} = \frac{10 \times 1000}{2} = 5000 \text{ galones}$$

Debido a que $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existe una solución única para y^* y R^* .

La expresión para S se calcula como

$$S = \int_R^{100} (x - R) \frac{1}{100} dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

Utilizando S en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$y_t = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100,000 + 10,000S} \text{ galones} \quad (3)$$

$$\int_R^{100} \frac{1}{100} dx = \frac{2y_t}{10 \times 1000} \quad (4)$$

La ecuación (4) produce

$$R_t = 100 - \frac{y_t}{50} \quad (5)$$

Ahora utilizamos las ecuaciones (3) y (5) para determinar la solución óptima.

Iteración 1

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 100}{2}} = 316.23 \text{ galones}$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ galones}$$

Iteración 2

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = .19971 \text{ galones}$$

$$y_2 = \sqrt{100,000 + 10,000 \times .19971} = 319.37 \text{ galones}$$

Por consiguiente,

$$R_2 = 100 - \frac{319.39}{50} = 93.612$$

Iteración 3

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = .20399 \text{ galones}$$

$$y_3 = \sqrt{100,000 + 10,000 \times .20399} = 319.44 \text{ galones}$$

Por lo tanto,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611 \text{ galones}$$

Debido a que $y_3 \approx y_2$ y $R_3 \approx R_2$, la solución óptima es $R^* \approx 93.611$ galones, $y^* \approx 319.44$ galones. Se puede utilizar el archivo *excelContRev.xls* para determinar la solución a cualquier grado de precisión especificando la tolerancia $|R_{i-1} - R_i|$. La política de inventario óptima exige pedir aproximadamente 320 galones siempre que el nivel del inventario se reduzca a 94 galones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1B

1. Por los datos dados en el ejemplo 16.1-2, determine lo siguiente:
 - (a) El número aproximado de pedidos por mes.
 - (b) El costo de preparación mensual esperado.
 - (c) El costo de retención esperado por mes.
 - (d) El costo por faltantes esperado por mes.
 - (e) La probabilidad de que las existencias se agoten durante el tiempo de espera.
- *2. Resuelva el problema 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 0 y 50 galones.
- *3. En el ejemplo 16.1-2 suponga que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 40 y 60 galones. Compare la solución con la obtenida en el ejemplo 16.1-2, e interprete los resultados. (*Sugerencia:* En ambos problemas, $E\{x\}$ es la misma, pero la varianza en este problemas es más pequeña.)
4. Determine la solución óptima para el ejemplo 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera sea $N(100, 2)$. Suponga que $D = 10,000$ galones por mes, $h = \$2$ por galón por mes, $p = \$4$ por galón, y $K = \$20$.

16.2 MODELOS DE UN SOLO PERÍODO

Esta sección se ocupa de artículos de inventario que están en existencia durante un solo periodo de tiempo. Al final del periodo se desechan las unidades sobrantes, si las hay, como en el caso de artículos de moda. Se desarrollarán dos modelos. La diferencia entre ellos es si se incurre o no en un costo de preparación para colocar un pedido.

Los símbolos utilizados en el desarrollo de los modelos incluyen

K = Costo de preparación por pedido

h = Costo de retención por unidad retenida durante el periodo

p = Costo de penalización por unidad faltante durante el periodo

$f(D)$ = pdf de la demanda, D , durante el periodo

y = Cantidad de pedido

x = Inventario disponible antes de que se coloque un pedido

El modelo determina el valor óptimo de y que minimiza la suma de los costos de retención y por faltantes. Si $y (=y^*)$ es óptima, la política de inventario exige pedir y^*-x si $x < y$; de lo contrario, no se coloca pedido alguno.

16.2.1 Modelo sin preparación (Modelo Newsvendor)

Este modelo se conoce en la literatura como modelo *newsvendor* (el nombre original clásico es modelo *del periodiquero*). Tiene que ver con el almacenamiento y venta de periódicos.

Las suposiciones del modelo son

1. La demanda ocurre al instante en el inicio del periodo inmediatamente después de que se recibe el pedido.
2. No se incurre en ningún costo de preparación.

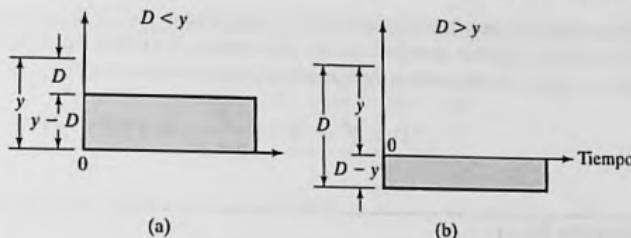


FIGURA 16.4

Inventario con retención y faltantes en un modelo de un solo periodo

La figura 16.4 muestra la posición del inventario después de que se satisface la demanda, D . Si $D < y$, la cantidad $y - D$ se mantiene durante el período. Si $D > y$, habrá una cantidad faltante si $D - y$.

El costo esperado durante el período, $E[C(y)]$, se expresa como

$$E[C(y)] = h \int_0^y (y - D)f(D)dD + p \int_y^\infty (D - y)f(D)dD$$

Se puede demostrar que la función $E[C(y)]$ es convexa en y , y por lo tanto tiene un mínimo único. Si tomamos la primera derivada $E[C(y)]$ con respecto a y y la igualamos a cero, obtenemos

$$h \int_0^y f(D)dD - p \int_0^\infty f(D)dD = 0$$

o

$$hP[D \leq y] - p(1 - P[D \leq y]) = 0$$

o

$$P[D \leq y^*] = \frac{p}{p + h}$$

Si la demanda, D , es discreta, entonces la función de costo asociada es

$$E[C(y)] = h \sum_{D=0}^y (y - D)f(D) + p \sum_{D=y+1}^{\infty} (D - y)f(D)$$

Las condiciones necesarias para optimalidad son

$$E[C(y - 1)] \geq E[C(y)] \text{ y } E[C(y + 1)] \geq E[C(y)]$$

Estas condiciones también son suficientes porque $E[C(y)]$ es una función convexa. Después de algunas manipulaciones algebraicas, la aplicación de estas condiciones da por resultado las siguientes desigualdades para determinar y^* :

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

Ejemplo 16.2-1

El propietario de un puesto de periódicos desea determinar la cantidad de ejemplares de *USA Now* que debe tener en existencia al inicio de cada día. El propietario paga 30 centavos por un ejemplar y lo vende a 75 centavos. La venta del periódico suele ocurrir entre 7:00 y 8:00 A.M. (la demanda es prácticamente instantánea). Los periódicos que sobran al final del día se reciclan y se obtiene un ingreso de 5 centavos por ejemplar. ¿Cuántos ejemplares debe tener en existencia cada mañana?, suponiendo que la demanda del día puede describirse como

- (a) Una distribución normal con media de 300 ejemplares y desviación estándar de 20.
- (b) Una fdp discreta, $f(D)$, definida como

| | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| D | 200 | 220 | 300 | 320 | 340 |
| $f(D)$ | .1 | .2 | .4 | .2 | .1 |

Los costos de retención y penalización no se definen de forma directa en esta situación. Los datos del problema indican que cada ejemplar no vendido le costará al dueño $30 - 5 = 25$ centavos, y que el costo de penalización por agotamiento de las existencias es de $75 - 30 = 45$ centavos por ejemplar. Por lo tanto, en función de los parámetros del problema de inventario, tenemos $h = 25$ centavos por ejemplar por día y $p = 45$ centavos por ejemplar por día.

Primero determinamos la relación crítica como

$$\frac{p}{p + h} = \frac{45}{45 + 25} = .643$$

Caso (a). La demanda D es $N(300, 20)$. Podemos utilizar la plantilla *excelStatTables.xls* para determinar la cantidad de pedido óptima ingresando 300 en F15, 20 en G15, y .643 en L15, y así se obtiene la respuesta deseada de 307.33 periódicos en R15. Además, podemos utilizar las tablas normales estándar del apéndice A. Defina

$$z = \frac{D - 300}{20}$$

Entonces a partir de las tablas normales

$$P[z \leq .366] \approx .643$$

o

$$\frac{y^* - 300}{20} = .366$$

Por lo tanto, $y^* = 307.3$. El pedido óptimo es aproximadamente de 308 ejemplares.

Caso (b). La demanda D sigue una fdp discreta, $f(D)$. Pero antes determinamos la FDA $P[D \leq y]$ como

| | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| y | 200 | 220 | 300 | 320 | 340 |
| $P[D \leq y]$ | .1 | .3 | .7 | .9 | 1.0 |

Para la relación crítica calculada de .643, tenemos

$$P(D \leq 220) \leq .643 \leq P(D \leq 300)$$

Por lo tanto, $y^* = 300$ ejemplares.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2A

1. Para el modelo de un solo periodo, demuestre que para la demanda discreta la cantidad de pedido óptima se determina a partir de

$$P[D \leq y^* - 1] \leq \frac{p}{p + h} \leq P[D \leq y^*]$$

2. La demanda de un artículo durante un solo periodo ocurre de manera instantánea al inicio del periodo. La fdp asociada se mantiene uniforme entre 10 y 15 unidades. Debido a la dificultad de estimar los parámetros de costo, la cantidad de pedido se determina de modo que la probabilidad de un excedente o de un faltante no exceda de .1. ¿Es posible satisfacer ambas condiciones al mismo tiempo?
- *3. El costo de retención unitario en una situación de inventario de un solo periodo es de \$1. Si la cantidad de pedido es de 4 unidades, encuentre el intervalo permisible del costo de penalización unitario implicado por las condiciones óptimas. Suponga que la demanda ocurre instantáneamente al inicio del periodo y la función de densidad de probabilidad de la demanda es como sigue:

| | | | | | | | | | |
|--------|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| D | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $f(D)$ | .05 | .1 | .1 | .2 | .25 | .15 | .05 | .05 | .05 |

4. La librería de la U de A ofrece un programa de reproducción de apuntes de clase para profesores participantes. El profesor Yataha le da clases a un grupo de primer año de entre 200 y 250 estudiantes, distribuidos de manera uniforme. La reproducción de una copia cuesta \$10 y se vende a \$25. Los estudiantes compran sus libros al inicio del semestre. Las copias de los apuntes del profesor Yataha que no se venden se trituran para reciclarlas. Mientras tanto, una vez que la librería se queda sin copias, no se imprimen más. Si la librería desea maximizar sus ingresos, ¿cuántas copias debe imprimir?
5. QuickStop vende todos los días café y donas a sus clientes a las 6:00 A.M. La tienda compra las donas a 7 centavos cada una y las vende a 25 centavos hasta las 8:00 A.M. Después de esa hora las donas se venden a 5 centavos cada una. La cantidad de clientes que compran donas entre las 6:00 y las 8:00 está uniformemente distribuida entre 30 y 50. Cada cliente suele pedir 3 donas con café. ¿Cuántas donas debe tener aproximadamente en existencia QuickStop cada mañana para maximizar los ingresos?

- *6. Colony Shop se está surtiendo de abrigos para el siguiente invierno. Colony paga \$50 por un abrigo y lo vende a \$110. Al final de la temporada invernal, Colony ofrece los abrigos a \$55 cada uno. La demanda de abrigo durante la temporada invernal es de más de 20 pero menor que o igual a 30, todos con iguales probabilidades. Debido a que la temporada invernal es corta, el costo de retención es insignificante. Asimismo, el gerente de Colony no cree que la escasez de sacos provoque penalizaciones. Determine la cantidad de pedido óptima que maximizará el ingreso para Colony Shop. Puede utilizar una aproximación continua.
7. Para el modelo de un solo periodo, suponga que el artículo se consume de modo uniforme durante el periodo (y no de forma instantánea al inicio del periodo). Desarrolle el modelo de costo asociado, y determine la cantidad de pedido óptima.
8. Resuelva el ejemplo 16.2-1 suponiendo que la demanda es continua y uniforme durante el periodo, y que la fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 100. (Sugerencia: Aproveche los resultados del problema 7.)

16.2.2 Modelo con preparación (Política $s-S$)

El presente modelo difiere del de la sección 16.2.1 en que se incurre en un costo de preparación K . Utilizando la misma notación, el costo esperado total por periodo es

$$\begin{aligned} E[\bar{C}(y)] &= K + E[C(y)] \\ &= K + h \int_0^y (y - D)f(D)dD + p \int_y^\infty (D - y)f(D)dD \end{aligned}$$

Como se muestra en la sección 16.2.1, el valor óptimo y^* debe satisfacer

$$P[y \leq y^*] = \frac{p}{p+h}$$

Ya que K es constante, el valor mínimo de $E[\bar{C}(y)]$ también debe ocurrir en y^* .

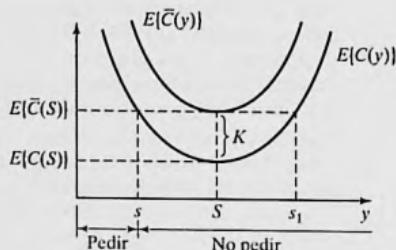
En la figura 16.5, $S = y^*$, y el valor de $s (< S)$ se determina a partir de la ecuación

$$E[C(s)] = E[\bar{C}(S)] = K + E[C(S)], s < S$$

La ecuación resulta en otro valor $s_1 (> S)$, el cual se descarta.

FIGURA 16.5

Política de pedir óptima ($s-S$) en un modelo de un solo periodo con costo de preparación



Suponga que x es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido. ¿Cuánto debe pedirse? Esta pregunta se responde con tres condiciones:

1. $x < s$.
2. $s \leq x \leq S$.
3. $x > S$.

Caso 1 ($x > s$). Debido a que x ya está disponible, su costo equivalente es $E[C(x)]$. Si se pide cualquier cantidad adicional $y - x$ ($y > x$), el costo correspondiente dada y es $E[\bar{C}(y)]$, el cual incluye el costo de preparación K . De acuerdo con la figura 16.5, tenemos

$$\min_{y>x} E[\bar{C}(y)] = E[\bar{C}(S)] < E[C(x)]$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima en este caso es pedir $S - x$ unidades.

Caso 2 ($s \leq x \leq S$). De acuerdo con la figura 16.5, tenemos

$$E[C(x)] \leq \min_{y>x} E[\bar{C}(y)] = E[\bar{C}(S)]$$

Por lo tanto, no es ventajoso pedir en este caso, y $y^* = x$.

Caso 3 ($x > S$). De acuerdo con la figura 16.5, tenemos $y > x$,

$$E[C(x)] < E[\bar{C}(y)]$$

Esta condición indica que, como en el caso (2), no es ventajoso colocar un pedido; es decir, $y^* = x$.

La política de inventario óptima, más conocida como **política s - S** , se resume como

Si $x < s$, pedir $S - x$

Si $x \geq s$, no pedir

La optimalidad de la política s - S está garantizada porque la función de costo asociada es convexa.

Ejemplo 16.2-2

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo ocurre de forma instantánea al inicio del periodo. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10 unidades. El costo de retención unitario del artículo durante el periodo es de \$.50, y el costo de penalización unitario por agotamiento de las existencias es de \$.450. Se incurre en un costo fijo de \$25 cada vez que se coloca un pedido. Determine la política de inventario óptima para el artículo.

Para determinar y^* , considere

$$\frac{p}{p + h} = \frac{4.5}{4.5 + .5} = .9$$

Inclusive,

$$P[D \leq y^*] = \int_0^{y^*} \frac{1}{10} dD = \frac{y^*}{10}$$

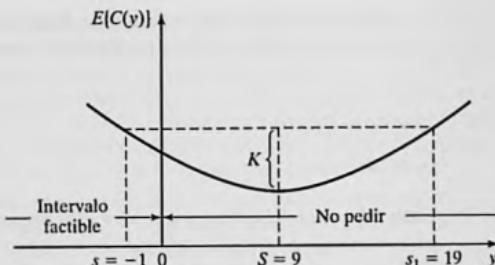


FIGURA 16.6

Política $s-S$ aplicada al ejemplo 16.2-2Por lo tanto, $S = y^* = 9$.

La función de costo esperada es

$$\begin{aligned}E[C(y)] &= .5 \int_0^y \frac{1}{10} (y - D)dD + 4.5 \int_y^{10} \frac{1}{10} (D - y)dD \\&= .25y^2 - 4.5y + 22.5\end{aligned}$$

El valor de s se determina resolviendo

$$E[C(s)] = K + E[C(S)]$$

O bien

$$.25s^2 - 4.5s + 22.5 = 25 + .25S^2 - 4.5S + 22.5$$

Si $S = 9$, la ecuación anterior se reduce a

$$s^2 - 18s - 19 = 0$$

La solución de esta ecuación es $s = -1$, o $s = 19$. Se descarta el valor de $s > S$. Debido a que el valor restante es negativo ($= -1$), s no tiene un valor factible. Como se muestra en la figura 16.6, la política de inventario óptima en este caso exige que no se pida el artículo. Este resultado se suele presentar cuando la función de costo es "plana" o cuando el costo de preparación es alto con respecto a los demás costos del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2B

- *1. Determine la política de inventario óptima para la situación en el ejemplo 16.2-2, suponiendo que el costo de preparación es de \$5.
2. En el modelo de un solo periodo de la sección 16.2.1, suponga que el modelo maximiza la utilidad y que se incurre en un costo de preparación K . Si r es el precio de venta unitario y utilizando la información de la sección 16.2-1, desarrolle una expresión para la utilidad esperada, y determine la cantidad de pedido óptima. Resuelva el problema numéricamente para $r = \$3$, $c = \$2$, $p = \$4$, $h = \$1$ y $K = \$10$. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10.
3. Resuelva el problema 5, conjunto 16.2a, suponiendo que hay un costo fijo de \$10 asociado con la entrega de las donas.

16.3 MODELO DE VARIOS PERIODOS

Esta sección presenta un modelo de varios períodos en el supuesto de que no haya costo de preparación. Adicionalmente, el modelo permite un retraso en el cumplimiento de la demanda y supone un retraso cero en la entrega. Además, asume que una fdp estacionaria, $f(D)$, describe la demanda en cualquier periodo.

El modelo de varios períodos considera el valor descontado del dinero. Si $\alpha (< 1)$ es el factor de descuento por periodo, entonces una cantidad $\$A$ disponible durante n períodos a partir de ahora tiene un valor actual de $\$a^n A$.

Suponga que la situación del inventario comprende n períodos y que la demanda no satisfecha se deja pendiente exactamente un periodo. Defina

$$F_i(x_i) = \text{Utilidad máxima esperada durante los períodos } i, i+1, \dots, n, \text{ dado que } x_i \text{ es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido en el periodo } i.$$

Aplicando la notación utilizada en la sección 16.2 y suponiendo que c y r son el costo y el ingreso por unidad, respectivamente, la situación del inventario puede formularse utilizando el siguiente modelo de programación dinámica probabilística (el capítulo 24, en el sitio web, detalla este punto):

$$F_{n+1}(y_n - D) = 0$$

$$\begin{aligned} F_i(x_i) = & \max_{y_i \geq x_i} \left\{ -c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} [rD - h(y_i - D)]f(D)dD \right. \\ & + \int_{y_i}^{\infty} [ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)]f(D)dD \\ & \left. + \alpha \int_0^{\infty} F_{i+1}(y_i - D)f(D)dD \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

El valor de x_i puede ser negativo porque la demanda no satisfecha se quedó pendiente. Se incluye la cantidad $\alpha r(D - y_i)$ en la segunda integral porque $(D - y_i)$ es la demanda no satisfecha en el periodo i que se debe satisfacer en el periodo $i + 1$.

El problema puede resolverse de manera recursiva. En el caso en que la cantidad de períodos es infinita, la ecuación recursiva se reduce a

$$\begin{aligned} F(x) = & \max_{y \geq x} \left\{ -c(y - x) + \int_0^y [rD - h(y - D)]f(D)dD \right. \\ & + \int_y^{\infty} [ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)]f(D)dD \\ & \left. + \alpha \int_0^{\infty} F(y - D)f(D)dD \right\} \end{aligned}$$

donde x y y son los niveles del inventario durante cada periodo antes y después de recibir un pedido, respectivamente.

El valor óptimo de y se determina a partir de la siguiente condición necesaria, la cual también resulta ser suficiente porque la función del ingreso esperado $F(x)$ es cóncava.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} &= -c - h \int_0^y f(D) dD + \int_y^\infty [(1-\alpha)r + p]f(D) dD \\ &\quad + \alpha \int_0^\infty \frac{\partial F(y-D)}{\partial y} f(D) dD = 0\end{aligned}$$

El valor de $\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}$ se determina como sigue. Si hay más unidades $\beta (> 0)$ disponibles al inicio del siguiente periodo, la utilidad durante el siguiente periodo se incrementará en $c\beta$, porque se tiene que pedir esta cantidad mucho menor. Esto significa que

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y} = c$$

La condición necesaria es por lo tanto

$$-c - h \int_0^y f(D) dD + \left[(1-\alpha)r + p \right] \left(1 - \int_0^y f(D) dD \right) + \alpha c \int_0^\infty f(D) dD = 0$$

Por tanto, el nivel óptimo del inventario y^* se determina a partir de

$$\int_0^{y^*} f(D) dD = \frac{p + (1-\alpha)(r-c)}{p + h + (1-\alpha)r}$$

La política de inventario óptima durante cada periodo, si el nivel del inventario de entrada es x , se da por tanto como

Si $x < y^*$, pedir $y^* - x$

Si $x \geq y^*$, no pedir

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.3A

1. Considere un modelo de inventario probabilístico de dos períodos en el cual el cumplimiento de la demanda se queda pendiente, y los pedidos se reciben con retraso cero en entrega. La fdp de la demanda por periodo es uniforme entre 0 y 10, y los parámetros de costos se dan como

Precio de venta unitario = \$2

Precio de compra unitario = \$1

Costo de retención unitario por mes = \$.10

Costo de penalización por mes = \$3

Factor de descuento = .8

Encuentre la política de inventario óptima para los dos períodos, suponiendo que el inventario inicial en el periodo 1 es cero.

- *2. La fdp de la demanda por periodo en un modelo de inventario de horizonte infinito se da como

$$f(D) = .08D, 0 \leq D \leq 5$$

Los parámetros de costos unitarios son

Precio de venta unitario = \$10

Precio de compra unitario = \$8

Costo de retención unitario = \$1

Costo de penalización unitario por mes = \$10

Factor de descuento = .9

Determine la política de inventario óptima suponiendo un retraso en la entrega cero y que el no cumplimiento de la demanda se queda pendiente.

3. Considere la situación de inventario de horizonte infinito con retraso cero en la entrega y cumplimiento de la demanda pendiente. Desarrolle la política de inventario óptima basado en la minimización del costo dado que

$$\text{Costo de retención por } z \text{ unidades} = hz^2$$

$$\text{Costo de penalización por } z \text{ unidades} = px^2$$

Demuestre que para el caso especial en que $h = p$, la solución óptima es independiente de la fdp de la demanda.

BIBLIOGRAFÍA

- Cohen, R., y R. Dunford, "Forecasting for Inventory Control: An Example of When 'Simple' Means 'Better'", *Interfaces*, vol. 16, núm. 6, págs. 95-99, 1986.
- Hadley, G., y T. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1963.
- Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, 5a. ed., Irwin, Homewood. IL, 2005.
- Silver, E., D. Pyke, y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.
- Zipken, P., *Foundations of Inventory Management*, McGraw-Hill, Boston, MA, 2000.

CAPÍTULO 17

Cadenas de Markov

17.1 DEFINICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV

Sea X_t una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en puntos discretos en el tiempo $t = 1, 2, \dots$. La familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ forma un **proceso estocástico** con una cantidad finita o infinita de estados.

Ejemplo 17.1-1 (Mantenimiento de una máquina)

La condición de una máquina en el momento del mantenimiento preventivo mensual es mala, regular o buena. Para el mes t , el proceso estocástico en esta situación se representa como sigue:

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si la condición es mala} \\ 1, & \text{si la condición es regular} \\ 2, & \text{si la condición es buena} \end{cases}, \quad t = 1, 2, \dots$$

La variable aleatoria X_t es *finita* porque representa tres estados: malo (0), regular (1) y bueno (2).

Ejemplo 17.1-2 (Taller)

Los trabajos llegan al azar a un taller a razón de 5 trabajos por hora. El proceso de llegada sigue una distribución de Poisson, la cual, en teoría, permite que llegue cualquier cantidad de trabajos durante el intervalo de tiempo $(0, t)$. El proceso de estado infinito que describe la cantidad de trabajos que llegan es $X_t = 0, 1, 2, \dots, t > 0$.

Proceso de Markov. Un proceso estocástico es un proceso de Markov si un estado futuro depende sólo del estado inmediatamente anterior. Esto significa que dados los

tiempos cronológicos t_0, t_1, \dots, t_n , la familia de variables aleatorias $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un proceso de Markov si

$$P[X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0] = P[X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}]$$

En un proceso Markoviano con n estados exhaustivos y mutuamente excluyentes, las probabilidades en un punto específico del tiempo $t = 0, 1, 2, \dots$ se definen como

$$p_{ij} = P[X_t = j | X_{t-1} = i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Esto se conoce como **probabilidad de transición en un paso** al ir del estado i en el instante $t - 1$ al estado j en el instante t . Por definición, tenemos

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad (i, j) = 1, 2, \dots, n$$

La notación utilizada en la matriz es una forma conveniente de resumir las probabilidades de transición en un paso:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz \mathbf{P} define una **cadena de Markov**. Tiene la propiedad de que todas sus probabilidades de transición p_{ij} son estacionarias e independientes a lo largo del tiempo. Aunque una cadena de Markov puede incluir un número infinito de estados, la presentación en este capítulo se limita a sólo cadenas finitas, ya que es el único que se necesita en el texto.

Ejemplo 17.1-3 (Problema del jardinero)

Cada año, durante la temporada de siembra de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad en la nueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) buena, (2) regular y (3) mala. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante la siguiente cadena de Markov:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{Estado del} \\ & \text{sistema} \\ & \text{este año} \\ \\ & \text{Estado del} \\ & \text{sistema el} \\ & \text{siguiente año} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & .2 & .5 & .3 \\ 2 & 0 & .5 & .5 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las probabilidades de transición muestran que la condición de la tierra puede deteriorarse o permanecer como está pero nunca mejorar. Por ejemplo, si la condición de la tierra es buena en este año (estado 1) hay 20% de que no cambie el año siguiente, 50% de probabilidad de que

sea regular (estado 2), y 30% de probabilidad de que se deteriorará a una condición mala (estado 3). El jardinero modifica las probabilidades de transición P utilizando un fertilizante orgánico. En este caso, la matriz de transición se vuelve:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & .30 & .60 & .10 \\ 2 & .10 & .60 & .30 \\ 3 & .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

El uso de fertilizante puede conducir a mejorar las condiciones del suelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.1A

- Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: $M1$, $M2$ y $M3$. Si el modelo actual es $M1$, la siguiente computadora puede ser $M2$ con probabilidad .2, o $M3$ con probabilidad .15. Si el modelo actual es $M2$, las probabilidades de cambiar a $M1$ y $M3$ son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es $M3$, entonces las probabilidades de comprar los modelos $M1$ y $M2$ son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una cadena de Markov.
- Una patrulla policiaca vigila un vecindario conocido por sus actividades pandilleriles. Durante un patrullaje hay 60% de probabilidades de llegar a tiempo al lugar donde se requiere la ayuda; si no sucede algo, continuará el patrullaje regular. Después de recibir una llamada, hay 10% de probabilidades de cancelación (en cuyo caso el patrullaje normal se reanuda), y 30% de probabilidad de que la unidad ya esté respondiendo a la llamada anterior. Cuando la patrulla llega a la escena del suceso, hay 10% de probabilidades de que los instigadores hayan desaparecido (en cuyo caso reanuda su patrullaje), y 40% de probabilidades de que se haga una aprehensión de inmediato. De otro modo, los oficiales rastrearán el área. Si ocurre una aprehensión, hay 60% de probabilidades de trasladar a los sospechosos a la estación de policía, de lo contrario son liberados y la unidad regresa a patrullar. Exprese las actividades probabilísticas de la patrulla en la forma de una matriz de transición.
- Cyert and Associates (1963).* Banco 1 ofrece préstamos los que o se liquidan cuando se vencen o se retrasan. Si el pago sobre un préstamo se retrasa más de cuatro trimestres (1 año), Banco 1 considera el préstamo como una deuda incobrable y la cancela. La siguiente tabla proporciona una muestra de la experiencia anterior de Banco 1 con préstamos.

| Cantidad prestada | Trimestres de retraso | Historia de pagos |
|-------------------|-----------------------|--|
| \$10,000 | 0 | \$2000 pagados, \$3000 retrasados un trimestre, \$3000 retrasados 2 trimestres, y el resto retrasados 3 trimestres. |
| \$25,000 | 1 | \$4000 pagados, \$12,000 retrasados un trimestre, \$6000 retrasados dos trimestres, y el resto retrasado 3 trimestres. |
| \$50,000 | 2 | \$7500 pagados, \$15,000 retrasados un trimestre, y el resto retrasado 2 trimestres. |
| \$50,000 | 3 | \$42,000 pagados, y el resto retrasado un trimestre. |
| \$100,000 | 4 | \$50,000 pagados. |

Exprese la situación del préstamo de Banco 1 como una cadena de Markov.

- Pliskin and Tell (1981).* Los pacientes que sufren de falla de riñón pueden conseguir un trasplante o someterse a diálisis periódicas. Durante un año cualquiera, 30% se somete a trasplantes cadávericos y 10% recibe riñones de donadores vivos. En el año después de un trasplante, 30% de los trasplantes cadávericos y 15% de los recipientes de donado-

res vivos regresan a la diálisis. Los porcentajes de muertes entre los dos grupos son 20% y 10%, respectivamente. De aquellos que están en el grupo de diálisis, 10% mueren, y de los que sobreviven más de un año después de un trasplante, 5% mueren y 5% regresan a la diálisis. Represente la situación como una cadena de Markov.

17.2 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN ABSOLUTAS Y DE n PASOS

Dada la matriz de transición \mathbf{P} de una cadena de Markov y el vector de probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)} = [a_j^{(0)}, j = 1, 2, \dots, n]$, las probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(n)} = [a_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, n]$ después de $n (> 0)$ transiciones se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{(1)} &= \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P} \\ \mathbf{a}^{(2)} &= \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2 \\ \mathbf{a}^{(3)} &= \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}^{(n)} &= \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n\end{aligned}$$

La matriz \mathbf{P}^n se conoce como la **matriz de transición de n pasos**. A partir de estos cálculos, podemos ver que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-m}\mathbf{P}^m, 0 < m < n$$

y

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-m}\mathbf{P}^m, 0 < m < n$$

Éstas se conocen como ecuaciones de **Chapman-Kolomogorov**.

Ejemplo 17.2-1

La siguiente matriz de transición es aplicable al problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

La condición inicial de la tierra es buena, es decir $\mathbf{a}^{(0)} = (1, 0, 0)$. Determine las probabilidades absolutas de los tres estados del sistema después de 1, 8 y 16 temporadas de siembra.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^8 &= \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}^{16} &= \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las probabilidades absolutas requeridas se calculan como

$$\mathbf{a}^{(1)} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} = (.30 \quad .60 \quad .1)$$

$$\mathbf{a}^{(8)} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} = (.101753 \quad .525514 \quad .372733)$$

$$\mathbf{a}^{(16)} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix} = (.101659 \quad .52454 \quad .372881)$$

Las filas de \mathbf{P}^8 y el vector de probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(8)}$ son casi idénticos. El resultado es más evidente para \mathbf{P}^{16} . Ello demuestra que, a medida que la cantidad de transiciones aumenta, las probabilidades absolutas se vuelven independientes del $\mathbf{a}^{(0)}$ inicial. Las probabilidades resultantes se conocen como **probabilidades de estado estable**.

Comentarios. Los cálculos asociados con las cadenas de Markov son tediosos. La plantilla *exelMarkovChains.xls* proporciona una hoja de cálculo general fácil de usar para realizar estos cálculos (vea el *Momento de Excel* después del ejemplo 17.4-1).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.2A

1. Considere el problema 1, conjunto 17.1a. Determine la probabilidad de que el profesor compre el modelo actual en 4 años.
- *2. Considere el problema 2, conjunto 17.1a. Si la patrulla se encuentra en este momento en la escena de una llamada, determine la probabilidad de que haga una aprehensión en dos patrullajes.
3. Considere el problema 3, conjunto 17.1a. Suponga que actualmente Banco 1 tiene préstamos pendientes que ascienden a \$500,000. De éstos, \$100,000 son nuevos, \$50,000 están retrasados un trimestre, \$150,000 están retrasados dos trimestres, \$100,000 están retrasados tres trimestres, y el resto están retrasados más de tres trimestres. ¿Cuál será la situación de estos préstamos después de dos ciclos de préstamos?
4. Considere el problema 4, conjunto 17.1a.
 - Para un paciente al que se está tratando con diálisis, ¿cuál es la probabilidad de recibir un trasplante en dos años?
 - Para un paciente que ha sobrevivido más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que sobreviva cuatro años más?
5. Un juego de lanzamiento de dados utiliza una cuadrícula de cuatro casillas. Las casillas están designadas en sentido horario como A , B , C y D con retribuciones monetarias de \$4, - \$2, - \$6 y \$9, respectivamente. Comenzando en la casilla A , lanzamos el dado para determinar la siguiente casilla a la que nos moveremos en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si el dado muestra 2, nos movemos a la casilla C . El juego se repite utilizando la última casilla como punto inicial.
 - Expresé el problema como una cadena de Markov.
 - Determine la ganancia o pérdida esperadas después de lanzar el dado 5 veces.

17.3 CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS EN UNA CADENA DE MARKOV

Los estados de una cadena de Markov se clasifican con base en la probabilidad de transición p_{ij} de \mathbf{P} .

1. Un estado j es **absorbente** si está seguro de regresar a sí mismo en una transición; es decir, $p_{jj} = 1$.
2. Un estado j es **transitorio** si puede llegar a otro estado pero no puede regresar desde otro estado. Matemáticamente, esto sucederá si $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, para todas las i .
3. Un estado j es **recurrente** si la probabilidad de ser revisitado desde otros estados es 1. Esto puede suceder si, y sólo si, el estado no es transitorio.
4. Un estado j es **periódico** con periodo de $t > 1$ si es posible un retorno sólo en $t, 2t, 3t, \dots$ pasos. Esto significa que $p_{jj}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible entre t .

Con base en las definiciones dadas, una cadena de Markov *finita* no puede constar de todos los estados transitorios porque, por definición, la propiedad transitoria requiere entrar a otro estado de “atrapamiento” y nunca volver a visitar el estado transitorio. El estado de “atrapamiento” no necesita ser un solo estado absorbente. Por ejemplo, considere la cadena

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ 0 & 0 & .4 & .6 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque no se puede volver a entrar a ellos una vez que el sistema se queda “atrapado” en los estados 3 y 4. Un **conjunto cerrado** lo constituyen los estados 3 y 4, que en cierta forma desempeñan el papel de un estado absorbente. Por definición, todos los estados de un **conjunto cerrado** deben **comunicarse**, lo cual significa que es posible ir de cualquier estado a cualquier otro estado del conjunto en una o más transiciones; es decir, $p_{ij}^{(n)} > 0$ para todas las $i \neq j$ y $n \geq 1$. Observe que cada uno de los estados 3 y 4 puede ser absorbente si $p_{33} = p_{44}$.

Se dice que una cadena de Markov es **ergódica** si todos los estados son **recurrentes y aperiódica** (no periódica). En este caso las probabilidades absolutas después de n transiciones, $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$, siempre convergen de forma única a una distribución limitante (estado estable) que es independiente de las probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)}$, como se demostrará en la sección 17.4.

Ejemplo 17.3-1 (Estados absorbentes y transitorios)

Considere la cadena de Markov del jardinero sin fertilizante:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque llegan al estado 3 pero nunca se puede regresar a ellos. El estado 3 es absorbente porque $p_{33} = 1$. Estas clasificaciones también pueden verse cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ es calculada. Por ejemplo, considere

$$\mathbf{P}^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado muestra que, a la larga, la probabilidad de volver a entrar al estado 1 o 2 es cero, y que la probabilidad de quedarse "atrapado" en el estado absorbente 3 es segura.

Ejemplo 17.3-2 (Estados periódicos)

Podemos probar la periodicidad de un estado calculando \mathbf{P}^n y observando los valores de $p_{ii}^{(n)}$ para $n = 2, 3, 4, \dots$. Estos valores serán positivos sólo en el período correspondiente del estado. Por ejemplo, consideremos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & .6 & .4 \\ 0 & 1 & 0 \\ .6 & .4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} .24 & .76 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .76 & .24 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & .904 & .0960 \\ 0 & 1 & 0 \\ .144 & .856 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} .0567 & .9424 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .9424 & .0576 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & .97696 & .02304 \\ 0 & 1 & 0 \\ .03456 & .96544 & 0 \end{pmatrix}$$

Los resultados muestran que p_{11} y p_{33} son positivos para valores impares de n y cero en otro respecto (puede confirmar esta observación calculando \mathbf{P}^n con $n > 5$). Esto significa que el período de cada uno de los estados 1 y 3 es $t = 2$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.3A

1. Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov. Si un estado es periódico, determine su período:

*(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} .1 & 0 & .9 \\ .7 & .3 & 0 \\ .2 & .7 & .1 \end{pmatrix}$

- Un juego implica cuatro bolas y dos urnas. Una bola en cualquier urna tiene una probabilidad de 50-50 de ser transferida a la otra urna. Represente el juego como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.
- Un museo consta de seis salas de tamaños iguales dispuestas en forma de una cuadrícula con tres filas y dos columnas. Cada muro interior tiene una puerta que conecta con las salas adyacentes. Los guardias se desplazan por las salas a través de las puertas interiores. Represente los movimientos de cada guardia en el museo como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.

17.4 PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE Y TIEMPOS DE RETORNO MEDIOS DE CADENAS ERGÓDICAS

En una cadena ergódica, las probabilidades de estado estable se definen como

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Estas probabilidades, las cuales son independientes de $\{a_i^{(0)}\}$, se pueden determinar de las ecuaciones

$$\pi = \pi P$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

(Una de las ecuaciones en $\pi = \pi P$ es redundante). Lo que $\pi = \pi P$ dice es que las probabilidades π permanecen sin cambiar después de una transición adicional, y por esta razón representan la distribución de estado estable.

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Esto se conoce como **tiempo medio del primer retorno o tiempo medio de recurrencia**, y se calcula en una cadena de Markov de n estados como

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 17.4-1

Para determinar la distribución de probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3), tenemos

$$(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) \begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

O bien,

$$\pi_1 = .3\pi_1 + .1\pi_2 + .05\pi_3$$

$$\pi_2 = .6\pi_1 + .6\pi_2 + .4\pi_3$$

$$\pi_3 = .1\pi_1 + .3\pi_2 + .55\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

(Cualquiera de las primeras tres ecuaciones es redundante). La solución es $\pi_1 = 0.1017$, $\pi_2 = 0.5254$ y $\pi_3 = 0.3729$; es decir que a la larga la condición de la tierra será buena 10% del tiempo, regular 52% del tiempo, y mala 37% del tiempo.

Los tiempos medios del primer retorno se calculan como

$$\mu_{11} = \frac{1}{.1017} = 9.83, \mu_{22} = \frac{1}{.5254} = 1.9, \mu_{33} = \frac{1}{.3729} = 2.68$$

Esto quiere decir que, en promedio, se requerirán aproximadamente 10 temporadas de siembra para que la tierra regrese a un *buen* estado, 2 temporadas para que regrese al estado *regular*, y 3 temporadas para que regrese a un estado *malo*. Estos resultados apuntan hacia un panorama menos promisorio para la condición de la tierra con el uso propuesto de fertilizantes. Un programa más agresivo debe mejorar el panorama. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición en la que las probabilidades de trasladarse a un buen estado son más altas que en la matriz previa:

$$P = \begin{pmatrix} .35 & .6 & .05 \\ .3 & .6 & .1 \\ .25 & .4 & .35 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\pi_1 = 0.31$, $\pi_2 = 0.58$, y $\pi_3 = 0.11$, lo cual da $\mu_{11} = 3.2$, $\mu_{22} = 1.7$ y $\mu_{33} = 8.9$, un cambio reversible del sombrío panorama dado anteriormente.

Momento de Excel

La figura 17.1 aplica la plantilla general *excelMarkovChains.xls* al ejemplo del jardinero. La plantilla calcula las probabilidades absolutas y de estado constante de n pasos de cualquier cadena de Markov. Los pasos son autoexplicativos. En el paso 2a, puede invalidar los códigos de estado preestablecidos (1,2,3,...) por un código de su elección, y luego hacer clic en el botón ubicado en la celda L2. Los nuevos códigos se transferirán automáticamente a través de la hoja de cálculo cuando ejecute el paso 4.

FIGURA 17.1

Hoja de cálculo Excel para realizar los cálculos de cadena de Markov (archivo *excelMarkovChains.xls*)

| Markov Chains | | | | | | | |
|---------------|----------------|-----------------------------|----------|-------------|-----------------|-----------------------------------|---------|
| 1 | A | B | C | D | E | F | G |
| 2 | Step 1: | Number of states = | | 3 | Step 2a: | Initial probabilities: | |
| 3 | Step 2: | Click to enter Markov chain | | | Codes: | 1 | 2 |
| 4 | | | | | | 1 | 0 |
| 5 | Step 3: | Number of transitions | | 8 | Step 2b: | Input Markov chain: | |
| 6 | Step 4: | Click to execute | | | | 1 | 2 |
| 7 | | | | | | 1 | 0.3 |
| 8 | Output Results | | | | | 2 | 0.1 |
| 9 | | Absolute | Steady | Mean return | | 3 | 0.05 |
| 10 | State | (8-step) | state | time | | Output (8-step) transition matrix | |
| 11 | 1 | 0.10175 | 0.101695 | 9.8333254 | | 1 | 2 |
| 12 | 2 | 0.52551 | 0.525424 | 1.9032248 | | 2 | 0.1017 |
| 13 | 3 | 0.37273 | 0.372882 | 2.6818168 | | 3 | 0.10167 |
| 14 | | | | | | | |

Ejemplo 17.4-2 (Modelo de costos)

Considere el problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3). El jardín necesita dos sacos de fertilizante si la tierra es buena. La cantidad se incrementa en 25% si la tierra es regular, y 60% si la tierra es mala. El costo del fertilizante es de \$50 por saco. El jardinero estima un rendimiento anual de \$250 si no se utiliza fertilizante, y de \$420 si se aplica el fertilizante. ¿Es rentable utilizar fertilizante?

Aplicando las probabilidades de estado constante del ejemplo 17.4-1, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Costo del fertilizante anual esperado} &= 2 \times \$50 \times \pi_1 + (1.25 \times 2) \times \$50 \times \pi_2 \\ &\quad + (1.60 \times 2) \times \$50 \times \pi_3 \\ &= 100 \times .1017 + 125 \times .5254 + 160 \times .3729 \\ &= \$135.51\end{aligned}$$

Incremento diferencial del valor anual del rendimiento = \$420 – \$250 = \$170. Se recomienda el uso del fertilizante.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4A

- *1. En un día soleado, MiniGolf puede tener ingresos de \$2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidades de que mañana llueva, y 30% de probabilidades de que esté soleado. Seguirá lloviendo hasta el día siguiente con una probabilidad de .8, pero con 10% de probabilidades de que esté soleado.
 - (a) Determine los ingresos diarios esperados para MiniGolf.
 - (b) Determine el promedio de días que no estarán soleados.
2. A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga \$10,00 por una comida mexicana, \$15,00 por una comida italiana, \$9,00 por una comida china, y \$11,00 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios de Joe son predecibles: Hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.
 - (a) ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?
 - (b) ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?
3. Algunos exconvictos pasan el resto de su vida libre en juicio, en la cárcel, o en libertad condicional. Al inicio de cada año, las estadísticas muestran que hay 50% de probabilidades de que un exconvicto libre cometía un nuevo delito y de que sea procesado. El juez puede enviar al exconvicto a la cárcel con una probabilidad de .6, u otorgarle la libertad condicional con probabilidad de .4. Un vez que están en la cárcel, 10% de los exconvictos serán puestos en libertad por buena conducta. De los que están en libertad condicional, 10% cometen nuevos delitos y son arraigados para ser procesados, 50% regresan para cumplir su sentencia por violar las órdenes de libertad condicional, y 10% serán puestos en libertad por falta de pruebas. Los contribuyentes solventan el costo asociado con el castigo de los exconvictos. Se estima que un juicio costará aproximadamente \$5000, una sentencia de cárcel promedio costará \$20,000, y un período de libertad condicional promedio costará \$2000.
 - (a) Determine el costo esperado por exconvicto.
 - (b) ¿Con qué frecuencia regresa un exconvicto a la cárcel?

4. Una tienda vende un artículo especial cuya demanda diaria puede ser descrita por la siguiente función de densidad de probabilidad:

| | | | | |
|----------------------|----|----|----|----|
| Demandada diaria D | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P\{D\}$ | .1 | .3 | .4 | .2 |

La tienda está comparando dos políticas de colocar pedidos: (1) Pedir hasta 3 unidades cada 3 días si el nivel de las existencias es menor que 2; de lo contrario, no pedir. (2) Pedir 3 unidades cada 3 días si el nivel del inventario es cero; de lo contrario, no pedir. El costo fijo por ordenar por envío es de \$300, y el costo de retener las unidades excedentes por unidad por día es de \$3. Se espera una entrega inmediata.

- (a) ¿Cuál política debe adoptar la tienda para minimizar el costo diario esperado total de pedir y retener?
 - (b) Para las dos políticas, compare el promedio de días entre agotamientos sucesivos del inventario.
- *5. Hay tres categorías de filtro del impuesto sobre la renta en los Estados Unidos: los que nunca evaden impuestos, lo que en ocasiones lo hacen, y los que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que de los que no evadieron impuestos el año pasado, 95% continuarán en la misma categoría este año; 4% se moverá a la categoría "a veces", y el resto se moverá a la categoría "siempre". Para los que a veces evaden impuestos, 6% se moverá a "nunca", 90% permanecerá igual, y 4% se moverá a "siempre". Por lo que se refiere a los evasores de "siempre", los porcentajes respectivos son 0, 10 y 90%.
- (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
 - (b) A la larga, ¿cuáles serían los porcentajes de las categorías de evasión de impuestos de "nunca", "a veces" y "siempre"?
 - (c) Las estadísticas muestran que un contribuyente en la categoría "a veces" evade impuestos que suman aproximadamente \$5000 por declaración y en la categoría "siempre" suman aproximadamente \$12,000. Suponiendo que la población de contribuyentes es de 70 millones y la tasa del impuesto sobre la renta promedio es 12%, determine la reducción anual de los impuestos recolectados debido a la evasión.
6. Warehouzer posee un bosque renovable para plantar pinos. Los árboles caen dentro de una de cuatro categorías según su edad: bebés (0-5 años); jóvenes (5-10 años); maduros (11-15 años), y viejos (más de 15 años). Diez por ciento de los árboles bebés y jóvenes se muere antes de llegar al siguiente grupo de edad. Por lo que se refiere a los árboles maduros y viejos, 50% se talan y sólo 5% se mueren. Debido a la naturaleza de renovación de la operación, todos los árboles talados y muertos son reemplazados con árboles nuevos (bebés) al final del siguiente ciclo de cinco años.
- (a) Exprese la dinámica del bosque como una cadena de Markov.
 - (b) Si el bosque puede contener un total de 500,000 árboles, determine la composición a largo plazo del bosque.
 - (c) Si un árbol nuevo se planta a un costo de \$1 por árbol y uno talado tiene un valor de \$20 en el mercado, determine el ingreso anual promedio derivado de la operación del bosque.
7. La dinámica de la población se ve afectada por el continuo movimiento de personas que busca una mejor calidad de vida o un mejor empleo. La ciudad de Mobile tiene una población citadina interna, una población suburbana y una población rural circundante. El censo levantado a intervalos de 10 años muestra que 10% de la población rural se traslada a los suburbios y 5% al interior de la ciudad. En cuanto a la población suburbana, 30% se traslada a las áreas rurales y 15% al interior de la ciudad. La población del interior de la ciudad no se cambiaría a los suburbios, pero 20% sí se cambiaría a la tranquila vida rural.
- (a) Exprese la dinámica de la población como una cadena de Markov.
 - (b) Si el área metropolitana de Mobile en la actualidad incluye 20,000 residentes rurales, 100,000 suburbanos, y 30,000 habitantes citadinos, ¿cuál será la distribución de la población en 10 años? ¿En 20 años?
 - (c) Determine el panorama de la población de Mobile a largo plazo.

8. Una agencia de renta de automóviles tiene oficinas en Phoenix, Denver, Chicago y Atlanta. La agencia permite rentas en una y en dos direcciones de modo que los automóviles rentados en un lugar pueden terminar en otro. Las estadísticas muestran que al final de cada semana 70% de todas las rentas son en dos direcciones. En cuanto a las rentas en una dirección: Desde Phoenix, 20% van a Denver, 60% a Chicago, y el resto va a Atlanta; desde Denver, 40% va a Atlanta y 60% a Chicago; de Chicago, 50% va a Atlanta y el resto a Denver; y desde Atlanta, 80% va a Chicago, 10% a Denver, y 10% a Phoenix.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Si la agencia inicia la semana con 100 autos en cada lugar, ¿cómo será la distribución en dos semanas?
 - Si cada lugar está diseñado para manejar un máximo de 110 autos, ¿habrá a la larga un problema de disponibilidad de espacio en cualquiera de los lugares?
 - Determine el promedio de semanas que transcurren antes de que un auto regrese a su lugar de origen.
9. Una librería repone las existencias de un libro popular a nivel de 100 ejemplares al inicio de cada día. Los datos de los últimos 30 días proporciona las siguientes posiciones de inventario al final del día: 1,2,0,3,1,0,0,3,0,1,1,3,2,3,3,2,1,0,2,0,1,3,0,0,3,2,1,2,2.
- Represente el inventario diario como una cadena de Markov.
 - Determine la probabilidad de estado estable de que la librería se quede sin libros en cualquier día.
 - Determine el inventario diario esperado.
 - Determine el promedio de días entre inventarios cero sucesivos.
10. En el problema 9, suponga que la demanda diaria puede exceder la oferta, lo cual da lugar a faltantes (inventario negativo). El nivel del inventario al final del día durante los 30 días pasados se da como: 1,2,0, -2,2,2, -1, -1,3,0,0,1, -1, -2,3,3, -2, -1,0,2,0, -1,3,0,0,3, -1,1,2, -2.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Determine la probabilidad a largo plazo de un excedente de inventario en un día.
 - Determine la probabilidad a largo plazo de una escasez de inventario en un día.
 - Determine la probabilidad a largo plazo de que la oferta diaria satisfaga la demanda diaria con exactitud.
 - Si el costo de retención por libro excedente (al final del día) es de \$15 por día y el costo de penalización por libro faltante es de \$4.00 por día, determine el costo del inventario esperado por día.
11. Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de .15, 1 con probabilidad de .2, 2 con probabilidad de .35, 3 con probabilidad de .25, y 4 con probabilidad de .05. La demanda insatisfecha se deja pendiente. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo pedido siempre regresa las existencias a 5 PC.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.
 - Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.
 - Si el costo fijo de colocar un pedido es de \$200, el costo de retención por PC por semana es de \$5, y el costo de penalización por computadora faltante es de \$20, determine el costo de inventario esperado por semana.
12. Resuelva el problema 11, suponiendo que el tamaño del pedido, cuando se coloca, sea exactamente de 5 piezas.

13. En el problema 12, suponga que la demanda de las PC es de 0,1,2,3,4 o 5 con iguales probabilidades. Suponga además que la demanda no satisfecha no se ha dejado pendiente, pero que aún se incurre en un costo de penalización por faltante.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Determine la probabilidad a largo plazo de que ocurra un faltante.
 - Si el costo fijo de colocación de un pedido es de \$200, el costo de retención por computadora por semana es de \$5, y el costo de penalización por faltante de PC por semana es de \$20, determine los costos de colocación de pedido e inventario esperados por semana.
14. El gobierno federal trata de promover las actividades de las pequeñas empresas otorgando concesiones anuales para proyectos. Todas las licitaciones son competitivas, pero la probabilidad de recibir una concesión es máxima si el propietario no ha recibido alguna durante los últimos tres años, y mínima si se dieron otorgamientos en cada uno de los últimos tres años. De manera específica, la probabilidad de obtener una concesión si no se ha recibido ninguna en los últimos tres años es de .9. Se reduce a .8 si se recibió una, a .7 si se recibieron dos, y de sólo .5 si se recibieron tres.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Determine la cantidad esperada de otorgamientos por propietario por año.
15. Jim Bob ha recibido muchas multas por violaciones al reglamento de tránsito. Desafortunadamente para Jim Bob, la tecnología moderna puede seguir el rastro de sus multas anteriores. En cuanto acumula 4 infracciones, su licencia de manejo es revocada hasta que completa una nueva clase de educación vial en cuyo caso comienza con un historial limpio. Jim Bob es más imprudente inmediatamente después de completar la clase de educación vial, e invariablemente la policía lo detiene con 50% de probabilidades de ser multado. Después de cada nueva multa, trata de ser más cuidadoso, lo cual reduce la probabilidad de una multa en .1.
- Exprese el problema de Jim Bob como una cadena de Markov.
 - ¿Cuál es el promedio de veces que Jim Bob es detenido por la policía antes de que su licencia sea revocada de nuevo?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que Jim Bob pierda su licencia?
 - Si cada multa es de \$100, ¿cuánto, en promedio, paga Jim Bob entre suspensiones sucesivas de su licencia?
16. El clima diario en Fayetteville, Arkansas, puede ser nublado (C), soleado (S), lluvioso (R), o ventoso (W). Los registros a lo largo de los últimos 90 días son
 C C S W R R W S S C C C R C S S W R C R R R R R C W S S W R W C C S
 W R R W S S C C C R C S S W S S W R W C R R R R C W S S W R W C C S W R R W S S S. Basado en estos registros, use una cadena de Markov para determinar la probabilidad de que un día típico en Fayetteville pueda estar nublado, soleado, lluvioso o ventoso.

17.5 TIEMPO DEL PRIMER PASO

En la sección 17.4 utilizamos las probabilidades de estado estable para calcular μ_{ij} , el *tiempo medio del primer retorno* para el estado j . En esta sección nos interesa el *tiempo medio del primer paso* $\mu_{ij}^{(n)}$, definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez al estado j desde el estado i . Los cálculos tienen su origen en la determinación de la probabilidad de *al menos* un paso del estado i al estado j , definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, donde $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad del primer paso del estado i al estado j en n transiciones. Se puede determinar una expresión para $f_{ij}^{(n)}$ recursivamente a partir de

$$f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se supone que la matriz de transiciones $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ tiene m estados.

- Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $\mu_{ij} = \infty$.
- Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el *tiempo medio del primer paso* del estado i al estado j se calcula como

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

Una forma más simple de determinar el tiempo medio del primer paso de todos los estados en una matriz de n transiciones, \mathbf{P} , es utilizar la siguiente fórmula basada en una matriz:

$$\|\mu_{ij}\| = (\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1} \mathbf{1}, j \neq i$$

donde

\mathbf{I} = matriz de identidad ($m - 1$)

\mathbf{N}_j = Matriz de transiciones \mathbf{P} sin su fila j -ésima y columna j -ésima del estado destino j

$\mathbf{1}$ = vector columna ($m - 1$) con todos los elementos iguales a 1

La operación matricial $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1} \mathbf{1}$ suma en esencia las columnas de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$.

Ejemplo 17.5-1

Considere una vez más la cadena de Markov del jardinero con fertilizantes.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

Para demostrar el cálculo del tiempo del primer paso a un estado específico desde todos los demás, considere el paso de los estados 2 y 3, (regular y malo) al estado 1 (bueno). Por lo tanto, $j = 1$ y

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} .60 & .30 \\ .40 & .55 \end{pmatrix}, (\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} .4 & -.3 \\ -.4 & .45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

De modo que,

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.50 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se requerirán 12.5 temporadas en promedio, para pasar la tierra regular a tierra buena, y 13.34 temporadas para ir de la tierra mala a la tierra buena.

Pueden realizarse cálculos similares para obtener μ_{12} y μ_{32} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_2)$ y μ_{13} y μ_{23} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_3)$, como se muestra a continuación.

Momento de Excel

Se puede usar la plantilla *excelFirstPassTime.xls* para realizar los cálculos de los tiempos medios del primer paso. La figura 17.2 muestra los cálculos asociados con el ejemplo 17.5-1. El paso 2 de la hoja pone automáticamente la matriz de transiciones \mathbf{P} en cero según el tamaño dado en el

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|--|--------------------------------|------|----------|------------------------|----------|-----------|----------|
| 1 | First Passage Times in Ergodic and Absorbing Markov Chains | | | | | | | |
| 2 | Step 1: | Number of states = | | 3 | Step 2a: | | | |
| 4 | Step 2: | Click to enter Markov chain, P | | Step 3: | Click to compute I - P | | | |
| 5 | Matrix P: | | | | | | | |
| 6 | Codes | 1 | 2 | 3 | | | | |
| 7 | 1 | 0.3 | 0.6 | 0.1 | | | | |
| 8 | 2 | 0.1 | 0.6 | 0.3 | | | | |
| 9 | 3 | 0.05 | 0.4 | 0.55 | | | | |
| 10 | Matrix I-P: | | | | | | | |
| 11 | | 1 | 2 | 3 | | | | |
| 12 | 1 | 0.7 | -0.6 | -0.1 | | | | |
| 13 | 2 | -0.1 | 0.4 | -0.3 | | | | |
| 14 | 3 | -0.05 | -0.4 | 0.45 | | | | |
| 15 | Step 4: Perform first passage time calculations below: | | | | | | | |
| 16 | I-N | | | inv(I-N) | | | | Mu |
| 17 | i=1 | 2 | 3 | | 2 | 3 | | 1 |
| 18 | 2 | 0.4 | -0.3 | | 2 | 7.5 | 5 | 12.5 |
| 19 | 3 | -0.4 | 0.45 | | 3 | 6.666667 | 6.6666667 | 13.33333 |
| 20 | | | | | | | | |
| 21 | i=2 | 1 | 3 | | 1 | 3 | | 2 |
| 22 | | 0.7 | -0.1 | | 1 | 1.451613 | 0.3225806 | 1.774194 |
| 23 | | -0.05 | 0.45 | | 3 | 0.16129 | 2.2580645 | 2.419355 |
| 24 | | | | | | | | |
| 25 | i=3 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 3 |
| 26 | | 1 | 0.7 | -0.6 | 1 | 1.818182 | 2.7272727 | 4.545455 |
| 27 | | 2 | -0.1 | 0.4 | 2 | 0.454545 | 3.1818182 | 3.636364 |

FIGURA 17.2

Cálculos del tiempo del primer paso del ejemplo 17.5-1 utilizando la hoja de cálculo de Excel (archivo *excelFirstPassTime.xls*)

paso 1. En el paso 2a, puede anular los códigos de estado preestablecidos en la fila 6 con un código de su elección. El código se transfiere entonces automáticamente por toda la hoja de cálculo. Despues de que ingrese las probabilidades de transición, el paso 3 crea la matriz $I - P$. El paso 4 se realiza por completo utilizando $I - P$ como el origen para crear $I - N_j$ ($j = 1, 2$ y 3). Puede hacerlo copiando toda la $I - P$ y sus códigos de estado y pegándola en la ubicación destino y luego utilizando las operaciones apropiadas de Excel Cut and Paste para liberar $I - P$ de la fila j y la columna j . Por ejemplo, para crear $I - N_2$, primero copie $I - P$ y sus códigos de estado en la ubicación destino seleccionada. A continuación, resalte la columna 3 de la matriz copiada, córtela, y péguela en la columna 2, y así se elimina la columna 2. Asimismo, resalte ahora la fila 3 de la matriz resultante, córtela, y luego péguela en la fila 2, y así se elimina la fila 2. La $I - N_2$ creada automáticamente realiza su código de estado correcto.

Una vez que se crea $I - N_j$, se calcula la inversa $(I - N_j)^{-1}$ en la ubicación destino. Las operaciones asociadas se demuestran invirtiendo $(I - N_1)$ en la figura 17.2:

- Ingrese la fórmula = MINVERSE(B18:C19) en E18.
- Resalte E18:F19, el área donde residirá la inversa.
- Pulse F2.
- Pulse CTRL + SHIFT + ENTER.

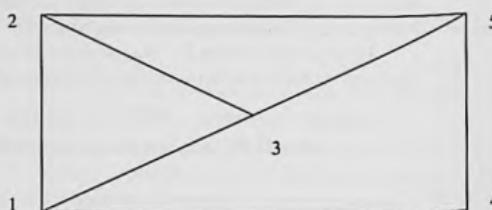
Los valores del primer paso de los estados 2 y 3 al estado 1 se calculan entonces sumando las filas de la inversa, es decir, ingresando =SUM(E18:F18) en H18 y luego copiando H18 en H19. Después de crear $I - N$ para $i = 2, e i = 3$, los cálculos restantes se realizan de forma automática copiando E18:F19 en E22:F23 y E26:F27, y copiando H18:H19 en H22:H23 y H26:H27.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.5A

- *1. Un laberinto se compone de las rutas mostradas en la figura 17.3. La intersección 1 es la entrada al laberinto, y la intersección 5 es la salida. En cualquier intersección, el ratón tiene probabilidades iguales de seleccionar cualquiera de las rutas disponibles. Cuando el ratón llega a la intersección 5, el experimento se repite volviendo a entrar al laberinto por la intersección 1.
 - (a) Exprese el laberinto como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de que, comenzando en la intersección 1, el ratón llegue a la salida después de tres intentos.
 - (c) Determine la probabilidad a largo plazo de que el ratón localice la intersección de salida.
 - (d) Determine el promedio de intentos necesario para llegar al punto de salida desde la intersección 1.
2. En el problema 1, por intuición, si se agregan más opciones (rutas) al laberinto, ¿se incrementará o reducirá el promedio de intentos necesarios para llegar al punto de salida? Demuestre la respuesta agregando una ruta entre las intersecciones 3 y 4.
3. Jim y Joe comienzan un juego con cinco fichas, tres para Jim y dos para Joe. Se lanza una moneda, y si el resultado es cara, Jim le da a Joe una ficha, de lo contrario Jim obtiene una ficha de Joe. El juego termina cuando Jim o Joe tiene todas las fichas. En este punto, hay 30% de probabilidades de que Jim y Joe continúen con el juego, comenzando de nuevo con tres fichas para Jim y dos para Joe.
 - (a) Represente el juego como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de que Joe gane con tres lanzamientos de la moneda. De que Jim gane haciendo lo mismo.
 - (c) Determine la probabilidad de que un juego termine a favor de Jim. A favor de Joe.
 - (d) Determine el promedio de lanzamientos de moneda necesario antes de que Jim gane. Joe gana.
4. Un jardinero aficionado con capacitación en botánica está buscando la forma de fecundar por polinización cruzada flores de lis rosas con flores de lis rojas, naranjas y blancas. Experimentos anuales muestran que las rosas pueden producir 60% rosas y 40% blancas; las rojas pueden producir 40% rojas, 50% rosas y 10% naranjas, las naranjas pueden producir 25% naranjas, 50% rosas y 25% blancas, y las blancas pueden producir 50% rosas y 50% blancas.
 - (a) Exprese la situación del jardinero como una cadena de Markov.
 - (b) Si el jardinero inició la fecundación por polinización cruzada con números iguales de cada tipo de flores de lis, ¿cómo sería la distribución después de 5 años? A largo plazo?
 - (c) ¿Cuántos años en promedio les llevaría a las flores de lis rojas producir flores de lis blancas?

FIGURA 17.3

Laberinto del ratón del problema 1, conjunto 17.5a



*5. Los clientes pueden ser leales a marcas de productos pero pueden ser persuadidos mediante publicidad y mercadotecnia inteligentes para que cambien de marcas. Considere el caso de tres marcas: A, B y C. Los clientes que se "mantienen" leales a una marca dada se estiman en 75%, con un margen de sólo 25% para que sus competidores hagan un cambio. Los competidores lanzan sus campañas publicitarias una vez al año. Para los clientes de la marca A, las probabilidades de que cambien a las marcas B y C son de .1 y .15, respectivamente. Los clientes de la marca B son propensos a cambiar a las marcas A y C, con las siguientes probabilidades: .2 y .05 respectivamente. Los clientes de la marca C pueden cambiar a la marcas A y B con probabilidades iguales.

- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
- (b) A largo plazo, ¿qué tanto segmento del mercado dominará cada marca?
- (c) ¿Cuánto tiempo en promedio le llevará a un cliente de la marca A cambiar a la marca B?

17.6 ANÁLISIS DE LOS ESTADOS ABSORBENTES

En el problema del jardinero, sin fertilizante la matriz de transición se da como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 (condiciones de tierra buena y regular) son *transitorios*, y el estado 3 (condición de tierra mala) es *absorbente*, porque una vez que llega a ese estado el sistema permanecerá allí por tiempo indefinido. Una cadena de Markov puede tener más de un estado absorbente. Por ejemplo, un empleado puede permanecer con la misma compañía hasta su retiro o renunciar antes (dos estados absorbentes). En estos tipos de cadenas, nos interesa determinar la probabilidad de llegar a la absorción y el número esperado de transiciones para llegar a ella, dado que el sistema se inicia en un estado transitorio específico. Por ejemplo, en la cadena de Markov antes dada, si actualmente la tierra es buena, nos interesaría determinar el promedio de temporadas de siembra hasta que la tierra se vuelva mala, e igualmente la probabilidad asociada con esta transición.

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. En primer lugar, la cadena de Markov se particiona como sigue:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sureste de la nueva matriz. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} .2 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .5 & .3 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matriz \mathbf{P} puede reacomodarse y particionarse como

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & .2 & .4 & .3 & .1 \\ 3 & .5 & 0 & .3 & .2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, tenemos

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} .2 & .4 \\ .5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} .3 & .1 \\ .3 & .2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la definición de \mathbf{A} y \mathbf{N} y el vector columna unitario $\mathbf{1}$ (de todos los elementos 1), se puede demostrar que:

Tiempo esperado en el estado j iniciado en el estado i = elemento (i,j) de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$

Tiempo esperado para la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1} \mathbf{1}$

Probabilidad de la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1} \mathbf{A}$

Ejemplo 17.6-1¹

Se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, I y II. La inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas. Hay 5% de probabilidades de que una unidad sea desechar antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay 3% de probabilidades de que la unidad sea desechar, y 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. De lo contrario, una unidad que pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

- (a) Para una pieza que se inicia en la máquina I, determine el promedio de visitas a cada estado.
- (b) Si un lote de 1000 unidades se inicia en la máquina I, determine el promedio de unidades buenas completadas.

Para la cadena de Markov, el proceso tiene 6 estados: iniciar en I (s_1), inspección después de I (i_1), iniciar en II (s_2), inspección después de II (i_2), desechar después de la inspección I o II (J), y buena después de II (G). Los estados J y G son estados absorbentes. La matriz de transiciones se da como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} s_1 & i_1 & s_2 & i_2 & J & G \\ s_1 & 0 & .95 & 0 & 0 & .05 & 0 \\ i_1 & .07 & 0 & .9 & 0 & .03 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 & .95 & .05 & 0 \\ i_2 & 0 & 0 & .07 & 0 & .03 & .9 \\ \hline J & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Adaptado de J. Shamblin y G. Stevens, *Operations Research: A Fundamental Approach*, McGraw-Hill, Nueva York, capítulo 4, 1974.

Por lo tanto,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} s1 & i1 & s2 & i2 \\ s1 & 0 & .95 & 0 & 0 \\ i1 & .07 & 0 & .9 & 0 \\ s2 & 0 & 0 & 0 & .95 \\ i2 & 0 & 0 & .07 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} J & G \\ .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix}$$

Utilizando los cálculos realizados con la plantilla *excelExt7.6-1.xls* (vea *Momento de Excel* después del ejemplo 17.5-1), obtenemos

$$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -.95 & 0 & 0 \\ -.07 & 1 & -.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.95 \\ 0 & 0 & -.07 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & .93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & .93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .16 & .84 \\ .12 & .88 \\ .08 & .92 \\ .04 & .96 \end{pmatrix}$$

La fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ muestra que, en promedio, la máquina I es visitada 1.07 veces, la inspección I es visitada 1.02 veces, la máquina II es visitada .98 veces, y la inspección II es visitada .93 veces. La razón por la que el número de visitas en la máquina I y la inspección I sea mayor que 1 son el retragajo y la reinspección. Por otra parte, los valores correspondientes para la máquina II son menores que 1 porque algunas piezas se desechan antes de que lleguen a la máquina II. En realidad, en condiciones perfectas (ningunas piezas se desechan o retrabajan), la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ demostrará que cada estación es visitada exactamente una vez (compruébelo asignando una probabilidad de transición de 1 a todos los estados). Por supuesto, la permanencia en cada estado podría diferir. Por ejemplo, si los tiempos de procesamiento en las máquinas I y II son de 20 y 30 minutos y si los tiempos de inspección en I y II son de 5 y 7 minutos, entonces una pieza que inicia en la máquina I será procesada (es decir, desecharla o terminada) en $(1.07 \times 20) + (1.02 \times 5) + (.98 \times 30) + (.93 \times 7) = 62.41$ minutos.

Para determinar la cantidad de piezas terminadas en un lote inicial de 1000 piezas, podemos ver en la fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$ que

Probabilidad de que una pieza sea desechada = .16

Probabilidad de que una pieza sea terminada = .84

Esto significa que $1000 \times .84 = 840$ piezas serán terminadas en cada lote inicial de 1000.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6A

- En el ejemplo 17.6-1, suponga que el costo de la mano de obra para las máquinas I y II es de \$20 por hora y que para la inspección es de sólo \$18 por hora. Suponga además que se requieren 30 minutos y 20 minutos para procesar una pieza en las máquinas I y II, respectivamente. El tiempo de inspección en cada una de las dos estaciones es de 10 minutos. Determine el costo de la mano de obra asociado con una pieza terminada (buena).

- *2. Cuando pido prestado un libro de la biblioteca de la ciudad, trato de devolverlos después de una semana. Dependiendo del tamaño del libro y de mi tiempo libre, hay 30% de probabilidades de que lo conserve otra semana. Si me lo quedara dos semanas, hay 10% de probabilidades que me lo quede una semana más. En ninguna condición me lo quedo más de tres semanas.
- Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - Determine el promedio de semanas antes de devolver el libro a la biblioteca.
3. En el Casino del Río, un apostador puede apostar en dólares enteros. Cada apuesta gana \$1 con probabilidad de .4 o pierde \$1 con probabilidad de .6. Comenzando con tres dólares, el apostador se retirará si pierde todo el dinero o bien lo duplica.
- Exprese el problema como una cadena de Markov.
 - Determine el promedio de apuestas hasta que el juego termina.
 - Determine la probabilidad de terminar el juego con \$6. De perder los \$3.
4. Jim debe avanzar cinco años para completar su doctorado en la Universidad ABC. Sin embargo le agrada la vida de estudiante y no tiene prisa para obtener su grado. En cualquier año académico, hay 50% de probabilidades de que pueda tomarse un año sabático y 50% de probabilidad de dedicarle tiempo completo a su doctorado. Después de completar tres años académicos, hay 30% de probabilidades de que Jim pueda dar "marcha atrás" y simplemente obtenga una maestría, 20% de probabilidades de que se tome libre el siguiente año pero continuando con el programa de doctorado, y 50% de probabilidades de que asista a la escuela a tiempo completo en busca de su doctorado.
- Exprese la situación de Jim como una cadena de Markov.
 - Determine el número esperado de años académicos antes de que la vida de estudiante de Jim termine.
 - Determine la probabilidad de que Jim termine su ciclo académico con sólo una maestría.
 - Si la beca de Jim desembolsa \$15,000 anuales (pero sólo cuando asiste a la escuela), ¿cuánto deberá pagar antes de que obtenga un grado?
5. Un empleado que ahora tiene 55 años de edad planea retirarse a la edad de 62 pero no ha descartado la posibilidad de hacerlo antes. Al final de cada año pondera sus opciones (y actitud con respecto al trabajo). La probabilidad de renunciar después de un año es de sólo .1, pero parece incrementarse en aproximadamente .01 con cada año más que pasa.
- Exprese el problema como una cadena de Markov.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado permanezca con la compañía hasta que planee su retiro a los 62 años?
 - A los 57 años, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado renuncie?
 - A los 58 años, ¿cuál es el número esperado de años antes de que el empleado quede fuera de la nómina?
6. En el problema 3, conjunto 17.1a,
- Determine el número esperado de trimestres hasta que una deuda se liquide o se pierda como una deuda incobrable.
 - Determine la probabilidad de que un nuevo préstamo se cancele como deuda incobrable. De que se liquide en su totalidad.
 - Si un préstamo tiene seis meses de antigüedad, determine el número de trimestres hasta que su estado se resuelva.
7. En un torneo de tenis de individuales, Andre y John están jugando un partido por el campeonato. El partido se gana cuando uno de los jugadores gana tres de cinco "sets". Las estadísticas muestran que hay 60% de probabilidades de que Andre gane cualquier set.
- Exprese el partido como una cadena de Markov.
 - En promedio, ¿cuánto durará el partido, y cuál es la probabilidad de que Andre gane el campeonato?

- (c) Si el marcador es 1 set a 2 a favor de John, ¿cuál es la probabilidad de que Andre gane?
 (d) En el inciso (c), determine el número promedio de sets hasta que el partido termine e interprete el resultado.
- *8. Los estudiantes en U de A han expresado su disgusto por el rápido paso al cual el departamento de matemáticas está impartiendo el Cal I de un semestre. Para afrontar este problema, el departamento de matemáticas ahora está ofreciendo Cal I en 4 módulos. Los estudiantes establecerán su paso individual para cada módulo y, cuando estén listos, harán un examen que los llevará al siguiente módulo. Los exámenes se aplican una vez cada 4 semanas, de modo que un estudiante diligente puede completar los 4 módulos en un semestre. Después de un par de años con este programa, 20% de los estudiantes completa el primer módulo a tiempo. Los porcentajes para los módulos del 2 al 4 fueron de 22, 25 y 30%, respectivamente.
- Expresa el problema como una cadena de Markov.
 - En promedio, un estudiante que inició el módulo I al principio del semestre actual ¿será capaz de llevar el módulo II el siguiente semestre? (El Cal I es un prerequisito para el Cal II).
 - Un estudiante que haya completado sólo un módulo el semestre anterior ¿será capaz de terminar el Cal I al final del semestre actual?
 - ¿Recomienda aplicar la idea del módulo a otras materias básicas? Explique.
9. En la U de A, la promoción de profesor asistente a profesor asociado requiere el equivalente de cinco puntos (años) de desempeño aceptable. Se realizan revisiones de desempeño una vez al año, y el candidato recibe una calificación promedio, una buena calificación o una calificación excelente. Una calificación promedio equivale a estar a prueba, el candidato no gana puntos hacia la promoción. Una buena calificación equivale a ganar un punto, y una calificación excelente suma dos puntos. Las estadísticas muestran que en cualquier año 10% de los candidatos obtienen una calificación promedio y 70% una buena calificación; el resto obtiene una calificación excelente.
- Expresa el problema como una cadena de Markov.
 - Determine el promedio de años hasta que un nuevo profesor asistente sea promovido.
10. *Pfifer and Carraway (2000)*. Una compañía busca sus clientes por medio de publicidad enviada por correo. Durante el primer año, la probabilidad de que un cliente realice una compra es de .5, la cual se reduce a .4 en el año 2, de .3 en el año 3, y de .2 en el año 4. Si no realiza ninguna compra en cuatro años consecutivos, el cliente es borrado de la lista de correo. Si hace una compra la cuenta regresa a cero.
- Expresa la situación como una cadena de Markov.
 - Determine el número esperado de años que un cliente nuevo permanecerá en la lista de correo.
 - Si un cliente no ha realizado una compra en dos años, determine el número esperado de años que estará en la lista de correo.
11. Una máquina NC está diseñada para que funcione adecuadamente con voltajes de 108 a 112 volts. Si el voltaje se sale de este intervalo, la máquina se detiene. El regulador de voltaje de la máquina puede detectar variaciones en incrementos de un volt. La experiencia muestra que el voltaje cambia cada 15 minutos. Dentro del intervalo permisible (118 a 112 volts) el voltaje puede subir 1 volt, permanecer igual, o bajar un volt, todos con iguales probabilidades.
- Expresa la situación como una cadena de Markov.
 - Determine la probabilidad de que la máquina se detenga a causa de un voltaje bajo. De un voltaje alto.
 - ¿Cuál sería el voltaje ideal que haría que la máquina trabaje durante más tiempo?

12. Considere el problema 4, conjunto 17.1a, que tiene que ver con los pacientes que sufren de falla de riñón. Determine las siguientes medidas:
- (a) Cuántos años puede un paciente permanecer sometido a diálisis.
 - (b) La longevidad de un paciente que inicia un tratamiento de diálisis.
 - (c) La esperanza de vida de un paciente que sobrevive al menos un año o más después de un trasplante.
 - (d) El número esperado de años antes de que un transplantado que sobrevivió al menos 1 año regrese a la diálisis o muera.
 - (e) La calidad de vida para los que sobreviven un año o más después de un trasplante (presumiblemente, pasar pocos años con diálisis significa una mejor calidad de vida).

BIBLIOGRAFÍA

- Bini, D., E. Harold, y J. Palacios, *Numerical Methods for Structured Markov Chains*, Oxford University Press, Nueva York, 2005.
- Cyert, R., H. Davidson, y G. Thompson, "Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains", *Management Science*, vol. 8, núm. 4, págs. 287-303, 1963.
- Pfifer, P., y R. Cassaway, "Modeling Customer Relations with Markov Chains", *Journal of Interactive Marketing*, vol. 14, núm. 2, págs. 43-55, 2000.
- Grimmet, G., y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, Inglaterra, 1992.
- Pliskin, J., y E. Tell, "Using Dialysis Need-Projection Model for Health Planning in Massachusetts", *Interfaces*, vol. 11, núm. 6, págs. 84-99, 1981.
- Stewart, W., *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- Tijms, H., *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, Nueva York, 2003.

CAPÍTULO 18

Sistemas de colas

Aplicación de la vida real. Estudio de un sistema de transporte interno en una planta de manufactura

En una planta de manufactura se utilizan tres camiones para transportar materiales. Los camiones esperan en un lote central de estacionamiento hasta que se les solicita. Un camión que responde a una solicitud viajará a las instalaciones del cliente, transportará una carga a su destino, y luego regresará al lote central. Los departamentos principales que utilizan el servicio son el de producción, taller de reparaciones, y el departamento de mantenimiento. Los usuarios se han quejado por el largo tiempo que esperan a que se desocupe un camión, en especial el departamento de producción, para solicitar que se agregue un cuarto camión a la flotilla. Esta es una aplicación inusual, porque la teoría de colas se utiliza para demostrar que la causa de los largos retrasos es principalmente logística, y que con un simple cambio del procedimiento de operación de la flotilla de camiones no se requiere un cuarto camión. El caso 14 del capítulo 26, en el sitio web, detalla el estudio.

18.1

¿POR QUÉ ESTUDIAR LAS COLAS?

Esperar que nos atiendan es parte de la vida diaria. Esperamos en los restaurantes, hacemos fila para abordar un avión, y nos formamos en la cola para que nos atiendan en dependencias oficiales. El fenómeno de esperar no se limita a los seres humanos: los trabajos esperan para ser procesados, los aviones vuelan en círculos a diferentes alturas hasta que se les permite aterrizar, y los autos se detienen en los semáforos. Eliminar la espera por completo no es una opción factible debido a que el costo de instalación y operación del centro de operación puede ser prohibitivo. Nuestro único recurso es buscar el equilibrio entre el costo de ofrecer un servicio y el de esperar a que lo atiendan. El análisis de las colas es el vehículo para alcanzar esta meta.

El estudio de las colas tiene que ver con la cuantificación del fenómeno de esperar por medio de medidas de desempeño representativas, tales como longitud promedio de la cola, tiempo de espera promedio en la cola, y el uso promedio de la instalación. El siguiente ejemplo demuestra cómo pueden usarse estas medidas para diseñar una instalación de servicio.

Ejemplo 18.1-1

McBurger es un restaurante de comida rápida con tres mostradores de servicio. El gerente desea agilizar el servicio. Un estudio revela la siguiente relación entre la cantidad de mostradores y el tiempo de espera para el servicio:

| | | | | | | | |
|---------------------------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Cantidad de cajeros | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Tiempo de espera promedio (min) | 16.2 | 10.3 | 6.9 | 4.8 | 2.9 | 1.9 | 1.3 |

Un examen de estos datos revela un tiempo de espera promedio de 7 minutos en la situación actual de tres mostradores. Cinco mostradores reducirían la espera a 3 minutos aproximadamente.

Modelo basado en costos. Los resultados del análisis de colas puede incorporarse a un modelo de optimización de costos que busca minimizar la suma del costo de ofrecer el servicio y la espera por parte de los clientes. La figura 18.1 ilustra un modelo de costos típico (en dólares por unidad de tiempo) donde el costo del servicio se incrementa con el aumento del nivel de servicio (por ejemplo la cantidad de mostradores de servicio). Al mismo tiempo, el costo de esperar se reduce con el incremento del nivel de servicio.

El obstáculo principal al implementar modelos de costos es la dificultad de determinar el costo de la espera, sobre todo la que experimentan las personas. Este punto se analiza en la sección 18.9.

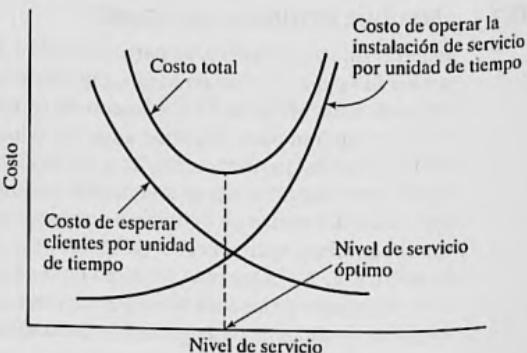
CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.1A

- *1. Suponga que un análisis más a fondo del restaurante McBurger revela los siguientes resultados:

| | | | | | | | |
|---------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| Cantidad de cajeros | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Inactividad (%) | 0 | 8 | 12 | 18 | 29 | 36 | 42 |

FIGURA 18.1

Modelo de decisión de colas basado en costos



- (a) ¿Cuál es la productividad de la operación (expresada como el porcentaje del tiempo que los empleados están ocupados) cuando el número de cajeros es cinco?
- (b) El gerente desea mantener el tiempo de espera promedio en alrededor de 3 minutos y, al mismo tiempo, mantener la eficiencia de la instalación aproximadamente a 90%. ¿Pueden alcanzarse las dos metas? Explique.
2. Acme Metal Jobshop se encuentra en el proceso de comprar un taladro vertical de usos múltiples. Dos modelos, *A* y *B*, están disponibles con costo de operación por hora de \$18 y \$25, respectivamente. El modelo *A* es más lento que el modelo *B*. El análisis de colas de máquinas similares muestra que cuando se utiliza *A*, el número promedio de trabajos en la cola es 4, el cual es 30% mayor que el tamaño de la cola en *B*. Un trabajo retrasado representa un ingreso perdido, el que Acme estima en \$10 por trabajo en espera por hora. ¿Cuál modelo debe comprar Acme?

18.2 ELEMENTOS DE UN MODELO DE COLAS

Los actores principales en una situación de colas son el **cliente** y el **servidor**. Los clientes llegan a una **instalación** (servicio) desde de una **fuente**. Al llegar, un cliente puede ser atendido de inmediato o esperar en una **cola** si la instalación está ocupada. Cuando una instalación completa un servicio, "jala" de forma automática a un cliente que está esperando en la cola, si lo hay. Si la cola está vacía, la instalación se vuelve ociosa hasta que llega un nuevo cliente.

Desde el punto de vista del análisis de colas, la llegada de los clientes está representada por el **tiempo entre llegadas** (tiempo entre llegadas sucesivas), y el servicio se mide por el **tiempo de servicio** por cliente. Por lo general, los tiempos entre llegadas y de servicio son probabilísticos (por ejemplo, la operación de una dependencia oficial) o determinísticos (digamos la llegada de solicitantes para una entrevista de trabajo o para una cita con un médico).

El **tamaño de la cola** desempeña un papel en el análisis de colas. Puede ser finito (como en el área intermedia entre dos máquinas sucesivas), o, para todos los propósitos prácticos, infinita (como en las instalaciones de pedidos por correo).

La **disciplina en colas**, la cual representa el orden en que se seleccionan los clientes en una cola, es un factor importante en el análisis de modelos de colas. La disciplina más común es la de **primero en llegar, primero en ser atendido** (FCFS, por sus siglas en inglés). Entre otras disciplinas está **último en llegar primero en ser atendido** (LCFS, por sus siglas en inglés) y la de **servicio en orden aleatorio** (SIRO, por sus siglas en inglés). Los clientes también pueden ser seleccionados de entre la cola, con base en algún orden de **prioridad**. Por ejemplo, los trabajos urgentes en un taller se procesan antes que los trabajos regulares.

El comportamiento en colas desempeña un papel en el análisis de líneas de espera. Los clientes pueden **cambiarse** de una cola más larga a una más corta para reducir el tiempo de espera, pueden **desistir** del todo de hacer cola debido a la larga tardanza anticipada, o **salirse** de una cola porque han estado esperando demasiado.

El diseño de la instalación de servicio puede incluir servidores paralelos (por ejemplo la operación de una dependencia oficial o un banco). Los servidores también pueden estar dispuestos en serie (a saber, los trabajos procesados en máquinas sucesivas) o estar dispuestos en red (como los ruteadores en una red de computadoras).

La fuente de la cual se generan los clientes puede ser finita o infinita. Una **fuente finita** limita la cantidad de clientes que llegan (por ejemplo las máquinas que solicitan el servicio de un técnico en mantenimiento). Una **fuente infinita** es, para todo propósito práctico, por siempre abundante (como las llamadas que entran a un conmutador telefónico).

Las variaciones en los elementos de una situación de colas originan varios modelos de colas matemáticos. Este capítulo proporciona ejemplos de dichos modelos. Las situaciones de colas complejas que no pueden representarse matemáticamente se suelen analizar por medio de simulación (vea el capítulo 19).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.2A

- En cada una de las siguientes situaciones, identifique al cliente y al servidor:
 - *(a) Aviones que llegan a un aeropuerto.
 - *(b) Sitio de taxis que atiende a pasajeros que esperan.
 - (c) Herramientas verificadas en un taller de maquinado.
 - (d) Cartas procesadas en una oficina postal.
 - (e) Inscripción para clases en una universidad.
 - (f) Casos en cortes legales.
 - (g) Operación de pagar en un supermercado.
 - *(h) Operación de un estacionamiento.
- Para cada una de las situaciones en el problema 1, identifique lo siguiente: (a) la naturaleza de la fuente solicitante (finita o infinita); (b) la naturaleza de los clientes que llegan (individualmente o en masa); (c) el tipo del tiempo entre llegadas (probabilístico o determinístico); (d) la definición y el tipo del tiempo de servicio; (f) la capacidad de la cola (finita o infinita), y (g) disciplina en las colas.
- Estudie el siguiente sistema e identifique las situaciones de colas asociadas. En cada situación, defina los clientes, el(es) servidor(es), la disciplina en colas, el tiempo de servicio, la longitud máxima de la cola y la fuente solicitante.

En un taller se reciben órdenes de trabajo para ser procesadas. Cuando las recibe, el supervisor decide si es un trabajo urgente o regular. Algunas órdenes requieren el uso de una o de varias máquinas idénticas. Las órdenes restantes se procesan en una línea de producción de dos etapas, de la cual dos están disponibles. En cada grupo, se asigna una instalación para manejar los trabajos urgentes.

Los trabajos que llegan a cualquier instalación se procesan en el orden en que llegan. Las órdenes terminadas se envían en cuanto llegan de una zona de envío de capacidad limitada.

Las herramientas afiladas para las diferentes máquinas se abastecen desde un depósito central de herramientas. Cuando una máquina se avería, se solicita una técnico en mantenimiento del centro de servicio para que la repare. Las máquinas que procesan órdenes urgentes reciben prioridades tanto en la adquisición de herramientas nuevas del depósito como en el servicio de reparación.
- ¿Cierto o falso?
 - Un cliente impaciente que espera puede salirse de la cola.
 - Si se anticipa un largo tiempo de espera, un cliente que llega puede desistir de hacer cola.
 - Cambiarse de una cola a otra tiene por objeto reducir el tiempo de espera.
- En cada una de las situaciones descritas en el problema 1, analice la posibilidad de que los clientes se cambien de cola, desistan de hacer cola o se salgan de una.

18.3 PAPEL DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En la mayoría de las situaciones de colas, las llegadas ocurren *al azar*. Aleatoriedad significa que la ocurrencia de un evento (por ejemplo la llegada de un cliente o la terminación de un servicio) es independiente del tiempo transcurrido desde la ocurrencia del último evento.

Los tiempos aleatorios entre llegadas y de servicio se describen cuantitativamente por medio de una **distribución exponencial**, la cual se define como

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

La sección 12.4.3 demuestra que para la distribución exponencial

$$E[t] = \frac{1}{\lambda}$$

$$P\{t \leq T\} = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda T}$$

La definición de $E(t)$ muestra que λ es la tasa por unidad de tiempo a la cual se generan los eventos (llegadas o salidas).

La distribución exponencial describe un fenómeno *totalmente aleatorio*. Por ejemplo, si en este momento la hora es 8:20 A.M. y la última llegada fue a las 8:02 A.M., la probabilidad de que la siguiente llegada ocurra a las 8:29 es una función sólo del intervalo de las 8:20 a las 8:29, y es totalmente independiente del tiempo que ha transcurrido desde la ocurrencia del último evento (8:02 a 8:20).

La propiedad totalmente aleatoria de la exponencial se conoce como **olvido o falta de memoria**. Dado que $f(t)$ es la distribución exponencial del tiempo t , entre eventos sucesivos (llegadas), si S es el intervalo desde la ocurrencia del último evento, entonces la *propiedad de olvido* implica que

$$P\{t > T + S | t > S\} = P\{t > T\}$$

Para comprobar este resultado, observamos que para la exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$,

$$P\{t > Y\} = 1 - P\{t < Y\} = e^{-\lambda Y}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{t > T + S | t > S\} &= \frac{P\{t > T + S, t > S\}}{P\{t > S\}} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda T} \\ &= P\{t > T\} \end{aligned}$$

Ejemplo 18.3-1

Una máquina de servicio cuenta con una unidad de respaldo para su reemplazo inmediato si ocurre una falla. El tiempo para que falle la máquina (o su unidad de respaldo) es exponencial y ocurre cada 5 horas en promedio. El operador de máquina afirma que ésta "tiene el hábito" de fallar cada noche alrededor de las 8:30 P.M. Analice la afirmación del operador.

La tasa de fallas promedio de la máquina es $\lambda = \frac{1}{5} = .2$ fallas por hora. Por lo tanto, la distribución exponencial del tiempo para una falla es

$$f(t) = .2e^{-.2t}, t > 0$$

Con respecto a la afirmación del operador, sabemos sin pensarlo que no puede ser cierta porque entra en conflicto con el hecho de que el tiempo entre averías es exponencial y por, consiguiente, totalmente aleatorio. La probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. no puede usarse para sustentar o refutar la afirmación del operador, porque el valor de tal probabilidad depende de la hora (con respecto a las 8:30 P.M.) a la cual se calcule. Por ejemplo, si en este momento son las 8:30 P.M., entonces hay una baja probabilidad de que la afirmación del operador sea correcta, es decir,

$$P\left\{t < \frac{10}{60}\right\} = 1 - e^{-2\left(\frac{10}{60}\right)} = .03278$$

Si la hora en este momento es la 1:00 P.M., entonces la probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. se incrementa a aproximadamente .777 (¡compruébelo!). Estos dos valores extremos muestran que la afirmación del operador no es cierta.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3A

1. (a) Explique su conocimiento de la relación entre la tasa de llegadas λ y el tiempo entre llegadas promedio. ¿Cuáles son las unidades que describen cada variable?
 (b) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de llegadas promedio por hora, λ , y el tiempo entre llegadas promedio en horas.
 - (i) Cada 10 minutos ocurre una llegada.
 - (ii) Cada 6 minutos ocurren dos llegadas.
 - (iii) La cantidad de llegadas en un periodo de 30 minutos es de 10.
 - (iv) El intervalo promedio entre llegadas sucesivas es de .5 horas.
 (c) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de servicio promedio por hora, μ , y el tiempo de servicio promedio en horas.
 - (i) Se completa un servicio cada 12 minutos.
 - (ii) Cada 15 minutos ocurren dos salidas.
 - (iii) La cantidad de clientes atendidos en un periodo de 30 minutos es de 5.
 - (iv) El tiempo promedio de servicio es de .3 horas.
2. En el ejemplo 18.3-1, determine lo siguiente:
 - (a) El promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece las 24 horas del día, 7 días a la semana.
 - (b) La probabilidad de al menos una falla en un periodo de 24 horas.
 - (c) La probabilidad de que la siguiente falla *no* ocurra dentro de 3 horas.
 - (d) Si no ha ocurrido ninguna falla 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea al menos de 4 horas?
3. El tiempo entre llegadas a la Oficina Estatal de Hacienda es exponencial, con valor medio de .05 horas. La oficina abre a las 8:00 A.M.
 - *(a) Escriba la distribución exponencial que describe el tiempo entre llegadas.
 - *(b) Encuentre la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina alrededor de las 8:15 A.M.
 - (c) En este momento son las 8:35 A.M. El último cliente llegó a la oficina a la 8:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38 A.M.? ¿de que no llegue alrededor de las 8:40 A.M.?
 - (d) ¿Cuál es el promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45 A.M.?

4. Suponga que el tiempo promedio entre fallas de una máquina es exponencial con una media de 6 horas. Si la máquina ha funcionado sin fallar durante las últimas 3 horas, ¿cuál es la probabilidad de que siga funcionando sin fallar durante la siguiente hora? ¿de que se averie durante la siguiente .5 hora?
5. El tiempo entre llegadas al salón de juegos en la unión estudiantil es exponencial con una media de 10 minutos.
 - (a) ¿Cuál es la tasa de llegadas por hora?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de no que lleguen estudiantes al salón de juegos durante los siguientes 15 minutos?
 - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un estudiante visite el salón de juegos durante los siguientes 20 minutos?
6. El gerente de un nuevo restaurante de comida rápida desea cuantificar el proceso de llegadas de clientes estimando la fracción de los intervalos de tiempo entre llegadas que serán (a) de menos de 2 minutos; (b) entre 2 y 3 minutos, y (c) de más de tres minutos. Las llegadas en restaurantes similares ocurren a razón de 35 clientes por hora. El tiempo entre llegadas está distribuido exponencialmente.
- *7. Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, efectúan el siguiente juego mientras esperan que lleguen clientes: Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente no llega dentro de 1 minuto; de lo contrario, Ann le paga a Jim 2 centavos. Determine la ganancia promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 1.5 minutos.
8. Suponga que en el problema 7 las reglas del juego son tales que Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente llega después de 1.5 minutos, y Ann le paga a Jim una cantidad igual si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto. Para llegadas dentro del intervalo de 1 a 1.5 minutos, el juego es un empate. Determine la ganancia esperada de Jim en un periodo de 8 horas.
9. En el problema 7, suponga que Ann le paga a Jim 2 centavos si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto, y 3 centavos si el tiempo entre llegadas es entre 1 y 1.5 minutos. Ann recibe de Jim 5 centavos si el tiempo entre llegadas es entre 1.5 y 2 minutos, y 6 centavos si es de más de 2 minutos. Determine la ganancia esperada de Ann en un periodo de 8 horas.
- *10. Un cliente que llega a un restaurante de comida rápida McBurger dentro de 4 minutos del cliente inmediatamente anterior recibirá 10% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es de entre 4 y 5 minutos, el descuento es de 6%. Si el tiempo entre llegadas es de más de 5 minutos, el cliente obtiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial con una media de 6 minutos.
 - (a) Determine la probabilidad de que un cliente que llega reciba 10% de descuento.
 - (b) Determine el descuento promedio por cliente que llega.
11. Se sabe que el tiempo entre fallas de un refrigerador Kencore es exponencial con valor medio de 9000 horas (aproximadamente 1 año de operación), y la compañía emite una garantía de 1 año sobre el refrigerador. ¿Cuáles son las probabilidades de que la reparación de una falla sea cubierta por la garantía?
12. La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus, y la verde al sur del campus, con una estación de transferencia que une las dos rutas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo entre llegadas exponencial) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también lo hacen al azar cada 7 minutos.
 - (a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea roja para abordar la línea verde?
 - (b) ¿Cuál es la distribución de probabilidades del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea verde para abordar la línea roja?
13. Demuestre que la media y la desviación estándar de la distribución exponencial son iguales.

18.4 MODELOS DE NACIMIENTO Y MUERTE PUROS (RELACIÓN ENTRE LAS DISTRIBUCIONES EXPONENCIAL Y DE POISSON)

Esta sección presenta dos situaciones de colas, el modelo de **nacimiento puro** en el cual sólo ocurren llegadas, y el modelo de **muerte pura** en el cual sólo ocurren salidas. Un ejemplo del modelo de nacimiento puro es la creación de actas de nacimiento de bebés recién nacidos. El modelo de muerte pura puede demostrarse por medio del retiro aleatorio de un artículo en existencia en una tienda.

La distribución exponencial se utiliza para describir el tiempo entre llegadas en el modelo de nacimiento puro y el tiempo entre salidas en el modelo de muerte pura. Un subproducto del desarrollo de los dos modelos es demostrar la estrecha relación entre las distribuciones exponencial y la de Poisson, en el sentido de que una distribución define automáticamente a la otra.

18.4.1 Modelo de nacimiento puro

Defina

$$p_0(t) = \text{Probabilidad de que no ocurran llegadas durante un periodo de tiempo } t$$

Dado que el tiempo entre llegadas es exponencial y que la tasa de llegadas es de λ clientes por unidad de tiempo, entonces

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P[\text{tiempo entre llegadas} \geq t] \\ &= 1 - P[\text{tiempo entre llegadas} \leq t] \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $h > 0$, tenemos

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \dots = 1 - \lambda h + O(h^2)$$

La distribución exponencial se basa en la suposición de que durante $h > 0$, cuando mucho puede ocurrir un evento (llegada). Por lo tanto, a medida que $h \rightarrow 0$,

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) \approx \lambda h$$

Este resultado muestra que la probabilidad de una llegada durante h es directamente proporcional a h , con la tasa de llegadas, λ , como constante de proporcionalidad.

Para derivar la distribución de la *cantidad* de llegadas durante un periodo t cuando el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, defina

$$p_n(t) = \text{Probabilidad de } n \text{ llegadas durante } t$$

Para un $h > 0$ suficientemente pequeño,

$$p_n(t + h) \approx p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \quad n > 0$$

$$p_0(t + h) \approx p_0(t)(1 - \lambda h), \quad n = 0$$

En la primera ecuación habrá n llegadas durante $t + h$ si hay n llegadas durante t y ninguna llegada durante h , o $n - 1$ llegadas durante t y una llegada durante h . No se permiten todas las demás combinaciones porque, de acuerdo con la distribución exponencial, a lo sumo puede haber una llegada durante un periodo h muy pequeño. La ley del producto de las probabilidades es aplicable al lado derecho de la ecuación porque las llegadas son independientes. En la segunda ecuación, durante $t + h$ puede haber cero llegadas sólo si no hay llegadas durante t y h .

Reacomodando los términos y tomando los límites a medida que $h \rightarrow 0$ para obtener la primera derivada de $p_n(t)$ con respecto a t , tenemos

$$p'_n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(t + h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n > 0$$

$$p'_0(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_0(t + h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t), \quad n = 0$$

La solución de las ecuaciones diferenciales anteriores da

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ésta es una **distribución de Poisson** con media $E[n|t] = \lambda t$ de llegadas durante t .

El resultado anterior muestra que si el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, entonces la cantidad de llegadas durante un periodo específico t es Poisson con media λt . Lo contrario también funciona.

La siguiente tabla resume las relaciones entre las distribuciones exponencial y de Poisson, dada la tasa de llegadas λ :

| | Exponencial | Poisson |
|---|---|--|
| Variable aleatoria | Tiempo entre llegadas sucesivas, t | Cantidad de llegadas n , durante un periodo de tiempo específico T |
| Intervalo | $t \geq 0$ | $n = 0, 1, 2, \dots$ |
| Función de densidad | $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$ | $p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$ |
| Valor medio | $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo | λT llegadas durante T |
| Probabilidad acumulada | $P[t \leq A] = 1 - e^{-\lambda A}$ | $P_{n \leq N}(T) = p_0(T) + p_1(T) + \dots + p_N(T)$ |
| $P[\text{No llegadas durante el periodo } A]$ | $P[t > A] = e^{-\lambda A}$ | $p_0(A) = e^{-\lambda A}$ |

Ejemplo 18.4-1

En una ciudad grande nacen bebés a razón de uno cada 12 minutos. El tiempo entre nacimientos sigue una distribución exponencial. Determine lo siguiente:

- La cantidad promedio de nacimientos por año.
- La probabilidad de que no ocurran nacimientos durante 1 día.
- La probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas del periodo de 3 horas.

La tasa de natalidad por día se calcula como

$$\lambda = \frac{24 \times 60}{12} = 120 \text{ nacimientos/año}$$

Por lo tanto, la cantidad de nacimientos por año en el estado es

$$\lambda t = 120 \times 365 = 43,800 \text{ nacimientos/año}$$

La probabilidad de que no haya nacimientos durante 1 día es

$$p_0(1) = \frac{(120 \times 1)^0 e^{-120 \times 1}}{0!} = e^{-120} = 0$$

Otra forma de calcular la misma probabilidad es observar que si no hay ningún nacimiento en cualquier día equivale a decir que el *tiempo entre nacimientos sucesivos* es de más de un día. Por lo tanto podemos utilizar la distribución exponencial para calcular la probabilidad deseada como

$$P[t > 1] = e^{-120} = 0$$

Debido a que la distribución de la cantidad de nacimientos es Poisson, la probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas, dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas, equivale a tener $10 (= 50 - 40)$ nacimientos en una hora ($= 3 - 2$), es decir,

$$p_{10}(1) = \frac{\left(\frac{60}{12} \times 1\right)^{10} e^{-5 \times 1}}{10!} = .01813$$

Momento de Excel

Los cálculos asociados con la distribución de Poisson y, de hecho, todas las fórmulas de colas son tediosas y requieren habilidades de programación para asegurar una precisión razonable. Podemos utilizar las funciones POISSON, POISONDIST y EXPONDIST de Excel para calcular las probabilidades individuales y acumuladas de Poisson y exponencial. Estas funciones también se automatizan en *excelTables.xls*. Por ejemplo, para un nacimiento de 5 bebés por hora, la probabilidad de exactamente 10 nacimientos en .5 horas se calcula ingresando 2.5 en F16 y 10 en J16 para obtener la respuesta .000216 en M16. La probabilidad acumulada de *cuando mucho* 10 nacimientos se da en O16 (= .999938). Para determinar la probabilidad de que el tiempo entre nacimientos sea menor que o igual a 18 minutos, use la distribución exponencial ingresando 2.5 en F9 y .3 en J9. La respuesta .527633 aparece en O9.

Momento de TORA/Excel

También podemos utilizar TORA (archivo *toraEx18-4.1.txt*) o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para determinar de forma automática todas las probabilidades de Poisson significativas ($> 10^{-5}$ en TORA y $> 10^{-7}$ en Excel). En ambos casos, los datos de entrada son los mismos. Para el modelo de nacimiento puro del ejemplo 18.4-1, los datos son los siguientes

| Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|--------|----|---|--------------------|---------------------|
| 5 | 0 | 0 | infinito | infinito |

Observe la entrada bajo Lambda $\lambda t = 5 \times 1 = 5$ nacimientos por día. Observe también que Mu = 0 identifica el modelo como nacimiento puro.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.4A

- *1. En el ejemplo 18.4-1, suponga que el oficinista que captura la información de las actas de nacimiento en la computadora normalmente espera hasta que se juntan al menos 5 actas. Determine la probabilidad de que el oficinista capture un nuevo lote cada hora.
2. Un coleccionista de arte viaja a subastas de arte una vez al mes en promedio. Cada viaje es seguro que produzca una compra. El tiempo entre viajes está exponencialmente distribuido. Determine lo siguiente:
 - (a) La probabilidad de que se realice una compra en un periodo de 3 meses.
 - (b) La probabilidad de que se realicen no más de 8 compras por año.
 - (c) La probabilidad de que el tiempo entre viajes sucesivos exceda de 1 mes.
3. En un banco, la tasa de llegadas es de 2 clientes por minuto. Determine lo siguiente:
 - (a) El promedio de llegadas durante 5 minutos.
 - (b) La probabilidad de que no haya llegadas durante los siguientes .5 minutos.
 - (c) La probabilidad de que haya al menos una llegada durante los siguientes .5 minutos.
 - (d) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea al menos de 3 minutos.
4. El tiempo entre llegadas en el restaurante L&J es exponencial con media de 5 minutos. El restaurante abre a las 11:00 A.M. Determine lo siguiente:
 - *(a) La probabilidad de tener 10 llegadas en el restaurante alrededor de las 11:12 A.M., dado que 8 clientes llegaron a las 11:05 A.M.
 - (b) Las probabilidades de que un nuevo cliente llegue entre las 11:28 y las 11:33 A.M., si el último cliente llegó a las 11:25 A.M.
5. La biblioteca pública de Springdale recibe nuevos libros de acuerdo con una distribución de Poisson con media de 25 libros por día. Cada anaquel en la estantería contiene 100 libros. Determine lo siguiente:
 - (a) El promedio de anaqueles que se llenarán de nuevos libros cada mes (30 días).
 - (b) La probabilidad de que se requieran más de 10 libreros cada mes, si un librero se compone de 5 anaqueles.
6. La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus y la línea verde presta servicio al sur del campus con una estación de transferencia que conecta las dos líneas. Los autobuses verdes llegan al azar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también llegan al azar cada 7 minutos.
 - *(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos autobuses (rojo y verde) se detengan en la estación durante un intervalo de 5 minutos?
 - (b) Un estudiante cuyo dormitorio está cerca de la estación tiene clase en 10 minutos. Cualquier autobús lo lleva al edificio del salón de clases. El viaje requiere 5 minutos, después de lo cual el estudiante camina durante aproximadamente 3 minutos para llegar al salón de clase. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue a tiempo a clase?
7. Pruebe que la media y la varianza de la distribución de Poisson durante un intervalo t es igual a λt , donde λ es la tasa de llegadas.
8. Derive la distribución de Poisson a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de nacimiento puro. *Sugerencia:* La solución de la ecuación diferencial general

$$y' + a(t)y = b(t)$$

es

$$y = e^{-\int a(t) dt} \left\{ \int b(t)e^{\int a(t) dt} dt + \text{constante} \right\}$$

18.4.2 Modelo de muerte pura

En el modelo de muerte pura, el sistema se inicia con N clientes en el instante 0, sin llegadas nuevas permitidas. Las salidas ocurren a razón de μ clientes por unidad de tiempo. Para desarrollar las ecuaciones diferenciales de la probabilidad $p_n(t)$ de que n clientes permanezcan después de t unidades de tiempo, seguimos los argumentos utilizados con el modelo de nacimiento puro (sección 18.4-1). Por lo tanto,

$$p_N(t+h) = p_N(t)(1 - \mu h)$$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \mu h) + p_{n+1}(t)\mu h, 0 < n < N$$

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1) + p_1(t)\mu h$$

A medida que $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$p'_N(t) = -\mu p_N(t)$$

$$p'_n(t) = -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), 0 < n < N$$

$$p'_0(t) = \mu p_1(t)$$

La solución de estas ecuaciones da la siguiente distribución de Poisson truncada:

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, n = 1, 2, \dots, N$$

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N p_n(t)$$

Ejemplo 18.4-2

Una florería inicia cada semana con 18 docenas de rosas. En promedio, la florería vende 3 docenas al día (una docena a la vez), pero la demanda real sigue una distribución de Poisson. Siempre que el nivel de las existencias se reduce a 5 docenas, se coloca un nuevo pedido de 18 nuevas docenas para entrega al principio de la siguiente semana. Debido a la naturaleza de la mercancía, las rosas sobrantes al final de la semana se desechan. Determine lo siguiente:

- (a) La probabilidad de colocar un pedido cualquier día de la semana.
- (b) El promedio de rosas desecharadas al final de la semana.

Debido a que las compras ocurren a razón de $\mu = 3$ docenas por día, la probabilidad de colocar un pedido al final del día t es

$$\begin{aligned} p_{n \leq 5}(t) &= p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_5(t) \\ &= p_0(t) + \sum_{n=1}^5 \frac{(3t)^{18-n} e^{-3t}}{(18-n)!}, t = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

Los cálculos de $p_{n \leq 5}(t)$ se realizan mejor si se utiliza *excelPoissonQ.xls* o TORA. Los múltiples escenarios de TORA pueden ser más convenientes en este caso. Los datos de entrada asociados en el caso del modelo de muerte pura correspondientes a $t = 1, 2, \dots, 7$ son $\Lambda = 0$, $\mu = 3t$, $c = 1$, Límite del sistema = 18, y Límite de la fuente = 18. Observe que t debe ser sustituido numéricamente como se muestra en el archivo *toraEx18.4-2.txt*.

Los resultados se resumen como sigue:

| t (días) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| μt | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| $p_{n \leq 5}(t)$ | .0000 | .0088 | .1242 | .4240 | .7324 | .9083 | .9755 |

El promedio de rosas desechadas al final de la semana ($t = 7$) es $E[n|t = 7]$. Para calcular este valor necesitamos $p_n(7)$, $n = 0, 1, 2, \dots, 18$, el cual puede determinarse con el software proporcionado. El resultado es

$$E[n|t = 7] = \sum_{n=0}^{18} np_n(7) = .664 \approx \text{una docena}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.4B

- En el ejemplo 18.4-2, use la plantilla *excelPoissonQ.xls* o TORA para calcular $p_n(7)$, $n = 1, 2, \dots, 18$, y luego verifique manualmente que estas probabilidades den $E[n|t = 7] = .664$ docenas.
- Considere el ejemplo 18.4-2. En cada uno de los siguientes casos, primero escriba la respuesta algebraicamente, y luego utilice *excelPoissonQ.xls* o TORA para dar las respuestas numéricas.
 - La probabilidad de que las existencias se agoten después de 3 días.
 - El promedio de docenas de rosas sobrantes al final del segundo día.
 - La probabilidad de que se compre al menos una docena al final del cuarto día, si la última docena se compró al final del tercer día.
 - La probabilidad de que el tiempo que falta para la siguiente compra es cuando mucho de un medio día, dado que la última compra se realizó el día anterior.
 - La probabilidad de que no se realicen compras durante el primer día.
 - La probabilidad de que no se coloque ningún pedido al final de la semana.
- La banda de la preparatoria de Springdale va a ofrecer un concierto de beneficio en su nuevo auditorio de 400 asientos. Las empresas locales compran los boletos en bloques de 10 y los donan a organizaciones juveniles. Los boletos se ponen a la venta para empresas durante 4 horas sólo un día antes del concierto. El proceso de colocar pedidos de boletos es Poisson con una media de 10 llamadas por hora. Los (bloques de) boletos que sobran después de que se cierra la oficina se venden con descuento como "boletos baratos de última hora", una hora antes de que se inicie el concierto. Determine lo siguiente:
 - La probabilidad de que será posible comprar boletos baratos de última hora.
 - El promedio de boletos baratos de última hora disponibles.
- Cada mañana, el refrigerador en un pequeño taller se encuentra abastecido con dos cajas (24 latas por caja) de refrescos para los 10 empleados del taller. Los empleados pueden apagar su sed a cualquier hora durante el día de trabajo de 8 horas (8:00 A.M. a 4:00 P.M.) y se sabe que cada empleado consume aproximadamente 4 latas al día, pero el proceso es totalmente aleatorio (distribución de Poisson). ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado no encuentre un refresco al mediodía (el inicio del periodo del almuerzo)?, ¿justo antes de que cierre el taller?
- Un estudiante recibe un depósito bancario de \$100 al mes desde su casa para que cubra gastos imprevistos. Los retiros de \$20 cada uno ocurren al azar durante el mes y están espaciados de acuerdo con una distribución exponencial con un valor medio de una semana. Determine la probabilidad de que el estudiante se quede sin dinero para gastos imprevistos antes del final de la cuarta semana.

6. Se sacan 80 artículos del inventario de acuerdo con la distribución de Poisson a razón de 5 artículos por día. Determine lo siguiente:
 - La probabilidad de que se saquen 10 artículos durante los 2 primeros días.
 - La probabilidad de que ya no haya artículos al final de los 4 días.
 - El promedio de artículos sacados a lo largo de un periodo de 4 días.
7. Un taller mecánico se acaba de surtir de 10 partes de repuesto para la reparación de una máquina. La reposición de la existencia que regresa el nivel a 10 piezas ocurre cada 7 días. El tiempo entre fallas es exponencial con media de 1 día. Determine la probabilidad de que la máquina permanezca descompuesta durante 2 días porque no hay partes de repuesto disponibles.
8. La demanda de un artículo ocurre de acuerdo con una distribución de Poisson con media de 3 por día. El nivel de existencia máximo es de 25 artículos, lo cual ocurre cada lunes inmediatamente después de que se recibe un pedido. El tamaño del pedido depende de la cantidad de unidades sobrantes al final de la semana, el sábado (el negocio está cerrado los domingos). Determine lo siguiente:
 - *El tamaño semanal promedio del pedido.
 - *La probabilidad de escasez al inicio del negocio el viernes.
 - La probabilidad de que el tamaño del pedido semanal exceda de 10 unidades.
9. Demuestre que la distribución del tiempo entre salidas correspondiente a la Poisson truncada en el modelo de muerte pura es una distribución exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
10. Derive la distribución de Poisson truncada a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de muerte pura mediante inducción. [Nota: Vea la sugerencia en el problema 8, conjunto 18.4a.]

18.5 MODELO DE COLAS GENERAL DE POISSON

Esta sección desarrolla un modelo de colas general que combina tanto llegadas como salidas con base en la suposición de Poisson, es decir, los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio siguen la distribución exponencial. El modelo es la base para la derivación de los modelos de Poisson especializados en la sección 18.6.

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento a largo plazo o de **estado estable** de la situación de colas, alcanzado después de que el sistema ha estado en operación durante un tiempo suficientemente largo. Este tipo de análisis contrasta con el comportamiento **transitorio** (o de calentamiento) que prevalece durante el inicio de la operación del sistema. (Una razón de por qué no se analiza el comportamiento transitorio en este capítulo es su complejidad analítica. Otra es que el estudio de la mayoría de las situaciones de colas ocurre en condiciones de estado estable.)

El modelo general asume que tanto las tasas de entrada como de salida **dependen del estado**; lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio. Por ejemplo, en una caseta de cobro en una carretera, los encargados tienden a acelerar el cobro de las cuotas durante las horas pico. Otro ejemplo ocurre en un taller donde la tasa de descomposturas de las máquinas disminuye a medida que aumenta el número de máquinas descompuestas (porque sólo las máquinas que están funcionando son capaces de generar nuevas descomposturas).

Defina

- n = Cantidad de clientes en el sistema (haciendo cola, además de los que están siendo atendidos)
- λ_n = Tasa de llegadas, si n clientes están en el sistema
- μ_n = Tasa de salidas, si n clientes están en el sistema
- p_n = Probabilidad de estado estable de que n clientes estén en el sistema

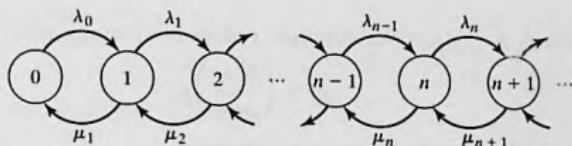


FIGURA 18.2

Diagrama de transición en colas de Poisson

El modelo general deriva a p_n como una función de λ_n y μ_n . Estas probabilidades se utilizan entonces para determinar las medidas de desempeño del sistema, como la longitud promedio de las colas, el tiempo de espera promedio, y la utilización promedio de la instalación.

Las probabilidades p_n se determinan por medio del **diagrama de tasa de transición** en la figura 18.2. El sistema de colas está en el estado n cuando el número de clientes en el sistema es n . Como se explica en la sección 18.3, la probabilidad de que ocurra más de un evento durante un pequeño intervalo h tiende a cero a medida que $h \rightarrow 0$. Esto significa que para $n > 0$, el estado n puede cambiar sólo a dos estados posibles: $n - 1$ cuando ocurre una salida a razón de μ_n , y $n + 1$ cuando ocurre una llegada a razón de λ_n . El estado 0 sólo puede cambiar al estado 1 cuando una llegada ocurre a razón de λ_0 .

Observe que μ_0 es indefinida porque no pueden ocurrir salidas si el sistema está vacío.

En condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas de flujo *esperadas* de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho de que el estado n puede cambiar sólo a los estados $n - 1$ y $n + 1$, tenemos

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tasa de flujo de entrada} \\ \text{esperada al estado } n \end{array} \right) = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Asimismo,

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tasa de flujo de salida} \\ \text{esperada del estado } n \end{array} \right) = (\lambda_n + \mu_n) p_n$$

Igualando las dos tasas, obtenemos la siguiente **ecuación de balanceo**

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Según la figura 18.2, la ecuación de balanceo asociada con $n = 0$ es

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

Las ecuaciones de balanceo se resuelven recursivamente en función de p_0 . Para $n = 0$, tenemos

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) p_0$$

Luego, para $n = 1$, tenemos

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1$$

Sustituyendo $p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)p_0$ y simplificando, obtenemos (¡compruébelo!)

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right)p_0$$

Podemos demostrar por medio de inducción que

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1}\right)p_0, n = 1, 2, \dots$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Ejemplo 18.5-1

B&K Groceries opera con tres cajas. El gerente utiliza el siguiente programa para determinar la cantidad de cajas en operación, según la cantidad de clientes que haya en la línea:

| Cantidad de clientes en la tienda | Cantidad de cajas en operación |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1 a 3 | 1 |
| 4 a 6 | 2 |
| Más de 6 | 3 |

Los clientes llegan al área de cajas de acuerdo con una distribución de Poisson con tasa media de 10 clientes por hora. El tiempo promedio en la caja es exponencial con media de 12 minutos. Determine la probabilidad de estado estable p_n de que haya n clientes en el área de cajas.

Con la información del problema, tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda = 10 \text{ clientes por hora,} & n &= 0, 1, \dots \\ \mu_n &= \begin{cases} \frac{60}{12} = 5 \text{ clientes por hora,} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 2 \times 5 = 10 \text{ clientes por hora,} & n = 4, 5, 6 \\ 3 \times 5 = 15 \text{ clientes por hora,} & n = 7, 8, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{10}{5}\right)p_0 = 2p_0 \\ p_2 &= \left(\frac{10}{5}\right)^2 p_0 = 4p_0 \\ p_3 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_4 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right) p_0 = 8p_0 \\ p_5 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^2 p_0 = 8p_0 \\ p_6 &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^3 p_0 = 8p_0 \\ p_{n \geq 7} &= \left(\frac{10}{5}\right)^3 \left(\frac{10}{10}\right)^3 \left(\frac{10}{15}\right)^{n-6} p_0 = 8\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6} p_0 \end{aligned}$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación

$$p_0 + p_0 \left\{ 2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8\left(\frac{2}{3}\right) + 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right\} = 1$$

o, de forma equivalente

$$p_0 \left\{ 31 + 8 \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right) \right\} = 1$$

Utilizando la serie de suma geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

obtenemos

$$p_0 \left\{ 31 + 8 \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) \right\} = 1$$

Por lo tanto, $p_0 = \frac{1}{55}$.

Dado p_0 , ahora podemos determinar p_n con $n > 0$. Por ejemplo, la probabilidad de que sólo una caja abra se calcula como la probabilidad de que haya cuando mucho tres clientes en el sistema:

$$p_1 + p_2 + p_3 = (2 + 4 + 8) \left(\frac{1}{55} \right) \approx .255$$

Podemos utilizar p_n para determinar medidas de desempeño para la situación de B&K. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{Cantidad esperada} \\ \text{de cajas ociosas} \end{array} \right) &= 3p_0 + 2(p_1 + p_2 + p_3) + 1(p_4 + p_5 + p_6) \\ &\quad + 0(p_7 + p_8 + \dots) \\ &= 1 \text{ caja} \end{aligned}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.5A

- En el ejemplo 18.5-1, determine lo siguiente:
 - La distribución de probabilidades de la cantidad de cajas abiertas.
 - El promedio de cajas ocupadas.
- En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que el tiempo entre llegadas en el área de cajas es exponencial con media de 5 minutos y que el tiempo en la caja por cliente también es exponencial con media de 10 minutos. Suponga además que B&K agrega una cuarta caja y que las cajas abren con base en incrementos de dos clientes. Determine lo siguiente:
 - Las probabilidades de estado estable, p_n para todas las n .
 - La probabilidad de que se requiera una cuarta caja.
 - El promedio de cajas ociosas.
- En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que las tres cajas están siempre abiertas y que la operación está configurada de tal manera que el cliente vaya primero a la caja vacía. Determinar lo siguiente:
 - La probabilidad de que tres cajas estén en uso.
 - La probabilidad de que cliente que llega no tenga que esperar.
- First Bank de Springdale opera cajeros automáticos de un solo carril. Los autos llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 12 autos por hora. El tiempo por

- caja necesario para completar la transacción en el cajero es exponencial con media de 6 minutos. El carril tiene espacio para un total de 10 autos. Una vez que el carril está lleno, los demás autos que llegan buscan el servicio en otra sucursal. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que un auto que llegue no pueda utilizar el cajero porque el carril está lleno.
 - La probabilidad de que un auto no pueda utilizar el cajero en cuanto llegue.
 - El promedio de autos en el carril.
5. ¿Alguna vez ha escuchado a alguien repetir el contradictorio comentario: "El lugar está tan abarrotado que ya nadie va allí"? Este comentario equivale a decir que la oportunidad de desistir se incrementa con el aumento en la cantidad de clientes que buscan un servicio. Una posible plataforma para modelar esta situación es decir que la tasa de llegadas al sistema se reduce a medida que la cantidad de clientes se incrementa. De manera más específica, consideramos el caso simplificado del Club de Pool M&M, donde los clientes suelen llegar en parejas para "jugar pool". La tasa de llegadas normal es de 6 parejas (de personas) por hora. Sin embargo, una vez que la cantidad de parejas en el salón de pool excede de 8, la tasa de llegadas se reduce a 5 parejas por hora. Se supone que el proceso de llegadas sigue la distribución de Poisson. Cada pareja juega pool durante un tiempo exponencial con media de 30 minutos. El salón de pool cuenta con un total de 5 mesas y puede acomodar a más de 12 parejas a la vez. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que los clientes comiencen a desistir.
 - La probabilidad de que todas las mesas estén ocupadas.
 - El número promedio de tablas en uso.
 - El promedio de parejas que esperan a que se desocupe un mesa de pool.
- *6. Una peluquería atiende a un cliente a la vez y cuenta con tres sillas para los clientes que esperan. Si el lugar está lleno, los clientes se van a otra parte. Las llegadas ocurren de acuerdo a una distribución de Poisson con media de 4 por hora. El tiempo para recibir un corte de pelo es exponencial con media de 15 minutos. Determine lo siguiente:
- Las probabilidades de estado estable.
 - La cantidad esperada de clientes en la peluquería.
 - La probabilidad de que los clientes se vayan a otra parte porque la peluquería está llena.
7. Considere una situación de colas en un servidor donde las tasas de llegadas y servicio son
- $$\lambda_n = 10 - n, n = 0, 1, 2, 3$$
- $$\mu_n = \frac{n}{2} + 5, n = 1, 2, 3, 4$$
- Esta situación equivale a reducir la tasa de llegadas e incrementar la tasa de servicio a medida que se incrementa el número n en el sistema.
- Prepare el diagrama de transición, y determine la ecuación de balanceo del sistema.
 - Determine las probabilidades de estado estable.
8. Considere el modelo de una sola cola, donde se permite sólo un cliente en el sistema. Los clientes que llegan y encuentran la instalación ocupada nunca regresan. Suponga que la distribución de las llegadas es Poisson con media λ por unidad de tiempo, y que el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
- Prepare el diagrama de transición, y determine las ecuaciones de balanceo.
 - Determine las probabilidades de estado estable.
 - Determine el promedio en el sistema.

9. La comprobación por medio de inducción para derivar la solución general del modelo generalizado se aplica como sigue. Consideré

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) p_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Sustituimos p_{n-1} y p_{n-2} en la ecuación diferencial general que implica $p_n, p_{n-1}, y p_{n-2}$ para derivar la expresión deseada para p_n . Verifique este procedimiento.

18.6 COLAS DE POISSON ESPECIALIZADAS

La figura 18.3 ilustra la situación de colas de Poisson especializadas con c servidores paralelos. Se selecciona un cliente de la cola para iniciar el servicio con el primer servidor disponible. La tasa de llegadas al sistema es de λ clientes por unidad de tiempo. Todos los servidores paralelos son idénticos, es decir que la tasa de servicio de cualquier servidor es de μ clientes por unidad de tiempo. La cantidad de clientes en el sistema se define para incluir los que están *en el servicio* y los que están *en la cola*.

Una notación conveniente para resumir las características de la situación de colas de la figura 18.3 se da mediante el siguiente formato:

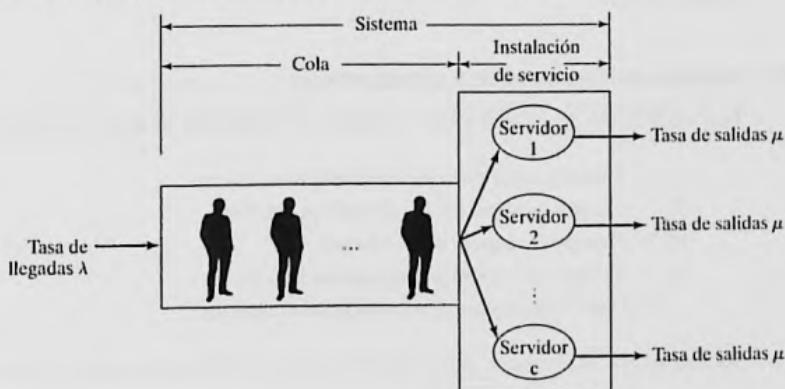
$$(a/b/c):(d/e/f)$$

donde

- a = Distribución de las llegadas
- b = Distribución de las salidas (tiempo de servicio)
- c = Cantidad de servidores paralelos ($= 1, 2, \dots, \infty$)
- d = Disciplina en las colas
- e = Número máximo (finito o infinito) permitido en el sistema (haciendo cola o en servicio)
- f = Tamaño de la fuente solicitante (finita o infinita)

FIGURA 18.3

Representación esquemática de un sistema de colas con c servidores paralelos



La notación estándar para representar las distribuciones de las llegadas y salidas (símbolos a y b) es

M = Distribución markoviana (o de Poisson) de llegadas y salidas (o de forma equivalente distribución exponencial del tiempo entre llegadas y de servicio)

D = Tiempo constante (determinístico)

E_k = Distribución Erlang o gama del tiempo (o de forma equivalente, la suma de distribuciones exponenciales independientes)

GI = Distribución general (genérica) del tiempo entre llegadas

G = Distribución general (genérica) del tiempo de servicio

La notación para la disciplina en colas (símbolo d) incluye

$FCFS$ = Primero en llegar, primero en ser servido

$LCFS$ = Último en llegar, primero en ser servido

$SIRO$ = Servicio en orden aleatorio

GD = Disciplina general (es decir, cualquier tipo de disciplina)

Para ilustrar el uso de la notación, el modelo $(M/D/10)$: $(GD/20/\infty)$ utiliza llegadas Poisson (o tiempo entre llegadas exponencial), tiempo de servicio constante, y 10 servidores paralelos. La disciplina en colas es GD , y hay un límite de 20 clientes en todo el sistema. El tamaño de la fuente de donde llegan los clientes es infinito.

Como nota histórica, los primeros tres elementos de la notación $(a/b/c)$ los ideó D.G. Kendall en 1953, y se conocen en la literatura como la **notación de Kendall**. En 1966, A.M. Lee agregó los símbolos d y e a la notación. Este autor agregó el último elemento, el símbolo f , en 1968.

Antes de presentar los detalles de las colas de Poisson especializadas, demostramos cómo se pueden derivar las medidas de desempeño de estado estable de la situación de colas generalizada a partir de las probabilidades de estado estable p_n dadas en la sección 18.5.

18.6.1 Medidas de desempeño de estado estable

Las medidas de desempeño más comúnmente utilizadas en una situación de colas son

L_s = Cantidad esperada de clientes en un *sistema*

L_q = Cantidad esperada de clientes en una *cola*

W_s = Tiempo de espera en el *sistema*

W_q = Tiempo de espera anticipado en la *cola*

\bar{c} = Cantidad esperada de servidores ocupados

Recuerde que el *sistema* incluye tanto la *cola* como las *instalaciones de servicio*.

Demostramos ahora cómo se derivan estas medidas (directa o indirectamente) a partir de la probabilidad de estado estable de n en el sistema como

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$$

La relación entre L_s y W_s (también entre L_q y W_q) se conoce como **fórmula de Little** y se da como

$$L_s = \lambda_{\text{efec}} W_s$$

$$L_q = \lambda_{\text{efec}} W_q$$

Estas relaciones son válidas en condiciones más bien generales. El parámetro λ_{efec} es la tasa de llegadas *efectiva* al sistema. Es igual a la tasa de llegadas λ (nominal) cuando todos los clientes que llegan pueden unirse al sistema. De lo contrario, si algunos clientes no pueden unirse porque el sistema está lleno (por ejemplo un estacionamiento), entonces $\lambda_{\text{efec}} < \lambda$. Más adelante demostraremos cómo se determina λ_{efec} .

También existe una relación directa entre W_s y W_q . Por definición

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tiempo de espera} \\ \text{anticipado en el sistema} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Tiempo de espera} \\ \text{anticipado en la cola} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Tiempo de servicio} \\ \text{esperado} \end{array} \right)$$

Esto se traduce como

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Luego podemos relacionar L_s con L_q multiplicando ambos lados de la última fórmula por λ_{efec} , la que junto con la fórmula de Little da

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$$

La diferencia entre la cantidad promedio en el sistema, L_s , y la cantidad promedio en la cola, L_q debe ser igual al promedio de servidores ocupados. Por lo tanto,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$$

Se deduce que

$$\left(\begin{array}{l} \text{Uso de la} \\ \text{instalación} \end{array} \right) = \frac{\bar{c}}{c}$$

Ejemplo 18.6-1

El estacionamiento para visitantes en el Colegio Ozark se limita a sólo 5 espacios. Los autos que utilizan estos espacios llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 6 por hora. El tiempo de estacionamiento está distribuido exponencialmente con una media de 30 minutos. Los visitantes que no pueden encontrar un espacio vacío pueden esperar temporalmente en el estacionamiento hasta que un auto estacionado salga. El espacio temporal tiene cabida sólo para 3 autos. Otros que no pueden estacionarse o encontrar un espacio de espera temporal deben irse a otra parte. Determine lo siguiente:

- La probabilidad, p_n , de que haya n autos en el sistema.
- La tasa de llegadas efectiva de los autos que por lo general utilizan el estacionamiento.
- El promedio de autos en el estacionamiento.
- El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.
- El promedio de espacios de estacionamiento *ocupados*.
- La utilización promedio del estacionamiento.

Observamos primero que un espacio de estacionamiento actúa como un servidor, de modo que el sistema cuenta con un total de $c = 5$ servidores paralelos. Asimismo, la capacidad máxima del sistema es $5 + 3 = 8$ autos.

La probabilidad p_n puede determinarse como un caso especial del modelo generalizado en la sección 18.5 por medio de

$$\lambda_n = 6 \text{ autos/hora}, n = 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$\mu_n = \begin{cases} n \binom{60}{30} & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5 \binom{60}{30} & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

De acuerdo con la sección 18.5, obtenemos

$$p_n = \begin{cases} \frac{3^n}{n!} p_0, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \frac{3^n}{5! 5^{n-5}} p_0, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

El valor de p_0 se calcula sustituyendo $p_n, n = 1, 2, \dots, 8$, en la siguiente ecuación

$$p_0 + p_1 + \dots + p_8 = 1$$

o

$$p_0 + p_0 \left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5! 5^1} + \frac{3^7}{5! 5^2} + \frac{3^8}{5! 5^3} \right) = 1$$

Esto da $p_0 = .04812$ (¡compruébelo!). Con p_0 , ahora podemos calcular p_1 a p_8 como

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| p_n | .14436 | .21654 | .21654 | .16240 | .09744 | .05847 | .03508 | .02105 |

La tasa de llegadas efectiva λ_{efec} se calcula observando el diagrama esquemático en la figura 18.4, donde los clientes llegan de la fuente a razón de λ autos por hora. Un auto que llega puede entrar al estacionamiento a la razón λ_{efec} o puede irse a otra parte a la razón λ_{perdida} . Esto quiere decir que $\lambda = \lambda_{\text{efec}} + \lambda_{\text{perdida}}$.

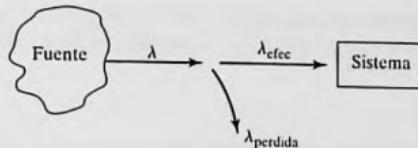


FIGURA 18.4
Relación entre λ , λ_{efec} y λ_{perdida}

Un auto no podrá entrar al estacionamiento si ya entraron 8. Esto significa que la proporción de autos que *no* podrán entrar al estacionamiento es p_8 . Por lo tanto,

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_8 = 6 \times .02105 = .1263 \text{ autos/hora}$$

$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = 6 - .1263 = 5.8737 \text{ autos/hora}$$

El promedio de autos en el estacionamiento (los que esperan que se desocupe un espacio) es igual a L_s , el promedio en el sistema. Podemos calcular L_s con p_n como

$$L_s = 0p_0 + 1p_1 + \dots + 8p_8 = 3.1286 \text{ autos}$$

Un auto que espera en el espacio temporal es en realidad un auto que está haciendo cola. Por lo tanto, su tiempo de espera hasta que encuentra un espacio es W_q . Para determinar W_q usamos

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Por tanto,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{efec}}} = \frac{3.1286}{5.8737} = .53265 \text{ horas}$$

$$W_q = .53265 - \frac{1}{2} = .03265 \text{ horas}$$

El promedio de espacios de estacionamiento ocupados es igual al promedio de servidores ocupados,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368 \text{ espacios}$$

A partir de \bar{c} , obtenemos

$$\text{Uso del lote de estacionamiento} = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{2.9368}{5} = .58736$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6A

1. En el ejemplo 18.6-1, haga lo siguiente:

- *(a) Calcule L_q directamente con la fórmula $\sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$.
- (b) Calcule W_s a partir de L_q .
- *(c) Calcule el promedio de autos que no podrán entrar al estacionamiento durante un periodo de 8 horas.
- *(d) Demuestre que $c - (L_s - L_q)$, el promedio de espacios vacíos es igual a $\sum_{n=0}^{c-1} (c - n)p_n$.

2. Resuelva el problema 18.6-1 con los siguientes datos: cantidad de espacios de estacionamiento = 6, cantidad de espacios temporales = 4, $\lambda = 10$ autos por hora y tiempo promedio de estacionamiento = 45 minutos.

18.6.2 Modelos de un solo servidor

Esta sección presenta dos modelos para el caso de un solo servidor ($c = 1$). El primer modelo no limita el número máximo en el sistema, y el segundo supone un límite finito del sistema. Ambos modelos suponen una capacidad infinita de la fuente. Las llegadas ocurren a razón de λ clientes por unidad de tiempo y la tasa de servicio es μ clientes por unidad de tiempo.

Los resultados de los dos modelos (y de hecho de todos los modelos restantes en la sección 18.6) se derivan como casos especiales de los resultados del modelo generalizado de la sección 18.5.

Se utilizará la notación ampliada de Kendall para caracterizar cada situación. Debido a que las derivaciones de p_n en la sección 18.5 y de todas las medidas de desempeño en la sección 18.6.1 son totalmente independientes de una disciplina de colas específica, se utilizará el símbolo GD (disciplina general) con la notación.

(M/M/1):(GD/ ∞/∞). Utilizando la notación del modelo general, tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{array} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Incluso, $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ y $\lambda_{\text{perdida}} = 0$, porque todos los clientes pueden unirse al sistema.

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, la expresión para p_n en el modelo generalizado se reduce a

$$p_n = \rho^n p_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Para determinar el valor de p_0 usamos la identidad

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots) = 1$$

La suma de la serie geométrica es $(\frac{1}{1-\rho})$, siempre que $\rho < 1$. Por lo tanto

$$p_0 = 1 - \rho, \rho < 1$$

En consecuencia, la siguiente distribución geométrica da la fórmula general para p_n

$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 1, 2, \dots (\rho < 1)$$

La derivación matemática de p_n impone la condición $\rho < 1$, o $\lambda < \mu$. Si $\lambda \geq \mu$, la serie geométrica diverge, y las probabilidades de estado estable p_n no existen. Este resultado tiene un sentido intuitivo, porque a menos que la tasa de servicio sea mayor que la tasa de llegadas, la longitud de la cola continuará creciendo y no puede alcanzarse ningún estado estable.

La medida de desempeño L_q se deriva como sigue:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1 - \rho)\rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

Debido a que $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ en la presente condición, las medidas de desempeño restantes se calculan utilizando las relaciones dadas en la sección 18.6.1. Por lo tanto,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\bar{c} = L_s - L_q = \rho$$

Ejemplo 18.6-2

Automata es una instalación de lavado de autos de una sola bahía. Los autos llegan según una distribución de Poisson con una media de 4 autos por hora y pueden esperar en el estacionamiento de la instalación en la calle si la bahía está ocupada. El tiempo para lavar y limpiar un auto es exponencial, con una media de 10 minutos. Esto significa que, para todo propósito práctico, no hay ningún límite en el tamaño del sistema. El gerente de la instalación desea determinar el tamaño del estacionamiento.

Para esta situación tenemos $\lambda = 4$ autos por hora, y $\mu = \frac{60}{10} = 6$ autos por hora. Como $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, el sistema puede operar en condiciones de estado estable. Los datos de TORA o *excelPoissonQ.xls* para este modelo son

| Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|--------|----|---|--------------------|---------------------|
| 4 | 6 | 1 | infinito | infinito |

Los resultados del modelo se muestran en la figura 18.5. El promedio de autos que esperan en la cola, L_q es 1.33 autos.

Por lo general, no es aconsejable utilizar L_q como la única base para determinar la cantidad de espacios de estacionamiento, porque el diseño debe, en cierto sentido, tener en cuenta la longitud máxima posible de la cola. Por ejemplo, puede ser más razonable diseñar el estacionamiento de modo que un auto que llega encuentre un espacio de estacionamiento al menos 90% de las veces. Para hacer esto, sea S la cantidad de espacios de estacionamiento. Tener S espacios de estacionamiento equivale a tener $S + 1$ espacios en el sistema (cola más bahía). Un auto que llega encontrará un espacio 90% de las veces si hay cuando mucho S autos en el sistema. Esta condición es equivalente al siguiente enunciado de probabilidad:

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_S \geq .9$$

De acuerdo con la figura 18.5, la probabilidad acumulada p_n con $n = 5$ es .91221. Esto significa que la condición se satisface con $S \geq 5$ espacios de estacionamiento.

La cantidad de espacios S se determina también por medio de la definición matemática de p_n , es decir,

$$(1 - \rho)(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^S) \geq .9$$

La suma de la serie geométrica truncada es $\frac{1 - \rho^{S+1}}{1 - \rho}$, la cual reduce la condición a

$$(1 - \rho^{S+1}) \geq .9$$

Scenario 1: (M/M/1) : (GD/infinity/infinity)

Lambda = 4.00000 Mu = 6.00000
 Lambda eff = 4.00000 Rho/c = 0.66667
 Ls = 2.00000 Lq = 1.33333
 Ws = 0.50000 Wq = 0.33333

| n | Probability pn | Cumulative Pn | n | Probability pn | Cumulative Pn |
|----|----------------|---------------|----|----------------|---------------|
| 0 | 0.33333 | 0.33333 | 13 | 0.00171 | 0.99657 |
| 1 | 0.22222 | 0.55556 | 14 | 0.00114 | 0.99772 |
| 2 | 0.14815 | 0.70370 | 15 | 0.00076 | 0.99848 |
| 3 | 0.09877 | 0.80247 | 16 | 0.00051 | 0.99899 |
| 4 | 0.06584 | 0.86831 | 17 | 0.00034 | 0.99932 |
| 5 | 0.04390 | 0.91221 | 18 | 0.00023 | 0.99955 |
| 6 | 0.02926 | 0.94147 | 19 | 0.00015 | 0.99970 |
| 7 | 0.01951 | 0.96098 | 20 | 0.00010 | 0.99980 |
| 8 | 0.01301 | 0.97399 | 21 | 0.00007 | 0.99987 |
| 9 | 0.00867 | 0.98266 | 22 | 0.00004 | 0.99991 |
| 10 | 0.00578 | 0.98844 | 23 | 0.00003 | 0.99994 |
| 11 | 0.00385 | 0.99229 | 24 | 0.00002 | 0.99996 |
| 12 | 0.00257 | 0.99486 | 25 | 0.00001 | 0.99997 |

FIGURA 18.5

Resultados del ejemplo 18.6-2 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-2.txt*)

La simplificación de la desigualdad produce

$$\rho^{S+1} \leq .1$$

Sacando los logaritmos en ambos lados (y observando que $\log(x) < 0$ para $0 < x < 1$, lo cual invierte la dirección de la desigualdad), tenemos.

$$S \geq \frac{\ln(.1)}{\ln\left(\frac{4}{6}\right)} - 1 = 4.679 \approx 5$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6B

- En el ejemplo 18.6-2, haga lo siguiente.
 - Determine la utilización en porcentaje de la bahía de lavado.
 - Determine la probabilidad de que un auto que llega tenga que esperar en el estacionamiento antes de entrar a la bahía de lavado.
 - Si hay 7 espacios de estacionamiento, determine la probabilidad de que un auto que llega encuentre un estacionamiento vacío.
 - ¿Cuántos espacios de estacionamiento deben proporcionarse de modo que un auto que llega pueda encontrar un espacio de estacionamiento 99% del tiempo?

- *2. John Macko estudia en la U de Ozark. Realiza trabajos peculiares para complementar sus ingresos. Las solicitudes para que realice un trabajo llegan cada 5 días, pero el tiempo entre solicitudes es exponencial. El tiempo para terminar un trabajo también es exponencial con media de 4 días.
- ¿Cuál es la probabilidad de que John se quede sin trabajos?
 - Si John gana aproximadamente \$50 por trabajo, ¿cuál es su ingreso mensual promedio?
 - Si al final del semestre John decide subcontratar los trabajos pendientes a \$40 cada uno, ¿cuánto, en promedio, debe esperar que le paguen?
3. Durante años, el detective Columbo, del Departamento de Policía de Fayetteville, ha tenido un éxito fenomenal al resolver todos los casos criminales. Es sólo cuestión de tiempo antes de que cualquier caso se resuelva. Columbo admite que el tiempo por caso es "totalmente aleatorio", pero, en promedio, cada investigación le lleva aproximadamente una semana y media. Los crímenes en el tranquilo Fayetteville no son muy comunes. Ocurren al azar a razón de un crimen por mes (4 semanas). El detective Columbo está solicitando que un asistente comparta la pesada carga de trabajo. Analice la petición de Columbo, en particular desde la perspectiva de los siguientes puntos:
- El promedio de casos en espera de ser investigados.
 - El porcentaje del tiempo que el detective permanece ocupado.
 - El tiempo promedio necesario para resolver un caso.
4. Los autos que llegan a la caseta de cobro del túnel Lincoln lo hacen según una distribución de probabilidades de Poisson, con una media de 90 autos por hora. El tiempo para cruzar la caseta es exponencial con media de 38 segundos. Los conductores se quejan del largo tiempo de espera, y las autoridades desean reducir el tiempo de cruce promedio a 30 segundos con la instalación de dispositivos de cobro de cuota automáticos, siempre que se satisfagan dos condiciones: (1) que el promedio de autos que esperan en este sistema exceda de 5, y (2) que el porcentaje del tiempo ocioso de la caseta con el nuevo dispositivo instalado no exceda de 10%. ¿Se puede justificar el nuevo dispositivo?
- *5. Un restaurante de comida rápida tiene una ventanilla para servicio en su auto. Los autos llegan según una distribución de Poisson a razón de dos cada 5 minutos. El espacio en frente de la ventanilla puede acomodar a lo sumo 10 autos, incluso el que se está atendiendo. Los demás autos pueden esperar afuera de este espacio si es necesario. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 1.5 minutos. Determine lo siguiente:
- La probabilidad de que la ventanilla esté ociosa.
 - La cantidad estimada de clientes que esperan ser atendidos.
 - El tiempo de espera hasta que un cliente llega a la ventanilla para hacer su pedido.
 - La probabilidad de que la línea de espera exceda la capacidad de 10 espacios.
6. Los clientes llegan a la ventanilla de servicio en su auto de un banco según una distribución de Poisson, con una media de 10 por hora. El tiempo de servicio por cliente es exponencial con una media de 5 minutos. Hay tres espacios en frente de la ventanilla, incluido el auto que están atendiendo. Otros autos que llegan se forman afuera de este espacio para 3 autos.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega pueda entrar a un de los 3 espacios?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega espere afuera del espacio designado para tres 3 autos?
 - ¿Cuánto tiempo se anticipa que espere un cliente que llega antes de iniciar el servicio?
- *7. En el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, dé un argumento convincente de por qué en general L_s no es igual a $L_q + 1$. ¿En qué condición se mantendrá la igualdad?
8. Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, derive la expresión L_q utilizando la definición básica
- $$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n.$$

9. Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, demuestre que

- (a) El número esperado en la cola, si la cola no está vacía es igual a, $= \frac{1}{(1-\rho)} \cdot$
- (b) El tiempo de espera anticipado en la cola para los que deben esperar es igual a $= (\frac{1}{\mu - \lambda})$.

$(M/M/1):(GD/N/\infty)$. Este modelo difiere de $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ en que hay un límite N en el número en el sistema (longitud máxima de la cola = $N - 1$). Algunos ejemplos incluyen situaciones de manufactura en las que una máquina puede tener un espacio intermedio limitado y una ventanilla de servicio en su coche en un restaurante de comida rápida. No se permiten nuevas llegadas cuando la cantidad de clientes en el sistema llega a N . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0, & n = N, N + 1 \end{cases} \\ \mu_n &= \mu, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Utilizando $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, el modelo generalizado de la sección 18.5 da

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0 & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, la cual da

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^N) = 1$$

o

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}}, & \rho = 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

El valor de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ no tiene que ser menor que 1 en este modelo, porque el límite N controla las llegadas al sistema. Esto significa que λ_{efec} es la tasa que importa en este caso. Debido a que los clientes se pierden cuando hay N en el sistema, entonces, como se muestra en la figura 18.4,

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_N$$

$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = \lambda(1 - p_N)$$

En este caso, $\lambda_{\text{efec}} < \mu$.

La cantidad esperada de clientes en el sistema se calcula como

$$\begin{aligned}
 L_s &= \sum_{n=1}^N np_n \\
 &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^N n\rho^n \\
 &= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^N \rho^n \\
 &= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{N+1}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \right) \\
 &= \frac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, \rho \neq 1
 \end{aligned}$$

Cuando $\rho = 1$, $L_s = \frac{N}{2}$ (¡compruébelo!). Podemos derivar W_s , W_q y L_q a partir de L_s utilizando λ_{efec} como se muestra en la sección 18.6.1.

El uso de una calculadora de mano para procesar las fórmulas de colas es, en el mejor de los casos, incómodo (¡las fórmulas se vuelven más complejas en los últimos modelos!) Se recomienda utilizar TORA o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para manejar estos cálculos.

Ejemplo 18.6-4

Considere la instalación de lavado de autos del ejemplo 18.6-2. Suponga que la instalación cuenta con un total de 4 espacios de estacionamiento. Si el estacionamiento está lleno, los autos que llegan pueden irse a otras instalaciones. El propietario desea determinar el efecto del limitado espacio de estacionamiento en la pérdida de clientes frente a la competencia.

En términos de la notación del modelo, el límite en el sistema es $N = 4 + 1 = 5$. Los siguientes datos permiten obtener los resultados que aparecen en la figura 18.6.

| Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|--------|----|---|--------------------|---------------------|
| 4 | 6 | 1 | 5 | infinito |

Debido a que el límite en el sistema es $N = 5$, la proporción de clientes perdidos es $p_5 = .04812$, la cual, basada en un día de 24 horas, equivale a perder el negocio de $(\lambda p_5) \times 24 = 4 \times 0.4812 \times 24 = 4.62$ autos al día. La decisión en cuanto a incrementar el tamaño del lote de estacionamiento debe basarse en el valor del negocio perdido.

Mirando el problema desde un ángulo diferente, el tiempo total esperado en el sistema, W_s es de .3736 horas, o aproximadamente 22 minutos, por debajo de los 30 minutos del ejemplo 18.6-3, cuando se permite que todos los autos que lleguen se unan a la instalación. Esta reducción de aproximadamente 25% se asegura a expensas de perder alrededor de 4.8% de todos los clientes potenciales a causa del limitado espacio de estacionamiento.

Scenario 1: (M/M/1) : (GD/5/infinity)

$\Lambda = 4.00000$
 $\Lambda_{eff} = 3.80752$
 $L_s = 1.42256$
 $W_s = 0.37362$

$M_u = 6.00000$
 $Rho/c = 0.66667$
 $L_q = 0.78797$
 $W_q = 0.20695$

| n | Probability | pn | Cumulative Pn | n | Probability | pn | Cumulative Pn |
|---|-------------|----|---------------|---|-------------|----|---------------|
| 0 | 0.36541 | | 0.36541 | 3 | 0.10827 | | 0.87970 |
| 1 | 0.24361 | | 0.60902 | 4 | 0.07218 | | 0.95188 |
| 2 | 0.16241 | | 0.77143 | 5 | 0.04812 | | 1.00000 |

FIGURA 18.6

Resultados del ejemplo 18.6-4 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-4.txt*)

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6C

- *1. En el ejemplo 18.6-4, determine lo siguiente:
 - La probabilidad de que un auto que llegue entre de inmediato a la bahía de lavado.
 - El tiempo de espera hasta que se inicie el servicio.
 - La cantidad esperada de espacios de estacionamientos vacíos.
 - La probabilidad de que todos los espacios de estacionamiento estén ocupados.
 - La reducción en porcentaje del tiempo de servicio promedio que limitará el tiempo promedio en el sistema a aproximadamente 10 minutos. (*Sugerencia:* Utilice el método de prueba y error con *excelPoissonQ.xls* o TORA.)
2. Considere la instalación de lavado de autos del ejemplo 18.6-4. Determine la cantidad de espacios de estacionamiento de modo que el porcentaje de los autos que no puedan encontrar un espacio no exceda de 1%.
3. El tiempo que el peluquero Joe Cakes emplea para realizar un corte de pelo es exponencial con una media de 12 minutos. Debido a su popularidad, los clientes suelen llegar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a una razón mayor que la que Joe puede manejar: 6 clientes por hora. Joe en realidad se siente cómodo si la tasa de llegadas se reduce efectivamente a alrededor de 4 clientes por hora. Para alcanzar esta meta se le ocurrió proporcionar asientos limitados en el área de espera, de modo que los clientes que acaban de llegar se vayan a otra parte cuando se dan cuenta de que todos los asientos están ocupados. ¿Cuántos asientos debe proporcionar Joe para alcanzar su meta?
- *4. El ensamble final de los generadores eléctricos en Electro se realiza a la razón de Poisson de 10 generadores por hora. Luego los generadores son transportados por una banda al departamento de inspección para su revisión final. La banda puede transportar un máximo de 7 generadores. Un sensor automático detiene al instante la banda una vez que se llena, lo que evita que el departamento de ensamble final arme más unidades hasta que haya espacio disponible. El tiempo para inspeccionar los generadores es exponencial, con una media de 15 minutos.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el departamento de ensamble final detenga la producción?
 - ¿Cuál es el promedio de generadores sobre la banda transportadora?
 - El ingeniero de producción afirma que las interrupciones en el departamento de ensamble pueden reducirse si se incrementa la capacidad de la banda. De hecho, el ingeniero afirma que la capacidad puede incrementarse al punto en que el departamento de ensamble opere 95% del tiempo sin interrupciones. ¿Es justificable esta reclamación?

5. Una cafetería puede acomodar un máximo de 50 personas. Los clientes llegan en una corriente Poisson a razón de 10 por hora y son atendidos (uno a la vez) a razón de 12 por hora.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue no coma en la cafetería porque está llena?
 - (b) Suponga que a tres clientes (con tiempos de llegada aleatorios) les gustaría sentarse juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que se cumpla su deseo? (Suponga que pueden hacerse arreglos para que se sienten juntos en cuanto haya tres sillas disponibles.)
6. Los pacientes llegan a la clínica de un médico de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 20 pacientes por hora. La sala de espera no puede acomodar más de 14 pacientes. El tiempo de consulta por paciente es exponencial, con una media de 8 minutos.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue no espere?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue encuentre un asiento en la sala?
 - (c) ¿Cuál es el tiempo total esperado que un paciente pasa en la clínica?
7. La probabilidad p_n de que haya n clientes en el sistema en un escenario $(M/M/1):(GD/5/\infty)$ se dan en la siguiente tabla:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| p_n | .399 | .249 | .156 | .097 | .061 | .038 |

La tasa de llegadas λ es de 5 clientes por hora. La tasa de servicio μ es de 8 clientes por hora. Calcule lo siguiente:

- *(a) La probabilidad que un cliente que llega no pueda entrar al sistema.
- *(b) La tasa a la cual los clientes que llegan no podrán entrar al sistema.
- (c) Número esperado en el sistema.
- (d) Tiempo de espera promedio en la cola.
8. Demuestre que cuando $\rho = 1$ para $(M/M/1):(GD/N/\infty)$, el número esperado en el sistema, L_s , es igual a $\frac{N}{2}$. (Sugerencia: $1 + 2 + \dots + i = \frac{i(i+1)}{2}$.)
9. Demuestre que λ_{efec} para $(M/M/1):(GD/N/\infty)$ puede calcularse aplicando la fórmula,

$$\lambda_{\text{efec}} = \mu(L_s - L_q)$$

18.6.3 Modelos de varios servidores

Esta sección considera tres modelos de colas con varios servidores paralelos. Los primeros dos modelos son las versiones de varios servidores de los modelos de la sección 18.6.2. El tercer modelo trata el caso del autoservicio, el cual equivale a tener una cantidad infinita de servidores paralelos.

Aplicación de la vida real. Personal de ventas por teléfono de Qantas Airways

Para reducir los costos de operación, Qantas Airways buscar dotar de personal a su oficina principal de reservaciones y ventas por teléfono de forma eficiente, al mismo tiempo que proporciona un servicio de calidad a sus clientes. Tradicionalmente, las necesidades de personal se estiman pronosticando las llamadas telefónicas futuras con base en el incremento histórico del negocio. El aumento de la cantidad de empleados se calcula luego con base en el incremento promedio proyectado de las llamadas telefónicas, dividido entre el promedio de llamadas que un operador puede manejar.

Debido a que los cálculos están basados en promedios, la cantidad adicional de empleados contratados no toma en cuenta las fluctuaciones de la demanda durante el día. En particular, el largo tiempo de espera para el servicio durante horas laborales pico ha ocasionado quejas de los clientes y en consecuencia pérdida de negocios. El problema tiene que ver con la determinación de un plan que balancee el número de empleados contratados y las necesidades de los clientes. La solución utiliza el análisis de colas ($M/M/c$) insertado en un modelo de programación entera. Los ahorros a partir del modelo en la oficina de Sydney fueron alrededor de \$173 000 en el año fiscal 1975-1976. Busque los detalles del estudio en el caso 15, capítulo 26, en el sitio web.

(M/M/c):(GD/∞/∞). Este modelo se ocupa de c servidores paralelos idénticos. La tasa de llegadas es λ y la tasa de servicio por servidor es μ . En esta situación $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ porque no hay límite en el número presente en el sistema.

El efecto de utilizar c servidores idénticos paralelos es un incremento proporcional de tasa de servicio de la instalación. En términos del modelo generalizado (sección 18.5), λ_n y μ_n se definen por lo tanto como

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \lambda, & n \geq 0 \\ \mu_n &= \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}\end{aligned}$$

Así que,

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\dots(n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n < c \\ \frac{\lambda^n}{(\prod_{i=1}^c i\mu)(c\mu)^{n-c}} p_0 = \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} p_0, & n \geq c \end{cases}$$

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, y suponiendo que $\frac{\rho}{c} < 1$, el valor de p_0 se determina a partir de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, la cual da,

$$\begin{aligned}p_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}, \quad \frac{\rho}{c} < 1\end{aligned}$$

La expresión para L_q se determina como sigue:

$$\begin{aligned}L_q &= \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_{k+c} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c^k c!} p_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \\
 &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0
 \end{aligned}$$

porque $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$, $L_s = L_q + \rho$. Las medidas W_s y W_q se determinan dividiendo L_s y L_q entre λ .

Ejemplo 18.6-5

Dos compañías de taxis prestan servicio a una comunidad. Cada compañía posee dos taxis, y ambas comparten el mercado por igual; las llamadas llegan a la oficina de despachos de cada compañía a una tasa promedio de 8 por hora. El tiempo promedio por viaje es de 12 minutos. Las llamadas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson y el tiempo de viaje es exponencial. Las dos compañías fueron adquiridas por un inversionista y se consolidarán en una sola oficina de despachos. Analice la propuesta del nuevo propietario.

Desde el punto de vista de las colas, los taxis son los servidores, y el viaje del taxi es el servicio. Cada compañía puede representarse con el modelo $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ con $\lambda = 8$ llamadas por hora y $\mu = \frac{60}{10} = 5$ viajes por taxi por hora. El modelo consolidado es $(M/M/4):(GD/\infty/\infty)$, con $\lambda = 2 \times 8 = 16$ llamadas por hora y $\mu = 5$ viajes por taxi por hora.

Una medida adecuada para comparar los dos modelos es el tiempo de espera promedio para un viaje, W_q . La siguiente tabla da los datos de entrada de análisis comparativos.

| Escenario | Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|-----------|--------|----|---|--------------------|---------------------|
| 1 | 8 | 5 | 2 | infinito | infinito |
| 2 | 16 | 5 | 4 | infinito | infinito |

La figura 18.7 proporciona los resultados con los dos escenarios. Los resultados muestran que el tiempo de espera para un viaje es de .356 horas (≈ 21 minutos) en la situación de dos taxis y de .149 (≈ 9 minutos) en la situación consolidada, una notable reducción de más de 50% y una clara evidencia de que la consolidación de las dos compañías está garantizada.

Comentarios. La conclusión del análisis anterior es que los grupos de servicio siempre proporcionan un modo de operación más eficiente. El resultado es cierto incluso si las instalaciones distintas resultan estar "muy ocupadas" (vea los problemas 2 y 10, conjunto 18.6d).

FIGURA 18.7

Resultados del ejemplo 18.6-5 obtenidos con TORA (archivo *toraEx.18.6-5.txt*)

Comparative analysis

| c | Lambda | Mu | L'da eff | p0 | Ls | Ws | Lq | Wq |
|---|--------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 8.000 | 5.000 | 8.00 | 0.110 | 4.444 | 0.556 | 2.844 | 0.356 |
| 4 | 16.000 | 5.000 | 16.00 | 0.027 | 5.586 | 0.349 | 2.386 | 0.149 |

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6D

1. Considere el ejemplo 18.6-5.
 - (a) Demuestre que la notable reducción del tiempo de espera de más de 50% en el caso consolidado está asociada con un incremento del porcentaje del tiempo que los servidores permanecen ocupados.
 - (b) Determine la cantidad de taxis que la compañía consolidada debe tener para limitar el tiempo de espera promedio de un viaje a 5 minutos o menos.
- *2. En el ejemplo de la compañía de taxis, suponga que el tiempo promedio por viaje es en realidad de aproximadamente 14.5 minutos, de modo que la utilización ($= \frac{\lambda}{\mu c}$) para los 2 y 4 taxis se incremente a más de 90%. ¿Sigue valiendo la pena consolidar las dos compañías en una? Use el tiempo de espera promedio de un viaje como medida de comparación.
3. Determine el mínimo de servidores paralelos necesarios en cada una de las siguientes situaciones (llegadas/salidas Poisson) que garantice que la operación de la situación de colas será estable (es decir, que la longitud de la cola no crezca de forma indefinida):
 - (a) Los clientes llegan cada 5 minutos y son atendidos a razón de 10 clientes por hora.
 - (b) El tiempo entre llegadas promedio es de 2 minutos, y el tiempo de servicio promedio es de 6 minutos.
 - (c) La tasa de llegadas es de 30 clientes por hora, y la tasa de servicios por servidor es de 40 clientes por hora.
4. Los clientes llegan al Thrift Bank según una distribución de Poisson, con una media de 45 clientes por hora. Las transacciones por cliente tardan alrededor de 5 minutos y están distribuidas exponencialmente. El banco desea utilizar una sola línea y varias cajas, similar a las que se utilizan en aeropuertos y algunas dependencias. El gerente es consciente de que los clientes pueden irse a otros bancos si perciben que su espera en la línea es "excesiva". Por esta razón, el gerente desea limitar el tiempo de espera en la cola a no más de 30 segundos. ¿Cuántas cajas debe poner en servicio el banco?
- *5. El restaurante de comida rápida McBurger opera con 3 cajas. Los clientes llegan, de acuerdo con una distribución de Poisson, cada 3 minutos y forman una línea para ser atendidos por la primera caja disponible. El tiempo para completar un pedido está distribuido exponencialmente con una media de 5 minutos. La sala de espera en el interior del restaurante está limitada. Sin embargo, la comida es buena, y los clientes están dispuestos a esperar afuera del restaurante, si es necesario. Determine el tamaño de la sala de espera dentro del restaurante (excluidos los de las cajas) de modo que la probabilidad de que un cliente que llega no espere afuera del restaurante sea al menos de .999.
6. Una pequeña oficina de correos tiene dos ventanillas abiertas. Los clientes de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 1 cada 3 minutos. Sin embargo, sólo 80% de ellos busca servicio en las ventanillas. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 5 minutos. Todos los clientes que llegan forman una línea y acceden a las ventanillas con base en la disciplina de primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS).
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega espere en la línea?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas ventanillas estén ociosas?
 - (c) ¿Cuál es la longitud promedio de la línea de espera?
 - (d) ¿Sería posible ofrecer un servicio razonable con sólo una ventanilla? Explique.
7. El centro de cómputo de la U de A está equipado con cuatro maxicomputadoras idénticas. La cantidad de usuarios en cualquier momento es de 25. Cada usuario es capaz de enviar un trabajo desde una terminal cada 15 minutos en promedio, pero el tiempo real entre envíos es exponencial. Los trabajos que llegan automáticamente se van a la primera computadora disponible. El tiempo de ejecución por envío es exponencial con una media de 2 minutos. Calcule lo siguiente:
 - *(a) La probabilidad de que un trabajo no se ejecute de inmediato inmediatamente después de enviarlo.
 - (b) El tiempo promedio hasta que los resultados de un trabajo se le devuelvan al usuario.

- (c) El promedio de trabajos en espera de ser ejecutados.
 (d) El porcentaje de tiempo que todo el centro de cómputo está ocioso.
 *(e) El promedio de computadoras ociosas.
8. El aeropuerto Drake presta servicios a pasajeros, rurales, suburbanos y en tránsito. La distribución de las llegadas de cada uno de los tres grupos es Poisson con tasas medias de 15, 10 y 20 pasajeros por hora, respectivamente. El tiempo para documentar un pasajero es exponencial con media de 6 minutos. Determine la cantidad de mostradores que debe haber en Drake en cada una de las siguientes condiciones:
 (a) El tiempo promedio total para documentar un cliente es de al menos 15 minutos.
 (b) El porcentaje de ociosidad de los mostradores no excede de 10%.
 (c) La probabilidad de que todos los mostradores estén ociosos no excede de .01.
9. En los Estados Unidos, el uso de una sola fila y varios servidores es común en las oficinas de correos, en mostradores de documentación de pasajeros en aeropuertos. Sin embargo, tanto en supermercados como en bancos (especialmente en comunidades pequeñas) tiende a favorecer la configuración de una línea y un servidor, a pesar del hecho de que configuración de una línea y varios servidores ofrece una operación más eficiente. Comente esta observación.
10. Para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, Morse (1958, pág. 103) muestra que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$,

$$L_q = \frac{\rho}{c - \rho}$$

Con la observación de que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$ indica que los servidores están extremadamente ocupados, use esta información para demostrar que la relación del tiempo de espera promedio en la cola en el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ al del modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ tiende a $\frac{1}{c}$ a medida que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$. Por lo tanto, con $c = 2$, el tiempo de espera promedio puede reducirse en un 50%. La conclusión de este ejercicio es que siempre es aconsejable agrupar los servicios, independientemente de qué tan "sobrecargados" puedan estar los servidores.

11. En la derivación de p_n para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, indique cuál parte de la derivación requiere la condición $\frac{\rho}{c} < 1$. Exponga oralmente el significado de la condición. ¿Qué sucederá si no se satisface la condición?
12. Compruebe que $L_s = L_q + \bar{c}$ comenzando con la definición $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c)p_n$, donde \bar{c} es el número promedio de servidores ocupados. Por consiguiente, demuestre que $\bar{c} = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$.
13. Demuestre que p_n para el modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ se puede obtener a partir de la del modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ con $c = 1$.
14. Demuestre que para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$

$$L_q = \frac{cp}{(c - \rho)^2} P_c$$

15. Para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, demuestre que
 (a) La probabilidad de que un cliente esté esperando es $\frac{\rho}{(c - \rho)} P_c$.
 (b) El número promedio en la cola si no está vacía es $\frac{c}{(c - \rho)}$.
 (c) El tiempo de espera anticipado en la cola para los clientes que deben esperar es $\frac{1}{\mu(c - \rho)}$.

$(M/M/c):(GD/N/\infty)$, $c \leq N$. El modelo difiere de $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ en que el límite del sistema es finito e igual a N . Esto significa que el tamaño de la cola es $N - c$. Las tasas de llegadas y servicio son λ y μ . La tasa de llegadas efectiva λ_{efec} es menor que λ debido al límite del sistema N .

En términos del modelo generalizado (sección 18.5), λ_n y μ_n para el modelo actual se definen como

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq c \\ c\mu, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

Sustituyendo λ_n y μ_n en la expresión general de la sección 18.5 y observando que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, obtenemos

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \leq n < c \\ \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} p_0, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

donde

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c \left(1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}\right)}{c! \left(1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)\right)} \right)^{-1}, & \frac{\rho}{c} \neq 1 \\ \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} (N-c+1) \right)^{-1}, & \frac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

Luego calculamos L_q en el caso en que $\frac{\rho}{c} \neq 1$ como

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^N (n-c)p_n \\ &= \sum_{j=0}^{N-c} j p_{j+c} \\ &= \frac{\rho^c \rho}{c! c} p_0 \sum_{j=0}^{N-c} j \left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1} \\ &= \frac{\rho^{c+1}}{c c!} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{j=0}^{N-c} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \\ &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)! (c-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1} - (N-c+1) \left(1 - \frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \right\} p_0 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que con $\frac{\rho}{c} = 1$, L_q se reduce a

$$L_q = \frac{\rho^c (N-c)(N-c+1)}{2c!} p_0, \quad \frac{\rho}{c} = 1$$

Para determinar W_q y por consiguiente W_s y L_s , calculamos el valor de λ_{efec} como

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_N$$

$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = (1-p_N)\lambda$$

Ejemplo 18.6-6

En el problema de la compañía de taxis consolidada del ejemplo 18.6-5, suponga que no pueden asegurarse nuevos fondos para la compra de más taxis. Se le aconsejó al propietario que una forma de reducir el tiempo de espera es que la oficina de despachos informe a los nuevos clientes sobre una demora potencial excesiva una vez que la lista de espera llega a ser de 6 clientes. La expectativa es que estos clientes busquen el servicio en otra parte, lo que a su vez reducirá el tiempo de espera de los que ya están en la lista de espera. Evalúe la situación.

Limitar la lista de espera a 6 clientes equivale a hacer $N = 6 + 4 = 10$ clientes, lo que conduce al modelo $(M/M/4):(GD/10/\infty)$ con $\lambda = 16$ clientes por hora y $\mu = 5$ viajes por hora. Los siguientes datos de entrada proporcionan los resultados que aparecen en la figura 18.8.

| Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|--------|----|---|--------------------|---------------------|
| 16 | 5 | 4 | 10 | Infinito |

El tiempo promedio de espera, W_q , antes de limitar la capacidad del sistema es de .149 horas (≈ 9 minutos) (vea la figura 18.7), lo cual es aproximadamente el doble del nuevo promedio .075 horas (≈ 4.5 minutos). Esta notable reducción se logra a expensas de perder alrededor de 3.6% de los clientes potenciales ($p_{10} = .03574$). Sin embargo, este resultado no refleja la pérdida intangible de la buena disposición de los clientes en relación con la operación de la compañía.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6E

1. En el ejemplo 18.6-6, determine lo siguiente:

- (a) El número esperado de taxis ociosos.
- (b) La probabilidad de que un cliente que llama sea el último de la lista.
- (c) El límite en la lista de espera si se desea mantener el tiempo de espera en la cola por debajo de 3 minutos.

FIGURA 18.8

Resultados del ejemplo 18.6-6 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-6.txt*)

Scenario1: (M/M/4) : (GD/10/infinity)

| | | | |
|--------------|----------|---------|---------|
| Lambda = | 16.00000 | Mu = | 5.00000 |
| Lambda eff = | 15.42815 | Rho/c = | 0.80000 |
| Ls = | 4.23984 | Lq = | 1.15421 |
| Ws = | 0.27481 | Wq = | 0.07481 |

| n | Probability pn | Cumulative Pn | n | Probability pn | Cumulative Pn |
|---|-------------------|------------------|----|-------------------|------------------|
| 0 | 0.03121 | 0.03121 | 6 | 0.08726 | 0.79393 |
| 1 | 0.09986 | 0.13106 | 7 | 0.06981 | 0.86374 |
| 2 | 0.15977 | 0.29084 | 8 | 0.05584 | 0.91958 |
| 3 | 0.17043 | 0.46126 | 9 | 0.04468 | 0.96426 |
| 4 | 0.13634 | 0.59760 | 10 | 0.03574 | 1.00000 |

2. En la tienda de Eat & Gas funciona una estación de gasolina de dos bombas. El carril que conduce a las bombas puede alojar cuando mucho 3 autos (automóviles), excluyendo a los que se les está dando atención. Los autos que llegan se van a otra parte si el carril está lleno. La distribución de los autos que llegan es de Poisson con media de 20 por hora. El tiempo para llenar el tanque y pagar es exponencial con media de 6 minutos. Determine lo siguiente:
- El porcentaje de autos que buscarán servicio en otra parte.
 - El porcentaje de tiempo que una bomba está en uso.
 - *(c) La utilización en porcentaje de las dos bombas.
 - *(d) La probabilidad de que un auto que llega no inicie el servicio de inmediato pero que encuentre un espacio vacío en el carril.
 - (e) La capacidad del carril que garantice que, en promedio, no más de 10% de los autos que llegan se vaya.
 - (f) La capacidad del carril que garantice que la probabilidad de que ambas bombas estén ociosas es de .05 o menos.
3. Tres mecánicos atienden un pequeño taller de reparación de motores. A principios de marzo de cada año, las personas traen sus cañas de timón y podadoras de césped para servicio y reparación. El taller está dispuesto a aceptar todas las cañas de timón y podadoras que traigan los clientes. Sin embargo, cuando los clientes nuevos ven el piso del taller tapizado de trabajos en espera, se van a otra parte para un servicio más rápido. El piso del taller puede alojar un máximo de 15 podadoras o cañas de timón, excluyendo las que están en reparación. Los clientes llegan al taller cada 10 minutos en promedio, y a cada mecánico le lleva un promedio de 30 minutos completar cada trabajo. Tanto los tiempos entre llegadas como los de servicio son exponenciales. Determine lo siguiente:
- El promedio de mecánicos ociosos.
 - La cantidad de negocios perdidos ante la competencia por día de 10 horas a causa de la limitada capacidad del taller.
 - La probabilidad de que el siguiente cliente que llegue será atendido por el taller.
 - La probabilidad de que al menos un mecánico esté ocioso.
 - El promedio de cañas de timón o podadoras en espera de servicio.
 - (f) Una medida de la productividad total del taller.
4. En la U de A, los estudiantes de primer año recién matriculados son muy notorios porque llegan a la universidad en sus autos (aun cuando se requiere que la mayoría de ellos vivan en el campus y puedan utilizar el sistema de tránsito libre de la universidad). Durante el primer par de semanas del semestre, prevalece el caos vial en el campus porque los estudiantes de primer año tratan desesperadamente de encontrar espacios de estacionamiento. Con una rara dedicación, los estudiantes esperan pacientemente en los carriles del estacionamiento a que alguien salga de modo que puedan estacionar sus autos. Consideremos un escenario específico. El estacionamiento cuenta con 30 espacios pero también puede acomodar 10 autos más en los carriles. Estos 10 autos adicionales no pueden estacionarse en los carriles de forma permanente y deben esperar la disponibilidad de uno de los 30 espacios de estacionamiento. Los estudiantes de primer año llegan al estacionamiento de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 20 autos por hora. El tiempo de estacionamiento por autos promedia 60 minutos, pero en realidad sigue una distribución exponencial.
- *(a) ¿Cuál es el porcentaje de los estudiantes de primer año que se van porque no pueden entrar al estacionamiento?
 - *(b) ¿Cuál es la probabilidad que un auto que llega espere en los carriles?
 - (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega ocupe el único espacio de estacionamiento que quede en el lote?
 - *(d) Determine el promedio de espacios de estacionamiento ocupados.

- (e)** Determine el promedio de espacios que está ocupado en los carriles.
(f) Determine cuántos estudiantes de primer año no llegarán a tiempo a clase durante un periodo de 8 horas porque el estacionamiento está lleno.
5. Verifique la expresión para p_0 para el modelo $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ dando que $\frac{\rho}{c} \neq 1$.
 6. Compruebe la siguiente igualdad para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$:

$$\lambda_{\text{eff}} = \mu \bar{c},$$

donde \bar{c} es el número de servidores ocupado.

7. Verifique la expresión para p_0 y L_q para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} = 1$.
 8. Para $(M/M/c):(GD/N/\infty)$ con el cual $N = c$, defina λ_n y μ_n en función del modelo general (sección 18.5), luego demuestre que la expresión para p_n es

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad n = 1, 2, \dots, c$$

donde

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^c \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}$$

$(M/M/\infty):(GD/\infty \neq \infty)$ —Modelo de autoservicio. En este modelo, las tasas de llegadas y servicio son λ y μ , respectivamente, y la cantidad de servidores es ilimitada porque el cliente también es el servidor. Un ejemplo típico es realizar la parte escrita del examen para la licencia de conductor. Las gasolineras de autoservicio y los cajeros automáticos que operan durante las 24 horas del día no caen dentro de este modelo porque los servidores en estos casos son en realidad las bombas de gasolina y los cajeros automáticos.

En términos del modelo general de la sección 18.5, tenemos

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Debido a que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, se desprende que

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{e^{\rho}} = e^{-\rho}$$

Por resultado,

$$p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

la cual es Poisson con media $L_s = \rho$. Como era de esperarse, L_q y W_q son cero porque es una instalación de autoservicio.

Ejemplo 18.6-7

Un inversionista invierte \$1000 al mes, en promedio, en el mercado de valores. Debido a que el inversionista debe esperar una buena oportunidad para "comprar", el tiempo real de compra es aleatorio. El inversionista suele conservar los valores durante unos 3 años en promedio pero los vende al azar cuando se le presenta una buena oportunidad para "vender". Aunque al inversionista se le suele reconocer como un astuto corredor del mercado de valores, la experiencia pasada indica que alrededor de 25% de los valores declinan a 20% al año, aproximadamente. El 75% restante aumenta de valor a razón de 12% al año. Estime el capital accionario del inversionista (a largo plazo) promedio en el mercado de valores.

Esta situación se puede tratar como un modelo $(M/M/c):(GD/N/\infty/\infty)$ porque, para todos los propósitos prácticos, el inversionista no tiene que esperar en línea para comprar o vender sus valores. El tiempo promedio entre colocaciones de pedidos es de 1 mes, lo que da $\lambda = 12$ valores por año. La tasa de venta de los valores es $\mu = \frac{1}{3}$ valor por año. Puede obtener los resultados del modelo con los siguientes datos de entrada:

| Lambda | Mu | c | Límite del sistema | Límite de la fuente |
|--------|----------|----------|--------------------|---------------------|
| 12 | .3333333 | infinito | infinito | infinito |

Dados los valores de λ y μ , obtenemos

$$L_s = p = \frac{\lambda}{\mu} = 36 \text{ valores}$$

La estimación del valor neto *anual* promedio (a largo plazo) del inversionista es

$$(.25L_s \times \$1000)(1 - .20) + (.75L_s \times \$1000)(1 + .12) = \$63,990$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6F

- En el ejemplo 18.6-7, calcule lo siguiente:
 - La probabilidad de que el inversionista venda todos sus valores.
 - La probabilidad de que el inversionista posea al menos 10 valores.
 - La posibilidad de que el inversionista posea entre 30 y 40 valores, inclusive.
 - El capital accionario anual neto del inversionista si sólo 10% de los valores se deprecián 30% al año y el 90% restante suben 15% al año.
- Se requiere que los nuevos conductores aprueben exámenes escritos antes de someterlos a un examen de manejo en carretera. Estos exámenes suelen ser administrados por el departamento de policía de la ciudad. Los registros en la ciudad de Springdale muestran que el promedio de exámenes escritos es de 100 por día de ocho horas. El tiempo promedio necesario para completar el examen es aproximadamente de 30 minutos. Sin embargo, la llegada real de los conductores que van a realizar el examen y el tiempo que cada uno emplea en el examen son totalmente aleatorios. Determine lo siguiente:
 - La cantidad promedio de sillas que el departamento de policía debe proporcionar en el salón donde se realizan los exámenes.
 - La probabilidad de que la cantidad de conductores que van a realizar el examen no exceda el promedio de sillas proporcionadas en el salón.
 - La probabilidad de que no se administren exámenes en cualquier día.
- Demuestre (utilizando *excelPoissonQ.xls* o TORA) que con $\rho = .1$, los valores de L_s , L_q , W_s y W_q y p_n para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ pueden estimarse con confiabilidad uti-

lizando las fórmulas menos complicadas del modelo $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$ con c tan pequeño como 4 servidores.

4. Repita el problema 3 para $\rho = 9$ grande, y demuestre que la misma conclusión es válida excepto que el valor de c debe ser mayor (al menos 14). A partir de los resultados de los problemas 3 y 4, ¿a qué conclusión puede llegarse con respecto al uso de $(M/M/\infty):(GD/\infty/\infty)$ para estimar los resultados del modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$?

18.6.4 Modelo de servicio de máquinas $(M/M/R):(GD/K/K)$, $R < K$

La jurisdicción de este modelo es un taller con K máquinas. Cuando una máquina se descompone, se llama a uno de los técnicos en mantenimiento para que la repare. La tasa de descomposturas *por máquina* es λ descomposturas por unidad de tiempo, y un técnico reparará las máquinas descompuestas a razón de μ máquinas por unidad de tiempo. Todas las descomposturas y servicios siguen la distribución de Poisson.

La fuente en este modelo es finita porque las máquinas que están funcionando pueden descomponerse, y por consiguiente puede generar llamadas de servicio. Una vez que todas las máquinas se descompongan, no podrá haber más llamadas de servicio.

Dada λ la tasa de descomposturas *por máquina*, la tasa de descomposturas de *todo el taller* es proporcional a la cantidad de máquinas que están funcionando. En función del modelo de colas, tener n máquinas en *el sistema* significa que n máquinas están descompuestas, y que la tasa de descomposturas asociada de todo el taller es

$$\lambda_n = (K - n)\lambda, \quad 0 \leq n \leq K$$

En función del modelo generalizado de la sección 18.5, tenemos

$$\lambda_n = \begin{cases} (K - n)\lambda, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq R \\ R\mu, & R \leq n \leq K \end{cases}$$

A partir del modelo generalizado podemos obtener (¡compruébelo!)

$$p_n = \begin{cases} C_n^K \rho^n p_0, & 0 \leq n \leq R \\ C_n^K \frac{n! \rho^n}{R! R^{n-R}} p_0, & R \leq n \leq K \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^R C_n^K \rho^n + \sum_{n=R+1}^K C_n^K \frac{n! \rho^n}{R! R^{n-R}} \right)^{-1}$$

No hay expresión alguna de forma cerrada para L_s y por consiguiente debe calcularse por medio de la siguiente definición básica:

$$L_s = \sum_{n=0}^K np_n$$

El valor de λ_{efec} se calcula como

$$\lambda_{\text{efec}} = E\{\lambda(K - n)\} = \lambda(K - L_s)$$

Utilizando las fórmulas de la sección 18.6.1, podemos calcular las medidas restantes de desempeño W_s , W_q y L_q .

Ejemplo 18.6-8

Toolco opera un taller con 22 máquinas. En promedio, una máquina se descompone cada 2 horas. Se requiere un promedio de 12 minutos completar una reparación. Tanto el tiempo entre descomposturas como el tiempo de reparación son exponenciales. A Toolco le interesa determinar la cantidad de técnicos en reparaciones para mantener el taller funcionando "bien".

La situación se analiza investigando la productividad de las máquinas como una función de la cantidad de técnicos, definida como

$$\begin{aligned} \left(\text{Productividad de las máquinas} \right) &= \frac{\text{Máquinas disponibles} - \text{Máquinas descompuestas}}{\text{Máquinas disponibles}} \times 100 \\ &= \frac{22 - L_s}{22} \times 100 \end{aligned}$$

Los resultados en esta situación se obtienen utilizando los siguientes datos de entrada: $\lambda = .5$, $\mu = 5$, $R = 1, 2, 3$ o 4 , límite del sistema = 22, y límite de la fuente = 22. La figura 18.9 proporciona los resultados. La siguiente tabla da la productividad asociada como una función del número de técnicos en reparaciones.

| Técnicos en reparaciones | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Productividad de las máquinas (100%) | 45.44 | 80.15 | 88.79 | 90.45 |
| Incremento marginal (100%) | — | 34.71 | 8.64 | 1.66 |

Los resultados muestran que con un técnico la productividad es baja ($= 45.44\%$). Si se aumenta la cantidad de técnicos a dos, la productividad salta 34.71% a 80.15%. Cuando el taller emplea tres técnicos, la productividad se incrementa sólo en aproximadamente de 8.64% a 88.79%, mientras que los cuatro técnicos incrementarán la productividad en un escaso 1.66% a 90.45%.

Juzgando a partir de estos resultados, se justifica el uso de dos técnicos. El caso de tres no es tan fuerte ya que eleva la productividad en sólo 8.64%. Tal vez una comparación monetaria entre el costo de contratar un tercer técnico y el ingreso atribuido al incremento de 8.64% de la productividad pueda usarse para resolver este punto (vea la sección 18.10 para un análisis de los modelos de costos).

FIGURA 18.9

Resultados del análisis comparativo realizado con TORA para el ejemplo 18.6-8 (archivo *toraEx18.6-8.txt*)

Comparative Analysis

| c | Lambda | Mu | L'da eff | p0 | Ls | Lq | Ws | Wq |
|---|--------|------|----------|--------|---------|---------|--------|--------|
| 1 | 0.500 | 5.00 | 4.9980 | 0.0004 | 12.0040 | 11.0044 | 2.4018 | 2.2018 |
| 2 | 0.500 | 5.00 | 8.8161 | 0.0564 | 4.3677 | 2.6045 | 0.4954 | 0.2954 |
| 3 | 0.500 | 5.00 | 9.7670 | 0.1078 | 2.4660 | 0.5128 | 0.2525 | 0.0525 |
| 4 | 0.500 | 5.00 | 9.9500 | 0.1199 | 2.1001 | 0.1102 | 0.2111 | 0.0111 |

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6G

- En el ejemplo 18.6-8, haga lo siguiente:
 - Verifique los valores de λ_{efec} dados en la figura 18.9.
 - Calcule la cantidad esperada de técnicos ociosos, si $R = 4$.
 - Calcule la probabilidad de que los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
 - Calcule la probabilidad de que la mayoría (más de la mitad) de los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
- En el ejemplo 18.6-8, defina y calcule la productividad de los técnicos para $R = 1, 2, 3$, y 4. Utilice esta información junto con la medida de productividad de la máquina para decidir el número de técnicos que Toolco debe contratar.
- En los cálculos de la figura 18.9, puede parecer confuso que la tasa promedio de descomposturas de máquinas en el taller, λ_{efec} , se incrementa con el incremento de R . Explique por qué debe esperarse el incremento de λ_{efec} .
- Un operador atiende 5 máquinas automáticas. Después de que cada máquina completa un lote, el operador debe reiniciarla antes de que se inicie un nuevo lote. El tiempo para completar un lote es exponencial con media de 45 minutos. El tiempo de preparación también es exponencial con media de 8 minutos.
 - Determine el promedio de máquinas en espera de ser preparadas o que se están preparando.
 - Calcule la probabilidad de que todas las máquinas estén funcionando.
 - Determine el tiempo promedio que una máquina está detenida.
- Kleen All es una compañía de servicios que realiza varios trabajos peculiares, como jardinería, poda de árboles y pintura de casas. Los 4 empleados de la compañía salen de la oficina con la primera asignación del día. Después de completar una asignación, el empleado llama a la oficina para pedir instrucciones para el siguiente trabajo que se va a realizar. El tiempo para completar una asignación es exponencial con una media de 45 minutos. El tiempo de viaje entre los trabajos también es exponencial con una media de 20 minutos.
 - Determine el promedio de empleados que viajan entre los trabajos.
 - Calcule la probabilidad de que ningún empleado ande en camino.
- Luego de una larga espera, los Newborns fueron recompensados con quintuplices, 2 niños y 3 niñas, gracias a los maravillosos avances de la medicina. Durante los primeros 5 meses, la vida de los niños consistía en dos estados, despiertos (la mayor parte del tiempo llorando) y dormidos. De acuerdo con los Newborns, las actividades de los bebés de "despertar-dormir" nunca coinciden. En su lugar, todo el asunto es totalmente aleatorio. De hecho, la señora Newborn, profesional en estadísticas, cree que el tiempo que cada bebé llora es exponencial, con una media de 30 minutos. La cantidad de sueño que cada bebé obtiene también resulta ser exponencial, con media de 2 horas. Determine lo siguiente:
 - El promedio de bebés despiertos en cualquier momento.
 - La probabilidad de que todos los bebés estén dormidos.
 - La probabilidad de que los Newborns no se sientan felices porque haya más bebés despiertos (y llorando) que dormidos.
- Verifique la expresión de p_n para el modelo $(M/M/R):(GD/K/K)$.
- Demuestre que la tasa de descomposturas en el taller puede calcularse a partir de la fórmula

$$\lambda_{\text{efec}} = \mu \bar{R}$$

donde \bar{R} es el promedio de técnicos ocupados.

9. Verifique los siguientes resultados en el caso especial de un técnico ($R = 1$): 1

$$p_n = \frac{K! \rho^n}{(K - n)!} p_0$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^R \frac{K! \rho^n}{(K - n)!} \right)^{-1}$$

$$L_s = K - \frac{(1 - p_0)}{\rho}$$

18.7 (M/G/1):(GD/ ∞/∞)—FÓRMULA DE POLLACZEK-KHINTCHINE (P-K)

Los modelos de colas en los que las llegadas y salidas no siguen la distribución de Poisson son complejos. En general, es aconsejable utilizar la simulación como una herramienta alternativa para analizar estas situaciones (vea el capítulo 19).

Esta sección presenta una de las pocas colas no Poisson para la cual hay disponibles resultados analíticos. Se trata del caso en que el tiempo de servicio, t , está representado por cualquier distribución de probabilidad con media $E[t]$ y varianza $\text{var}[t]$. Los resultados del modelo incluyen las medidas de desempeño básicas L_s , L_q , W_s y W_q , así como también p_0 . El modelo no proporciona una expresión de forma cerrada para p_n debido a la incontrolabilidad analítica.

Sea λ la tasa de llegadas a la instalación de un solo servidor. Dadas $E[t]$ y $\text{var}[t]$ de la distribución del tiempo de servicio y que $\lambda E[t] < 1$, se puede demostrar por medio de un análisis de cadena de Markov/probabilidad compleja que

$$L_s = \lambda E[t] + \frac{\lambda^2(E^2[t] + \text{var}[t])}{2(1 - \lambda E[t])}, \quad \lambda E[t] < 1$$

La probabilidad de que la instalación esté vacía (ociosa) se calcula como

$$p_0 = 1 - \lambda E[t] = 1 - \rho$$

Dada $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$, las medidas de desempeño restantes (L_q , W_s y W_q) se derivan a partir de L_s , como se explica en la sección 18.6.1.

La plantilla *excelPKFormula.xls* automatiza los cálculos de este modelo.

Ejemplo 18.7-1

En la instalación de lavado de autos Automata del ejemplo 18.6-2, suponga que se instala un sistema nuevo de modo que el tiempo de servicio de todos los autos es constante e igual a 10 minutos. ¿Cómo afecta el nuevo sistema al funcionamiento de la instalación?

A partir del ejemplo 18.6-2, $\lambda_{\text{efec}} = \lambda = 4$ autos por hora. El tiempo de servicio es constante de modo que $E[t] = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora y $\text{var}[t] = 0$. Por lo tanto,

$$L_s = 4\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{4^2\left(\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0\right)}{2\left(1 - \frac{4}{6}\right)} = 1.33 \text{ autos}$$

$$L_q = 1.333 - \left(\frac{4}{6}\right) = .667 \text{ autos}$$

$$W_s = \frac{1.333}{4} = .333 \text{ horas}$$

$$W_q = \frac{.667}{4} = .167 \text{ horas}$$

Es interesante comparar los tiempos de espera con los del caso Poisson en el ejemplo 18.6-2, $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$. Las tasas de llegadas y salidas son las mismas en ambos casos ($\lambda = 4$ autos por hora y $\mu = \frac{1}{E[\bar{\tau}]} = 6$ autos por hora). No obstante, como se muestra en la tabla siguiente, el tiempo de espera anticipado es menor en el modelo actual. Los resultados tienen sentido porque un tiempo de servicio constante indica *más certeza* en la operación de la instalación.

| | $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ | $(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$ |
|------------|------------------------------|------------------------------|
| W_s (hr) | .500 | .333 |
| W_q (hr) | .333 | .167 |

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.7A

- En el ejemplo 18.7-1, calcule el porcentaje de tiempo que la instalación está ociosa.
- Resuelva el ejemplo 18.7-1 suponiendo que la distribución del tiempo de servicio es como sigue:
 - Uniforme entre 8 y 20 minutos.
 - Normal con $\mu = 12$ minutos y $\sigma = 3$ minutos.
 - Discreto con valores iguales a 4,8 y 15 minutos y probabilidades de .2,.6 y .2, respectivamente.
- Layson Roofing Inc. instala techos de tejas en casas nuevas y viejas en Arkansas. Los clientes potenciales solicitan el servicio al azar a razón de nuevo trabajos por mes de 30 días y se les pone en una lista de espera para ser procesados sobre la base de FCFS. Los tamaños de las casas varían, pero es bastante razonable suponer que las áreas del techo están uniformemente distribuidas entre 150 y 300 metros cuadrados. Por lo común, la cuadrilla de trabajo puede completar 75 cuadrados al día. Determine lo siguiente:
 - Los trabajos de techo pendientes promedio de Layson.
 - El tiempo promedio que un cliente espera hasta que se completa el trabajo de techo.
 - Si la cuadrilla de trabajo se incrementa al punto de que pueden completar 150 cuadrados al día, ¿cómo afectará esto al tiempo promedio hasta que se completa un trabajo?
- Óptica elabora lentes de prescripción de acuerdo con los pedidos de los clientes. Cada trabajador se especializa en ciertos tipos de lentes. La compañía ha estado experimentando demoras inusuales en el procesamiento de prescripciones bifocales y trifocales. El trabajador a cargo recibe 30 pedidos por día de 8 horas. El tiempo para completar una prescripción en general está normalmente distribuido, con una media de 12 minutos y una desviación estándar de 3 minutos. Después de emplear entre 2 y 4 minutos, uniformemente distribuidos, para inspeccionar los lentes, el trabajador puede empezar a procesar una nueva prescripción. Determine lo siguiente:
 - El porcentaje de tiempo que el trabajador está ocioso.
 - El promedio de prescripciones bifocales y trifocales pendientes en Óptica.
 - El tiempo promedio hasta que se completa una prescripción.
- Un producto llega de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de uno cada 45 minutos. El producto requiere dos operaciones aleatorias atendidas por un trabajador. La primera operación utiliza una máquina semiautomática que completa su ciclo en exactamente 28 minutos. La segunda operación realiza ajustes y cambios menores, y su tiempo

depende de la condición del producto cuando sale de la operación 1. Específicamente, el tiempo de la operación 2 es uniforme entre 3 y 6 minutos. Debido a que cada operación requiere toda la atención del trabajador, no se puede cargar un nuevo producto en la máquina semiautomática hasta que el producto actual sale de la operación 2.

- (a) Determine la cantidad de productos en espera de ser procesados en la máquina semiautomática.
 - (b) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que el trabajador estará ocioso?
 - (c) Cuánto tiempo se requiere, en promedio, para que un producto que llega salga de la operación 2?
6. ($M/M/1$):($GD/\infty/\infty$). Demuestre que en el caso en que el tiempo es constante, la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

donde $\mu = \frac{1}{E[t]}$ y $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[t]$.

7. ($M/E_m/1$):($GD/\infty/\infty$). Dado que el tiempo de servicio es Erlang con parámetros m y μ (es decir, $E[t] = \frac{m}{\mu}$ y $\text{var}[t] = \frac{m}{\mu^2}$), demuestre que la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = mp + \frac{m(1+m)\rho^2}{2(1-mp)}$$

8. Demuestre que la fórmula P-K se reduce a L_S del modelo ($M/M/1$):($GD/\infty/\infty$) cuando el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.
9. En una instalación de servicios con c servidores paralelos, suponga que los clientes según una distribución de Poisson, con tasa media de λ . Los clientes que llegan son asignados a los servidores (ocupados o desocupados) de una forma estrictamente de rotación.
- (a) Determine la distribución de la probabilidad del tiempo entre llegadas.
 - (b) Suponga en el inciso (a) que los clientes que llegan son asignados al azar a los c servidores con probabilidades α_i , $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, c$, y $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_c = 1$. Determine la distribución de la probabilidad del tiempo entre llegadas.

18.8 OTROS MODELOS DE COLAS

Las secciones anteriores se concentraron en el modelo de colas de Poisson. La literatura sobre colas abunda con otros tipos de colas. En particular, las colas con prioridad de servicio, las colas en red y las colas no Poisson forman un importante cuerpo de la literatura de teoría de colas. Estos modelos se encuentran en la mayoría de libros especializados en la teoría de colas.

18.9 MODELOS DE DECISIÓN EN COLAS

El *nivel de servicio* en una instalación de colas es una función de la tasa de servicios, m , y de la cantidad de servidores paralelos, c . Esta sección presenta dos modelos de decisión para determinar niveles de servicio “adecuado” en sistemas de colas: (1) un modelo de costos, y (2) un modelo de nivel de aspiración. El objetivo es encontrar un balance entre el nivel de servicio y la espera.

18.9.1 Modelos de costos

Los modelos de costos tratan de balancear dos costos conflictivos:

1. El costo del ofrecimiento del servicio.
2. El costo de la demora al ofrecer el servicio (tiempo de espera del cliente).

Un incremento de un costo provoca automáticamente una reducción del otro, como se demostró antes en la figura 18.1.

Si x ($= \mu$ o c) representa el *nivel de servicio*, el modelo de costos se expresa como

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x)$$

donde

ETC = Costo total esperado *por unidad de tiempo*

EOC = Costo de operación esperado de la instalación *por unidad de tiempo*

EWC = Costo de espera anticipado *por unidad de tiempo*

Las formas más simples de EOC y EWC son las siguientes funciones lineales:

$$EOC(x) = C_1x$$

$$EWC(x) = C_2L_s$$

donde

C_1 = Costo *marginal* por unidad de x por unidad de tiempo

C_2 = Costo de espera por unidad de tiempo por cliente (en espera)

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso del modelo de costos. El primer ejemplo supone $x = \mu$ y el segundo supone $x = c$.

Ejemplo 18.9-1

KeenCo Publishing se encuentra en el proceso de comprar una copiadora comercial de alta velocidad. Los vendedores propusieron cuatro modelos cuyas especificaciones se resumen a continuación.

| Modelo de copiadora | Costo de operación (\$/h) | Velocidad (hojas/min) |
|---------------------|---------------------------|-----------------------|
| 1 | 15 | 30 |
| 2 | 20 | 36 |
| 3 | 24 | 50 |
| 4 | 27 | 66 |

Los trabajos llegan a KeenCo en una corriente Poisson a razón de cuatro trabajos por día de 24 horas. El tamaño del trabajo es aleatorio con promedios aproximadamente de 10,000 hojas por trabajo. Los contratos con los clientes especifican un costo de penalización por entrega retrasada de \$80 por trabajos por día. ¿Cuál copiadora debe comprar KeenCo?

El costo total esperado por día asociado con la copiadora i es

$$\begin{aligned} ETC_i &= EOC_i + EWC_i \\ &= C_{1i} \times 24 + C_{2i}L_{si} \\ &= 24C_{1i} + 80L_{si}, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Los datos del problema dan los valores de C_{1i} . Determinamos L_{si} reconociendo que, para todos los propósitos prácticos, cada copiadora puede ser tratada como un modelo $(M/M/1):(GD\infty/\infty)$. La tasa de llegadas es $\lambda = 4$ trabajos/día. La tasa de servicios μ_i asociada con el modelo i se calcula como

| Modelo i | Tasa de servicios μ_i (trabajos/día) |
|------------|--|
| 1 | 4.32 |
| 2 | 5.18 |
| 3 | 7.20 |
| 4 | 9.50 |

El cálculo de la tasa de servicios se demuestra para el modelo 1.

$$\text{Tiempo promedio por trabajo} = \frac{10,000}{30} \times \frac{1}{60} = 5.56 \text{ horas}$$

Por lo tanto,

$$\mu_1 = \frac{24}{5.56} = 4.32 \text{ trabajos/día}$$

Los valores de L_{si} calculados por TORA o *excelPoissonQ.xls*, se dan en la siguiente tabla:

| Modelo i | λ_i (Trabajos/día) | μ_i (Trabajos/día) | L_{si} (Trabajos) |
|------------|----------------------------|------------------------|---------------------|
| 1 | 4 | 4.32 | 12.50 |
| 2 | 4 | 5.18 | 3.39 |
| 3 | 4 | 7.20 | 1.25 |
| 4 | 4 | 9.50 | 0.73 |

Los costos de los cuatro modelos se calculan como sigue:

| Modelo i | EOC_i (\$) | EWC_i (\$) | ETC_i (\$) |
|------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 360.00 | 1000.00 | 1360.00 |
| 2 | 480.00 | 271.20 | 751.20 |
| 3 | 576.00 | 100.00 | 676.00 |
| 4 | 648.00 | 58.40 | 706.40 |

El modelo 3 produce el costo mínimo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9A

1. En el ejemplo 18.9-1, haga lo siguiente:

- (a) Verifique los valores de μ_2 , μ_3 y μ_4 dados en el ejemplo.
- (b) Suponga que la penalización de \$80 por trabajo por día se aplica sólo a trabajos que no "están en proceso" al final del día. ¿Cuál copiadora produce el costo mínimo total por día?

- *2. Metalco va a contratar a un técnico en mantenimiento para un taller de 10 máquinas. Se están considerando dos candidatos. El primero puede realizar reparaciones a razón de 5 máquinas por hora y gana \$15 por hora. El segundo, por estar más calificado, recibe \$20 por hora y puede reparar 8 máquinas por hora. Metalco estima que cada máquina descompuesta incurrirá en un costo de \$50 por hora a causa de la producción perdida. Suponiendo que las máquinas se descomponen de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 3 por hora y que el tiempo de reparación es exponencial, ¿cuál técnico debe ser contratado?
3. B&K Groceries va a abrir una tienda que presumiría de constar con lectores de barras de "última generación". El señor Bih, uno de los propietarios de B&K ha limitado las opciones a dos lectores: El lector *A* puede procesar 10 artículos por minuto, y el lector *B* puede leer 15 artículos por minuto. El costo diario de operación (10 horas) y mantenimiento de los lectores es de \$25 y \$35 para los modelos *A* y *B* respectivamente. Los clientes que terminan sus compras llegan a la caja de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 10 clientes por hora. Cada carrito lleva entre 25 y 35 artículos, distribuidos de manera uniforme. El señor Bih estima que el costo promedio por cliente que espera por minuto es aproximadamente de 20 centavos. ¿Cuál lector debe adquirir B&K? (Sugerencia: El tiempo de servicio por cliente no es exponencial, sino uniformemente distribuido.)
4. H&I Industry produce una máquina especial con diferentes tasas de producción (piezas por hora) para satisfacer las especificaciones del cliente. El propietario de un taller está considerando comprar una de estas máquinas y desea adquirir la de velocidad más económica (en piezas por hora). Por experiencias pasadas, el propietario estima que los pedidos de los clientes llegan al taller de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de tres pedidos por hora. Cada pedido promedia 500 piezas. Los contratos entre el propietario y los clientes especifican una penalización de \$100 por pedido retrasado por hora.
- Suponiendo que el tiempo de producción real por pedido es exponencial, desarrolle un modelo de costos general como una μ función de la tasa de producción.
 - A partir del modelo de costos en (a), determine una expresión para la tasa de producción óptima.
 - Aplicando los datos del problema, determine la tasa de producción óptima que el propietario debe obtener de H&I.
5. A un taller llegan trabajos a una taza de distribución de Poisson a razón de 80 trabajos por semana. Una máquina automática representa el cuello de botella en el taller. Se estima que un incremento unitario de la producción de la máquina costará \$250 por semana. Los trabajos retrasados normalmente originan un negocio perdido, el que se supone es de \$500 por trabajo por semana. Determine la tasa de producción óptima para la máquina automática.
6. Pizza Unlimited vende dos modelos de restaurantes franquiciados. La capacidad del modelo *A* es de 20 grupos de clientes, la del modelo *B* es de 30 grupos. El costo mensual de operación del modelo *A* es de \$12,000 y el del modelo *B* es de \$16,000. Un inversionista desea montar un restaurante de pizzas estilo buffet que grupos de clientes, cada uno ocupando una mesa, lleguen siguiendo una distribución de Poisson a razón de 25 grupos por hora. Si todas las mesas están ocupadas, los clientes se irán a otra parte. El modelo *A* servirá a 26 grupos por hora, el modelo *B* servirá a 29 grupos por hora. Debido a la variación de los tamaños de los grupos y de los tipos de órdenes, el tiempo de servicio es exponencial. El inversionista estima que el promedio de negocio perdido por grupo de clientes por hora es de \$15. Se estima que una demora en el servicio de los clientes que esperan cuesta un promedio de \$10 por grupo de clientes por hora.
- Desarrolle un modelo de costos apropiado.
 - Suponiendo que el restaurante estará abierto 10 horas al día, ¿cuál modelo recomendaría para el inversionista?
7. Suponga que en el problema 6 el inversionista puede elegir cualquier capacidad de restaurante deseada basado en un costo marginal específico por cada unidad de capacidad adicional solicitada. Derive el modelo de costos general, y defina todos sus componentes y términos.

8. Second Time Around vende a consignación artículos populares usados. Su operación puede considerarse como un problema de inventario en el cual las existencias se reparten y agotan al azar, de acuerdo con una distribución de Poisson con tasas de λ y μ artículos por día. Cada unidad de tiempo que el artículo está agotado, Second Time pierde de $\$C_1$ a causa de las oportunidades perdidas, y cada unidad de tiempo que un artículo se mantiene en existencia, se incurre en un costo de retención de $\$C_2$.
- Desarrolle una expresión para el costo total esperado por unidad de tiempo.
 - Determine el valor óptimo de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. ¿Cuál condición debe imponerse a los valores relativos de C_1 y C_2 para que la solución sea consistente con las suposiciones del modelo $(M/M/1):(GD\infty/\infty)$?

Ejemplo 18.9-2

En una instalación de almacén de herramientas manejado por varios empleados, las solicitudes de cambio de herramientas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 17.5 solicitudes por hora. Cada empleado puede manejar un promedio de 10 solicitudes por hora. El costo de contratar un empleado en la instalación es de \$12 por hora. El costo de la producción perdida por máquina de espera por hora es aproximadamente de \$50. Determine la cantidad óptima de empleados para la instalación.

La situación corresponde a un modelo $(M/M/c)$ en el cual se desea determinar el valor óptimo de c . Por lo tanto, en el modelo de costos general presentado al inicio de esta sección, con $x = c$, obtenemos el siguiente modelo de costos:

$$\begin{aligned} ETC(c) &= C_1c + C_2L_s(c) \\ &= 12c + 50L_s(c) \end{aligned}$$

Observe que $L_s(c)$ es una función de la cantidad de empleados (paralelos) en el almacén.

Utilizamos $(M/M/c):(GD\infty/\infty)$ con $\lambda = 17.5$ solicitudes por hora y $\mu = 10$ solicitudes por hora. El estado estable se alcanza sólo si $c > \frac{\lambda}{\mu}$ es decir $c \geq 2$ en este ejemplo. La tabla siguiente proporciona los cálculos necesarios para determinar el c óptimo. Los valores $L_s(c)$ (determinados por *excelPoissonQ.xls* o TORA) muestran que el número óptimo de empleados es 4.

| c | $L_s(c)$ (respuestas) | ETC(c) (\$) |
|-----|-----------------------|-----------------|
| 2 | 7.467 | 397.35 |
| 3 | 2.217 | 146.85 |
| 4 | 1.842 | 140.10 |
| 5 | 1.769 | 148.45 |
| 6 | 1.754 | 159.70 |

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9B

- Resuelva el ejemplo 18.9-2, suponiendo que $C_1 = \$20$ y $C_2 = \$45$.
- Tasco Oil posee una unidad propulsora de oleoducto que opera de forma continua. El tiempo entre descomposturas de cada propulsor es exponencial con una media de 20 horas. El tiempo de reparación es exponencial con una media de 3 horas. En una estación particular, dos técnicos de mantenimiento atienden 10 propulsores. El salario por hora de cada técnico es de \$18. Se estima que las pérdidas del oleoducto son de \$30 por propulsor descompuesto por hora. Tasco está estudiando la posibilidad de contratar un técnico adicional.

- (a) ¿Se ahorrarán costos con la contratación de un tercer técnico?
 (b) ¿Cuál es pérdida programada en dólares por descompostura cuando la cantidad de técnicos en servicio es de dos?, ¿de tres?
3. Una compañía renta una línea telefónica de telecomunicaciones de banda ancha (WATS, por sus siglas en inglés) por \$2000 al mes. La oficina está abierta 200 horas laborales por mes. Durante el tiempo restante, la línea WATS se utiliza para otros propósitos y no está disponible para la compañía. El acceso a la línea WATS durante las horas laborales se amplía a 100 vendedores, cada uno de los cuales puede necesitar la línea en cualquier momento dos veces en promedio por día de 8 horas con tiempo exponencial entre llamadas. Un vendedor siempre espera si la línea WATS está ocupada a un costo estimado de 1 centavo por minuto de espera. Se supone que mientras un vendedor espera una llamada dada no se presentará la necesidad de hacer llamadas. El costo normal de las llamadas (sin utilizar la línea WATS) promedia aproximadamente 50 centavos por minuto, y la duración de cada llamada es exponencial, con una media de 6 minutos. La compañía está considerando rentar (al mismo precio) una segunda línea WATS para mejorar el servicio.
- (a) ¿La línea WATS única le está ahorrando dinero a la compañía en comparación con un sistema sin línea WATS? ¿Qué tanto está ganando o perdiendo la compañía por mes en comparación con el sistema sin línea WATS?
 (b) ¿Debe rentar la compañía una segunda línea WATS? ¿Cuánto ganaría o perdería sobre el caso de una línea WATS única al rentar una línea más?
- *4. Un taller mecánico incluye 20 máquinas y 3 técnicos en reparaciones. Una máquina en funcionamiento se descompone de acuerdo con una distribución de Poisson. El tiempo de reparación por máquina es exponencial con una media de 6 minutos. Un análisis de colas de la situación muestra un promedio de 57.8 de solicitudes de reparación por día de 8 horas para todo el taller. Suponga que la tasa de producción por máquina es de 25 unidades por hora y que cada unidad producida genera \$2 en ingresos. Además, asuma que el salario de un técnico es de \$20 por hora. Compare el costo de contratar los técnicos con el costo de los ingresos perdidos cuando las máquinas se descomponen.
5. Las condiciones necesarias para que el $ETC(c)$ (definidas antes) para asumir un valor mínimo con $c = c^*$ son

$$ETC(c^* - 1) \geq ETC(c^*) \text{ y } ETC(c^* + 1) \geq ETC(c^*)$$

Demuestre que estas condiciones se reducen a

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

Aplique el resultado al ejemplo 18.9-2, y demuestre que el resultado es $c^* = 4$.

18.9.2 Modelo de nivel de aspiración

La viabilidad del modelo de costos depende de qué tan bien podamos estimar los parámetros de costos. En general, estos parámetros son difíciles de estimar, en particular el asociado con el tiempo de espera de clientes. El modelo de nivel de aspiración mitiga esta dificultad al trabajar directamente con las medidas de desempeño de la situación de colas. La idea es determinar un intervalo aceptable para el nivel de servicio (μ o c) especificando límites razonables en las medidas de desempeño conflictivas. Tales límites son los **niveles de aspiración** que el tomador de decisiones desea alcanzar.

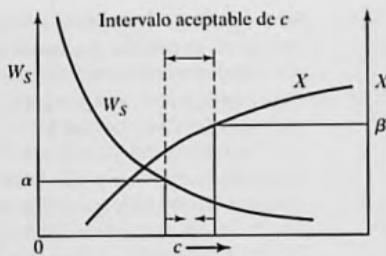


FIGURA 18.10

Aplicación de los niveles de aspiración en la toma de decisiones de colas

El modelo se aplica al modelo de varios servidores para determinar una cantidad "aceptable" de servidores, c^* , teniendo en cuenta dos medidas de desempeño (conflictivas):

1. El tiempo promedio en el sistema, W_s .
2. El porcentaje de ociosidad de los servidores, X .

El porcentaje de ociosidad se calcula como sigue:

$$X = \frac{c - \bar{c}}{c} \times 100 = \frac{c - (L_s - L_q)}{c} \times 100 = \left(1 - \frac{\lambda_{\text{efec}}}{c\mu}\right) \times 100$$

(Vea el problema 12, conjunto 18.6D para la comprobación.)

El problema se reduce a determinar la cantidad de servidores c^* de modo que

$$W_s \leq \alpha \text{ y } X \leq \beta$$

Las constantes α y β son los niveles de aspiración especificados por el tomador de decisiones. Por ejemplo, $\alpha = 3$ minutos y $\beta = 10\%$.

La solución del problema puede determinarse trazando una gráfica de W_s y X como una función de c , como se muestra en la figura 18.10. Localizando α y β en la gráfica, podemos determinar un intervalo aceptable para c^* . Si no se pueden satisfacer las dos condiciones al mismo tiempo, entonces una o ambas deben relajarse antes de que se pueda encontrar un intervalo factible.

Ejemplo 18.9-3

En el ejemplo 18.9-2, suponga que se desea determinar la cantidad de empleados de modo que el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta permanezca por debajo de 5 minutos. Al mismo tiempo, el porcentaje de ociosidad debe estar por debajo de 20%.

Sin pensar, y antes de realizar cualquier cálculo, es inalcanzable un límite de aspiración de 5 minutos en el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta (es decir, $W_s \leq 5$ minutos) porque de acuerdo con los datos del problema, el tiempo de servicio promedio sólo es de 6 minutos.

La siguiente tabla resumen W_s y X como una función de c :

| c | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|
| W_s (min) | 25.4 | 7.6 | 6.3 | 6.1 | 6.0 | 6.0 | 6.0 |
| X (%) | 12.5 | 41.7 | 56.3 | 65.0 | 70.8 | 75.0 | 78.0 |

Con base en estos resultados debemos, o reducir el tiempo de servicio o reconocer que la causa del problema es que las herramientas se solicitan a una tasa irrazonablemente alta ($\lambda = 17.5$ solicitudes por hora). Ésta, sin duda, es el área que hay que atacar. Por ejemplo, nos gustaría investigar la razón de tan alta demanda de reemplazo de herramientas. ¿Podría ser que el diseño de la herramienta está defectuoso en sí? O, ¿podría ser que los operadores de las máquinas tratan a propósito de interrumpir la producción para expresar sus quejas?

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9C

- *1. Un taller utiliza 10 máquinas idénticas. Cada máquina se descompone una vez cada 8 horas en promedio. Se requiere media hora en promedio para reparar una máquina descompuesta. Los procesos de descompostura y reparación siguen la distribución de Poisson. Determine lo siguiente:
 - (a) La cantidad de técnicos de mantenimiento necesarios de modo que el número promedio de máquinas descompuestas sea menor que 1.
 - (b) La cantidad de técnicos en mantenimiento necesarios de modo que el tiempo de demora hasta que se inicie una reparación sea de menos de 10 minutos.
2. En el modelo de costos de la sección 18.9-1, en general es difícil estimar el parámetro de costo C_2 (costo de espera). En consecuencia, puede ser útil calcular el costo C_2 implicado por los niveles de aspiración. Utilizando el modelo de nivel de aspiración para determinar c^* , podemos entonces determinar el C_2 implicado mediante la siguiente desigualdad:

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

(Vea el problema 5, conjunto 18.9B, para la derivación.) Aplique el procedimiento al problema del ejemplo 18.9-2, con $c^* = 3$ y $C_1 = \$12.00$.

BIBLIOGRAFÍA

- Bose, S., *An Introduction to Queueing Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
 Gross, D., y M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.
 Lee, A., *Applied Queueing Theory*, St. Martin's Press, Nueva York, 1966.
 Lipsky, L., *Queueing Theory, A Linear Algebraic Approach*, Macmillan, Nueva York, 1992.
 Saaty, T., *Elements of Queueing Theory with Applications*, Dover, Nueva York, 1983.
 Tanner, M., *Practical Queueing Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.

CAPÍTULO 19

Modelado de simulación

19.1 SIMULACIÓN MONTECARLO

Un precursor de la simulación actual es el experimento Montecarlo, un esquema de modelado que estima parámetros estocásticos o determinísticos con base en un muestreo aleatorio. Algunos ejemplos de aplicaciones Montecarlo incluyen la evaluación de integrales múltiples, la estimación de la constante π (≈ 3.14159), y la inversión de matrices.

Esta sección utiliza un ejemplo para demostrar la técnica Montecarlo. El objetivo del ejemplo es enfatizar la naturaleza estadística de la simulación.

Ejemplo 19.1-1

Utilizaremos un muestreo Montecarlo para estimar el área del siguiente círculo:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

El radio del círculo es $r = 5$ cm, y su centro es $(x, y) = (1, 2)$.

El procedimiento para estimar el área requiere encerrar estrechamente el círculo en un cuadrado cuyo lado sea igual al diámetro del círculo, como se muestra en la figura 19.1. Los puntos de esquina se determinan a partir de la geometría del cuadrado.

La estimación del área del círculo se basa en un experimento de muestreo que brinda una oportunidad igual de seleccionar cualquier punto en el cuadrado. Si m de n puntos muestreados quedan dentro del círculo, entonces

$$\left(\frac{\text{Área aproximada}}{\text{del círculo}} \right) = \frac{m}{n} \left(\frac{\text{Área del cuadrado}}{\text{cuadrado}} \right) = \frac{m}{n} (10 \times 10)$$

Para asegurarnos de que todos los puntos en el cuadrado son igualmente probables, las coordenadas x y y de un punto en el cuadrado se representan por medio de las siguientes distribuciones uniformes:

$$f_1(x) = \frac{1}{10}, -4 \leq x \leq 6$$

$$f_2(y) = \frac{1}{10}, -3 \leq y \leq 7$$

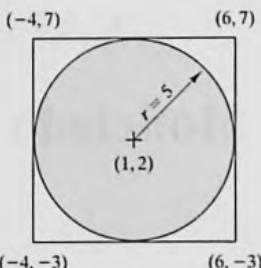


FIGURA 19.1
Estimación Montecarlo del área
de un círculo

La determinación de una muestra (x, y) se basa en el uso de números (seudo) aleatorios independientes 0-1. La tabla 19.1 incluye una muestra de tales números, los cuales utilizaremos en los ejemplos de este capítulo. Para el propósito de simulación general, se utilizan operaciones aritméticas especiales para generar números (seudo) aleatorios 0-1, como se demostrará en la sección 19.4.

Se puede usar un par de números aleatorios 0-1, R_1 y R_2 , para generar un punto aleatorio (x, y) en el cuadrado utilizando las siguientes fórmulas:

$$x = -4 + [6 - (-4)]R_1 = -4 + 10R_1$$

$$y = -3 + [7 - (-3)]R_2 = -3 + 10R_2$$

Para demostrar la aplicación del procedimiento, consideremos $R_1 = .0589$ y $R_2 = .6733$.

$$x = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \times .0589 = -3.411$$

$$y = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \times .6733 = 3.733$$

Este punto queda dentro del círculo debido a que

$$(-3.411 - 1)^2 + (3.733 - 2)^2 = 22.46 < 25$$

Comentarios. La precisión de la estimación del área se puede mejorar por medio de experimentos estadísticos comunes.

1. Aumente el tamaño de la muestra, n .
2. Use réplicas, N .

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| .0589 | .3529 | .5869 | .3455 | .7900 | .6307 |
| .6733 | .3646 | .1281 | .4871 | .7698 | .2346 |
| .4799 | .7676 | .2867 | .8111 | .2871 | .4220 |
| .9486 | .8931 | .8216 | .8912 | .9534 | .6991 |
| .6139 | .3919 | .8261 | .4291 | .1394 | .9745 |
| .5933 | .7876 | .3866 | .2302 | .9025 | .3428 |
| .9341 | .5199 | .7125 | .5954 | .1605 | .6037 |
| .1782 | .6358 | .2108 | .5423 | .3567 | .2569 |
| .3473 | .7472 | .3575 | .4208 | .3070 | .0546 |
| .5644 | .8954 | .2926 | .6975 | .5513 | .0305 |

El análisis en el ejemplo 19.1-1 plantea dos preguntas con respecto al experimento de simulación:

1. ¿Qué tan grande debe ser la muestra?
2. ¿Cuántas réplicas se requieren?

Hay algunas fórmulas en la teoría estadística para determinar n y N , y dependen de la naturaleza del experimento de simulación y también del nivel de confianza deseado. Sin embargo, como en cualquier experimento estadístico, la regla de oro es que los valores altos de n y N producen resultados de simulación más precisos. Al final, el tamaño de la muestra dependerá del costo asociado con la realización del experimento de simulación. Sin embargo, un tamaño de muestra seleccionado se suele considerar "adequado" si produce una desviación estándar "relativamente pequeña".

Es necesario expresar los resultados como un intervalo de confianza para tener en cuenta la variación aleatoria del resultado del experimento. Si \bar{A} y s son la media y la raíz cuadrada de la varianza de N réplicas, entonces, con un nivel de confianza α , el intervalo de confianza del área verdadera A es

$$\bar{A} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \leq A \leq \bar{A} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$$

El parámetro $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$ se determina con las tablas de distribución t dado un nivel de confianza α y $N - 1$ grados de libertad (vea la tabla t en el apéndice A o utilice la plantilla *excelStatTable.xls*). Observe que N es igual al número de réplicas, el cual es distinto del tamaño n de la muestra.

Momento de Excel

Los cálculos asociados con cada muestra en el ejemplo 19.1-1 son voluminosos. Se utiliza la plantilla de Excel *excelCircle.xls* (con macros VBA) para probar el efecto del tamaño de la muestra y la cantidad de réplicas en la precisión de la estimación. Los datos de entrada incluyen el radio del círculo; y su centro (cx , cy); el tamaño de la muestra, n ; el número de réplicas, N , y el nivel de confianza α . La entrada *Steps* en la celda D4 permite ejecutar varias muestras en la misma ejecución. Por ejemplo, si $n = 30,000$ y *Steps* = 3, la plantilla producirá de forma automática el resultado con $n = 30,000, 60,000$ y $90,000$. Se realizan nuevas estimaciones cada vez que se hace clic en el botón *Press to Execute Montecarlo* porque Excel reaviva la semilla del generador de números aleatorios.

La figura 19.2 resume los resultados de 5 réplicas y los tamaños de muestra de 30,000, 60,000 y 90,000. El área exacta es de 78.54 cm^2 y los resultados Monte Carlo muestran que las áreas medias estimadas con los tres tamaños de muestra son ligeramente diferentes.

La figura 19.2 da los intervalos de 95% de confianza para cada n . Por ejemplo, el intervalo de confianza $78.452 \leq A \leq 78.68$ corresponde a $n = 90,000$, con $N = 5$, $= 78.566 \text{ cm}^2$, $y s = .092 \text{ cm}$ y $t_{.025,4} = 2.776$. En general, para obtener una precisión razonable en la estimación del intervalo de confianza, el valor de N debe ser al menos 5.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.1A

1. En el ejemplo 19.1-1, estime el área del círculo utilizando las primeras dos columnas de los números aleatorios 0-1 en la tabla 19.1. (Por conveniencia, repase cada columna de arriba a abajo, y seleccione primero R_1 y luego R_2 .) ¿Cómo se compara esta estimación con las dadas en la figura 19.2?

| | B | C | D | E |
|----|---|---------|------------|---------|
| 1 | Monte Carlo Estimation of the Area of a Circle | | | |
| 2 | Input data | | | |
| 3 | Nbr. Replications, N = | 5 | α = | 0.025 |
| 4 | Sample size, n = | 30,000 | Steps = | 3 |
| 5 | Radius, r = | 5 | | |
| 6 | Center, cx = | 1 | | |
| 7 | Center, cy = | 2 | | |
| 8 | Output results | | | |
| 9 | Exact area = | 78.540 | | |
| 10 | Press to Execute Monte Carlo | | | |
| 11 | Monte Carlo Calculations: | | | |
| 12 | | n=30000 | n=60000 | n=90000 |
| 13 | Replication 1 | 78.590 | 78.543 | 78.536 |
| 14 | Replication 2 | 78.447 | 78.695 | 78.731 |
| 15 | Replication 3 | 78.747 | 78.648 | 78.534 |
| 16 | Replication 4 | 78.363 | 78.500 | 78.512 |
| 17 | Replication 5 | 78.540 | 78.420 | 78.517 |
| 18 | | | | |
| 19 | Mean = | 78.537 | 78.561 | 78.566 |
| 20 | Std. Deviation = | 0.142 | 0.118 | 0.092 |
| 21 | | | | |
| 22 | 95% lower conf. limit = | 78.361 | 78.415 | 78.452 |
| 23 | 95% upper conf. limit = | 78.714 | 78.708 | 78.680 |

FIGURA 19.2

Resultados de la estimación Montecarlo del área de un círculo obtenidos con Excel (archivo *excelCircle.xls*)

2. Suponga que la ecuación de un círculo es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

- (a) Defina las distribuciones correspondientes $f(x)$ y $f(y)$ y luego demuestre cómo se determina un punto (x, y) de la muestra utilizando el par de aleatorios $(0, 1), (R_1, R_2)$.
 - (b) Use la plantilla *excelCircle.xls* para estimar el área y el intervalo de 95% de confianza asociado, dados $n = 100,000$ y $N = 10$.
3. Use el muestreo Montecarlo para estimar el área del lago que se muestra en la figura 19.3. Base su estimación en las primeras dos columnas de números aleatorios $(0, 1)$ en la tabla 19.1.
4. Considere el juego en el cual dos participantes, Jan y Jim, se turnan para lanzar al aire una moneda. Si el resultado es cara, Jim obtiene \$10 de Jan. De lo contrario, Jan obtiene \$10 de Jim.
- *(a) ¿Cómo se simula el juego con un experimento Montecarlo?
 - (b) Ejecute el experimento con 5 réplicas de 10 lanzamientos cada una. Use las primeras 5 columnas de los números aleatorios 0-1 en la tabla 19.1 con cada columna correspondiendo a una réplica.

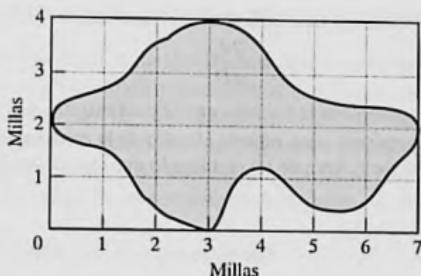


FIGURA 19.3

Mapa del lago para el problema 3, conjunto 19.1A

- (c) Establezca un intervalo de 95% de confianza para las victorias de Jan.
- (d) Compare el intervalo de confianza en (c) con las victorias teóricas esperadas de Jan.
5. Considere la siguiente integral definida:
- $$\int_0^1 x^2 dx$$
- (a) Desarrolle el experimento Montecarlo para estimar la integral.
- (b) Use las primeras cuatro columnas de la tabla 19.1 para evaluar la integral con 4 réplicas, cada una de tamaño 5. Calcule el intervalo de 95% de confianza, y compáreló con el valor exacto de la integral.
6. Simule cinco ganancias o pérdidas del siguiente juego de "craps". El jugador lanza dos dados. Si la suma resultante es 7 u 11, el jugador gana \$10. De lo contrario, el jugador anota la suma resultante (llamada *punto*) y continúa lanzando los dados hasta que la suma resultante coincida con el *punto* anotado, en cuyo caso el jugador gana \$10. Si se obtiene un 7 antes de la coincidencia con el *punto*, el jugador pierde \$10.
- *7. El tiempo de espera para recibir un pedido puede ser de 1 o 2 días con probabilidades iguales. La demanda por día supone los valores 0, 1 y 2 con las probabilidades respectivas de .2, .7 y .1. Use los números aleatorios de la tabla 19.1 (comenzando con la columna 1) para estimar la distribución conjunta de la demanda y el tiempo de espera. A partir de la distribución conjunta, estime la función de densidad de probabilidad de la demanda durante el tiempo de espera. (*Sugerencia:* La demanda durante el tiempo de espera supone valores discretos de 0 a 4.)
8. Considere el experimento de la aguja de Buffon. Se traza un plano horizontal con líneas paralelas con una separación de $D\text{cm}$ entre ellas. Se deja caer una aguja de $d\text{cm}$ de longitud ($d < D$) al azar sobre el plano. El objetivo del experimento es determinar la probabilidad de que cualquiera de los extremos toque o cruce una de las líneas. Defina

 $h =$ Distancia perpendicular del centro de la aguja a una línea (paralela) $\theta =$ Ángulo de inclinación de la aguja con respecto a una línea

- (a) Demuestre que la aguja tocará o cruzará una línea sólo si

$$h \leq \frac{d}{2} \operatorname{sen} \theta, 0 \leq h \leq \frac{D}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

- (b) Diseñe el experimento Montecarlo, y estime la probabilidad deseada.
- (c) Use Excel para obtener 4 réplicas, cada una de tamaño 10 de la probabilidad deseada. Determine el intervalo de 95% de confianza para la estimación. Suponga que $D = 20\text{ cm}$ y $d = 10\text{ cm}$.

- (d) Demuestre que la siguiente fórmula da la probabilidad teórica.

$$p = \frac{2d}{\pi D}$$

- (e) Use el resultado en (c) junto con la fórmula en (d) para estimar π .

9. Diseñe un experimento Montecarlo para estimar el valor de la constante π .

[Sugerencia: Área de un círculo)/(Área de un rectángulo que envuelve estrechamente al círculo) = $\pi/4$.]

19.2 TIPOS DE SIMULACIÓN

La simulación de este día se basa en la idea del muestreo utilizado con el método Montecarlo. Difiere en que estudia el comportamiento de sistemas reales como una *función de tiempo*. Existen dos tipos distintos de modelos de simulación.

1. Los **modelos continuos** se ocupan de sistemas cuyo comportamiento cambia *continuamente* con el tiempo. Estos modelos suelen utilizar ecuaciones diferenciales para describir las interacciones entre los diferentes elementos del sistema. Un ejemplo típico tiene que ver con el estudio de la dinámica de la población mundial.
2. Los **modelos discretos** tienen que ver principalmente con el estudio de líneas de espera con el objetivo de determinar medidas como el tiempo de espera promedio y la longitud de la cola. Estas medidas cambian sólo cuando un cliente entra o sale del sistema. Los instantes en que ocurren los cambios en puntos discretos específicos del tiempo (eventos de llegada y salida), originan el nombre **simulación de evento discreto**.

Este capítulo presenta los fundamentos de la simulación de evento discreto, incluida una descripción de los componentes de un modelo de simulación, la recolección de estadísticas de simulación y el aspecto estadístico del experimento de simulación. También pone énfasis en el papel de la computadora y los lenguajes de simulación en la ejecución de modelos de simulación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.2A

1. Categorice las siguientes situaciones como discretas o continuas (o una combinación de ambas). En cada caso, especifique el objetivo de desarrollar el modelo de simulación.
 - *(a) Los pedidos de un artículo llegan al azar a un almacén. Un pedido que no puede ser completado de inmediato con las existencias disponibles debe esperar la llegada de nuevos envíos.
 - (b) La población mundial se ve afectada por la disponibilidad de los recursos naturales, la producción de alimentos y las condiciones ambientales, el nivel educativo, el cuidado de la salud y las inversiones de capital.
 - (c) A una bahía receptora de un almacén automatizado llegan mercancías en tarimas. Las tarimas se cargan sobre una banda transportadora y se izan mediante un elevador a una transportadora elevada que mueve las tarimas a los corredores. Los corredores son atendidos por grúas que recogen las tarimas de la banda y las colocan en compartimientos de almacenamiento.
2. Explique por qué estaría de acuerdo o en desacuerdo con el siguiente enunciado: "La mayoría de los modelos de simulación de evento discreto pueden ser considerados en una u otra forma como sistemas de colas, compuestos de *fuentes* desde las cuales llegan los clientes, *colas* donde los clientes pueden esperar, e *instalaciones* donde se atiende a los clientes".

19.3 ELEMENTOS DE LA SIMULACIÓN DE EVENTO DISCRETO

El objetivo final de la simulación es estimar algunas medidas de desempeño deseables que describan el comportamiento del sistema simulado. Por ejemplo, en una instalación de servicio, las medidas de desempeño asociadas pueden incluir el tiempo de espera promedio hasta que un cliente es atendido, la longitud promedio de la cola y la utilización promedio de la instalación de servicio. Esta sección muestra como se recopilan las estadísticas del sistema simulado con base en el concepto de *eventos*.

19.3.1 Definición genérica de eventos

Todas las simulaciones de eventos discretos describen, directamente o indirectamente, situaciones de colas en las que los clientes llegan (para servicio), esperan en la cola (si es necesario) y luego reciben el servicio antes de salir de la instalación de servicio. Como tal, cualquier simulación de evento discreto, independientemente de la complejidad del sistema que describe, se reduce a tratar con dos eventos básicos: llegadas y salidas. El siguiente ejemplo ilustra el uso de los eventos de llegada y salida para describir un sistema compuesto de colas distintas.

Ejemplo 19.3-1

Metalco Jobshop recibe dos tipos de trabajos: regulares y urgentes. Todos los trabajos se procesan en dos máquinas consecutivas con amplias áreas intermedias. Los trabajos urgentes siempre suponen prioridad preventiva sobre los trabajos regulares.

Esta situación consta de colas en tandem que representan las máquinas. Al principio nos podemos inclinar a identificar los eventos de la situación como

- A11: Un trabajo regular llega a la máquina 1.
- A21: Un trabajo urgente llega a la máquina 1.
- D11: Un trabajo regular sale de la máquina 1.
- D21: Un trabajo urgente sale de la máquina 1.
- A12: Un trabajo regular llega a la máquina 2.
- A22: Un trabajo urgente llega a la máquina 2.
- D12: Un trabajo regular sale de la máquina 2.
- D22: Un trabajo urgente sale de la máquina 2.

En realidad sólo hay dos eventos: la llegada de un (nuevo) trabajo al taller y la salida de un trabajo (terminado) de una máquina. En primer lugar observe que los eventos D11 y A12 en realidad son los mismos. Lo mismo aplica a D21 y A22. Luego, en la simulación discreta podemos utilizar un evento (llegada o salida) de ambos tipos de trabajos y simplemente "etiquetar" el evento con un **atributo** que identifique el tipo de trabajo como regular o urgente. (En este caso podemos pensar en el atributo como un *descriptor de identificación personal*, y de hecho lo es). Dado este razonamiento, los eventos del modelo se reducen a (1) una llegada A (al taller), y (2) una salida D (de una máquina). Las acciones asociadas con el evento de llegada dependen del tipo de trabajo que llega (urgente o regular) y de la disponibilidad de una máquina. Asimismo, el procesamiento del evento de salida dependerá de la máquina y del estatus de los trabajos en espera.

Habiendo definido los eventos básicos de un modelo de simulación, demostramos cómo se ejecuta el modelo. La figura 19.4 ofrece una representación esquemática de ocurrencias típicas de eventos en la escala de tiempo de la simulación. Una vez que se han realizado todas las acciones asociadas con un evento existente, la simulación "salta" al siguiente evento cronológico. En esencia, la ejecución de la simulación ocurre en los instantes en que ocurren los eventos.



FIGURA 19.4

Ejemplo de la ocurrencia de eventos de simulación en la escala de tiempo

¿Cómo determina la simulación el tiempo de ocurrencia de los eventos? Los eventos de llegada están separados por el tiempo entre llegadas (el intervalo entre llegadas sucesivas) y los eventos de salida son una función del tiempo de servicio en la instalación. Estos tiempos pueden ser determinísticos (por ejemplo un tren que llega a una estación cada 5 minutos) o probabilísticos (como la llegada aleatoria de los clientes a un banco). Si el tiempo entre eventos es determinístico, la determinación de sus tiempos de ocurrencia es simple. Si es probabilístico, utilizamos un procedimiento especial para muestrear de la distribución de probabilidad correspondiente. Este punto se trata en la siguiente sección.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3A

- Identifique los eventos discretos necesarios para simular la siguiente situación. Llegan dos tipos de trabajos de dos fuentes diferentes. Ambos tipos se procesan en una sola máquina, con prioridad dada a los trabajos de la primera fuente.
- Llegan trabajos a una tasa constante en un sistema transportador de carrusel. Tres estaciones de servicio están equidistantes entre sí alrededor del carrusel. Si el servidor está ocioso cuando llega un trabajo a la estación, el trabajo se retira del transportador para procesarlo. De lo contrario, el trabajo continúa girando en el carrusel hasta que el servidor vuelve a estar disponible. Un trabajo procesado se guarda en un área de envío adyacente. Identifique los eventos discretos necesarios para simular esta situación.
- Los autos llegan a los carriles de una caja de servicio en su coche de un banco, donde cada carril puede alojar un máximo de cuatro autos. Si los dos carriles están llenos, los autos que llegan buscan servicio en otra parte. Si en cualquier momento un carril es al menos dos autos más largo que el otro, el último auto en el carril más largo se pasará a la última posición del carril más corto. El banco opera la instalación de servicio en su coche de 8:00 A.M. a 3:00 P.M. cada día laboral. Defina los eventos discretos de la situación.
- La cafetería en la escuela primaria Elmdale proporciona un almuerzo de menú fijo de una sola charola a todos sus alumnos. Los niños llegan a la ventanilla despachadora cada 30 segundos. Se requieren 18 segundos para recibir la charola del almuerzo. Trace el mapa de los eventos de llegada y salida en la escala de tiempo de los primeros cinco alumnos.

19.3.2 Muestreo de distribuciones de probabilidad

La aleatoriedad de la simulación surge cuando el intervalo, t , entre eventos sucesivos es probabilístico. Esta sección presenta tres métodos para generar muestras aleatorias sucesivas ($t = t_1, t_2, \dots$) de una distribución de probabilidad $f(t)$:

- Método inverso.
- Método de convolución.
- Método de aceptación y rechazo.

El método inverso es particularmente adecuado para funciones de densidad de probabilidad analíticamente solubles, como la exponencial y la uniforme. Los otros dos métodos se ocupan de casos más complejos, como el normal y el de Poisson. Los tres métodos se derivan del uso de números aleatorios 0-1 independientes e idénticamente distribuidos.

Esta sección presentará sólo los dos primeros métodos. Los detalles del método de aceptación y rechazo se pueden encontrar en la bibliografía.

Método inverso. Suponga que se desea obtener una muestra aleatoria x de la función de densidad de probabilidad $f(x)$ (continua o discreta). El método inverso determina primero la expresión de forma cerrada de la función de densidad acumulada $F(x) = P[y \leq x]$, donde $0 \leq F(x) \leq 1$, para todos los valores definidos de y .

Se puede demostrar que la variable aleatoria $z = F(x)$ está distribuida de modo uniforme en el intervalo $0 \leq z \leq 1$. Con base en este resultado, se determina una muestra aleatoria de $f(x)$ mediante los siguientes pasos (F^{-1} es la inversa de F):

Paso 1. Genere un número aleatorio 0-1, R .

Paso 2. Calcule la muestra deseada $x = F^{-1}(R)$.

La figura 19.5 ilustra los procedimientos tanto de una distribución continua como de una distribución aleatoria discreta.

Ejemplo 19.3-2 (Distribución exponencial)

La función de densidad de probabilidad exponencial $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$ representa el tiempo entre llegadas t a una instalación con valor medio de $\frac{1}{\lambda}$. La función de densidad acumulada es

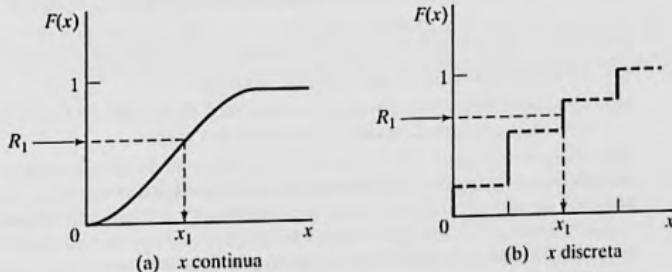
$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como

$$t = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1 - R)$$

FIGURA 19.5

Muestreo de una distribución de probabilidad por medio del método inverso



Por ejemplo, para $\lambda = 4$ clientes por hora y $R = .9$, el periodo de tiempo hasta que ocurre la siguiente llegada es

$$t_1 = -\left(\frac{1}{4}\right) \ln(1 - .9) = .577 \text{ horas} = 34.5 \text{ minutos}$$

Observe que $\ln(1 - R)$ puede ser reemplazado con $\ln(R)$ porque $1 - R$ es el complemento de R .

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3B

- *1. En el ejemplo 19.3-2, suponga que el primer cliente llega en el instante 0. Use los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para generar los tiempos de llegada de los 3 clientes siguientes, y trace la gráfica de los eventos resultantes en la escala de tiempo.
- *2. *Distribución uniforme.* Suponga que la siguiente distribución uniforme describe el tiempo necesario para fabricar una pieza en una máquina:

$$f(t) = \frac{1}{b - a}, a \leq t \leq b$$

Determine una expresión para la muestra t , dado el número aleatorio R .

- 3. En un taller se reciben trabajos al azar. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 2 horas. El tiempo necesario para procesar un trabajo es uniforme entre 1.1 y 2 horas. Suponiendo que el primer trabajo llega en el instante 0, determine el tiempo de llegada y salida de los primeros cinco trabajos mediante los números aleatorios (0, 1) de la columna 1 de la tabla 19.1.
- 4. La demanda de una pieza cara de repuesto de un avión de pasajeros es de 0,1,2 o 3 unidades por mes con probabilidades de .2, .3, .4 y .1, respectivamente. El taller de mantenimiento de la aerolínea inicia la operación con existencias de 5 unidades y regresará el nivel de las existencias a 5 unidades inmediatamente después que se reduzca a 2 unidades.
 - *(a) Idee el procedimiento para muestrear la demanda.
 - (b) ¿Cuántos meses transcurrirán hasta que ocurra la primera reposición? Use valores sucesivos de R de la primera columna de la tabla 19.1.
- 5. En una situación de simulación, las unidades de TV se inspeccionan en busca de posibles defectos. Hay 80% de probabilidades de que una unidad pase la inspección, en cuyo caso se le envía a empaque. De lo contrario, la unidad se repara. Podemos representar la situación simbólicamente de dos maneras.

gotoREPARACIÓN/.2, EMPAQUE/.8

gotoEMPAQUE/.8, REPARACIÓN/.2

Estas dos representaciones parecen equivalentes. No obstante, cuando se aplica una secuencia dada de números aleatorios (0, 1) a las dos representaciones, pueden resultar decisiones diferentes (REPARACIÓN o EMPAQUE). Explique por qué.

- 6. Un jugador lanza una moneda repetidamente hasta que cae una cara. La retribución asociada es 2^n , donde n es la cantidad de lanzamientos hasta que sale una cara.
 - (a) Idee el procedimiento de muestreo del juego.
 - (b) Use los números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para determinar la retribución acumulada después de que salen dos caras.
- 7. *Distribución triangular.* En la simulación, la carencia de datos puede hacer imposible determinar la distribución de probabilidad asociada con una actividad de simulación. En la mayoría de estas situaciones puede ser fácil describir la variable deseada estimando sus valores mínimos, los más probables y los máximos. Estos tres valores bastan para definir una distribución triangular, la cual puede utilizarse entonces como una estimación "preliminar" de la distribución real.

- (a) Desarrolle la fórmula para tomar muestras de la siguiente distribución triangular, cuyos parámetros respectivos son a, b y c :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

- (b) Genere tres muestras de una distribución triangular con parámetros (1,3,7) utilizando los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.
8. Considere una distribución de probabilidad compuesta de un rectángulo flanqueado por los lados izquierdo y derecho por triángulos rectángulos simétricos. Los intervalos respectivos del triángulo de la izquierda y del triángulo de la derecha son $[a,b], [b,c]$ y $[c,d]$, $a < b < c < d$. Ambos triángulos tienen la misma altura que el rectángulo.
- (a) Desarrolle un procedimiento de muestreo.
- (b) Determine cinco muestras con $(a,b,c,d) = (1,2,4,6)$ utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.
- *9. *Distribución geométrica.* Demuestre cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la siguiente distribución geométrica:

$$f(x) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \dots$$

El parámetro x es el número (de Bernoulli) de fallas hasta que ocurre un éxito, y p es la probabilidad de un éxito, $0 < p < 1$. Genere cinco muestras para $p = .6$, utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

10. *Distribución de Weibull.* Demuestre cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la distribución de Weibull con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^\alpha}, x > 0$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma y $\beta > 0$ es el parámetro de escala.

Método de convolución. La idea básica del método de convolución es expresar la muestra deseada como la suma estadística de otras variables aleatorias fáciles de muestrear. Típicas entre estas distribuciones están las de Erlang y la de Poisson, cuyas muestras pueden obtenerse con las muestras de la distribución exponencial.

Ejemplo 19.3-3 (Distribución Erlang)

La variable aleatoria m Erlang se define como la suma estándar (convoluciones) de m variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Sea y la variable aleatoria m Erlang; entonces

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

donde $y_i, i = 1, 2, \dots, m$ son exponenciales independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}, y_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Según el ejemplo 19.3-2, una muestra de la i -ésima distribución exponencial se calcula como

$$y_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(R_i), i = 1, 2, \dots, m$$

Por lo tanto la muestra m Erlang se calcula como

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right)[\ln(R_1) + \ln(R_2) + \dots + \ln(R_m)] \\ &= -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^m R_i\right) \end{aligned}$$

Para ilustrar el uso de la fórmula, suponga que $m = 3$ y $\lambda = 4$ eventos por hora. Los tres primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 resultan $R_1 R_2 R_3 = (.0589)(.6733)(.4799) = .0190$, los cuales dan

$$y = -\left(\frac{1}{4}\right) \ln(.019) = .991 \text{ horas}$$

Ejemplo 19.3-4 (Distribución de Poisson)

La sección 18.4.1 muestra que si la distribución del tiempo entre las ocurrencias sucesivas de eventos es exponencial, entonces la distribución de la cantidad de eventos por unidad de tiempo es Poisson, y viceversa. Utilizamos la relación para muestrear la distribución de Poisson.

Suponga que la media de la distribución de Poisson es λ eventos por unidad de tiempo. Se desprende que el tiempo entre eventos es exponencial con media de $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo. Esto significa que una muestra n de Poisson se repetirá durante t unidades de tiempo si, y sólo si,

El periodo hasta que ocurre el evento $n \leq t <$ el periodo hasta que ocurre el evento $n + 1$. Esta condición se traduce a

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \leq t < t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1}, n > 0$$

$$0 \leq t < t_1, n = 0$$

La variable aleatoria $t_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$, es una muestra de la distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. Con el resultado del ejemplo 19.3-3, tenemos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^n R_i\right) &\leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} R_i\right), n > 0 \\ 0 &\leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(R_1), n = 0 \end{aligned}$$

Estas expresiones se reducen a

$$\prod_{i=1}^n R_i \geq e^{-\lambda t} > \prod_{i=1}^{n+1} R_i, n > 0$$

$$1 \geq e^{-\lambda t} > R_1, n = 0$$

Para ilustrar la implementación del proceso de muestreo, supongamos que $\lambda = 4$ eventos por hora. Para obtener una muestra durante un periodo $t = .5$ hora, primero calculamos $e^{-\lambda t} = .1353$. El número aleatorio $R_1 = .0589$ es menor que $e^{-\lambda t} = .1353$. Por consiguiente, la muestra correspondiente es $n = 0$.

Ejemplo 19.3-5 (Distribución normal)

El teorema del límite central (vea la sección 14.4.4) expresa que la suma (convolución) de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se hace asintóticamente normal a medida que n se hace lo bastante grande. Utilizamos este resultado para generar muestras de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ .

Defina

$$x = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

La variable aleatoria es asintóticamente normal de acuerdo con el teorema del límite central. Dado que el número aleatorio (0,1) uniforme R tiene una medida de $\frac{1}{2}$ y una varianza de $\frac{1}{12}$, se desprende que la media y la varianza de x son $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{12}$, respectivamente. Por lo tanto, una muestra aleatoria, y , de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ con media μ y desviación estándar σ , se calcula a partir de x como

$$y = \mu + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right)$$

En la práctica, consideraremos que $n = 12$ por conveniencia, lo cual reduce la fórmula a

$$y = \mu + \sigma(x - 6)$$

Para ilustrar el uso de este método, supongamos que deseamos generar una muestra de $N(10,2)$ (media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 2$). Sumando los primeros 12 números aleatorios de las columnas 1 y 2 de la tabla 19.1, tenemos $x = 6.1094$. Por lo tanto $y = 10 + 2(6.1094 - 6) = 10.2188$.

Fórmula de muestreo normal de Box-Muller. La desventaja del procedimiento anterior es que requiere generar 12 números aleatorios por muestra normal, lo cual es computacionalmente ineficiente. Un procedimiento más eficiente utiliza la transformación

$$x = \cos(2\pi R_2) \sqrt{-2 \ln(R_1)}$$

Box y Muller (1958) demostraron que x es una $N(0,1)$ estándar. Por lo tanto, $y = \mu + \sigma x$ producirá una muestra de $N(\mu, \sigma)$. El nuevo procedimiento es más eficiente porque requiere sólo dos números aleatorios (0,1). En realidad, este método es aún más eficiente de lo que se formuló, porque Box y Muller demostraron que la fórmula dada produce otra muestra $N(0,1)$ si $\sin(2\pi R_2)$ reemplaza a $\cos(2\pi R_2)$.

Para ilustrar la aplicación del procedimiento de Box y Muller a la distribución normal $N(10,2)$, los dos primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 producen las siguientes muestras $N(0, 1)$:

$$x_1 = \cos(2\pi \times .6733) \sqrt{-2 \ln(.0589)} \approx -1.103$$

$$x_2 = \sin(2\pi \times .6733) \sqrt{-2 \ln(.0589)} \approx -2.109$$

Por lo tanto, las muestras $N(10,2)$ correspondientes son

$$y_1 = 10 + 2(-1.103) = 7.794$$

$$y_2 = 10 + 2(-2.109) = 5.782$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3C¹

- *1. En el ejemplo 19.3-3, calcule una muestra Erlang, si $m = 4$ y $l = 5$ eventos por hora.
2. En el ejemplo 19.3-4, genere tres muestras Poisson durante un periodo de 2 horas, dado que la media de la distribución de Poisson es de 5 eventos por hora.
3. En el ejemplo 19.4-5, genere dos muestras desde $N(8,1)$ utilizando tanto el método de convolución como el de Box-Muller.
4. A Metalco Jobshop llegan trabajos de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 6 trabajos por día. Los trabajos se asignan a los cinco centros de maquinado del taller en una forma estrictamente rotacional. Determine una muestra del intervalo entre llegadas de trabajos al primer centro de maquinado.
5. Las calificaciones del examen ACT de la clase de estudiante de último año de 1994 en la preparatoria de Springdale son normales, con una medida de 27 puntos y una desviación estándar de 3 puntos. Supongamos que sacamos una muestra aleatoria de seis estudiantes del último año de esa clase. Utilice el método de Box-Muller para determinar la media y la desviación estándar de la muestra.
- *6. El profesor de psicología Yataha está llevando a cabo un experimento de aprendizaje en el cual se entrena ratones para que encuentren su camino en un laberinto. La base del laberinto es un cuadrado. Un ratón entra al laberinto por una de las cuatro esquinas y debe encontrar su camino a través del laberinto para salir por el mismo punto por donde entró. El diseño del laberinto es tal que el ratón debe pasar por cada uno de los tres puntos de esquina restantes exactamente una vez antes de que salga. Las múltiples rutas del laberinto conectan las cuatro esquinas en un estricto orden en el sentido de las manecillas del reloj. El profesor Yataha estima que el tiempo que el ratón emplea para llegar a un punto de esquina desde otro está distribuido uniformemente entre 10 y 20 segundos, según la ruta que tome. Desarrolle un procedimiento de muestreo para el tiempo que un ratón pasa en el laberinto.
7. En el problema 6, suponga que una vez que el ratón sale del laberinto, de inmediato entra otro ratón. Desarrolle un procedimiento de muestreo para la cantidad de ratones que salen del laberinto en 5 minutos.

¹Para todos los problemas de este conjunto, utilice los números aleatorios de la tabla 19.1 comenzando con columna 1.

8. *Binomial negativa.* Demuestre cómo se puede determinar una muestra aleatoria a partir de la binomial negativa cuya distribución es

$$f(x) = C_x^{r+x-1} p^r (1-p)^x, x = 0, 1, 2, \dots$$

donde x es la cantidad de fallas hasta que ocurre el r -ésimo éxito en una secuencia de ensayos de Bernoulli independientes y p es la probabilidad de éxito $0 < p < 1$. (*Sugerencia:* La binomial negativa es la convolución de r muestras geométricas independientes. Vea el problema 9, conjunto 19.3B.)

19.4 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Los números aleatorios uniformes $(0, 1)$ desempeñan un papel clave en el muestreo de distribuciones. Sólo los dispositivos electrónicos pueden generar números aleatorios $(0, 1)$ verdaderos. Sin embargo, debido a que los modelos de simulación se ejecutan en la computadora, el uso de dispositivos electrónicos para generar números aleatorios es demasiado lento para este propósito. Además, los dispositivos electrónicos son activados por leyes de probabilidades, lo que hace imposible duplicar la misma secuencia de números aleatorios a voluntad. Este punto es importante porque la depuración, la verificación y la validación del modelo de simulación a menudo requieren la duplicación de la secuencia de los números aleatorios.

La única forma factible de generar números aleatorios $(0, 1)$ para usarlos en una simulación está basada en operaciones aritméticas. Tales números no son verdaderamente aleatorios debido a que toda la secuencia puede generarse con anticipación. Es por lo tanto más apropiado referirse a ellos como **números seudoaleatorios**.

La operación aritmética más común para generar números aleatorios $(0, 1)$ es el **método congruencial multiplicativo**. Dados los parámetros u_0, b, c y m , un número seudoaleatorio R_n se puede generar con las fórmulas:

$$u_n = (bu_{n-1} + c) \bmod(m), n = 1, 2, \dots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m}, n = 1, 2, \dots$$

Al valor inicial u_0 se le suele conocer como la **semilla** del generador.

En Law (2007) se pueden encontrar variaciones del método congruencial multiplicativo que mejoran la calidad del generador.

Ejemplo 19.4-1

Genere tres números aleatorios basado en el método congruencial multiplicativo aplicando $b = 9, c = 5$ y $m = 12$. La semilla es $u_0 = 11$.

$$u_1 = (9 \times 11 + 5) \bmod 12 = 8, R_1 = \frac{8}{12} = .6667$$

$$u_2 = (9 \times 8 + 5) \bmod 12 = 5, R_2 = \frac{5}{12} = .4167$$

$$u_3 = (9 \times 5 + 5) \bmod 12 = 2, R_3 = \frac{2}{12} = .1667$$

Momento de Excel

La plantilla *excelRN.xls* implementa el método congruencial multiplicativo. La figura 19.6 genera la secuencia asociada con los parámetros del ejemplo 19.4-1. Observe que la duración del ciclo es exactamente 4, tras de lo cual la secuencia se repite. El punto aquí es que los valores seleccionados de u_0, b, c y m son críticos para determinar la calidad (estadística) del generador y la duración de su ciclo. Por lo tanto, la implementación “casual” de la fórmula congruencial no se recomienda. En su lugar debemos utilizar un generador confiable y probado. Todos los programas de computadora comerciales están equipados con generadores de números aleatorios confiables.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.4A

- *1. Use la plantilla *excelRN.xls* con el siguiente conjunto de parámetros, y compare los resultados con los del ejemplo 19.4-1:

$$b = 17, c = 111, m = 103, \text{semilla} = 7$$

FIGURA 19.6

Números aleatorios obtenidos con Excel para los datos del ejemplo 19.4-1 (archivo *excelRN.xls*)

| | A | B |
|----|---|---------|
| 1 | Multiplicative Congruential Method | |
| 2 | Input data(B7<=1000) | |
| 3 | b = | 9 |
| 4 | c = | 5 |
| 5 | u0 = | 11 |
| 6 | m = | 12 |
| 7 | How many numbers? | 10 |
| 8 | Output results | |
| 9 | Press to Generate Sequence | |
| 10 | Generated random numbers: | |
| 11 | 1 | 0.66667 |
| 12 | 2 | 0.41667 |
| 13 | 3 | 0.16667 |
| 14 | 4 | 0.91667 |
| 15 | 5 | 0.66667 |
| 16 | 6 | 0.41667 |
| 17 | 7 | 0.16667 |
| 18 | 8 | 0.91667 |
| 19 | 9 | 0.66667 |
| 20 | 10 | 0.41667 |

2. Encuentre un generador de números aleatorios en su computadora, y utilícelo para generar 500 números aleatorios (0,1). Elabore el histograma de los valores resultantes (por medio de la herramienta histograma de Microsoft, vea la sección 12.5) y convéngase visualmente de que los números obtenidos siguen razonablemente la distribución (0,1). En realidad, para probar adecuadamente la secuencia, necesitaría aplicar las siguientes pruebas: bondad de ajuste de ji cuadrada (vea la sección 14.6), realice la prueba en busca de independencia y la prueba de correlación; para los detalles, vea Law (2007).

19.5 MECÁNICA DE LA SIMULACIÓN DISCRETA

Esta sección detalla cómo se reúnen las estadísticas típicas en un modelo de simulación. El vehículo de explicación es un modelo de una sola cola. La sección 19.5.1 utiliza un ejemplo numérico para detallar las acciones y cálculos que ocurren en modelo de simulación de colas de un solo servidor. Debido a los tediosos cálculos que tipifican la ejecución de un modelo de simulación, la sección 19.5.2 muestra cómo se maneja y ejecuta el modelo de un solo servidor con la hoja de cálculo de Excel.

19.5.1 Simulación manual de un modelo de un solo servidor

El tiempo entre llegadas de los clientes a la peluquería HairKare es exponencial con media de 15 minutos. La peluquería es atendida por sólo un peluquero, y se lleva entre 10 y 15 minutos, distribuidos de manera uniforme, para realizar un corte de pelo. Los clientes son atendidos con base en la disciplina primero en llegar, primero en salir (FIFO). El objetivo de la simulación es calcular las siguientes medidas de desempeño:

1. La utilización promedio de la peluquería.
2. La cantidad promedio de clientes que esperan.
3. El tiempo promedio que un cliente espera en la cola.

La lógica del modelo de simulación se puede describir en función de las acciones asociadas con los eventos de llegada y salida del modelo.

Evento de llegada

1. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del siguiente evento de llegada (= tiempo de simulación actual + tiempo entre llegadas).
2. Si la instalación (peluquero) está ociosa.
 - a. Inicie el servicio y declare ocupada la instalación. Actualiza las estadísticas de utilización de la instalación.
 - b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).
3. Si la instalación está ocupada, póngala en la cola, y actualice las estadísticas de la cola.

Evento de salida

1. Si la cola está vacía, declare ociosa la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
2. Si la cola no está vacía
 - a. Seleccione un cliente de la cola, póngalo en la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de instalación y la cola.

- b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).

Según los datos del problema, el tiempo entre llegadas es exponencial con media de 15 minutos, y el tiempo de servicio es uniforme entre 10 y 15 minutos. Si p y q representan muestras aleatorias de tiempos entre llegadas y de servicio, entonces, como se explica en la sección 19.3.2, obtenemos

$$p = -15 \ln(R) \text{ minutos}, 0 \leq R \leq 1$$

$$q = 10 + 5R \text{ minutos}, 0 \leq R \leq 1$$

Para el objetivo de este ejemplo, utilizamos R de la tabla 19.1, comenzando con la columna 1. También utilizamos el símbolo T para representar el tiempo del reloj de simulación. Suponemos además que el primer cliente llega en el instante $T = 0$ y que la instalación comienza vacía.

Debido a que los cálculos de simulación suelen ser voluminosos, la simulación se limita sólo a las primeras 5 llegadas. El ejemplo está diseñado para cubrir todas las situaciones posibles que pudieran surgir en el curso de la simulación. Más adelante, en la sección 19.5.2, presentamos la plantilla *excelSingleServer.xls* que permite experimentar con el modelo sin tener que realizar manualmente los cálculos.

Llegada del cliente 1 en el instante $T = 0$. Genere la llegada del cliente 2 en el instante

$$T = 0 + p_1 = 0 + [-15 \ln(.0589)] = 42.48 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está ociosa en el instante $T = 0$, el cliente inicia el servicio de inmediato. Por lo tanto, el tiempo de salida se calcula como

$$T = 0 + q_1 = 0 + (10 + 5 \times .6733) = 13.37 \text{ minutos}$$

La lista *cronológica* de eventos futuros es por lo tanto

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 13.37 | Salida del cliente 1 |
| 42.48 | Llegada del cliente 2 |

Salida del cliente 1 en el instante $T = 13.37$. Debido a que la cola está vacía, la instalación se declara ociosa. Al mismo tiempo, registramos que la instalación ha estado ocupada entre $T = 0$ y $T = 13.37$ minutos. La lista actualizada de eventos futuros es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 42.48 | Llegada del cliente 2 |

Llegada del cliente 2 en el instante $T = 42.48$. El cliente 3 llegará en el instante

$$T = 42.48 + [-15 \ln(.4799)] = 53.49 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación esta ociosa, el cliente 2 inicia el servicio, y la instalación se declara ocupada. El tiempo de salida es

$$T = 42.48 + (10 + 5 \times .9486) = 57.22 \text{ minutos}$$

La lista de eventos futuros se actualiza como

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 53.49 | Llegada del cliente 3 |
| 57.22 | Salida del cliente 2 |

Llegada del cliente 3 en el instante $T = 53.49$. El cliente 4 llegará en el instante

$$T = 53.49 + [-15 \ln (.6139)] = 60.81 \text{ minutos}$$

Debido a que actualmente la instalación está ocupada (hasta $T = 57.22$), el cliente 3 se coloca en la cola en el instante $T = 53.49$. La lista de eventos futuros actualizada es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 57.22 | Salida del cliente 2 |
| 60.81 | Llegada del cliente 4 |

Salida del cliente 2 en el instante $T = 57.22$. El cliente 3 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_3 = 57.22 - 53.49 = 3.73 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 57.22 + (10 + 5 \times .5933) = 70.19 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 60.81 | Llegada del cliente 4 |
| 70.19 | Salida del cliente 3 |

Llegada del cliente 4 en el instante $T = 60.81$. El cliente 5 llegará en el instante

$$T = 60.81 + [-15 \ln (.9341)] = 61.83 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está ocupada hasta $T = 70.19$, el cliente 4 se coloca en la cola. La lista actualizada de eventos futuros es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|-----------------------|
| 61.83 | Llegada del cliente 5 |
| 70.19 | Salida del cliente 3 |

Llegada del cliente 5 en el instante $T = 61.83$. La simulación se limita a 5 llegadas, por consiguiente no se genera la llegada del cliente 6. La instalación sigue ocupada, porque el cliente se coloca en la cola en el instante $T = 61.83$. La lista de eventos actualizada es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|----------------------|
| 70.19 | Salida del cliente 3 |

Salida del cliente 3 en el instante $T = 70.19$. El cliente 4 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_4 = 70.19 - 60.81 = 9.38 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 70.19 + [10 + 5 \times .1782] = 81.08 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|----------------------|
| 81.08 | Salida del cliente 4 |

Salida del cliente 4 en el instante $T = 81.08$. El cliente se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_5 = 81.08 - 61.83 = 19.25 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 81.08 + (10 + 5 \times .3473) = 92.82 \text{ minutos}$$

La lista de eventos actualizada es

| Tiempo, T | Evento |
|-------------|----------------------|
| 92.82 | Salida del cliente 5 |

Salida del cliente 5 en el instante $T = 92.82$. No hay más clientes en el sistema (cola e instalación) y la simulación termina.

La figura 19.7 resume los cambios de longitud de la cola y la utilización de la instalación como una función del tiempo de simulación.

La longitud de la cola y la utilización de la instalación se conocen como variables **basadas en el tiempo** porque su variación es una función del tiempo. En consecuencia, sus valores promedio se calculan como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Valor promedio de una} \\ \text{variable basada en el tiempo} \end{array} \right) = \frac{\text{Área bajo la curva}}{\text{Periodo simulado}}$$

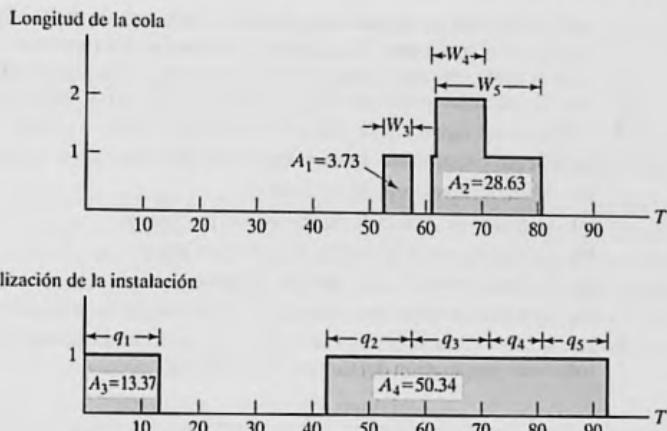


FIGURA 19.7

Cambios de la longitud de la cola y de la utilización de instalación como una función del tiempo de simulación, T

Implementando esta fórmula con los datos que aparecen en la figura 19.7, obtenemos

$$\left(\begin{array}{l} \text{Longitud promedio} \\ \text{de la cola} \end{array} \right) = \frac{A_1 + A_2}{92.82} = \frac{32.36}{92.82} = .349 \text{ clientes}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Utilización promedio} \\ \text{de la instalación} \end{array} \right) = \frac{A_3 + A_4}{92.82} = \frac{63.71}{92.82} = .686 \text{ peluqueros}$$

El tiempo de espera promedio en la cola es una variable basada en observaciones cuyo valor se calcula como

$$\left(\begin{array}{l} \text{Valor promedio de una variable} \\ \text{basada en observaciones} \end{array} \right) = \frac{\text{Suma de las observaciones}}{\text{Cantidad de observaciones}}$$

El examen de la figura 19.7 revela que el área debajo de la curva de longitud de la cola en realidad es igual a la suma del tiempo de espera de los tres clientes que se unen a la cola, es decir,

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0 + 0 + 3.73 + 9.38 + 19.25 = 32.36 \text{ minutos}$$

El tiempo de espera promedio en la cola de todos los clientes se calcula por consiguiente como

$$\overline{W}_q = \frac{32.36}{5} = 6.47 \text{ minutos}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.5A

- Suponga que la peluquería de la sección 19.5.1 es atendida por dos peluqueros en base al primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS). Suponga además que el tiempo para obtener un corte de pelo está uniformemente distribuido entre 15 y 30 minutos. El tiempo

entre llegadas de los clientes es exponencial con una media de 10 minutos. Simule manualmente el sistema durante 75 unidades de tiempo. Con los resultados de la simulación, determine el tiempo promedio que un cliente espera en la cola, el promedio de clientes que esperan y la utilización promedio de los peluqueros. Use los números aleatorios de la tabla 19.1.

2. Clasifique las siguientes variables como *basadas en observaciones* o *basadas en el tiempo*.
 - *(a) Tiempo para la falla de un componente electrónico.
 - *(b) Nivel del inventario de un artículo.
 - (c) Cantidad de pedido de un artículo de inventario.
 - (d) Cantidad de artículos defectuosos en un lote.
 - (e) Tiempo necesario para calificar exámenes.
 - (f) Cantidad de autos en el lote de estacionamiento de una agencia de renta de autos.
- *3. La siguiente tabla representa la variación de la cantidad de clientes que esperan en una cola como una función del tiempo de simulación.

| Tiempo de simulación, T (h) | Cantidad de clientes que esperan |
|-------------------------------|----------------------------------|
| $0 \leq T \leq 3$ | 0 |
| $3 < T \leq 4$ | 1 |
| $4 < T \leq 6$ | 2 |
| $6 < T \leq 7$ | 1 |
| $7 < T \leq 10$ | 0 |
| $10 < T \leq 12$ | 2 |
| $12 < T \leq 18$ | 3 |
| $18 < T \leq 20$ | 2 |
| $20 < T \leq 25$ | 1 |

Calcule las siguientes medidas de desempeño:

- (a) La longitud promedio de la cola.
- (b) El tiempo de espera promedio en cola de los que deben esperar.
4. Suponga que la peluquería descrita al inicio de la sección 19.5.1 es atendida por tres peluqueros. Suponga, además que la utilización de los servidores (peluqueros) se resume en la siguiente tabla:

| Tiempo de simulación, T (h) | Cant. de servidores ocupados |
|-------------------------------|------------------------------|
| $0 < T \leq 10$ | 0 |
| $10 < T \leq 20$ | 1 |
| $20 < T \leq 30$ | 2 |
| $30 < T \leq 40$ | 0 |
| $40 < T \leq 60$ | 1 |
| $60 < T \leq 70$ | 2 |
| $70 < T \leq 80$ | 3 |
| $80 < T \leq 90$ | 1 |
| $90 < T \leq 100$ | 0 |

Determine las siguientes medidas de desempeño:

- (a) La utilización promedio de la instalación.
 - (b) Tiempo promedio que permanece ocupada la instalación.
 - (c) Tiempo ocioso promedio de instalación.

19.5.2 Simulación basada en una hoja de cálculo del modelo de un solo servidor

Esta sección desarrolla una hoja de cálculo basada en el modelo de un solo servidor. El objetivo del desarrollo es reforzar las ideas presentadas en la sección 19.5.1. Desde luego, un modelo de un solo servidor es una situación simple fácil de modelar en un entorno de hoja de cálculo. Otras situaciones requieren un esfuerzo de modelado más complicado, una tarea que se facilita con los paquetes de simulación disponibles (vea la sección 19.7).

La presentación en la sección 19.5.1 muestra que el modelo de simulación de la instalación de un solo servidor requiere dos elementos básicos:

1. Una lista cronológica de los eventos del modelo.
 2. Una gráfica que rastree los cambios del uso de la instalación y la longitud de la cola.

Estos dos elementos permanecen esenciales en el desarrollo de un modelo de simulación basado en la hoja de cálculo (en realidad, basado en cualquier computadora). La diferencia es que la implementación se realiza de modo que sea compatible con el uso de la computadora. Como en la sección 19.5.1, a los clientes se les atiende en el orden de llegada (FIFO, primero en llegar, primero en salir).

La figura 19.8 proporciona los resultados obtenidos con *excelSingleServer.xls*. Los datos de entrada permiten representar el tiempo entre llegadas y de servicio en una de cuatro formas: constante, exponencial, uniforme y triangular. La distribución triangular es útil porque se puede utilizar como una estimación inicial aproximada de cualquier distribución, simplemente con tres estimaciones a , b y c que representan los valores

FIGURA 19.8

Resultados de un modelo de simulación de un solo servidor obtenido con Excel (archivo excelSingle.xls)

| A | B | C | D | E | F | G | H | K | L | M | N | O | P | Q |
|---|---|-------------------------------------|-------|--------------------------------|-------|--------------------------------|---|---|----|-------|-------|--------|--------|-------|
| Simulation of a Single-Server Queueing Model | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | Nbr of arrivals = 20 << maximum 500 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | Enter x in column A to select interarrival pdf: | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | Constant: | | | | | | | | 1 | 3.73 | 12.63 | 0.00 | 12.63 | 0.00 |
| 5 | x Exponential: $\lambda = 0.067$ | | | | | | | | 2 | 5.37 | 14.71 | 3.73 | 27.55 | 9.10 |
| 6 | Uniform: $a =$ | <input type="text" value="a"/> | $b =$ | <input type="text" value="b"/> | | | | | 3 | 3.05 | 12.21 | 9.09 | 39.75 | 18.45 |
| 7 | Triangular: $a =$ | <input type="text" value="a"/> | $b =$ | <input type="text" value="b"/> | $c =$ | <input type="text" value="c"/> | | | 4 | 14.10 | 11.18 | 12.95 | 50.94 | 26.80 |
| 8 | Enter x in column A to select service time pdf: | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | Constant: | | | | | | | | 5 | 7.35 | 14.92 | 27.05 | 65.65 | 23.89 |
| 10 | x Exponential: $\mu =$ | <input type="text" value="a"/> | | | | | | | 6 | 35.70 | 14.22 | 34.41 | 80.07 | 31.45 |
| 11 | x Uniform: $a =$ | <input type="text" value="a"/> | $b =$ | <input type="text" value="b"/> | $c =$ | <input type="text" value="c"/> | | | 7 | 0.60 | 14.50 | 70.11 | 94.50 | 9.97 |
| 12 | Triangular: $a =$ | <input type="text" value="a"/> | $b =$ | <input type="text" value="b"/> | $c =$ | <input type="text" value="c"/> | | | 8 | 4.25 | 13.35 | 70.71 | 107.93 | 23.87 |
| 13 | Output Summary | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | Av facility utilization = | <input type="text" value="0.98"/> | | | | | | | 11 | 0.99 | 14.65 | 87.24 | 146.69 | 44.70 |
| 15 | Percent idleness (%) = | <input type="text" value="1.95"/> | | | | | | | 12 | 49.78 | 12.65 | 96.23 | 159.43 | 50.36 |
| 16 | Press F9 to trigger a new simulation run. | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | Av queue length, Lq = | <input type="text" value="1.57"/> | | | | | | | 13 | 0.42 | 14.12 | 14.01 | 173.55 | 13.43 |
| 18 | Av nbr in system, Ls = | <input type="text" value="2.65"/> | | | | | | | 14 | 8.77 | 13.69 | 146.43 | 187.24 | 27.13 |
| 19 | Av queue time, Wq = | <input type="text" value="21.24"/> | | | | | | | 15 | 11.19 | 10.50 | 155.20 | 197.75 | 32.05 |
| 20 | Av system time, Ws = | <input type="text" value="34.47"/> | | | | | | | 16 | 42.82 | 13.78 | 166.39 | 211.53 | 31.36 |
| 21 | Sum(ServiceTime) = | <input type="text" value="264.65"/> | | | | | | | 17 | 19.67 | 12.29 | 209.20 | 223.02 | 2.33 |
| 22 | Sum(Wq) = | <input type="text" value="424.00"/> | | | | | | | 18 | 9.25 | 12.95 | 229.07 | 242.03 | 0.00 |
| 23 | Sum(Ws) = | <input type="text" value="689.44"/> | | | | | | | 19 | 13.90 | 12.99 | 233.33 | 255.02 | 3.70 |
| | | | | | | | | | 20 | 58.46 | 14.80 | 252.31 | 269.90 | 2.71 |

mínimo, el más probable y el máximo del tiempo. La única otra información necesaria para controlar la simulación es la duración de la ejecución de la simulación, la cual en este modelo es especificada por el número de llegadas que se pueden generar en el modelo.

Los cálculos de la hoja de cálculo reservan una fila para cada llegada. Los tiempos entre llegadas y de servicio de cada llegada se generan con los datos de entrada. Se supone que la primera llegada ocurre en el instante $T = 0$. Debido a que la instalación comienza ociosa, el cliente inicia el servicio de inmediato. La hoja de cálculo proporciona suficiente información para demostrar los cálculos internos dados en la sección 19.5.1.

Se desarrolló otra hoja de cálculo para simular modelos de varios servidores (*excelMultiServer.xls*). El diseño de la plantilla se basa en las mismas ideas utilizadas en caso de un solo servidor. Sin embargo, la determinación del tiempo de salida no es tan simple y requiere el uso de macros VBA.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.5B

- Con los datos de la sección 19.5.1, ejecute el simulador Excel para 10 llegadas y trace la gráfica de los cambios del uso de la instalación y la longitud de la cola como una función del tiempo de simulación. Compruebe que las áreas bajo las curvas son iguales a la suma de los tiempos de servicio y la suma de los tiempos de espera, respectivamente.
- Simule el modelo $M/M/1$ para 500 llegadas, con la tasa de llegadas $\lambda = 4$ clientes por hora y la tasa de servicios $\mu = 6$ salidas por hora. Ejecute 5 aplicaciones (refrescando la hoja de cálculo, oprimiendo F9) y determine un intervalo de 95% de confianza con todas las medidas de desempeño del modelo. Compare los resultados con los valores teóricos de estado estable del modelo $M/M/1$.
- Cada 15 minutos llegan televisores sobre una banda transportadora para ser inspeccionados por un solo operador. No están disponibles los datos detallados de la estación de inspección. Sin embargo, el operador estima emplear 10 minutos “en promedio” para inspeccionar una unidad. En las peores condiciones, el tiempo de inspección no excede de 13 minutos, y para ciertas unidades el tiempo de inspección puede ser tan bajo como 9 minutos.
 - Use el simulador de Excel para simular la inspección de 200 televisores.
 - Basado en 5 réplicas, estime la cantidad promedio de unidades en espera de ser inspeccionadas y el uso promedio de la estación de inspección.

19.6 MÉTODOS PARA REUNIR OBSERVACIONES ESTADÍSTICAS

La simulación es un experimento estadístico y sus resultados deben interpretarse por medio de herramientas de inferencia estadística apropiadas (por ejemplo, intervalos de confianza y pruebas de hipótesis). Para realizar esta tarea, un experimento de simulación debe satisfacer tres condiciones:

- Las observaciones se extraen de distribuciones estacionarias (idénticas).
- Las observaciones se muestran a partir de una población normal.
- Las observaciones son independientes.

En un sentido estricto, el experimento de simulación no satisface ninguna de estas condiciones. No obstante, podemos garantizar que estas condiciones permanecen estadísticamente aceptables al restringir la forma de reunir las observaciones.

En primer lugar consideremos el tema de las distribuciones estacionarias. Los resultados de una simulación son una función de la duración del periodo simulado. El periodo inicial produce un comportamiento errático conocido en general como **periodo transitorio o de calentamiento**. Cuando los resultados de la simulación se estabilizan, el sistema opera en **estado estable**. Desafortunadamente, no hay una forma definitiva de predecir de antemano el punto de inicio del estado estable. Por lo general, una ejecución más larga de la simulación tiene una mejor probabilidad de alcanzar el estado estable; es decir que el problema se aborda con un tamaño de muestra suficientemente grande.

Luego consideramos el requerimiento de que las observaciones para la simulación se extraen de una población normal. Este requisito se cumple utilizando el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4) el cual confirma que la distribución del promedio de una muestra es asintóticamente normal, de manera independiente de la población padre. Por consiguiente, el teorema del límite central es la herramienta principal que utilizamos para satisfacer la suposición de distribución normal.

La tercera condición tiene que ver con la independencia de las observaciones. En una simulación, una observación se puede basar en una sola ejecución independiente o en la subdivisión de una sola ejecución en subintervalos donde cada uno representa una observación. Cada método presenta desventajas y ventajas. El primero alivia la cuestión de independencia pero tiene la desventaja de incluir el periodo transitorio en cada observación. En el segundo método, el efecto del periodo transitorio no es tan pronunciado, pero empeora de manera inherente el tema de la independencia. Como se explicará más adelante en esta sección, un posible remedio consiste en prolongar el tiempo de la ejecución de la simulación.

Los métodos más comunes para reunir observaciones en una simulación son

1. Método de subintervalos.
2. Método de réplica.
3. Método regenerativo (o de ciclos).

Los dos primeros son fáciles de automatizar en todos los lenguajes de simulación ampliamente utilizados (vea la sección 19.7). Por otra parte, el tercer método, aun cuando aborda directamente el tema de la independencia al buscar condiciones iniciales idénticas para las diferentes observaciones, puede ser difícil de implementar en la práctica.

Las secciones 19.6.1 y 19.6.2 presentan los primeros dos métodos. Los detalles del tercer método se hallan en Law (2007).

19.6.1 Método de subintervalos

La figura 19.9 ilustra la idea del método de subintervalos. Supongamos que la duración de la simulación es de T unidades de tiempo. El método de subintervalos primero trunca un periodo transitorio inicial y luego subdivide el resto de la ejecución de la simulación en n subintervalos (o lotes) iguales. El promedio de una medida de desempeño deseada (por ejemplo, longitud de la cola o tiempo de espera en la cola) dentro de cada subintervalo se utiliza entonces para representar una sola observación. El truncamiento del periodo transitorio inicial significa que durante ese periodo no se reúnen datos estadísticos.

La ventaja del método de subintervalos es que el efecto de las condiciones transitorias (no estacionarias) se mitiga, en particular para las observaciones que se reúnen al final de la ejecución de la simulación. La desventaja es que los lotes sucesivos con condiciones restrictivas comunes no son necesariamente independientes. El problema puede aliviarse incrementando el tiempo de cada observación.



FIGURA 19.9

Recolección de datos de simulación utilizando el método de subintervalos

Ejemplo 19.6-1

La figura 19.10 muestra el cambio de longitud de la cola en un modelo de una sola cola como una función del tiempo de simulación. La longitud de la ejecución de la simulación es $T = 35$ horas, y la longitud del período transitorio es de 5 horas. La base de tiempo para una observación es de 5 horas, lo que produce $n = 5$ observaciones.

Sea \bar{Q}_i la longitud promedio de la cola en el lote i . Debido a que la longitud de la cola es una variable basada en el tiempo, tenemos

$$\bar{Q}_i = \frac{A_i}{t}, i = 1, 2, \dots, 5$$

donde A_i es el área bajo la curva de la longitud de la cola asociada con el lote (observación) i , y $t = 6$ es la base de tiempo por lote.

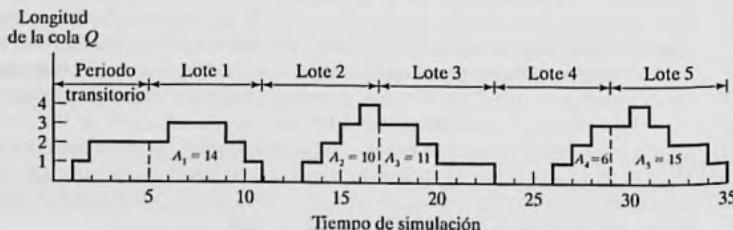
Los datos que aparecen en la figura 19.10 producen las siguientes observaciones:

| Observación i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| A_i | 14 | 10 | 11 | 6 | 15 |
| \bar{Q}_i | 2.33 | 1.67 | 1.83 | 1.00 | 2.50 |

Media muestral = 1.87 Desviación estándar muestral = .59

FIGURA 19.10

Cambio de longitud de la cola con el tiempo de simulación en el ejemplo 19.6-1



La media y varianza muestrales pueden usarse para calcular un intervalo de confianza, si se desea. El cálculo de varianza muestral en el ejemplo 19.6-1 se basa en la siguiente fórmula conocida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

Esta fórmula es sólo una aproximación de la desviación estándar verdadera porque ignora el efecto de la autocorrelación entre los lotes sucesivos. La fórmula exacta se encuentra en Law (2007).

19.6.2 Método de réplica

En este método cada observación está representada por una ejecución de simulación independiente en la cual el periodo transitorio se trunca, como se ilustra en la figura 19.11. El cálculo de los promedios de observación para cada lote es el mismo que en el método de subintervalos. La única diferencia es que la fórmula de la varianza estándar es aplicable porque los lotes no son independientes.

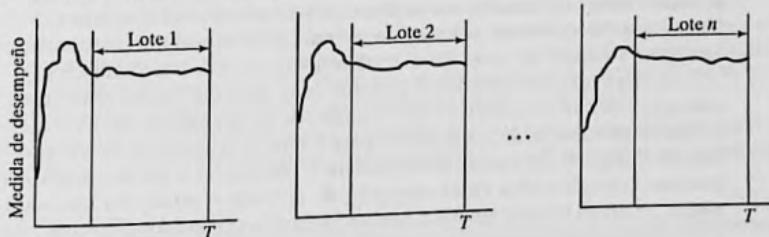
La ventaja del método de réplica es que a cada ejecución de simulación la controla una corriente de números aleatorios 0-1 distinta, la cual produce observaciones estadísticamente independientes. La desventaja es que cada observación puede ser influida por el efecto inicial de las condiciones transitorias. Dicho problema puede atenuarse si se prolonga lo suficiente la duración de la ejecución.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.6A

1. En el ejemplo 19.6-1, use el método de subintervalos para calcular el tiempo de espera promedio en la cola para los que deben esperar.
- *2. En un modelo de simulación se utiliza el método de subintervalos para calcular promedios de lotes. Se estima que el periodo transitorio es de 100, y cada lote también tiene una base de tiempo de 100 unidades de tiempo. Aplicando los siguientes datos, los cuales proporcionan los tiempos de espera de los clientes como una función del tiempo de simulación, estime el intervalo de 95% de confianza para el tiempo medio de espera.

FIGURA 19.11

Recolección de datos de simulación siguiendo el método de réplica



| Intervalo de tiempo | Tiempos de espera |
|---------------------|-----------------------------|
| 0–100 | 10, 20, 13, 14, 8, 15, 6, 8 |
| 100–200 | 12, 30, 10, 14, 16 |
| 200–300 | 15, 17, 20, 22 |
| 300–400 | 10, 20, 30, 15, 25, 31 |
| 400–500 | 15, 17, 20, 14, 13 |
| 500–600 | 25, 30, 15 |

19.7 LENGUAJES DE SIMULACIÓN

La ejecución de modelos de simulación implica dos tipos distintos de cálculos: (1) manejo de archivos que tienen que ver con el almacenamiento y procesamiento cronológicos de los eventos del modelo, y (2) cálculos aritméticos y de contabilidad asociados con la generación de muestras aleatorias y recolección de estadísticas del modelo. El primer tipo de cálculo implica una lógica extensa en el desarrollo del procesamiento de listas, y el segundo tipo implica cálculos tediosos que requieren mucho tiempo. La naturaleza de estos cálculos hace que la computadora sea una herramienta esencial para ejecutar modelos de simulación y, a su vez, promueve el desarrollo de lenguajes de simulación especiales para computadora para realizar estos cálculos de una forma conveniente y eficiente.

Los lenguajes de simulación discretos quedan comprendidos en dos amplias categorías:

1. Programación del evento
2. Orientado al proceso

En los lenguajes de programación del evento, el usuario detalla las acciones asociadas con la ocurrencia de cada evento, como en el ejemplo 19.5-1. El rol principal del lenguaje en este caso es (1) la automatización del muestreo a partir de las distribuciones, (2) el almacenamiento y recuperación de los eventos en orden cronológico, y (3) la recolección de estadísticas del modelo.

Los lenguajes orientados al proceso utilizan bloques o nodos que pueden vincularse entre sí para formar una red que describe los movimientos de **transacciones** o **entidades** (es decir, clientes) en el sistema. Por ejemplo, los tres bloques/nodos más prominentes en cualquier lenguaje de simulación orientado al proceso son una *fuente* de la cual se crean las transacciones, una *cola* donde pueden esperar si es necesario, y una *instalación*, en la que se realiza el servicio. Cada uno estos bloques/nodos se define con toda la información necesaria para controlar automáticamente la simulación. Por ejemplo, una vez que se especifica el tiempo entre llegadas, un programa orientado al proceso "sabe" de manera automática cuándo ocurrirán los eventos de llegada. De hecho, cada bloque/nodo del modelo cuenta con instrucciones permanentes que definen *cómo* y *cuándo* se mueven las transacciones en la red de simulación.

Los lenguajes orientados al proceso están controlados internamente por las mismas acciones que se utilizan en los lenguajes de programación de evento. La diferencia es que estas acciones se automatizan para liberar al usuario de los tediosos detalles de cálculo y lógicos. En cierto modo podemos considerar a los lenguajes orientados al proceso como basados en el concepto de entrada y salida del método de la "caja negra". Esto en esencia significa que los lenguajes orientados al proceso intercambian la flexibilidad del modelo por la sencillez y facilidad de uso.

Los lenguajes de programación de evento (como SIMSCRIPT, SLAM y SIMAN) son anticuados y rara vez se utilizan en la práctica. Recientemente, un nuevo lenguaje llamado DEEDS (Elizandro y Taha, 2008) se basa en el uso de la hoja de cálculo de Excel para controlar la programación del evento. DEEDS permite la flexibilidad de modelado de los lenguajes de simulación orientados al evento al mismo tiempo que logra la naturaleza intuitiva de un lenguaje orientado al proceso.

El paquete comercial predominante orientado al proceso es Arena. Utiliza una extensa interfaz de usuario para simplificar el proceso de crear un modelo de simulación. También cuenta con capacidades de animación donde pueden observarse visualmente los cambios del sistema. Sin embargo, para un profesional experimentado en la simulación, estas interfaces parecen reducir el desarrollo de un modelo de simulación a un paso de "cámara lenta". No sorprende que algunos usuarios prefieran seguir escribiendo modelos de simulación en lenguajes de programación de alto nivel.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.7A²

- Los clientes llegan al azar a una oficina de correos atendida por tres empleados con media de 5 minutos. El tiempo que un empleado pasa con un cliente es exponencial con media de 10 minutos. Todos los clientes que llegan hacen cola y esperan al primer empleado libre disponible. Ejecute un modelo de simulación del sistema durante 480 minutos para determinar lo siguiente:
 - El promedio de clientes que esperan en la cola.
 - El uso promedio de los empleados.
 - Compare los resultados de la simulación con los del modelo de colas *M/M/c* (capítulo 18) y con la hoja de cálculo *MultiServerSimulator.xls*.
- En una banda transportadora llegan televisores para ser inspeccionados a una velocidad constante de 5 unidades por hora. El tiempo de inspección requiere entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente. La experiencia pasada muestra que 20% de las unidades deben ser ajustadas y enviadas de nuevo para reinspección. El tiempo de ajuste también está distribuido uniformemente entre 6 y 8 minutos. Ejecute un modelo de simulación durante 480 minutos para calcular lo siguiente:
 - El tiempo promedio que una unidad requiere hasta que pasa la inspección.
 - El promedio de veces que una unidad debe ser reinspeccionada antes de que salga del sistema.
- Un ratón se encuentra atrapado en un laberinto y "desea salir" desesperadamente. Después de tratar entre 1 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, hay 30% de probabilidades de que encuentre la ruta correcta. De lo contrario, vagará sin rumbo entre 2 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, y a la larga terminará donde comenzó, sólo para intentarlo una vez más. El ratón puede "tratar de liberarse" las veces que le plazca, pero hay un límite para todo. Con tanta energía consumida al intentarlo una y otra vez, es seguro que el ratón muera si no logra liberarse dentro de un periodo normalmente distribuido, con una media de 10 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Escriba un modelo de simulación para estimar la probabilidad de que el ratón se libere. Para estimar la probabilidad, suponga que el modelo procesará 100 ratones.
- En la etapa final de fabricación, un auto que se desplaza sobre un transportador se sitúa entre dos estaciones de trabajo paralelas para que se le realicen trabajos en los lados iz-

²Resuelva estos problemas con un lenguaje de simulación de su predilección, o un lenguaje de programación de alto grado.

quierdo y derecho al mismo tiempo. Los tiempos de operación en los lados izquierdo y derecho son uniformes entre 15 y 20 minutos, y entre 18 y 22 minutos, respectivamente. El transportador llega al área de las estaciones cada 20 minutos. Simule el proceso durante 480 minutos para determinar la utilización de las estaciones izquierda y derecha.

5. A una instalación de lavado de autos de una bahía donde el tiempo entre llegadas es exponencial, los autos llegan con una media de 10 minutos. Los autos que llegan se forman en un solo carril que tiene espacio a lo sumo para cinco autos. Si el carril está lleno, los autos que llegan se van a otra parte. Se requieren entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente para lavar un auto. Simule el sistema durante 960 minutos, y estime el tiempo que el auto pasa en la instalación.

BIBLIOGRAFÍA

- Banks, J., J. Carson, B. Nelson, y D. Nicol, *Discrete-Event System Simulation*, 4a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- Box, G., y M. Muller, "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 29, págs. 610-611, 1958.
- Elizandro, D., y H. Taha, *Simulation of Industrial Systems: Discrete Event Simulation Using Excel/VBA*, Taylor and Francis, Nueva York, 2008.
- Law, A., *Simulation Modeling & Analysis*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2007.
- Rubenstein, R., B. Melamed, y A. Shapiro, *Modern Simulation and Modeling*, Wiley, Nueva York, 1998.
- Taha, H., *Simulation Modeling and SIMNET*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1988.

CAPÍTULO 20

Teoría de optimización clásica

20.1 PROBLEMAS NO RESTRINGIDOS

Un punto extremo de una función $f(\mathbf{X})$ define o un máximo o un mínimo de la función. Matemáticamente, un punto $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$ es un máximo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$$

para todas las $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_j, \dots, h_n)$ donde $|h_j|$ es suficientemente pequeña para todas las j . Asimismo, \mathbf{X}_0 es un mínimo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{X}_0)$$

La figura 20.1 ilustra los máximos y mínimos de una función de una sola variable $f(x)$ definida en el intervalo $a \leq x \leq b$. Los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_6 son los extremos de $f(x)$, con x_1, x_3 y x_6 como máximos, y x_2 y x_4 como mínimos. El valor $f(x_6) = \max[f(x_1), f(x_3), f(x_6)]$ es un máximo global o absoluto, y $f(x_1)$ y $f(x_3)$ son máximos locales o relativos. Asimismo, $f(x_4)$ es un mínimo local y $f(x_2)$ es un mínimo global.

Aunque x_1 (en la figura 20.1) es un punto máximo (local), difiere de los máximos locales restantes en que el valor de f correspondiente al menos un punto en la vecindad de x_1 es igual a $f(x_1)$. A este respecto, x_1 es un **máximo débil**, en tanto que x_3 y x_6 son **máximo fuertes**. En general, para \mathbf{h} como se definió antes, \mathbf{X}_0 es un máximo débil si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$ y un máximo fuerte si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{X}_0)$.

En la figura 20.1, la primera derivada (pendiente) de f es igual a cero en todos los extremos. Esta propiedad también se satisface en puntos de **inflexión o silla**, como es el caso de x_5 . Si un punto con pendiente (gradiente) cero no es un extremo (máximo o mínimo), entonces debe ser un punto de inflexión o silla.

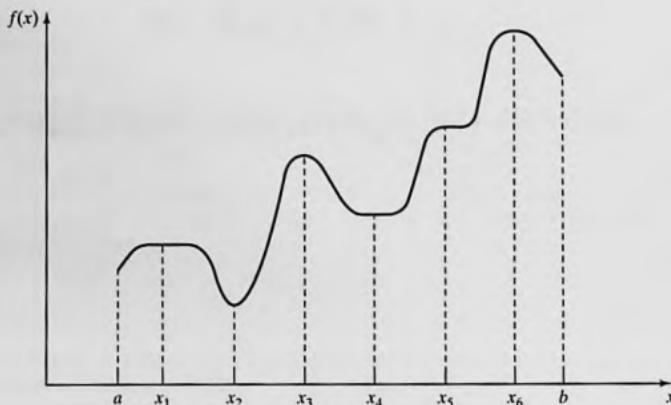


FIGURA 20.1

Ejemplos de puntos extremos de una función de una sola variable

20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes

Esta sección desarrolla las condiciones necesarias y suficientes para que una función $f(\mathbf{X})$ de n variables tenga extremos. Se supone que la primera y segunda derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ son continuas para todas las \mathbf{X} .

Teorema 20.1-1 Una condición necesaria para que \mathbf{X}_0 sea un punto extremo de $f(\mathbf{X})$ es que

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$$

Debido a que la condición necesaria también se satisface en puntos de inflexión o silla, es más apropiado referirse a estos puntos obtenidos con la solución de $\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$ como puntos **estacionarios**. El teorema siguiente establece las condiciones de suficiencia para que \mathbf{X}_0 sea un punto extremo.

Teorema 20.1-2 Una condición suficiente para que un punto estacionario \mathbf{X}_0 sea un extremo es que la matriz Hessiana \mathbf{H} evaluada en \mathbf{X}_0 satisfaga las siguientes condiciones:

- (i) \mathbf{H} se define positiva si \mathbf{X}_0 es un punto mínimo.
- (ii) \mathbf{H} se define negativa si \mathbf{X}_0 es un punto máximo.

Ejemplo 20.1-1

Considere la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

La condición necesaria $\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$ da

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es

$$\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Para determinar el tipo de punto estacionario, considere

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes menores principales de $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ tienen los valores $-2, 4$ y -6 , respectivamente. Por lo tanto, como se muestra en la sección D.3, $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ se define negativa y $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$ representa un punto máximo.

Por lo común, si $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ es indefinida, \mathbf{X}_0 debe ser un punto silla. En casos no concluyentes, \mathbf{X}_0 puede o no ser un extremo, y la condición de suficiencia se hace algo complicada, porque en la expansión de Taylor se deben considerar términos de mayor orden.

La condición de suficiencia establecida por el teorema 20.1-2 aplica funciones de una sola variable como sigue. Dado que y_0 es un punto estacionario, entonces

- (i) y_0 es un máximo si $f''(y_0) < 0$.
- (ii) y_0 es un mínimo si $f''(y_0) > 0$.

Si $f''(y_0) = 0$, deben investigarse las derivadas de mayor orden como lo requiere el siguiente teorema.

Teorema 20.1-3 *Dado y_0 , un punto estacionario de $f(y)$, si las primeras $(n - 1)$ derivadas son cero y $f''(y_0) \neq 0$, entonces*

- (i) *Si n es impar, y_0 es un punto de inflexión.*
- (ii) *Si n es par, entonces y_0 es un mínimo si $f''(y_0) > 0$ y un máximo si $f''(y_0) < 0$.*



FIGURA 20.2

Puntos extremos de $f(y) = y^4$ y
 $g(y) = y^3$

Ejemplo 20.1-2

La figura 20.2 muestra las gráficas de las siguientes funciones

$$f(y) = y^4$$

$$g(y) = y^3$$

Con $f(y) = y^4$, $f'(y) = 4y^3 = 0$, la cual da el punto estacionario $y_0 = 0$. Ahora

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto mínimo (vea la figura 20.2).

Para $g(y) = y^3$, $g'(y) = 3y^2 = 0$, la cual da $y_0 = 0$, como un punto estacionario. Además

$$g'(0) = g''(0), g^{(3)}(0) = 6 \neq 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto de inflexión.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1A

1. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones:

*(a) $f(x) = x^3 + x$

*(b) $f(x) = x^4 + x^2$

(c) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$

(d) $f(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$

(e) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 10$

2. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones.

(a) $f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

(b) $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3$

3. Verifique que la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

tiene los puntos estacionarios $(0,3,1)$, $(0,1,-1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,1)$ y $(2,3,-1)$. Utilice la condición de suficiencia para identificar los puntos extremos.

- *4. Resuelva las siguientes ecuaciones simultáneas convirtiendo el sistema en una función objetivo no lineal sin restricciones.

$$x_2 - x_1^2 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 2$$

[Sugerencia: $\min f^2(x_1, x_2)$ ocurre en $f'(x_1, x_2) = 0$]

20.1.2 Método de Newton-Raphson

Por lo general, la condición necesaria $\nabla f(x) \neq 0$ puede ser extremadamente no lineal y, en consecuencia, difícil de resolver. El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo para resolver ecuaciones no lineales.

Considere las ecuaciones simultáneas

$$f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Sea \mathbf{X}^k un punto dado. Luego, mediante la expansión de Taylor,

$$f_i(\mathbf{X}) \approx f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k), i = 1, 2, \dots, m$$

Por lo tanto, las ecuaciones originales $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ pueden representarse de forma aproximada como

$$f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en notación matricial como

$$\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = \mathbf{0}$$

Si \mathbf{B}_k es no singular, entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_k - \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}_k$$

La idea del método es iniciar desde un punto inicial \mathbf{X}_0 y luego utilizar la ecuación anterior para determinar un nuevo punto. El proceso puede o no converger dependiendo de la selección del punto de inicio. La convergencia ocurre cuando dos puntos sucesivos \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} , son aproximadamente iguales (dentro de una tolerancia especificada aceptable).

En la figura 20.3 una interpretación geométrica del método se ilustra mediante una función de una sola variable. La relación entre x_k y x_{k+1} para una función $f(x)$ de una sola variable se reduce a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Los términos se pueden acomodar como $f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$ lo que significa que x_{k+1}

se determina a partir de la pendiente de $f(x)$ en x_k , donde $\tan \theta = f'(x_k)$ como lo muestra la figura.

La figura 20.3 demuestra que la convergencia no siempre es posible. Si el punto inicial es a , el método divergirá. Por lo común, podría requerirse intentar varios puntos de inicio antes de que se logre la convergencia.

Ejemplo 20.1-3

Para demostrar el uso del método de Newton-Raphson, considere la función

$$g(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$$

Para determinar los puntos estacionarios de $g(x)$, tenemos que resolver

$$f(x) = g'(x) = 72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0$$

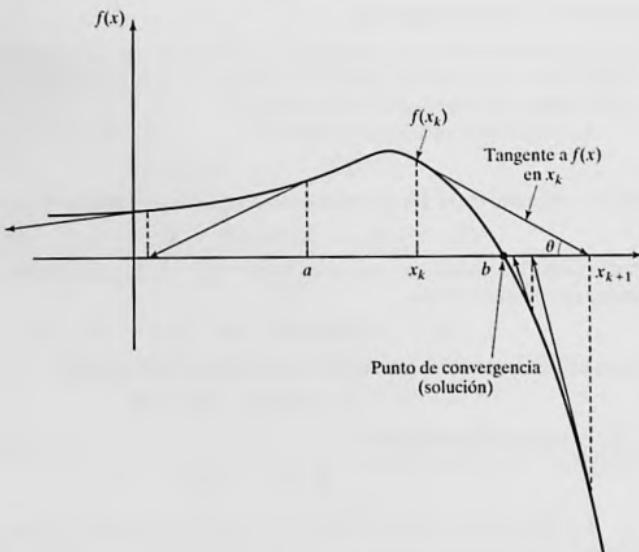


FIGURA 20.3

Ilustración del proceso iterativo en el método de Newton-Raphson

Por lo tanto, para el método de Newton-Raphson, tenemos

$$f'(x) = 216x^2 - 468x + 241$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{72x^3 - 234x^2 + 241x - 78}{216x^2 - 468x + 24}$$

Iniciando con $x_0 = 10$, la siguiente tabla proporciona las iteraciones sucesivas:

| k | x_k | $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ | x_{k+1} |
|-----|-----------|--------------------------|-----------|
| 0 | 10.000000 | 2.978923 | 7.032108 |
| 1 | 7.032108 | 1.976429 | 5.055679 |
| 2 | 5.055679 | 1.314367 | 3.741312 |
| 3 | 3.741312 | 0.871358 | 2.869995 |
| 4 | 2.869995 | 0.573547 | 2.296405 |
| 5 | 2.296405 | 0.371252 | 1.925154 |
| 6 | 1.925154 | 0.230702 | 1.694452 |
| 7 | 1.694452 | 0.128999 | 1.565453 |
| 8 | 1.565453 | 0.054156 | 1.511296 |
| 9 | 1.511296 | .0108641 | 1.500432 |
| 10 | 1.500432 | .00043131 | 1.500001 |

El método converge a $x = 1.5$. En realidad, $f(x)$ tiene tres puntos estacionarios en $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{13}{12}$ y $x = \frac{3}{2}$. Los dos puntos restantes se determinan intentando diferentes valores para x_0 inicial. De hecho, $x_0 = .5$ y $x_0 = 1$, deberían dar por resultado los puntos estacionarios (¡compruébelo!).

Momento de Excel

Se puede utilizar la plantilla *excelNewtonRaphson.xls* para resolver cualquier ecuación de una sola variable. Requiere que se ingrese $\frac{f(x)}{f'(x)}$ en la celda C3. Para el ejemplo 20.1-3, ingresamos

$$=(72*A3^3 - 234*A3^2 + 241*A3 - 78)/(216*A3^2 - 468*A3 + 241)$$

La variable x se reemplaza con A3. La plantilla permite establecer un límite de tolerancia Δ , el cual especifica la diferencia permisible entre x_k y x_{k+1} que señala la terminación de las iteraciones. Se le pide que utilice puntos iniciales diferentes, x_0 , para que tenga una idea de cómo funciona el método.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1B

1. Use la plantilla *NewtonRaphson.xls* para resolver el problema 1(c), conjunto 20.1a.
2. Resuelva el problema 2(b), conjunto 20.1a, por medio del método de Newton-Raphson.

20.2 PROBLEMAS RESTRINGIDOS

Esta sección se ocupa de la optimización de funciones continuas restringidas. La sección 20.2.1 presenta el caso de restricciones de igualdad, y la sección 20.2.2 se ocupa de las restricciones de desigualdad. La presentación en la sección 20.2.1 se cubre en su mayor parte en Beightler and Associates (1979, págs. 45-55).

20.2.1 Restricciones de igualdad

Esta sección presenta dos métodos: el **Jacobiano** y el **Lagrangiano**. El método Lagrangiano se puede desarrollar lógicamente a partir del Jacobiano. Esta relación proporciona una interpretación interesante económica del método Lagrangiano.

Método de derivadas restringidas (Jacobiano) Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$$

Las funciones $f(\mathbf{X})$ y $g(\mathbf{X})$, $i = 1, 2, \dots, m$, son dos veces continuamente diferenciables.

La idea de utilizar derivadas restringidas es desarrollar una expresión de forma cerrada para las primeras derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ en todos los puntos que satisfacen $g(\mathbf{X}) = 0$. Los puntos estacionarios correspondientes se identifican como los puntos donde estas derivadas parciales se desvanezcan. De este modo, las condiciones de suficiencia presentadas en la sección 20.1 pueden utilizarse para verificar la identidad de los puntos estacionarios.

Para aclarar el concepto propuesto, considere $f(x_1, x_2)$ ilustrada en la figura 20.4. Esta función se tiene que minimizar sujeta a la restricción

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 - b = 0$$

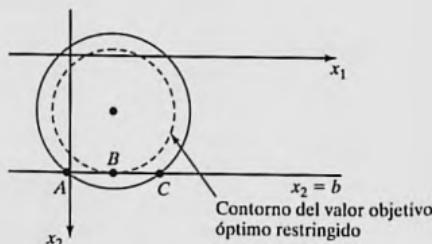
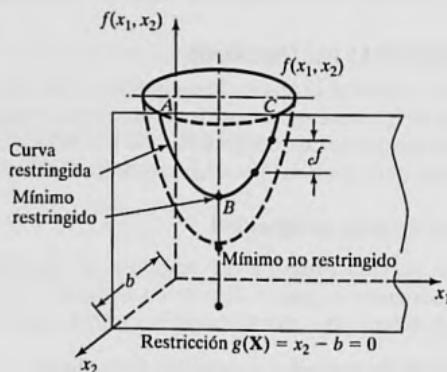
donde b es una constante. En la figura 20.4, la curva designada por los tres puntos A , B y C representa los valores de $f(x_1, x_2)$ que satisfacen la restricción dada. El método de derivadas restringidas define el gradiente de $f(x_1, x_2)$ en cualquier punto de la curva ABC . El punto B donde la derivada restringida se desvanece es un punto estacionario para el problema restringido.

Ahora se desarrolla el método matemáticamente. De acuerdo con el teorema de Taylor, para $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$ en la vecindad factible de \mathbf{X} , tenemos

$$f(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

FIGURA 20.4

Demostración de la idea del método Jacobiano



y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

A medida que $\Delta x_j \rightarrow 0$, las ecuaciones se reducen a

$$\partial f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X}$$

y

$$\partial g(\mathbf{X}) = \nabla g(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X}$$

Para factibilidad, debemos tener $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $\partial \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Por consiguiente

$$\partial f(\mathbf{X}) - \nabla f(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\nabla g(\mathbf{X}) \partial \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Así se obtienen $(m + 1)$ ecuaciones en $(n + 1)$ incógnitas, $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial \mathbf{X}$. Observe que si $\partial f(\mathbf{X})$ es un variable dependiente cuyo valor se determina una vez que se conoce $\partial \mathbf{X}$. Esto significa que, de hecho, tenemos m ecuaciones en n incógnitas.

Si $m > n$, al menos $(m - n)$ ecuaciones son redundantes. Si se elimina la redundancia, el sistema se reduce a $m \leq n$. Si $m = n$ la solución es $\partial \mathbf{X} = \mathbf{0}$, y \mathbf{X} no tiene ninguna vecindad factible, lo que significa que el espacio de soluciones se compone de sólo un punto. El caso restante ($m < n$) es más elaborado.

Definamos

$$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

de modo que

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-m})$$

Los vectores \mathbf{Y} y \mathbf{Z} representan las variables *dependientes* e *independientes*, respectivamente. Rescribiendo los vectores gradiente de f y g en función de \mathbf{Y} y \mathbf{Z} , obtenemos

$$\nabla f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} f, \nabla_{\mathbf{Z}} f)$$

$$\nabla g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} g, \nabla_{\mathbf{Z}} g)$$

Definamos

$$\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{Y}} g = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Y}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Y}} g_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{Z}} g = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Z}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Z}} g_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}_{m \times m}$ se conoce como la **matriz Jacobiana** y $\mathbf{C}_{m \times m}$ como la **matriz de control**. Se supone que la Jacobiana \mathbf{J} es no singular. Esto siempre es posible debido a que las m ecuaciones dadas son independientes por definición. Los componentes del vector \mathbf{Y} deben seleccionarse por lo tanto, de modo que \mathbf{J} sea no singular.

El conjunto original de ecuaciones en $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial \mathbf{X}$ se puede escribir como

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f \partial \mathbf{Z}$$

y

$$\mathbf{J} \partial \mathbf{Y} = -\mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Dado que \mathbf{J} es no singular, se deduce que

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Sustituyendo $\partial \mathbf{Y}$ en la ecuación para $\partial f(\mathbf{X})$ se obtiene ∂f como una función de $\partial \mathbf{Z}$, es decir,

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}) \partial \mathbf{Z}$$

Según esta ecuación, la derivada restringida con respecto al vector independiente \mathbf{Z} es

$$\nabla_c f = \frac{\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{\partial_c \mathbf{Z}} = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}$$

donde $\nabla_c f$ es el vector **gradiente restringido** de f con respecto a \mathbf{Z} . Por lo tanto $\nabla_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ debe ser nulo en los puntos estacionarios.

Las condiciones de suficiencia son similares a las desarrolladas en la sección 20.1. La matriz Hessiana (restringida) corresponde al vector independiente \mathbf{Z} , y los elementos de la matriz Hessiana deben ser las segundas derivadas *restringidas*.

Ejemplo 20.2-1

Considere el siguiente problema:

$$f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_3^2$$

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1x_3 + 2x_2 + x_2^2 - 11 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 14 = 0$$

Dado el punto factible $\mathbf{X}^0 = (1, 2, 3)$, deseamos estudiar la variación de $f (= \partial_c f)$ en la vecindad factible de \mathbf{X}^0 .

Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{Z} = x_2$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (2x_1 + 5x_3^2, 10x_1x_3)$$

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que tenemos que estimar $\partial_c f$ en la vecindad factible del punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$, dado un pequeño cambio $\partial x_2 = .01$ de la variable independiente x_2 . Tenemos

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{6}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}$$

De ahí que el valor incremental de f restringida se da como

$$\partial_c f = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}) \partial \mathbf{Z} = \left(6(2) - (47, 30) \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix} \right) \partial x_2 = -46.01 \partial x_2$$

Especificando el valor de ∂x_2 para la variable *independiente* x_2 , los valores factibles de ∂x_1 y ∂x_3 se determinan para las variables dependientes x_1 y x_3 aplicando la fórmula

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Por lo tanto, para $\partial x_2 = .01$,

$$\begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial x_2 = \begin{pmatrix} -.0283 \\ .0250 \end{pmatrix}$$

Ahora comparamos el valor de $\partial_c f$ antes calculado con la diferencia $f(\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0)$, dada $\partial x_2 = .01$.

$$\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X} = (1 - .0283, 2 + .01, 3 + .025) = (.9717, 2.01, 3.025)$$

Se obtiene

$$f(\mathbf{X}_0) = 58, f(\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}) = 57.523$$

o

$$f(\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) = -.477$$

La cantidad $-.477$ se compara favorablemente con $\partial_c f = -46.01 \partial x_2 = -.4601$. La diferencia entre los dos valores es el resultado de la aproximación lineal al calcular $\partial_c f$ en \mathbf{X}_0 .

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2A

1. Consideré el ejemplo 20.2-1.

- (a) Calcule $\partial_c f$ por medio de los dos métodos presentados, utilizando $\partial x_2 = .001$ en lugar de $\partial x_2 = .01$. ¿Se hace el efecto de la aproximación lineal más insignificante con la reducción del valor de ∂x_2 ?
- *(b) Especifique una relación entre los elementos de $\partial \mathbf{X} = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)$ en el punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$ que mantendrá factible al punto $\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}$.
- (c) Si $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = x_1$, ¿cuál es el valor de ∂x_1 que producirá el mismo valor de $\partial_c f$ dado en el ejemplo?

Ejemplo 20.2-2

Este ejemplo ilustra el uso de derivadas restringidas. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

Determinaremos los puntos extremos restringidos como sigue. Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_2) \text{ y } \mathbf{Z} = x_3$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2), \quad \nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \nabla_c f &= \frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} = 2x_3 - (2x_1, 2x_2) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Las ecuaciones para determinar los puntos estacionarios se dan por lo tanto como

$$\nabla_c f = 0$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 0$$

o

$$\begin{pmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\mathbf{X}_0 \approx (.81, .35, .28)$$

La identidad de este punto estacionario se verifica mediante la condición de suficiencia. Dado que x_3 es la variable independiente, de $\nabla_c f$ se desprende que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c x_3^2} = \frac{10}{3} \left(\frac{dx_1}{dx_3} \right) - \frac{28}{3} \left(\frac{dx_2}{dx_3} \right) + 2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{28}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} + 2$$

Por el método Jacobiano,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} = -J^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

La sustitución da $\frac{\partial^2 f}{\partial c x_3^2} = \frac{460}{9} > 0$. De ahí que, \mathbf{X}_0 sea el punto mínimo.

Análisis de sensibilidad en el método Jacobiano. El método Jacobiano se puede utilizar para estudiar el efecto de pequeños cambios en el lado derecho de las restricciones en el valor óptimo de f . Específicamente, ¿cuál es el efecto de cambiar $g_i(\mathbf{X}) = 0$ a $g_i(\mathbf{X}) = \partial g_i$ en el valor de f ? Este tipo de investigación se llama **análisis de sensibilidad** y es similar al realizado en la programación lineal (vea los capítulos 3 y 4). Sin embargo, el análisis de sensibilidad en programación no lineal es válido sólo en la pequeña proximidad del punto extremo. El desarrollo será útil al estudiar el método Lagrangiano.

Anteriormente demostramos que

$$\begin{aligned}\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \nabla_{\mathbf{Y}} f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f \partial \mathbf{Z} \\ \partial \mathbf{g} &= \mathbf{J} \partial \mathbf{Y} + \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}\end{aligned}$$

Dada $\partial \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\partial \mathbf{Y} = \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Sustituyendo en la ecuación para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se obtiene

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g} + \nabla_c f \partial \mathbf{Z}$$

donde

$$\nabla_c f = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}$$

como ya antes se definió. La expresión para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se puede utilizar para estudiar la variación de f en la vecindad factible de un punto factible \mathbf{X}_0 producida por los pequeños cambios $\partial \mathbf{g}$ y $\partial \mathbf{Z}$.

En el punto extremo (de hecho en cualquier punto estacionario) $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$, el gradiente restringido $\nabla_c f$ debe desvanecerse. Por lo tanto

$$\partial f(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1} \partial \mathbf{g}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}} = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1}$$

El efecto del pequeño cambio ∂g en el valor óptimo de f se puede estudiar evaluando la razón de cambio de f con respecto a g . Por lo común, estas razones se conocen como **coeficientes de sensibilidad**.

Ejemplo 20.2-3

Consideré el mismo problema del ejemplo 20.2-2. $\mathbf{X}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (.81, .35, .28)$ da el punto óptimo. Dado $\mathbf{Y}_0 = (x_{01}, x_{02})$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{Y}_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_{01}, 2x_{02}) = (1.62, .70)$$

Por consiguiente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g_1}, \frac{\partial f}{\partial g_2} \right) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1} = (1.62, .70) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (.0876, .3067)$$

Esto quiere decir que para $\partial g_1 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .0867. Asimismo, para $\partial g_2 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .3067.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2B

- Suponga que el ejemplo 20.2-2 se resuelve de la siguiente manera. Primero, utilice las restricciones para expresar x_1 y x_2 en función de x_3 ; luego utilice las ecuaciones resultantes para expresar la función objetivo sólo en función de x_3 . Calculando la derivada de la nueva función objetivo con respecto a x_3 , podemos determinar los puntos de máximos y mínimos.
 - ¿Será diferente la derivada de la nueva función objetivo (expresada en función de x_3) de la obtenida por medio del método Jacobiano?
 - ¿Cómo difiere el método sugerido del método Jacobiano?
- Aplique el método Jacobiano al ejemplo 20.2-1 seleccionando $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = (x_1)$.
- Resuelva por medio del método Jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

sujeto a

$$\prod_{i=1}^n x_i = C$$

donde C es una constante positiva. Suponga que el lado derecho de la restricción se cambia a $C + \delta$, donde δ es una pequeña cantidad positiva. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de f .

- Resuelva por medio del método Jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) = x_1x_2 - 10 = 0$$

- (a) Encuentre el cambio del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$ si $x_1x_2 = 9.99$ = 0 reemplaza a la restricción.
- (b) Encuentre el cambio del valor de $f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible (2,5), dado que $x_1x_2 = 9.99$ y $\partial x_1 = .01$.

5. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_3^2 - 7 = 0$$

Aplique el método Jacobiano para hallar $\partial f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible (1,1,1). Suponga que $\partial g_1 = -.01$, $\partial g_2 = .02$ y $\partial x_1 = .01$ se especifican en esta vecindad.

6. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

- (a) Demuestre que seleccionando x_3 y x_4 como variables independientes, el método Jacobiano no proporciona una solución ni establece la razón.
- *(b) Resuelva el problema utilizando x_1 y x_3 como variables independientes, y aplique la condición de suficiencia para determinar el tipo de punto estacionario resultante.
- (c) Determine los coeficientes de sensibilidad, dada la solución en (b).

Método Lagrangiano. En el método Jacobiano, si el vector λ representa los coeficientes de sensibilidad, es decir

$$\lambda = \nabla_{\mathbf{Y}_0} \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

Por lo tanto,

$$\partial f - \lambda \partial \mathbf{g} = 0$$

Esta ecuación satisface las condiciones necesarias para puntos estacionarios porque $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$ se calcula de modo que $\nabla_c f = \mathbf{0}$. Una forma más conveniente para representar estas ecuaciones es calcular sus derivadas parciales con respecto a todas las x_j . Esto da por resultado

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f - \lambda \mathbf{g}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Las ecuaciones resultantes junto con la ecuaciones de restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ producen los valores factibles de \mathbf{X} y λ que satisfacen las condiciones *necesarias* para los puntos estacionarios.

El procedimiento define el *método Lagrangiano* para identificar los puntos estacionarios de problemas de optimización con restricciones de *igualdad*. Sea

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) - \lambda g(\mathbf{X})$$

La función L se llama **función Lagrangiana** y los elementos del vector λ constituyen los **multiplicadores Lagrange**. Por definición, estos multiplicadores tienen la misma interpretación que los coeficientes de sensibilidad del método Jacobiano.

Las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = 0$$

proporcionan las condiciones necesarias para determinar los puntos estacionarios de $f(\mathbf{X})$ sujeta a $g(\mathbf{X}) = 0$. Existen condiciones de suficiencia para el método Lagrangiano, pero en general son difíciles de calcular.

Ejemplo 20.2-4

Considere el problema del ejemplo 20.2-2. La función Lagrangiana es

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

Resultan las siguientes condiciones necesarias:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas produce

$$\mathbf{X}_0 = (x_1, x_2, x_3) = (.8043, .3478, .2826)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (.0870, .3043)$$

Esta solución combina los resultados de los ejemplos 20.2-2 y 20.2-3. Los valores de los multiplicadores **Lagrange**, dados por el vector λ , son iguales a los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el ejemplo 20.2-3. El resultado muestra que estos coeficientes son independientes de la selección específica del vector \mathbf{Y} dependiente en el método Jacobiano.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2C

1. Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante los métodos Jacobiano y Lagrangiano:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 3x_1 + x_2 + x_4 - 9 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- *2. Determine la solución óptima del problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0$$

Suponga que $g_1(\mathbf{X}) = .01$ y $g_2(\mathbf{X}) = .02$. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$.

3. Resuelva el problema 6, conjunto 20.2b, por medio del método Lagrangiano, y verifique que los valores de los multiplicadores de Lagrange son los mismos que los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el problema 6, conjunto 20.2b.

20.2.2 Restricciones de desigualdad. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)¹

Esta sección amplía el método Lagrangiano a problemas con restricciones de desigualdad. La contribución principal de la sección es el desarrollo de las condiciones *necesarias* de Karush-Kuhn-Tucker para determinar los puntos estacionarios. Estas condiciones también son suficientes conforme a ciertas reglas que más adelante se formularán.

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) \leq 0$$

Las restricciones de desigualdad se pueden convertir en ecuaciones por medio de variables de holgura *no negativas*. Sea $S_i^2 (\geq 0)$ la cantidad de holgura agregada a la restricción i -ésima $g_i(\mathbf{X}) \leq 0$ y definamos

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)^T, \quad \mathbf{S}^2 = (S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2)^T$$

¹W. Karush fue el primero en desarrollar las condiciones KKT en 1939 como parte de una tesis de maestría en la Universidad de Chicago. Las mismas condiciones fueron desarrolladas de forma independiente en 1951 por W. Kuhn y A. Tucker.

donde m es el total de restricciones de desigualdad. La función Lagrangiana es por consiguiente

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} [\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2]$$

Dadas las restricciones $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$, una condición necesaria para optimalidad es que $\boldsymbol{\lambda}$ sea no negativo (no positivo) para problemas de maximización (minimización). El resultado se justifica observando que el vector $\boldsymbol{\lambda}$ mide la razón de variación de f con respecto a \mathbf{g} , es decir,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

En el caso de maximización, a medida que se incrementa el lado derecho de la restricción $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$ desde 0 hasta el vector $\partial \mathbf{g}$, el espacio de soluciones se hace menos restringido y por consiguiente f no puede disminuir, lo que significa que $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Igualmente para minimización, a medida que se incrementa el lado derecho de las restricciones, f no puede incrementarse, lo cual implica que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Si las restricciones son igualdades, esto es, $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{\lambda}$ se hace no restringido en cuanto a signo (vea el problema 2, conjunto 20.2d).

Las restricciones en $\boldsymbol{\lambda}$ se mantienen como parte de las condiciones KKT necesarias. Ahora se desarrollarán las condiciones restantes.

Calculando las derivadas parciales de L con respecto a \mathbf{X} , \mathbf{S} y $\boldsymbol{\lambda}$, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -2\lambda_i S_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2) = \mathbf{0}$$

El segundo conjunto de ecuaciones revela los siguientes resultados:

- Si $\lambda_i \neq 0$, entonces $S_i^2 = 0$. Este resultado indica que el recurso correspondiente está escaso (es decir, agotado por completo).
- Si $S_i^2 > 0$, entonces $\lambda_i = 0$. Esto indica que el recurso i no está escaso y, por consiguiente, no tiene ningún efecto en el valor de f (es decir, $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial g_i} = 0$).

Del segundo y tercer conjuntos de ecuaciones, obtenemos

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Esta nueva condición repite en esencia el argumento anterior, porque si $\lambda_i > 0$, $g_i(\mathbf{X}) = 0$ o $S_i^2 = 0$; y si $g_i(\mathbf{X}) < 0$, $S_i^2 > 0$, y $\lambda_i = 0$.

Las condiciones KKT necesarias para problemas de maximización se resumen como sigue:

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

TABLA 20.1 Suficiencia de las condiciones KKT

| Sentido de la optimización | Condiciones requeridas | |
|----------------------------|------------------------|-----------------------|
| | Función objetivo | Espacio de soluciones |
| Maximización | Cóncava | Conjunto convexo |
| Minimización | Convexa | Conjunto convexo |

Estas condiciones también aplican al caso de minimización, excepto que λ debe ser no positivo (¡compruébelo!). Tanto en maximización como en minimización, los multiplicadores de Lagrange correspondientes a restricciones de igualdad no están restringidos en cuanto a signo.

Suficiencia de las condiciones KKT. Las condiciones KKT necesarias también son suficientes si la función objetivo y el espacio de soluciones satisfacen las condiciones que aparecen en la tabla 20.1.

Es más fácil verificar que una función sea convexa o cóncava que demostrar que un espacio de soluciones es convexo. Por esta razón, ofrecemos un *subconjunto* de las condiciones de suficiencia, que, aunque no tan general como los de la Tabla 20.1, son más fáciles de aplicar en la práctica. Para proporcionar estas condiciones, definimos los problemas no lineales generalizados como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$g_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i = r + 1, \dots, p$$

$$g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = p + 1, \dots, m$$

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^r \lambda_i [g_i(\mathbf{X}) + S_i^2] - \sum_{i=r+1}^p \lambda_i [g_i(\mathbf{X}) - S_i^2] - \sum_{i=p+1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{X})$$

El parámetro λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción i . Las condiciones para establecer la suficiencia de las condiciones KKT se resumen en la tabla 20.2.

TABLA 20.2 Subconjunto de condiciones KKT suficientes

| Sentido de la optimización | $f(\mathbf{X})$ | Condiciones requeridas | | |
|----------------------------|-----------------|---|---|---|
| | | $g_i(\mathbf{X})$ | λ_i | |
| Maximización | Cóncava | $\begin{cases} \text{Convexa} \\ \text{Cóncava} \\ \text{Lineal} \end{cases}$ | $\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{No restringida} \end{cases}$ | $\begin{cases} (1 \leq i \leq r) \\ (r + 1 \leq i \leq p) \\ (p + 1 \leq i \leq m) \end{cases}$ |
| | | | | |
| Minimización | Convexa | $\begin{cases} \text{Convexa} \\ \text{Cóncava} \\ \text{Lineal} \end{cases}$ | $\begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \\ \text{No restringida} \end{cases}$ | $\begin{cases} (1 \leq i \leq r) \\ (r + 1 \leq i \leq p) \\ (p + 1 \leq i \leq m) \end{cases}$ |
| | | | | |

Las condiciones que aparecen en la tabla 20.2 son un subconjunto de las condiciones que aparecen en la tabla 20.1 porque un espacio de soluciones puede ser convexo sin que satisfaga las condiciones que aparecen en la tabla 20.2.

La tabla 20.2 es válida porque las condiciones dadas producen una función Lagrangiana $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ en el caso de maximización y convexa $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda})$ en el caso de minimización. Este resultado se verifica observando que si $g(x)$ es convexa, entonces $\lambda_i g_i(x)$ es convexa si $\lambda_i \geq 0$ y cóncava si $\lambda_i \leq 0$. Se pueden establecer interpretaciones similares para todas las condiciones restantes. Observe que una función lineal es tanto convexa como cóncava. Además, si una función f es cóncava, entonces $(-f)$ es convexa, y viceversa.

Ejemplo 20.2-5

Considere el siguiente problema de minimización:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + x_3 - 2 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{X}) = 1 - x_1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{X}) = 2 - x_2 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{X}) = -x_3 \leq 0$$

Éste es un problema de minimización, de ahí que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Las condiciones KKT se dan por lo tanto como

$$\begin{aligned} & (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \leq \mathbf{0} \\ & (2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ & \lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \dots = \lambda_5 g_5 = 0 \\ & \mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Estas condiciones se reducen a

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \leq 0$$

$$2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 = 0$$

$$2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0$$

$$\lambda_2(x_1 + x_3 - 2) = 0$$

$$\lambda_3(1 - x_1) = 0$$

$$\lambda_4(2 - x_2) = 0$$

$$\lambda_5x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0$$

La solución es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4$. Debido a que tanto $f(\mathbf{X})$ como el espacio de soluciones $g(\mathbf{X}) \leq 0$ son convexos, $L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{l})$ debe ser convexa, y el punto estacionario resultante da un mínimo restringido global. Las condiciones KKT son fundamentales para el desarrollo de los algoritmos de programación no lineal del capítulo 21.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2D

1. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) \geq 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son las mismas que en la sección 20.2.2, excepto que $\lambda \leq 0$.

2. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) = 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \lambda \nabla g(\mathbf{X}) = 0$$

$$g(\mathbf{X}) = 0$$

λ sin restricción de signo

3. Escriba las condiciones KKT necesarias para los siguientes problemas.

(a) Maximizar $f(\mathbf{X}) = x_1^3 - x_2^2 + x_1x_3^2$

sujeto a

$$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$$

$$5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Minimizar $f(\mathbf{X}) = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$

sujeto a

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 \leq 10$$

$$x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$$

4. Considere el problema

Maximizar $f(\mathbf{X})$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Dado que $f(\mathbf{X})$ es cóncava y $g_i(\mathbf{X})(i=1,2,\dots,m)$ es una función *lineal*, demuestre que las condiciones KKT necesarias también son suficientes. ¿Es cierto este resultado si $g_i(\mathbf{X})$ es una función *no lineal* convexa para todas las i ? ¿Por qué?

5. Considere el problema

Maximizar $f(\mathbf{X})$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) \geq 0, g_2(\mathbf{X}) = 0, g_3(\mathbf{X}) \leq 0$$

Desarrolle las condiciones KKT, y proporcione las estipulaciones conforme a las cuales las condiciones son suficientes.

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., H. Sherali, y C. Shetty, *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 2006.
- Beightler, C., D. Phillips, y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, NJ, 1979.
- Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.

CAPÍTULO 21

Algoritmos de programación no lineal

21.1 ALGORITMOS NO RESTRINGIDOS

Esta sección presenta dos tipos de algoritmos para el problema no restringido: de *búsqueda directa* y del *gradiente*.

21.1.1 Método de búsqueda directa

Los métodos de búsqueda directa se aplican sobre todo a funciones de una sola variable estrictamente unimodales. Aunque el caso parezca trivial, la sección 21.1.2 demuestra que la optimización de funciones de una sola variable es clave en el desarrollo del algoritmo general de múltiples variables.

La idea de los métodos de búsqueda directa es identificar el **intervalo de incertidumbre** que se sabe incluye el punto de solución óptima. El procedimiento localiza el óptimo estrechando de manera interactiva el intervalo de incertidumbre a un nivel de exactitud deseada.

En esta sección se presentan dos algoritmos de búsqueda estrechamente relacionados; el **dicótomo** y el de la **sección dorada**. Ambos buscan la maximización de una función unimodal $f(x)$ a lo largo del intervalo $a \leq x \leq b$ que incluye el punto óptimo x^* . Los dos métodos se inician con el intervalo inicial de incertidumbre $I_0 = (a, b)$.

Paso general i. Sea $I_{i-1} = (x_L, x_R)$ el intervalo actual de incertidumbre (en la iteración 0, $x_L = a$ y $x_R = b$). La siguiente tabla muestra cómo se determinan x_1 y x_2 :

| Método dicótomo | Método de la sección dorada |
|---|--|
| $x_1 = \frac{1}{2}(x_R + x_L - \Delta)$ | $x_1 = x_R - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$ |
| $x_2 = \frac{1}{2}(x_R + x_L + \Delta)$ | $x_2 = x_L + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$ |

La selección de x_1 y x_2 garantiza que $x_L < x_1 < x_2 < x_R$.

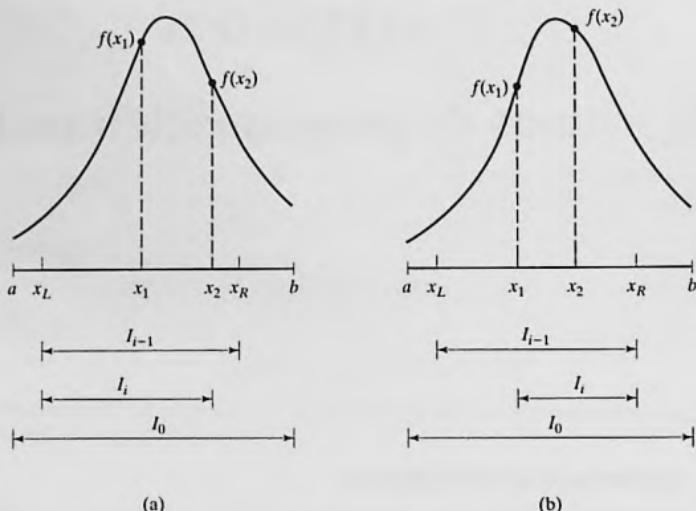


FIGURA 21.1

Ilustración del paso general de los métodos de búsqueda, dicótomo y de la sección dorada

El siguiente intervalo de incertidumbre, I_i , se determina de la siguiente manera:

1. Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces $x_L < x^* < x_2$. Sea $x_R = x_2$ y establezca $I_i = (x_L, x_2)$ [vea la figura 21.1(a)].
2. Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_R$. Sea $x_L = x_1$ y establezca $I_i = (x_1, x_R)$ [vea la figura 21.1(b)].
3. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_2$. Sea $x_L = x_1$ y $x_R = x_2$; establezca $I_i = (x_1, x_2)$.

La manera de determinar x_1 y x_2 garantiza que $I_{i+1} < I_i$, como se demostrará en breve. El algoritmo termina en la iteración k si $I_k \leq \Delta$, donde Δ es un nivel de exactitud especificado por el usuario.

En el método dicótomo, los valores x_1 y x_2 se sitúan simétricamente alrededor del punto medio del intervalo de incertidumbre actual. Esto significa que

$$I_{i+1} = .5(I_i + \Delta)$$

La aplicación repetida del algoritmo garantiza que la longitud del intervalo de incertidumbre se aproxime a la exactitud deseada, Δ .

En el método de la sección dorada, la idea es más elaborada. Observamos que cada intervalo del método dicótomo requiere calcular los dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, pero al final se descarta uno de ellos. Lo que el método de la sección dorada propone es ahorrar cálculos al reutilizar el valor desecharido en la iteración inmediatamente subsiguiente.

Definamos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_R - \alpha(x_R - x_L) \\ x_2 &= x_L + \alpha(x_R - x_L) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \end{array} \right.$$

Entonces el intervalo de incertidumbre I_i en la iteración i es igual a (x_L, x_2) o (x_1, x_R) . Consideré el caso $I_i = (x_L, x_2)$, lo que significa que x_1 está incluida en I_i . En la iteración $i+1$, seleccionamos x_2 igual a x_1 en la iteración i , lo cual conduce a la siguiente ecuación:

$$x_2(\text{iteración } i+1) = x_1(\text{iteración } i)$$

La sustitución produce

$$x_L + \alpha[x_2(\text{iteración } i) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

o

$$x_L + \alpha[x_L + \alpha(x_R - x_L) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

la cual se simplifica como

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Esta ecuación da por resultado $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Se selecciona la raíz positiva $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx .681$ porque $0 < \alpha < 1$.

El diseño de los cálculos de la sección dorada garantiza una reducción α en los intervalos de incertidumbre sucesivos, es decir

$$I_{i+1} = \alpha I_i$$

El método de la sección dorada converge con más rapidez que el método dicótomo porque, en éste, el estrechamiento del intervalo de incertidumbre se desacelera apreciablemente a medida que $I \rightarrow \Delta$. Además, el método de la sección dorada requiere la mitad de los cálculos porque recicla un conjunto de cálculos de iteración inmediata anterior.

Ejemplo 21.1-1

$$\text{Maximizar } f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(-x + 20), & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El valor máximo de $f(x)$ ocurre en $x = 2$. La tabla siguiente demuestra los cálculos para las iteraciones 1 y 2 siguiendo los métodos dicótomo y de la sección dorada, con $\Delta = .1$. Continuando

| Método dicótomo | Método de la sección dorada |
|--|---|
| <i>Iteración 1</i> | <i>Iteración 1</i> |
| $I_0 = (0, 3) = (x_L, x_R)$ | $I_0 = (0, 3) = (x_L, x_R)$ |
| $x_1 = 0 + .5(3 - 0 - .1) = 1.45, f(x_1) = 4.35$ | $x_1 = 3 - .618(3 - 0) = 1.146, f(x_1) = 3.438$ |
| $x_2 = 0 + .5(3 - 0 + .1) = 1.55, f(x_2) = 4.65$ | $x_2 = 0 + .618(3 - 0) = 1.854, f(x_2) = 5.562$ |
| $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.45, I_1 = (1.45, 3)$ | $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.146, I_1 = (1.146, 3)$ |
| <i>Iteración 2</i> | <i>Iteración 2</i> |
| $I_1 = (1.45, 3) = (x_L, x_R)$ | $I_1 = (1.146, 3) = (x_L, x_R)$ |
| $x_1 = 1.45 + .5(3 - 1.45 - .1) = 2.175, f(x_1) = 5.942$ | $x_1 = x_2 \text{ en iteración } 0 = 1.854, f(x_1) = 5.562$ |
| $x_2 = \frac{3+1.45+.1}{2} = 2.275, f(x_2) = 5.908$ | $x_2 = 1.146 + .618(3 - 1.146) = 2.292, f(x_2) = 5.903$ |
| $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_R = 2.275, I_2 = (1.45, 2.275)$ | $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.854, I_2 = (1.854, 3)$ |

de la misma manera, a fin de cuentas el intervalo de incertidumbre se estrechará a la tolerancia Δ deseada.

Momento de Excel

La plantilla *excelDiGold.xls* maneja ambos métodos ingresando la letra X en D5 (dicótomo) o F5 (sección dorada). Los datos de entrada incluyen $f(x)$, a , b y Δ . La función $f(x)$ se ingresa en la celda E3 como

$$=IF(C3<=2, 3*C3, (-C3+20)/3)$$

La celda C3 desempeña el papel de x en $f(x)$.

La figura 21.2 compara los dos métodos. El método de la sección dorada requiere menos de la mitad de las iteraciones del método dicótomo, además la mitad de los cálculos en cada iteración.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1A

- Use la plantilla *excelDiGold.xls* para resolver el ejemplo 21.1-1 suponiendo que $\Delta = .01$. Compare la cantidad de cálculos y la exactitud de los resultados con los de la figura 21.2.
- Determine el máximo de cada una de las siguientes funciones mediante la búsqueda dicótoma. Suponga que $\Delta = .05$.

(a) $f(x) = \frac{1}{|(x - 3)|^3}, \quad 2 \leq x \leq 4$

(b) $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

(c) $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x, \quad 1.5 \leq x \leq 2.5$

(d) $f(x) = -(x - 3)^2, \quad 2 \leq x \leq 4$

(e) $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

| | A | B | C | D | E | F |
|----|--|---------------------|--------------|----------|----------------------------|----------|
| 1 | Dichotomous/Golden Section Search | | | | | |
| 2 | Input data: Type f(C3) in E3, where C3 represents x in f(x) | | | | | |
| 3 | $\Delta =$ | 0.1 | | | #VALUE! | |
| 4 | Minimum x = | 0 | Maximum x = | 3 | | |
| 5 | Solution: | Enter x to select > | Dichotomous: | X | GoldenSection: | |
| 6 | $x^* =$ | 2.04001 | $f(x^*) =$ | 5.97002 | | |
| 7 | Calculations: | | | | Perform calculation | |
| 8 | x_L | x_R | x_1 | x_2 | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ |
| 9 | 0.000000 | 3.000000 | 1.450000 | 1.550000 | 4.350000 | 4.650000 |
| 10 | 1.450000 | 3.000000 | 2.175000 | 2.275000 | 5.941667 | 5.908333 |
| 11 | 1.450000 | 2.275000 | 1.812500 | 1.912500 | 5.437500 | 5.737500 |
| 12 | 1.812500 | 2.275000 | 1.993750 | 2.093750 | 5.981250 | 5.968750 |
| 13 | 1.812500 | 2.093750 | 1.903125 | 2.003125 | 5.709375 | 5.998958 |
| 14 | 1.903125 | 2.093750 | 1.948438 | 2.048438 | 5.845313 | 5.983654 |
| 15 | 1.948438 | 2.093750 | 1.971094 | 2.071094 | 5.913281 | 5.976302 |
| 16 | 1.971094 | 2.093750 | 1.982422 | 2.082422 | 5.947266 | 5.972526 |
| 17 | 1.982422 | 2.093750 | 1.988086 | 2.088086 | 5.964258 | 5.970638 |
| 18 | 1.988086 | 2.093750 | 1.990918 | 2.090918 | 5.972754 | 5.969694 |
| 19 | 1.988086 | 2.090918 | 1.989502 | 2.089502 | 5.968506 | 5.970166 |
| 20 | 1.989502 | 2.090918 | 1.990210 | 2.090210 | 5.970630 | 5.969930 |
| 21 | 1.989502 | 2.090210 | 1.989856 | 2.089856 | 5.969568 | 5.970048 |
| 22 | 1.989856 | 2.090210 | 1.990033 | 2.090033 | 5.970099 | 5.969989 |
| 23 | 1.989856 | 2.090033 | 1.989944 | 2.089944 | 5.969833 | 5.970019 |
| 24 | 1.989944 | 2.090033 | 1.989989 | 2.089989 | 5.969966 | 5.970004 |
| 25 | 1.989989 | 2.090033 | 1.990011 | 2.090011 | 5.970033 | 5.969996 |
| 26 | 1.989989 | 2.090011 | 1.990000 | 2.090000 | 5.969999 | 5.970000 |
| 27 | 1.990000 | 2.090011 | 1.990005 | 2.090005 | 5.970016 | 5.969998 |
| 28 | 1.990000 | 2.090005 | 1.990003 | 2.090003 | 5.970008 | 5.969999 |
| 5 | Solution: | Enter x to select > | Dichotomous: | | GoldenSection: | X |
| 6 | $x^* =$ | 2.00909 | $f(x^*) =$ | 5.99290 | | |
| 7 | Calculations: | | | | Perform calculation | |
| 8 | x_L | x_R | x_1 | x_2 | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ |
| 9 | 0.000000 | 3.000000 | 1.145898 | 1.854102 | 3.437694 | 5.562306 |
| 10 | 1.145898 | 3.000000 | 1.854102 | 2.291796 | 5.562306 | 5.902735 |
| 11 | 1.854102 | 3.000000 | 2.291796 | 2.562306 | 5.902735 | 5.812565 |
| 12 | 1.854102 | 2.562306 | 2.124612 | 2.291796 | 5.958463 | 5.902735 |
| 13 | 1.854102 | 2.291796 | 2.021286 | 2.124612 | 5.992905 | 5.958463 |
| 14 | 1.854102 | 2.124612 | 1.957428 | 2.021286 | 5.872283 | 5.992905 |
| 15 | 1.957428 | 2.124612 | 2.021286 | 2.060753 | 5.992905 | 5.979749 |
| 16 | 1.957428 | 2.060753 | 1.996894 | 2.021286 | 5.990683 | 5.992905 |
| 17 | 1.996894 | 2.060753 | 2.021286 | 2.036361 | 5.992905 | 5.987880 |

FIGURA 21.2

Resultados de los métodos dicótomo y de la sección dorada aplicados al ejemplo 21.1-1 obtenidos con Excel (archivo *excelDiGold.xls*)

21.1.2 Método del gradiente

Esta sección desarrolla un método para optimizar dos veces funciones continuamente diferenciables, llamado método del **ascenso más pronunciado** (o de mayor pendiente). La idea es generar puntos sucesivos en la dirección del gradiente de la función.¹ La ter-

¹El método de Newton-Raphson en la sección 20.1.2 también es un método de gradiente que localiza el óptimo de forma directa resolviendo las ecuaciones de condiciones necesarias.

minación del método de gradiente se da en el punto donde el vector gradiente se vuelve nulo. Ésta es la única condición necesaria para la optimalidad.

Suponga que $f(\mathbf{X})$ se maximiza. Sea \mathbf{X}_0 el punto inicial desde donde se inicia el procedimiento, y defina $\nabla f(\mathbf{X}_k)$ como el gradiente de f en el punto \mathbf{X}_k . La idea es determinar una ruta particular p a lo largo de la cual $\frac{\partial f}{\partial p}$ se maximice en un punto dado. Este resultado se logra si se seleccionan los puntos sucesivos \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} de modo que

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + r_k \nabla f(\mathbf{X}_k)$$

donde r_k es el **tamaño del paso óptimo** en \mathbf{X}_k .

El tamaño del paso se determina de modo que el siguiente punto \mathbf{X}_{k+1} conduzca al mejoramiento máximo de f . Esto equivale a determinar $r = r_k$ que maximiza la función

$$h(r) = f[\mathbf{X}_k + r \nabla f(\mathbf{X}_k)]$$

Debido a que $h(r)$ es una función de una sola variable, se puede utilizar el método de búsqueda de la sección 21.1.1 para determinar el óptimo, siempre que $h(r)$ sea unimodal.

El procedimiento propuesto termina cuando dos puntos de prueba sucesivos \mathbf{X}_k y \mathbf{X}_{k+1} son aproximadamente iguales. Esto equivale a tener $r_k \nabla f(\mathbf{X}_k) \approx 0$, o de forma equivalente $\nabla f(\mathbf{X}_k) \approx 0$.

Ejemplo 21.1-2

Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

El óptimo exacto ocurre en $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

El gradiente de f es

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

La naturaleza cuadrática de la función indica que los gradientes en dos puntos sucesivos son ortogonales (perpendiculares entre sí).

Supongamos que comenzamos en el punto inicial $\mathbf{X}_0 = (1, 1)$. La figura 21.3 muestra los puntos de solución sucesivos.

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (-2, 0)$$

El siguiente punto \mathbf{X}_1 se obtiene considerando

$$\mathbf{X} = (1, 1) + r(-2, 0) = (1 - 2r, 1)$$

Por lo tanto,

$$h(r) = f(1 - 2r, 1) = -2(1 - 2r)^2 + 2(1 - 2r) + 4$$

El tamaño óptimo del paso se obtiene aplicando las condiciones clásicas necesarias expuestas en el capítulo 20 (también se pueden utilizar los algoritmos de búsqueda dados en la sección 21.1.1 para determinar el óptimo). El valor máximo de $h(r)$ es $r_1 = \frac{1}{4}$, el cual da el siguiente punto de solución $\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

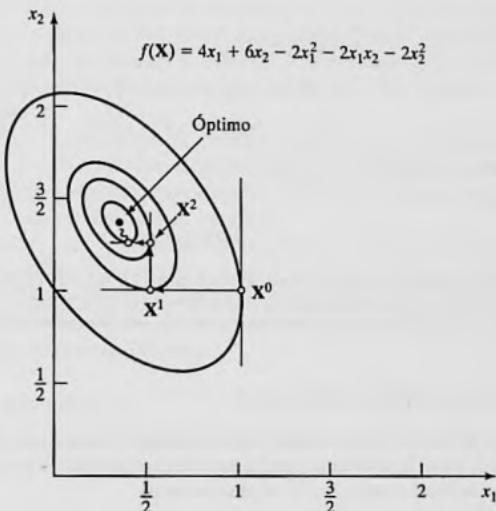


FIGURA 21.3

Maximización de $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ por el método del ascenso más pronunciado

Iteración 2

$$\nabla f(\mathbf{X}_1) = (0, 1)$$

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) + r(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1 + r\right)$$

$$h(r) = -2(1 + r)^2 + 5(1 + r) + \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, $r_2 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 3

$$\nabla f(\mathbf{X}_2) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) + r\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1-r}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

$$h(r) = -\frac{1}{2}(1 - r)^2 + \frac{3}{4}(1 - r) + \frac{35}{8}$$

Por consiguiente, $r_3 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_3 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 4

$$\nabla f(\mathbf{X}_3) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\mathbf{X} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right) + r\left(0, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{8}, \frac{5+r}{4}\right)$$

$$h(r) = -\frac{1}{8}(5 + r)^2 + \frac{21}{16}(5 + r) + \frac{39}{32}$$

Por lo tanto, $r_4 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_4 = \left(\frac{3}{8}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 5

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{X}_4) &= \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \\ \mathbf{X} &= \left(\frac{3}{8}, \frac{21}{16}\right) + r\left(-\frac{1}{8}, 0\right) = \left(\frac{3-r}{8}, \frac{21}{16}\right) \\ h(r) &= -\frac{1}{32}(3-r)^2 + \frac{11}{64}(3-r) + \frac{567}{128}\end{aligned}$$

Se obtiene $r_5 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_5 = \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 6

$$\nabla f(\mathbf{X}_5) = \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

El proceso se puede terminar en este punto porque $\nabla f(\mathbf{X}_5) \approx 0$. El punto *aproximado* máximo lo da $\mathbf{X}_5 = (.3438, 1.3125)$. El óptimo exacto es $\mathbf{X}^* = (.3333, 1.3333)$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1B

- *1. Demuestre que, por lo común, cuando se aplica el método de Newton-Raphson (sección 20.1.2) a una función cuadrática estrictamente cóncava convergerá en exactamente un paso. Aplique el método a la maximización de

$$f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

2. Realice cinco iteraciones para cada uno de los siguientes problemas con el método del descenso (ascenso) más pronunciado. Suponga que $\mathbf{X}^0 = 0$ en cada caso.

(a) $\min f(\mathbf{X}) = \min f(\mathbf{X}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)$

(b) $\max f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$
donde

$$\mathbf{c} = (1, 3, 5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) $\min f(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 + x_1^2 - x_1x_2$

21.2 ALGORITMOS RESTRINGIDOS

El problema de programación no lineal general restringido se define como

$$\text{Maximizar (o minimizar)} z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las condiciones de no negatividad $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, son parte de las restricciones. Incluso, al menos una de las funciones $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ es no lineal, y todas las funciones son continuamente diferenciables.

El comportamiento errático de las funciones no lineales impide el desarrollo de un solo algoritmo para el modelo no lineal general. Quizás el resultado más general aplicable al problema sean las condiciones KKT (sección 20.2.2). La tabla 20.2 muestra que las condiciones sólo son necesarias, a menos que $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ sean funciones de buen comportamiento.

Esta sección presenta varios algoritmos que se pueden clasificar en general como métodos *indirectos* y *directos*. Los métodos indirectos resuelven el problema no lineal valiéndose de uno o más programas *lineales* derivados del programa original. Los métodos directos se valen del programa original.

Los algoritmos indirectos presentados en esta sección incluyen las programaciones separable, cuadrática y estocástica. Los algoritmos directos incluyen el método de combinación lineal y un breve análisis del algoritmo SUMT, la técnica de maximización secuencial sin restricciones. En la lista de referencias al final del capítulo se hallan otras importantes técnicas no lineales.

21.2.1 Programación separable

Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es **separable** si se puede expresar como la suma de n funciones de una sola variable $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$, es decir,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

Por ejemplo, cualquier función lineal es separable. Por otra parte, la función

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 \operatorname{sen}(x_2 + x_3) + x_2 e^{x_3}$$

no es separable.

Algunas funciones no lineales (convolucionadas) se pueden hacer separables mediante sustituciones apropiadas. Considere, por ejemplo, el caso de maximizar $z = x_1 x_2$. Sea $y = x_1 x_2$, entonces $\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$, y el problema separable es

$$\text{Maximizar } z = y$$

sujeto a

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$$

La sustitución asume que x_1 y x_2 son variables *positivas* porque la función logarítmica es indefinida con valores no positivos. Podemos tener en cuenta el caso en que x_1 y x_2 pueden asumir valores cero por medio de las aproximaciones

$$w_1 = x_1 + \delta_1 > 0$$

$$w_2 = x_2 + \delta_2 > 0$$

Las constantes δ_1 y δ_2 son valores positivos muy pequeños.

Esta sección muestra cómo se puede obtener una solución aproximada de *cualquier* problema separable utilizando aproximación lineal y el método simplex de programación lineal. La función de una sola variable puede ser representada por una función lineal definida por intervalos por medio de programación entera combinada (capítulo 9). Suponga que $f(x)$ se representa de forma aproximada en el intervalo $[a, b]$,

y se define a_k , $k = 1, 2, \dots, K$, como el punto de ruptura k -ésimo sobre el eje x de modo que $a_1 < a_2 < \dots < a_K$. Los puntos a_1 y a_K coinciden con los puntos extremos a y b del intervalo designado. Por lo tanto, $f(x)$ se representa de forma aproximada como

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^K f(a_k) w_k$$

$$x = \sum_{k=1}^K a_k w_k$$

Los pesos no negativos w_k deben satisfacer la condición

$$\sum_{k=1}^K w_k = 1, w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, K$$

La programación entera combinada (o mixta) garantiza la validez de la aproximación al imponer dos condiciones adicionales:

1. A lo sumo dos w_k son positivos.
2. Si w_k es positivo, entonces sólo un w_{k-1} o w_{k+1} adyacente puede asumir un valor positivo.

Para demostrar cómo se satisfacen estas condiciones, considere el problema separable

$$\text{Maximizar (o minimizar)} z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Este problema se puede representar de forma aproximada por medio de un programa entero combinado como sigue. Sean²

$$\left. \begin{aligned} a_{jk} &= \text{punto de ruptura } k \text{ de la variable } x_j \\ w_{jk} &= \text{peso con punto de ruptura } k \text{ de la variable } x_j \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces el problema combinado equivalente es

$$\text{Maximizar (o minimizar)} z = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} f_j(a_{jk}) w_{jk}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{K_j} g_{jk}(a_{jk}) w_{jk} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq w_{j1} \leq y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

²Es más preciso reemplazar el índice k con k_j de modo que corresponda de forma única a la variable j . En este instante vamos a renunciar a la precisión matemática en favor de una notación más simple.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq w_{jk} \leq y_{j,k-1} + y_{jk}, \quad k = 2, 3, \dots, K_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 0 &\leq w_{jK_j} \leq y_{j,K_j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{k=1}^{K_j-1} y_{jk} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 \sum_{k=1}^{K_j} w_{jk} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 y_{jk} &= (0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Las variables en el problema de aproximación son w_{jk} y y_{jk} .

La formulación muestra cómo se puede resolver cualquier problema separable, en principio, mediante programación entera combinada. La dificultad es que las restricciones se incrementan con rapidez con la cantidad de puntos de ruptura. En particular, la factibilidad computacional del procedimiento es cuestionable porque no hay códigos de computadora consistentemente confiables para resolver grandes problemas de programación entera combinados.

Otro método para resolver el modelo de aproximación es el método simplex regular (capítulo 3) utilizando una **base restringida**. En este caso se eliminan las restricciones adicionales que implican y_{jk} . La base restringida modifica la condición de optimalidad del método simplex al seleccionar la variable de entrada w_j con la *mejor* ($z_{jk} - c_{jk}$) que no viole el requisito de adyacencia de las variables w con valores positivos. El proceso se repite hasta que se satisfaga la condición de optimalidad o hasta que sea imposible satisfacer la condición de base restringida, lo que ocurría primero.

El método de programación entera combinada da un óptimo global al problema aproximado, en tanto que el método de base restringida sólo puede garantizar un óptimo local. Además, en los dos métodos, la solución aproximada puede no ser factible para el problema original, en cuyo caso quizás sea necesario refinar la aproximación incrementando la cantidad de puntos de ruptura.

Ejemplo 21.2-1

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^4$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2^2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima exacta de este problema, obtenida por AMPL o Solver, es $x_1 = 0, x_2 = 2.1232$, y $z^* = 20.25$. Para demostrar cómo se utiliza el método de aproximación, considere las funciones separables

$$f_1(x_1) = x_1$$

$$f_2(x_2) = x_2^4$$

$$g_1(x_1) = 3x_1$$

$$g_2(x_2) = 2x_2^2$$

La variable x_1 no es aproximada porque las funciones $f_1(x_1)$ y $g_1(x_1)$ ya son lineales. Considerando $f_2(x_2)$ y $g_2(x_2)$, suponemos cuatro puntos de ruptura $a_{2k} = 0, 1, 2$ y 3 para $k = 1, 2, 3$ y 4 , respectivamente. Dado que $x_2 \leq 3$, entonces

| k | a_{2k} | $f_2(a_{2k}) = a_{2k}^4$ | $g_2(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$ |
|-----|----------|--------------------------|---------------------------|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 16 | 8 |
| 4 | 3 | 81 | 18 |

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &\approx w_{21}f_2(a_{21}) + w_{22}f_2(a_{22}) + w_{23}f_2(a_{23}) + w_{24}f_2(a_{24}) \\ &\approx 0w_{21} + 1w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24} = w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24} \end{aligned}$$

Asimismo,

$$g_2(x_2) \approx 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24}$$

El problema de aproximación es por lo tanto

$$\text{Maximizar } z = x_1 + w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24}$$

sujeto a

$$3x_1 + 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24} \leq 9$$

$$w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} = 1$$

$$x_1 \geq 0, w_{2k} \geq 0, k = 1, 2, 3, 4$$

Los valores de $w_{2k}, k = 1, 2, 3, 4$, deben satisfacer la condición de base restringida.

La tabla simplex inicial (con las columnas reacomodadas para proporcionar una solución inicial) se da como

| Básica | x_1 | w_{22} | w_{23} | w_{24} | s_1 | w_{21} | Solución |
|----------|-------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
| z | -1 | -1 | -16 | -81 | 0 | 0 | 0 |
| s_1 | 3 | 2 | 8 | 18 | 1 | 0 | 9 |
| w_{21} | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

La variable $s_1 (\geq 0)$ es una holgura. (El problema resultó tener una solución inicial obvia. En general se pueden utilizar variables artificiales, sección 3.4.)

En la fila z , w_{24} es la variable de entrada. Debido a que w_{21} en este momento es básico y positivo, la condición de base restringida dicta que debe salir antes de que w_{24} pueda entrar a la solución. Sin embargo, de acuerdo con la condición de factibilidad, s_1 debe ser la variable de salida, lo que significa que w_{24} no puede entrar a la solución. La siguiente mejor variable de entrada, w_{23} , requiere que w_{21} salga de la solución básica, una condición que da la casualidad de ser satisfecha por la condición de factibilidad. La nueva tabla es por tanto

| Básica | x_1 | w_{22} | w_{23} | w_{24} | s_1 | w_{21} | Solución |
|----------|-------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
| z | -1 | 15 | 0 | -65 | 0 | 16 | 16 |
| s_1 | 3 | -6 | 0 | 10 | 1 | -8 | 1 |
| w_{23} | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Luego, w_{24} es la variable de entrada, lo cual es admisible porque w_{23} es positivo. El método simplex muestra que s_1 saldrá. Entonces,

| Básica | x_1 | w_{22} | w_{23} | w_{24} | s_1 | w_{21} | Solución |
|----------|-----------------|-----------------|----------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| z | $\frac{37}{2}$ | -24 | 0 | 0 | $\frac{13}{2}$ | -36 | $22\frac{1}{2}$ |
| w_{24} | $\frac{3}{10}$ | $-\frac{6}{10}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{8}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |
| w_{23} | $-\frac{3}{10}$ | $\frac{16}{10}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{18}{10}$ | $\frac{9}{10}$ |

La tabla muestra que w_{21} y w_{22} son candidatas para la variable de entrada. La variable w_{21} no está adyacente a la básica w_{23} o w_{24} , por consiguiente no puede volverse básica. Asimismo, w_{22} no puede entrar porque w_{24} no puede salir. En consecuencia, la última tabla es la solución de base mejor restringida para el problema aproximado.

La solución óptima al problema original es

$$x_1 = 0$$

$$x_2 \approx 2w_{23} + 3w_{24} = 2\left(\frac{9}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{10}\right) = 2.1$$

$$z = 0 + 2.1^4 = 19.45$$

El valor $x_2 = 2.1$ es aproximadamente igual al valor óptimo verdadero ($= 2.12132$).

Programación separable convexa. Un caso de programación separable ocurre cuando $g_{ij}(x_j)$ es convexa para todas las i y j , lo cual garantiza un espacio de soluciones convexo. Además, si $f_j(x_j)$ es convexa (minimización) o cóncava (maximización) para todas las j , entonces el problema tiene un óptimo global (vea la tabla 20.2, sección 20.2.2). En tales condiciones, se puede utilizar la siguiente aproximación simplificada.

Considere un problema de minimización y sea $f_j(x_j)$ como se muestra en la figura 21.4. Los puntos de ruptura de la función $f_j(x_j)$ son $x_j = a_{jk}$, $k = 0, 1, \dots, K_j$. Si x_{jk} define el incremento de la variable x_j en el intervalo $(a_{j,k-1}, a_{jk})$, $k = 1, 2, \dots, K_j$ y si r_{jk} es el coeficiente de cambio correspondiente (pendiente del segmento de línea) en el mismo intervalo. Entonces

$$f_j(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} x_{jk} + f_j(a_{j0})$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{K_j} x_{jk}$$

$$0 \leq x_{jk} \leq a_{jk} - a_{j,k-1}, k = 1, 2, \dots, K_j$$

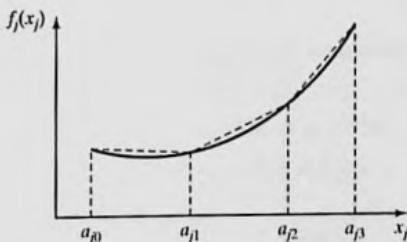


FIGURA 21.4

Aproximación lineal por segmentos de una función convexa

El hecho de que $f_j(x_j)$ sea convexa garantiza que $r_{j1} < r_{j2} \dots < r_{jk}$. Esto significa que en el problema de minimización la variable x_{jp} es más atractiva que x_{jq} con $p < q$. En consecuencia, x_{jp} siempre alcanzará su límite máximo antes de que x_{jq} pueda asumir un valor positivo.

Las funciones de restricción convexas $g_{ij}(x_j)$ se representan de forma aproximada en esencia de la misma manera. Sea r_{ijk} la pendiente del k -ésimo segmento de línea correspondiente a $g_{ij}(x_j)$. Se deduce que

$$g_{ij}(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0})$$

El problema completo es por consiguiente

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} x_{jk} + f_j(a_{j0}) \right)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0}) \right) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq x_{jk} \leq a_{jk} - a_{j,k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, K_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

donde

$$r_{jk} = \frac{f_j(a_{jk}) - f_j(a_{j,k-1})}{a_{jk} - a_{j,k-1}}$$

$$r_{ijk} = \frac{g_{ij}(a_{jk}) - g_{ij}(a_{j,k-1})}{a_{jk} - a_{j,k-1}}$$

El problema de maximización se trata en esencia del mismo modo. En este caso, $r_{j1} > r_{j2} > \dots > r_{jk}$, lo que significa que, para $p < q$, la variable x_{jp} siempre alcanzará su valor máximo antes de que x_{jq} asuma un valor positivo (vea el problema 7, conjunto 21.2a, para la comprobación).

El nuevo problema se puede resolver con el método simplex con variables de cota superior (sección 7.3). El concepto de base restringida no se requiere porque la convexidad (concavidad) de las funciones garantiza la selección correcta de las variables básicas.

Ejemplo 21.2-2

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$3x_1^4 + x_2 \leq 243$$

$$x_1 + 2x_2^2 \leq 32$$

$$x_1 \geq 2.1$$

$$x_2 \geq 3.5$$

Las funciones separables de este problema son

$$\begin{aligned}f_1(x_1) &= x_1, & f_2(x_2) &= -x_2 \\g_{11}(x_1) &= 3x_1^4, & g_{12}(x_2) &= x_2 \\g_{21}(x_1) &= x_1, & g_{22}(x_2) &= 2x_2^2\end{aligned}$$

Estas funciones satisfacen la condición de convexidad requerida para los problemas de minimización. Las funciones $f_1(x_1), f_2(x_2), g_{12}(x_2)$ y $g_{21}(x_1)$ ya son lineales.

Los intervalos de las variables x_1 y x_2 (estimados con las restricciones) son $0 \leq x_1 \leq 3$ y $0 \leq x_2 \leq 4$. Sean $K_1 = 3$ y $K_2 = 4$. Las pendientes correspondientes a las funciones separables se determinan como sigue.

Para $j = 1$,

| k | a_{1k} | $g_{11}(a_{1k}) = 3a_{1k}^4$ | r_{11k} | x_{1k} |
|-----|----------|------------------------------|-----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | — | — |
| 1 | 1 | 3 | 3 | x_{11} |
| 2 | 2 | 48 | 45 | x_{12} |
| 3 | 3 | 243 | 195 | x_{13} |

Para $j = 2$,

| k | a_{2k} | $g_{22}(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$ | r_{22k} | x_{2k} |
|-----|----------|------------------------------|-----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | — | — |
| 1 | 1 | 2 | 2 | x_{21} |
| 2 | 2 | 8 | 6 | x_{22} |
| 3 | 3 | 18 | 10 | x_{23} |
| 4 | 4 | 32 | 14 | x_{24} |

El problema completo se convierte entonces en

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$3x_{11} + 45x_{12} + 195x_{13} + x_2 \leq 243 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} + 14x_{24} \leq 32 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 2.1 \quad (3)$$

$$x_2 \geq 3.5 \quad (4)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_1 = 0 \quad (5)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - x_2 = 0 \quad (6)$$

$$0 \leq x_{1k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$$0 \leq x_{2k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las restricciones 5 y 6 son necesarias para mantener la relación entre las variables originales y las nuevas. La solución óptima es

$$z = -.52, x_1 = 2.98, x_2 = 3.5, x_{11} = x_{12} = 1, x_{13} = .98, x_{21} = x_{22} = x_{23} = 1, x_{24} = .5$$

Momento de AMPL

El modelado con AMPL del problema no lineal *original* del ejemplo 21.2-2 es muy parecido al de los problemas lineales. La obtención de la solución es un asunto totalmente diferente debido al comportamiento “impredecible” de las funciones no lineales. El archivo *amplEx21.2-2.txt* proporciona el modelo. El modelo se explica en el apéndice C en el sitio web (vea la figura C.17).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2A

1. Aproxime el siguiente problema como un programa combinado entero.

$$\text{Maximizar } z = e^{-x_1} + x_1 + (x_2 + 1)^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- *2. Repita el problema 1 siguiendo el método de base restringida. Luego determine la solución óptima.

3. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2x_3$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aproxime el problema como un programa lineal para usarlo con el método de base restringida.

- *4. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2 + x_3 + x_1x_3$$

sujeto a

$$x_1x_2 + x_2 + x_1x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

5. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Minimizar } z = e^{2x_1+x_2^2} + (x_3 - 2)^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = e^{x_1 x_2} + x_2^2 x_3 + x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 x_3 + x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_4 no restringida en cuanto a signo

7. Demuestre que en la programación convexa separable nunca es óptimo tener $x_{ki} > 0$ cuando $x_{k-1,i}$ no se encuentra en su cota superior.

8. Resuelva como un problema de programación convexa separable.

$$\text{Minimizar } z = x_1^4 + x_2 + x_3^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 4$$

$$|x_1 + x_2| \leq 0$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

x_2 no restringida en cuanto a signo

9. Resuelva lo siguiente como un problema de programación convexa distinto

$$\text{Minimizar } z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

sujeto a

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

21.2.2 Programación cuadrática

Un modelo de programación cuadrática se define como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D}\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{X} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq 0$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

La función $\mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}$ define una forma cuadrática (vea la sección D.3 en el sitio web). Se supone que la matriz \mathbf{D} es simétrica y definida negativa, es decir que z es estrictamente cóncava. Las restricciones son lineales, lo que garantiza un espacio de soluciones convexo.

La solución de este problema se basa en las condiciones KKT necesarias. Estas condiciones (como se muestra en la tabla 20.2, sección 20.2.2) también son suficientes porque z es cóncava y el espacio de soluciones es un conjunto convexo.

El problema de programación cuadrática se tratará para el caso de maximización. La conversión a minimización es simple. El problema puede escribirse como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{C} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Sean

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$$

$$\mathbf{U} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$$

los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones $\mathbf{AX} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ y $-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$, respectivamente. La aplicación de las condiciones KKT produce

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$$

$$\nabla z - (\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{U}^T) \nabla \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mu_j x_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

$$-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

Ahora

$$\nabla z = \mathbf{C} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{D}$$

$$\nabla \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Sean $S = b - Ax \geq 0$ las variables de holgura de las restricciones. Las condiciones se reducen a

$$\begin{aligned} -2X^T D + \lambda^T A - U^T &= C \\ AX + S &= b \\ \mu_j x_j = 0 &= \lambda_i S_i \quad \text{para todas las } i \text{ y } j \\ \lambda, U, X, S &\geq 0 \end{aligned}$$

Debido a que $D^T = D$, la transpuesta del primer conjunto de ecuaciones puede escribirse como

$$-2DX + A^T \lambda - U = C^T$$

Por consiguiente, las condiciones necesarias pueden combinarse como

$$\begin{pmatrix} -2D & A^T & -I & 0 \\ A & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \lambda \\ U \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_j x_j = 0 &= \lambda_i S_i, \quad \text{para todas las } i \text{ y } j \\ \lambda, U, X, S &\geq 0 \end{aligned}$$

Excepto para las condiciones $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$, las ecuaciones restantes son lineales en X , λ , U y S . Por lo tanto, el problema equivale a resolver un conjunto de ecuaciones lineales con las condiciones adicionales $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$.

La solución del sistema se obtiene con la fase I del método de dos fases (sección 3.4.2) con las restricciones agregadas $\lambda_i S_i = 0$ y $\mu_j x_j = 0$. Esto significa que λ_i y s_i no pueden ser positivas al mismo tiempo, ni tampoco μ_j y x_j . Ésta es la misma idea de **base restringida** que se utilizó en la sección 21.2.1.

La fase I hace que todas las variables artificiales sean iguales a cero siempre que el problema tenga un espacio de soluciones factible.

Ejemplo 21.2-3

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este problema puede ponerse en la siguiente forma matricial:

$$\text{Maximizar } z = (4, 6) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$(1, 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las condiciones KKT se dan como

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 s_1 = 0$$

La tabla inicial correspondiente a la fase 1 se obtiene introduciendo las variables artificiales R_1 y R_2 y actualizando la fila objetivo.

| Básica | x_1 | x_2 | λ_1 | μ_1 | μ_2 | R_1 | R_2 | s_1 | Solución |
|--------|-------|-------|-------------|---------|---------|-------|-------|-------|----------|
| r | 6 | 6 | 3 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| R_1 | 4 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| R_2 | 2 | 4 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| s_1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |

Iteración 1. La variable de entrada más promisoria x_1 puede hacerse básica porque $\mu_1 = 0$.

| Básica | x_1 | x_2 | λ_1 | μ_1 | μ_2 | R_1 | R_2 | s_1 | Solución |
|--------|-------|---------------|----------------|----------------|---------|----------------|-------|-------|----------|
| R | 0 | 3 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 4 |
| x_1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 1 |
| R_2 | 0 | 3 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 4 |
| s_1 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 1 | 1 |

Iteración 2. La variable de entrada más promisoria x_2 puede hacerse básica porque $\mu_2 = 0$.

| Básica | x_1 | x_2 | λ_1 | μ_1 | μ_2 | R_1 | R_2 | s_1 | Solución |
|--------|-------|-------|----------------|----------------|---------|----------------|-------|----------------|---------------|
| r | 0 | 0 | 2 | 0 | -1 | -1 | 0 | -2 | 2 |
| x_1 | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| R_1 | 0 | 0 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | -2 | 2 |
| x_1 | 0 | 1 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

Iteración 3. El multiplicador λ_1 puede hacerse básico porque $s_1 = 0$.

| Básica | x_1 | x_2 | λ_1 | μ_1 | μ_2 | R_1 | R_2 | s_1 | Solución |
|-------------|-------|-------|-------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| r | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| x_1 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| λ_1 | 0 | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | -1 | 1 |
| x_2 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{12}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ |

La última tabla da la solución factible óptima ($x_1^* = \frac{1}{3}$, $x_2^* = \frac{5}{6}$). El valor óptimo asociado de $z = 4.16$.

Momento de Solver

La plantilla de Solver, *excelQP.xls*, resuelve el ejemplo 21.2-3. Los datos se ingresan de una manera similar a la programación lineal (vea la sección 2.3.1). La diferencia principal radica en la forma de ingresar las funciones no lineales. Específicamente, la función objetivo no lineal se ingresa en la celda destino D5 como

$$=4*B10+6*C10-2*B10^2-2*B10*C10-2*C10^2$$

Las celdas que cambian son B10:C10[=(x_1, x_2)]. Observe que las celdas B5:C5 no se utilizan para nada en el modelo. Por legibilidad, ingresamos el símbolo NL para indicar que la restricción asociada es no lineal. También podemos especificar la no negatividad de las variables o en el cuadro de diálogo Options o agregando restricciones explícitas de no negatividad.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2B

- *1. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Demuestre que z es estrictamente cóncava, y luego resuelva el problema utilizando el algoritmo de programación cuadrática.

- *2. Considere el problema:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre que z es estrictamente convexa, y luego resuélvala con el algoritmo de programación cuadrática.

21.2.3 Programación estocástica

La programación estocástica maneja situaciones en las que los parámetros de las restricciones son variables aleatorias y las restricciones se llevan a cabo con una probabilidad mínima. Matemáticamente, el problema se define como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeto a

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \text{ para todas las } j$$

Los parámetros a_{ij} y b_i son variables aleatorias, y la restricción i se lleva a cabo con una probabilidad mínima de $1 - \alpha_i$, $0 < \alpha_i < 1$.

Se consideran tres casos:

1. Sólo a_{ij} es aleatoria para todas las i y j .
2. Sólo b_i es aleatoria para todas las i .
3. Tanto a_{ij} como b_i son aleatorias para todas las i y j .

En los tres casos se supone que los parámetros están normalmente distribuidos con medias y varianzas conocidas.

Caso 1. Cada a_{ij} está normalmente distribuida con media $E\{a_{ij}\}$, varianza $\text{var}\{a_{ij}\}$ y $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\}$ de a_{ij} y $a_{i'j'}$.

Considere

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Defina

$$h_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

La variable aleatoria h_i está normalmente distribuida con

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\} x_j$$

$$\text{var}\{h_i\} = \mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

\mathbf{D}_i = Matriz de covarianza i = éSIMA

$$= \begin{pmatrix} \text{var}\{a_{i1}\} & \dots & \text{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \dots & \text{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$P\{h_i \leq b_i\} = P\left\{\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \leq \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Si F es la FDA de la función de distribución normal estándar, se deduce que

$$P\{h_i \leq b_i\} = F\left(\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right)$$

Sea K_{α_i} el valor normal estándar de modo que

$$F(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$$

Entonces el enunciado $P\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ se cumple, si, y sólo si,

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \geq K_{\alpha_i}$$

Esta produce la siguiente restricción determinística no lineal:

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{D}_i \mathbf{X}} \leq b_i$$

Para el caso especial en que los parámetros a_{ij} son independientes, $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$, y la última restricción se reduce a

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2} \leq b_i$$

Esta restricción puede ponerse en la forma de programación lineal separable (sección 21.2.1) mediante la sustitución

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2}, \text{ para todas las } i$$

Por lo tanto, la restricción original es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}y_i \leq b_i$$

y

$$\sum_{j=1}^n \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2 - y_i^2 = 0$$

Caso 2. Sólo b_i es normal con media $E\{b_i\}$ y varianza $\text{var}\{b_i\}$.

Considere la restricción estocástica

$$P\left\{ b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right\} \geq \alpha_i$$

Como en el caso 1,

$$P\left\{ \frac{b_i - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \right\} \geq \alpha_i$$

Esto puede mantenerse cierto sólo si

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \leq K_{\alpha_i}$$

Por lo tanto, la restricción estocástica es equivalente a la restricción lineal determinística

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha_i} \sqrt{\text{var}\{b_i\}}$$

Caso 3. Todas las a_{ij} y b_i son variables normales aleatorias.

Considere la restricción

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

Ésta puede escribirse

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \leq 0$$

Debido a que todas las a_{ij} y b_i son normales, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i$ también es normal. Esto demuestra que la estocástica se reduce a la situación del caso 1 y se trata de una manera similar.

Ejemplo 21.2-4

Considere el problema de estocástica

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq .95$$

$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq .10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que los parámetros $a_{1jj}, j = 1, 2, 3$, son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con las siguientes medias y varianzas:

$$E\{a_{11}\} = 1, E\{a_{12}\} = 3, E\{a_{13}\} = 9$$

$$\text{var}\{a_{11}\} = 25, \text{var}\{a_{12}\} = 16, \text{var}\{a_{13}\} = 4$$

El parámetro b_2 está normalmente distribuido con media 7 y varianza 9.

De las tablas normales estándar en el apéndice B (o *excelStatTables.xls*),

$$K_{\alpha_1} = K_{.05} \approx 1.645, \quad K_{\alpha_2} = K_{.10} \approx 1.285$$

Para la primera restricción, la restricción determinística equivalente es

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8$$

y para la segunda restricción

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1.285(3) = 10.855$$

El problema resultante puede resolverse como un programa no lineal (utilizando AMPL o Solver), o convertirse en un problema separable como sigue:

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2$$

El problema se vuelve

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645y \leq 8$$

$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0$$

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$

$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0$$

El problema puede resolverse mediante programación separable. Incluso, puede utilizarse el archivo *excelCCP.xls* para resolver el problema no lineal de forma directa.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2C

- *1. Convierta el siguiente problema estocástico en un modelo determinístico equivalente

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \leq 10\} \geq 0.9$$

$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_2\} \geq 0.1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que a_1 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias $E[a_1] = 2$ y $E[a_3] = 5$ y varianzas $\text{var}[a_1] = 9$ y $\text{var}[a_3] = 16$, y b_2 está normalmente distribuida con media 15 y varianza 25.

2. Considere el siguiente modelo de programación estocástica:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^2 + x_3$$

sujeto a

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \leq 10\} \geq 0.9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Los parámetros a_2 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias de 5 y 2, y varianza de 16 y 25, respectivamente. Convierta el problema en una forma de programación de programación separable (determinística).

21.2.4 Método de combinaciones lineales

Este método tiene que ver con el siguiente problema en el cual todas las restricciones son lineales:

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El procedimiento se basa en el método del ascenso más pronunciado (gradiente) (sección 21.1.2). Sin embargo, la dirección especificada por el vector gradiente puede no dar una solución factible para el problema restringido. Además, el vector gradiente no necesariamente será nulo en el punto óptimo (restringido). Por tanto el método del ascenso más pronunciado debe modificarse para manejar el caso restringido.

Sea \mathbf{X}_k el punto de prueba *factible* en la iteración k . La función objetivo $f(\mathbf{X})$ puede ampliarse en la proximidad de \mathbf{X}_k , mediante la serie de Taylor. Esto da

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = (f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

El procedimiento requiere determinar un punto factible $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ de modo que $f(\mathbf{X})$ se maximice sujeta a la restricciones (lineales) del problema. Debido a que $f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k$ es una constante, el problema \mathbf{X}^* se reduce a resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } w_k(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Dado que w_k se construye a partir del gradiente de $f(\mathbf{X})$ en \mathbf{X}_k , se puede tener una mejor solución si y sólo si $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$. De acuerdo con la expansión de Taylor, la condición no garantiza que $f(\mathbf{X}^*) > f(\mathbf{X}_k)$ a menos que \mathbf{X}^* se encuentre vecina a \mathbf{X}_k . Sin embargo, dado que $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$, debe existir un punto \mathbf{X}_{k+1} en el segmento de línea $(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}^*)$ de modo que $f(\mathbf{X}_{k+1}) > f(\mathbf{X}_k)$. El objetivo es determinar \mathbf{X}_{k+1} . Defina

$$\mathbf{X}_{k+1} = (1 - r)\mathbf{X}_k + r\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k), \quad 0 < r \leq 1$$

Esto significa que \mathbf{X}_{k+1} es una **combinación lineal** de \mathbf{X}_k y \mathbf{X}^* . Debido que \mathbf{X}_k y \mathbf{X}^* son dos puntos factibles en un espacio de soluciones convexo, \mathbf{X}_{k+1} también es factible. En términos del método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2), el parámetro r representa el tamaño del paso.

El punto \mathbf{X}_{k+1} se determina de modo que $f(\mathbf{X})$ se maximice. Debido a que \mathbf{X}_{k+1} es una función sólo de r , \mathbf{X}_{k+1} se determina maximizando

$$h(r) = f(\mathbf{X}_k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k))$$

El procedimiento se repite hasta que, en la iteración k -ésima, se tenga $w_k(\mathbf{X}^*) \leq w_k(\mathbf{X}_k)$. En este punto ya son posibles más mejoras y el proceso termina con \mathbf{X}_k como el mejor punto de solución.

Los problemas de programación lineal generados en las iteraciones sucesivas difieren sólo en los coeficientes de la función objetivo. Por tanto los procedimientos de análisis postóptimo presentados en la sección 4.5 pueden utilizarse para realizar cálculos de forma eficiente.

Ejemplo 21.2-5

Considere la programación cuadrática del ejemplo 21.2-3.

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sea $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, el punto inicial, el cual es factible. Ahora

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (1, 3)$$

El programa lineal asociado maximiza $w_1 = x_1 + 3x_2$ sujeta a las restricciones del problema original. Esto da la solución óptima $\mathbf{X}^* = (0, 1)$. Los valores de w_1 en \mathbf{X}_0 y \mathbf{X}^* son iguales a 2 y 3, respectivamente. Por consiguiente, un nuevo punto de prueba se determina como

$$\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + r\left[(0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$$

La maximización de

$$h(r) = f\left(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$$

produce $r_1 = 1$. Por lo tanto $\mathbf{X}_1 = (0,1)$ con $f(\mathbf{X}_1) = 4$.

Iteración 2

$$\nabla f(\mathbf{X}_1) = (2, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_2 = 2x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce $\mathbf{X}^* = (2,0)$. Debido a que los valores de w_2 en \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}^* son 2 y 4, respectivamente, se puede determinar un nuevo punto de prueba. Entonces

$$\mathbf{X}_2 = (0, 1) + r[(2, 0) - (0, 1)] = (2r, 1 - r)$$

La maximización de

$$h(r) = f(2r, 1 - r).$$

produce $r_2 = \frac{1}{6}$. Por lo tanto $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$.

Iteración 3

$$\nabla f(\mathbf{X}_2) = (1, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_3 = x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce las soluciones alternativas $\mathbf{X}^* = (0,1)$ y $\mathbf{X}^* = (2,0)$. El valor de w_3 para ambos puntos es igual a su valor en \mathbf{X}_2 . En consecuencia no son posibles más mejoras. La solución óptima *aproximada* es $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$. Da la casualidad de que ésta es la solución óptima exacta.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2D

- Resuelva el siguiente problema mediante el método de combinaciones lineales.

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$

$$5x_1 - 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

21.2.5 Algoritmo SUMT

En esta sección se presenta un método de gradiente más general. Se supone que la función objetivo $f(\mathbf{X})$ es cóncava y cada función de restricción $g_i(\mathbf{X})$ es convexa. Más aún, el espacio de soluciones debe tener un interior. Esto descarta el uso tanto implícito como explícito de las restricciones de *igualdad*.

El algoritmo SUMT (Técnica de Maximización Secuencial No restringida, por sus siglas en inglés) se basa en la transformación del problema restringido a un problema *no* restringido equivalente. El procedimiento es más o menos semejante al método de multiplicadores de Lagrange. El problema transformado se puede resolver entonces siguiendo el método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2).

Para aclarar este concepto consideremos la nueva función

$$p(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{X}) + t \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(\mathbf{X})} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j} \right)$$

donde t es un parámetro no negativo. El segundo signo de suma tiene en cuenta las restricciones de no negatividad, las cuales deben ponerse en la forma $-x_j \leq 0$ para que sean consistentes con las restricciones originales. Debido a que $g_i(\mathbf{X})$ es convexa, $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ es cóncava. Esto significa que $p(\mathbf{X}, t)$ es cóncava en \mathbf{X} . Por consiguiente, $p(\mathbf{X}, t)$ posee un máximo único. La optimización del problema restringido original es equivalente a la optimización de $p(\mathbf{X}, t)$.

El algoritmo se inicia seleccionando arbitrariamente un valor *no negativo* inicial para t . Se selecciona un punto inicial \mathbf{X}_0 como la primera solución de prueba. Este punto debe ser un punto interior; es decir, no debe quedar en los límites del espacio de soluciones. Dado el valor de t , se utiliza el método del ascenso más pronunciado para determinar la solución óptima correspondiente (máxima) de $p(\mathbf{X}, t)$.

El nuevo punto de solución siempre será un punto interior, porque si el punto de solución está cerca de los límites, al menos una de las funciones $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ o $-\frac{1}{x_j}$ adquirirá un valor negativo muy grande. Debido a que el objetivo es maximizar $p(\mathbf{X}, t)$, tales puntos de solución se descartan de forma automática. El resultado principal es que los puntos de solución sucesivos siempre serán puntos interiores. Por consiguiente, el problema siempre puede tratarse como un caso no restringido.

Una vez que se obtiene la solución óptima correspondiente a un valor dado de t , se genera un nuevo valor de t , y el proceso de optimización (con el método del ascenso más pronunciado) se repite. Si t' es el valor actual de t , el siguiente valor, t'' , debe seleccionarse de modo que $0 < t'' < t'$.

El algoritmo SUMT termina cuando, con dos valores sucesivos de t , los valores óptimos correspondientes de \mathbf{X} obtenidos maximizando $p(\mathbf{X}, t)$ son aproximadamente los mismos. En este punto, más pruebas producirán poca mejora.

La implementación real de SUMT implica más detalles de los que aquí se presentaron. Específicamente, la selección de un valor inicial de t es un factor importante que puede afectar la velocidad de convergencia. Además, la determinación de un punto interior inicial puede requerir técnicas especiales. Estos detalles se hallan en Fiacco y McCormick (1968).

BIBLIOGRAFÍA

- Bazaraa, M., H. Sherally, y C. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1993.
- Beightler, C., D. Phillips, y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1979.

- Fiacco, A., y G. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, Nueva York, 1968.
- Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.
- Luenberger, D., *Linear and Nonlinear Programming*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.
- Rardin, D., *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, NJ, 1998.

APÉNDICE A

Tablas estadísticas¹

TABLA A.1 Función de distribución normal

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| <i>z</i> | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

¹La hoja de cálculo *excelStatTable.xls* reemplaza a las tablas estadísticas (impresas) de 12 distribuciones comunes, incluidas las presentadas en este apéndice.

TABLA A.1 Continuación

| <i>z</i> | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|----------|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | | | | | | | | | |
| 4.0 | 0.99997 | | | | | | | | | |
| 5.0 | 0.9999997 | | | | | | | | | |
| 6.0 | 0.999999999 | | | | | | | | | |

Fuente: Miller, I., y J. Freund, *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1985.

TABLA A.2 Valores de $t_{\alpha,v}$ (*t* estudiantil)

| <i>v</i> | $\alpha = 0.10$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.025$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.005$ | <i>v</i> |
|----------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|----------|
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 1 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 2 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 3 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 4 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 6 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 7 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 8 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 9 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 10 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 11 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 12 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 13 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 14 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 15 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 16 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 17 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 18 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 19 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 20 |

TABLA A.2 Continuación

| <i>v</i> | $\alpha = 0.10$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.025$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.005$ | <i>v</i> |
|----------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|----------|
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 21 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 22 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 23 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 24 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 25 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 26 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 27 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 28 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 29 |
| Inf. | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | inf. |

Fuente: Compendiada con el permiso de Macmillan Publishing Co. Inc., de *Statistical Methods for Research Workers*, 14a. ed. de R.A. Fisher. Derechos reservados © 1970 Universidad de Adelaida.

TABLA A.3 Valores de $\chi^2_{\alpha,v}$ (Valores de ji cuadrada)

| <i>v</i> | $\alpha = 0.995$ | $\alpha = 0.99$ | $\alpha = 0.975$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.025$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.005$ | <i>v</i> |
|----------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|----------|
| 1 | 0.0000393 | 0.000157 | 0.000982 | 0.00393 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 1 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 | 2 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 | 3 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 | 4 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 11.070 | 12.832 | 15.056 | 16.750 | 5 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 | 6 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 | 7 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 | 8 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 | 9 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 | 10 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 | 11 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 | 12 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 | 13 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 | 14 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 | 15 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 | 16 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 | 17 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 | 18 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 | 19 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 | 20 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 | 21 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 | 22 |
| 23 | 9.260 | 10.196 | 11.689 | 13.091 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 | 23 |
| 24 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.484 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.558 | 24 |
| 25 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 | 25 |
| 26 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 | 26 |
| 27 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 40.113 | 43.194 | 46.963 | 49.645 | 27 |
| 28 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 | 28 |
| 29 | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 42.557 | 45.772 | 49.588 | 52.336 | 29 |
| 30 | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 | 30 |

Fuente: La tabla está basada en la tabla 8 de *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, con permiso de los fiduciarios de Biometrika.

APÉNDICE B

Respuestas parciales a problemas seleccionados¹

CAPÍTULO 1

Conjunto 1.2a

4. (c) 17 minutos
5. (a) Alternativas de Jim: Lanzar una curva o una bola rápida.
Alternativas de Joe: Prepararse para lanzar una curva o una bola rápida.
- (b) Joe desea incrementar su promedio de bateo.
Jim desea reducir el promedio de bateo de Joe.

CAPÍTULO 2

Conjunto 2.1a

1. (a) $-x_1 + x_2 \geq 1$
(c) $x_1 - x_2 \leq 0$
(e) $.5x_1 - .5x_2 \geq 0$
3. M_1 no utilizada = 4 toneladas/día

Conjunto 2.2a

1. (a y e) Vea la figura B1.
2. (a y d) Vea la figura B2.

¹Los problemas resueltos en este apéndice aparecen en el texto marcados con un asterisco (*).

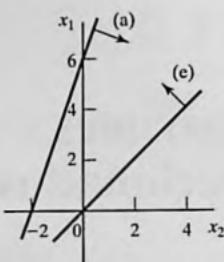


FIGURA B.1

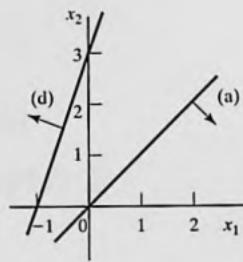


FIGURA B.2

5. Sean

 x_1 = Cantidad de unidades de A x_2 = Cantidad de unidades de BMaximizar $z = 20x_1 + 50x_2$ sujeto a M

$$-.2x_1 + .8x_2 \leq 0, 2x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 100, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (80, 20)$, $z = \$2,600$

7. Sean

 x_1 = Dólares invertidos en A x_2 = Dólares invertidos en BMaximizar $z = .05x_1 + .08x_2$ sujeto a

$$.75x_1 - .25x_2 \geq 0, .5x_1 - .5x_2 \geq 0,$$

$$x_1 - .5x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 5000, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (2500, 2500)$, $z = \$325$

14. Sean

 x_1 = Toneladas de C1 por hora x_2 = Toneladas de C2 por horaMaximizar $z = 12000x_1 + 9000x_2$ sujeto a

$$-200x_1 + 100x_2 \leq 0, 2.1x_1 + .9x_2 \leq 20, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (5.13, 10.26)$, $z = 153.846$ lb

(a) Relación óptima de C1:C2 = .5

(b) La relación óptima es la misma, pero la generación de vapor se incrementará en 7692 lb/h.

18. Sean

x_1 = Cantidad de unidades de HiFi1

x_2 = Cantidad de unidades de HiFi2

Minimizar $z = 1267.2 - (15x_1 + 15x_2)$ sujeto a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 432, 5x_1 + 5x_2 \leq 412.8$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 422.4, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (50.88, 31.68)$, $z = 28.8$ min ociosos.

Conjunto 2.2b

1. (a) Vea la figura B.3

5. Sean

x_1 = Miles de barriles/día de Irán

x_2 = Miles de barriles/día de Dubai

Minimizar $z = x_1 + x_2$ sujeto a

$$-.6x_1 + .4x_2 \leq 0, .2x_1 + .1x_2 \geq 14$$

$$.25x_1 + .6x_2 \geq 30, .1x_1 + .15x_2 \geq 10$$

$$.15x_1 + .1x_2 \geq 8, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = 55, x_2 = 30, z = 85$

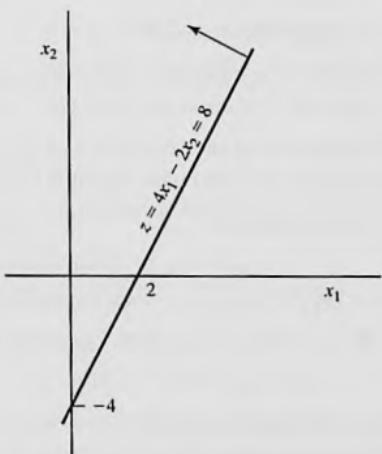


FIGURA B.3

7. Sean

 x_1 = Relación de la aleación A de desecho x_2 = Relación de la aleación B de desechoMinimizar $z = 100x_1 + 80x_2$ sujeto a

$.03 \leq .06x_1 + .03x_2 \leq .06, .03 \leq .03x_1 + .06x_2 \leq .05$

$.03 \leq .04x_1 + .03x_2 \leq .07, x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0$

Óptima: $x_1 = .33, x_2 = .67, z = \86.667

Conjunto 2.4a

2. Sean

 x_i = Dólares invertidos en el proyecto $i, i = 1, 2, 3, 4$ y_j = Dólares invertidos en el banco en el año $j, j = 1, 2, 3, 4$ Maximizar $z = y_5$ sujeto a

$x_1 + x_2 + x_4 + y_1 \leq 10,000$

$.5x_1 + .6x_2 - x_3 + .4x_4 + 1.065y_1 - y_2 = 0$

$.3x_1 + .2x_2 + .8x_3 + .6x_4 + 1.065y_2 - y_3 = 0$

$1.8x_1 + 1.5x_2 + 1.9x_3 + 1.8x_4 + 1.065y_3 - y_4 = 0$

$1.2x_1 + 1.3x_2 + .8x_3 + .95x_4 + 1.065y_4 - y_5 = 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

Solución óptima:

$x_1 = 0, x_2 = \$10,000, x_3 = \$6000, x_4 = 0$

$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \$6800, y_4 = \$33,642$

$z = \$53,628.73$ al inicio del año 5

5. Sean x_{iA} = cantidad invertida en el año i con el plan A, $i = 1, 2, 3$ x_{iB} = cantidad invertida en el año i con el plan B, $i = 1, 2, 3$ Maximizar $z = 3x_{2B} + 1.7x_{3A}$ sujeto a

$x_{1A} + x_{1B} \leq 100$ (al inicio del año 1)

$-1.7x_{1A} + x_{2A} + x_{2B} = 0$ (al inicio del año 2)

$-3x_{1B} - 1.7x_{2A} + x_{3A} = 0$ (al inicio del año 3)

$x_{iA}, x_{iB} \geq 0, i = 1, 2, 3$

Solución óptima: Invertir \$100,000 en el plan A en el año 1 y \$170,000 en el plan B en el año 2. El problema tiene dos soluciones óptimas alternativas.

Conjunto 2.4b

3. Sea x_j = cantidad de unidades del producto $j, j = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$ sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$$

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$$

$$x_1 + .5x_2 + .33x_3 \leq 1500$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$

$$5x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 \geq 200, x_2 \geq 200, x_3 \geq 150$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución óptima: $x_1 = 324.32, x_2 = 216.22, x_3 = 540.54, z = \$41,081.08$

7. Sean x_{ij} = Cantidad producida por la operación i en el mes $j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

I_{ij} = Inventario de *entrada* de la operación i en el mes $j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

Minimizar $z = \sum_{j=1}^3 (c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j} + .2I_{1j} + .4I_{2j})$ sujeto a

$$.6x_{11} \leq 800, .6x_{12} \leq 700, .6x_{13} \leq 550$$

$$.8x_{21} \leq 1000, .8x_{22} \leq 850, .8x_{23} \leq 700$$

$$x_{1j} + I_{1,j-1} = x_{2j} + I_{1j}, x_{2j} + I_{2,j-1} = d_j + I_{2j}, j = 1, 2, 3$$

$$I_{1,0} = I_{2,0} = 0, \text{ todas las variables } \geq 0$$

$$d_j = 500, 450, 600 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$c_{1j} = 10, 12, 11 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$c_{2j} = 15, 18, 16 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

Óptima: $x_{11} = 1333.33$ unidades, $x_{13} = 216.67, x_{21} = 1250$ unidades, $x_{23} = 300$ unidades, $z = \$39.720$.

Conjunto 2.4c

1. Sea $x_i(y_i)$ = Cantidad de autobuses en turnos de 8 horas (12 horas) que inician en el periodo i .

Minimizar $z = 2 \sum_{i=1}^6 x_i + 3.5 \sum_{i=1}^6 y_i$ sujeto a

$$x_1 + x_6 + y_1 + y_5 + y_6 \geq 4, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_6 \geq 8,$$

$$x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 10, x_3 + x_4 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 7,$$

$$x_4 + x_5 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 12, x_5 + x_6 + y_4 + y_5 + y_6 \geq 4$$

Todas las variables son no negativas

Solución $x_1 = 4, x_2 = 4, x_4 = 2, x_5 = 4, y_3 = 6$, todas las demás = 0.

$z = 49$. Total de autobuses = 20. En el caso del turno de 8 horas, cantidad de autobuses = 26 y comparable $z = 2 \times 26 = 52$. Por lo tanto, el turno de (8 horas + 12 horas) es mejor.

5. Sea x_i = Cantidad de estudiantes que inician en el periodo i ($i = 1$ a las 8:01 A.M., $i = 9$ a las 4:01 P.M.)

Minimizar $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$ sujeto a

$$x_1 \geq 2, x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + x_2 + x_3 \geq 3,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, x_3 + x_4 \geq 4, x_4 + x_6 \geq 3,$$

$$x_6 + x_7 \geq 3, x_6 + x_7 + x_8 \geq 3, x_7 + x_8 + x_9 \geq 3$$

$$x_5 = 0, \text{todas las demás variables son no negativas}$$

Solución: Contratar 2 para la 8:01, 1 para las 10:01, 3 para las 11:01, y 3 para las 2:01. Total = 9 estudiantes

Conjunto 2.4d

3. Sean

x_{ij} = Parte del proyecto i que se completa en el año j

$$\text{Maximizar } z = .05(4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13}) + .07(3x_{22} + 2x_{23} + x_{24})$$

$$+ .15(4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}) + .02(2x_{43} + x_{44})$$

sujeto a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, x_{43} + x_{44} + x_{25} = 1$$

$$.25 \leq x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$

$$.25 \leq x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1$$

$$5x_{11} + 15x_{31} \leq 3, 5x_{12} + 8x_{22} + 15x_{32} \leq 6$$

$$5x_{13} + 8x_{23} + 15x_{33} + 1.2x_{43} \leq 7$$

$$8x_{24} + 15x_{34} + 1.2x_{44} \leq 7, 8x_{25} + 15x_{35} \leq 7$$

$$\text{toda } x_{ij} \geq 0$$

Óptima: $x_{11} = .6, x_{12} = .4, x_{24} = .255, x_{25} = .025, x_{32} = .267,$

$x_{33} = .387, x_{34} = .346, x_{43} = 1, z = \$523,750$

Conjunto 2.4e

2. Sea x_s = lb de tornillos/paquete, x_b = libras de pernos/paquete, x_n = lb de tuercas/paquete, x_w = lb de rondanas/paquete

Minimizar $z = 1.1x_s + 1.5x_b + (\frac{70}{80})x_n + (\frac{20}{30})x_w$ sujeto a

$$y = x_s + x_b + x_n + x_w$$

$$y \geq 1, x_s \geq .1y, x_b \geq .25y, x_n \leq .15y, x_w \leq .1y$$

$$(\frac{1}{10})x_b \leq x_n, (\frac{1}{50})x_b \leq x_w$$

Todas las variables son no negativas

Solución $z = \$1.12, y = 1, x_s = .5, x_b = .25, x_n = .15, x_w = .1.$

5. Sea $x_A = A$ barriles de crudo/día, $x_B = B$ barriles de crudo/día, $x_r =$ barriles de gasolina regular/día, $x_p =$ barriles de gasolina premium/día, $x_j =$ barriles de gasolina para avión/día.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= 50(x_r - s_r^+) + 70(x_p - s_p^+) + 120(x_j - s_j^+) \\ &\quad - (10s_r^- + 15s_p^- + 20s_j^- + 2s_r^+ + 3s_p^+ + 4s_j^+) \\ &\quad - (30x_A + 40x_B) \text{ sujeto a} \end{aligned}$$

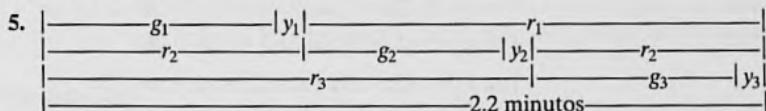
$$x_A \leq 2500, x_B \leq 3000, x_r = .2x_A + .25x_B, x_p = .1x_A + .3x_B, x_j = .25x_A + .1x_B$$

$$x_r + s_r^- - s_r^+ = 500, x_p + s_p^- - s_p^+ = 700, x_j + s_j^- - s_j^+ = 400, \text{Todas las variables } \geq 0$$

Solución: $z = \$21,852.94, x_A = 1176.47$ barriles/día, $x_B = 1058.82, x_r = 500$ barriles/día

$$x_p = 435.29 \text{ barriles/día}, x_j = 400 \text{ barriles/día}, s_p^- = 264.71$$

Conjunto 2.4f



Sean g_i, y_i y r_i las duraciones de las luces verde, amarilla y roja para los autos que se salen de la carretera i . Todas las unidades están en segundos. Los autos no avanzan con la luz amarilla.

maximizar $z = 3(500/3600)g_1 + 4(600/3600)g_2 + 5(400/3600)g_3$ sujeto a

$$(500/3600)g_1 + (600/3600)g_2 + (400/3600)g_3 \leq (510/3600)(2.2 \times 60 - 3 \times 10)$$

$$g_1 + g_2 + g_3 + 3 \times 10 \leq 2.2 \times 60, g_1 \geq 25, g_2 \geq 25, g_3 \geq 25$$

Solución: $g_1 = 25$ seg, $g_2 = 43.6$ seg, $g_3 = 33.4$ seg. Ingreso de la caseta de cobro = \$58.04/hr

CAPÍTULO 3

Conjunto 3.1a

- 2 toneladas/día y 1 tonelada/día de las materias primas $M1$ y $M2$, respectivamente.
- Sea $x_{ij} =$ unidades del producto i producido en la máquina j .

Maximizar $z = 10(x_{11} + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22})$ sujeto a

$$x_{11} + x_{21} - x_{12} - x_{22} + s_1 = 5$$

$$-x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} + s_2 = 5$$

$$x_{11} + x_{21} + s_3 = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + s_4 = 250$$

$$s_i, x_{ij} \geq 0, \text{ con todas las } i \text{ y } j$$

Conjunto 3.1b

3. Sea $x_j = \text{unidades de producto } j, j = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 15x_4^+ - 10x_5^+$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^- - x_4^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^- - x_5^+ = 65$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4^-, x_4^+, x_5^-, x_5^+ \geq 0$$

Solución óptima: $x_2 = 65$ unidades, $x_3 = 15$ unidades, todas las demás = 0, $z = \$325$.

Conjunto 3.2a

1. (c) $x_1 = \frac{6}{7}$, $x_2 = \frac{12}{7}$, $z = \frac{48}{7}$.

(e) Los puntos de esquina ($x_1 = 0, x_2 = 3$) y ($x_1 = 6$ y $x_2 = 0$) son no factibles.

3. Las soluciones básicas no factibles son como sigue:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{26}{3}, -\frac{4}{3}\right), (x_1, x_3) = (8, -2)$$

$$(x_1, x_4) = (6, -4), (x_2, x_3) = (16, -26)$$

$$(x_2, x_4) = (3, -13), (x_3, x_4) = (6, -16)$$

Conjunto 3.3a

3. (a) Sólo (A, B) representan iteraciones simplex sucesivas porque los puntos de esquina A y B son adyacentes. En todos los demás pares, los puntos de esquina asociados son no adyacentes.

(b) (i) Sí, (ii) No, C e I son no adyacentes. (iii). No, la ruta regresa al punto de esquina anterior, A .

5. (a) x_3 entra con el valor 1, $z = 3$ en el punto de esquina D .

Conjunto 3.3b

- 3.

| Nueva variable básica | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|
| Valor | 1.5 | 1 | 0 | .8 |
| Variable de salida | x_7 | x_7 | x_8 | x_4 |

6. (b) x_2, x_5 y x_6 pueden incrementar el valor de z . Si x_2 entra, x_8 sale y $\Delta z = 5 \times 4 = 20$. Si x_5 entra, x_1 sale y $\Delta z = 0$ porque x_5 es igual a 0 en la nueva solución. Si x_6 entra, ninguna variable sale porque todos los coeficientes de restricción de x_6 son menores que o iguales a cero, $\Delta z = \infty$ porque x_6 puede incrementarse a un valor infinito sin provocar no factibilidad.
9. El segundo mejor valor de $z = 20$ ocurre cuando s_2 se hace básica.

Conjunto 3.4a

3. (a) Minimizar $z = (8M - 4)x_1 + (6M - 1)x_2 - Ms_2 - Ms_3 = 10M$
 (b) Minimizar $z = (3M - 4)x_1 + (M - 1)x_2 = 3M$
 6. La tabla de inicio es

| Básica | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | Solución |
|--------|-------|-------|-------|-------|----------|
| z | -1 | -12 | 0 | 0 | -8 |
| x_3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| x_4 | 1 | 4 | 0 | 1 | 8 |

Conjunto 3.4b

- Siempre minimice la suma de las variables artificiales porque la suma representa la cantidad no factible en el problema.
- Cualquier variable no básica con coeficientes objetivo no cero al final de la Fase I no puede hacerse positiva en la Fase II porque ello significará que el valor objetivo óptimo en la Fase I será positivo, es decir, una solución no factible en la fase I.

Conjunto 3.5a

- (a) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.
 (b) 1 en A , 1 en B , $C_2^A = 6$ en C , y 1 en D .

Conjunto 3.5b

- Solución óptima básica alternativa: $(0, 0, \frac{10}{3})$, $(0, 5, 0)$, $(1, 4, \frac{1}{3})$. Solución óptima alternativa no básica.
 $(\alpha_3, 5\alpha_2 + 4\alpha_3, \frac{10}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Conjunto 3.5c

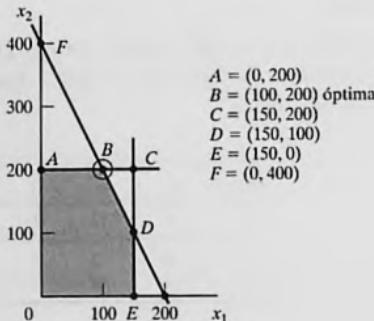
- (a) El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2 .
 (b) El valor objetivo no está acotado porque cada unidad de incremento en x_2 incrementa z en 10.

Conjunto 3.5d

- Lo máximo que se puede producir son 275 unidades.

Conjunto 3.6a

- Sean
 x_1 = Cantidad de sombreros tipo 1 por dfa.
 x_2 = Cantidad de sombreros tipo 2 por dfa.



Maximizar $z = 8x_1 + 5x_2$ sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$

$$x_1 \leq 150, x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Vea la figura B.4: $x_1 = 100, x_2 = 200, z = \1800 en el punto *B*.
- (b) \$4 por sombrero tipo 2 en el intervalo $(200, 500)$.
- (c) Ningún cambio porque el precio dual es de \$0 por unidad en el intervalo $(100, \infty)$.
- (d) \$1 por unidad en el intervalo $(100, 400)$. Incremento máximo = 200 de tipo 2.

Conjunto 3.6b

3. (a) $0 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$.
- (b) Nueva $\frac{c_1}{c_2} = 1$. La solución no cambia.

Conjunto 3.6c

2. (a) Sí, porque el ingreso adicional por min = \$1 (hasta por 10 minutos de tiempo extra) excede el costo adicional de \$.83/min.
- (b) El ingreso adicional es de \$2/min (por hasta 400 min de tiempo extra) = \$240 por 2 horas. Costo adicional por 2 horas = \$110. Ingreso neto = \$130.
- (c) No, su precio dual es cero porque el recurso ya es abundante.
- (d) $D_1 = 10$ min. Precio dual = \$1/min para $D_1 \leq 10, x_1 = 0, x_2 = 105, x_3 = 230$, ingreso neto = $(\$1350 + \$1 \times 10 \text{ min}) - (\frac{\$40}{60} \times 10 \text{ min}) = \1353.33 .
- (e) $D_2 = -15$. Precio dual = \$2/min con $D_2 \geq -20$. Reducción del ingreso = \$30. Reducción del costo = \$7.50. No se recomienda.

6. Sean

x_1 = minutos de radio, x_2 = minutos de TV, x_3 = anuncios en el periódico

Maximizar $z = x_1 + 50x_2 + 10x_3$ sujeto a

$$\begin{aligned}15x_1 + 300x_2 + 50x_3 + s_1 &= 10,000, x_3 - S_2 = 5, \\x_1 + s_3 &= 400, -x_1 + 2x_2 + s_4 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\s_1, S_2, s_3, s_4 &\geq 0\end{aligned}$$

- (a) $x_1 = 59.09$ min, $x_2 = 29.55$ min, $x_3 = 5$ anuncios en periódico, $z = 1561.36$.
 (b) Con TORA, $z = +.158s_1 + 2.879S_2 + 0s_3 + 1.364s_4 = 156.364$. Los precios duales de las restricciones respectivas son $.158, -2.879, 0$ y 1.364 . El límite inferior impuesto a los anuncios en periódicos puede reducirse porque su precio dual es negativo ($= -2.879$). No hay ninguna ventaja al incrementar el límite superior de los minutos de radio porque su precio dual es cero (el límite actual ya es abundante).
 (c) Con TORA, $x_1 = 59.9091 + .00606D_1 \geq 0, x_3 = 5, s_3 = 340.90909 + .00606D_1 \geq 0, x_2 = 29.54545 + .00303D_1 \geq 0$. Por lo tanto, el precio dual $= .158$ en el intervalo $-97.50 \leq D_1 \leq 56.250$. Se recomienda un incremento de 50% en el presupuesto ($D_1 = \$5000$) porque el precio dual es positivo.

- 11.** (a) Escaso: Recurso del resistor y capacitor; abundante: recurso del chip.
 (b) Los valores por unidad de resistor, capacitor y chips son $\$1.25, \2.25 y $\$0$.
 (c) Cambiar $D_3 = 350 - 800 = -450$ queda fuera del intervalo de factibilidad $D_3 \geq -400$. Por consiguiente el problema debe ser resuelto de nuevo.
13. (b) Solución $x_1 = x_2 = 2 + \frac{\Delta}{3}$ es factible para todas las $\Delta > 0$. Para $0 < \Delta \leq 3$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} \leq 1 \Rightarrow$ factibilidad confirmada. Para $3 \leq \Delta < 6$ $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} > 1 \Rightarrow$ factibilidad no confirmada. Para $\Delta > 6$, el cambio queda fuera de los intervalos de D_1 y D_2 .

Conjunto 3.6d

- 2.** (a) x_1 = latas de A1, x_2 = latas de A2, x_3 = latas de BK.

Maximizar $z = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, x_1 \geq 100, 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 0$$

Óptima: $x_1 = 166.67, x_2 = 333.33, x_3 = 0, z = 36666.67$.

- (b) Con TORA, el costo reducido por lata de BK = 10. El precio debe incrementarse más de 10 centavos.
 (c) $d_1 = d_2 = d_3 = -5$ centavos. Con TORA, los costos reducidos de las variables no básicas son

$$x_3: 10 + d_2 - d_3 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_1: 73.33 + .67d_2 + .33d_1 \geq 0, \text{satisfecha}$$

$$s_3: 1.67 - .17d_2 + .17d_1 \geq 0, \text{satisfecha}$$

La solución no cambia.

5. (a) x_i = unidades de motor $i, i = 1, 2, 3, 4$.

Maximizar $z = 60x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 30x_4$, sujeto a

$$\begin{aligned}8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 &\leq 8000, x_1 \leq 500, x_2 \leq 500, \\x_3 &\leq 800, x_4 \leq 750, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{aligned}$$

Óptima: $x_1 = 500, x_2 = 500, x_3 = 375, x_4 = 0, z = \$59,375$

- (b) Con TORA, $8.75 + d_2 \geq 0$. El precio del motor tipo 2 se puede reducir hasta en \$8.75.

- (c) $d_1 = -\$15, d_2 = -\$10, d_3 = -\$6.25, d_4 = -\7.50 . Con TORA,

$$x_4: 7.5 + 1.5d_3 - d_4 \geq 0, \text{satisficha}$$

$$s_1: 6.25 + .25d_3 \geq 0, \text{satisficha}$$

$$s_2: 10 - 2d_3 + d_1 \geq 0, \text{satisficha}$$

$$s_3: 8.75 - 1.25d_3 + d_2 \geq 0, \text{satisficha}$$

La solución no cambia, pero z se reducirá en 25%.

- (d) Costo reducido de $x_4 = 7.5$. El precio aumenta más de \$7.50.

Conjunto 3.6e

5. El precio dual para la restricción de inversión $x_{1A} + x_{1B} \leq 100$ es de \$5.10 por dólar invertido para *cualquier* cantidad de inversión.
9. (a) El precio dual de la materia prima A es de \$10.27. El costo de \$12.00 por lb excede el ingreso esperado. Por consiguiente, no se recomienda la compra de materia prima adicional.
- (b) El precio dual de la materia prima B es de \$0. El recurso ya es abundante y no se justifica ninguna compra adicional.

CAPÍTULO 4

Conjunto 4.1a

2. Sean y_1, y_2 y y_3 las variables duales.

Maximizar $w = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ sujeto a

$$\begin{aligned}y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\leq 15, 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 12 \\y_1 &\geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ irrestrictas}\end{aligned}$$

4. (c) Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $z = 5y_1 + 6y_2$ sujeto a

$$\begin{aligned}2y_1 + 3y_2 &= 1, y_1 - y_2 = 1 \\y_1, y_2 &\text{ irrestrictas}\end{aligned}$$

5. La restricción dual asociada con las variables artificiales es $y_2 \geq -M$. Matemáticamente, $M \rightarrow \infty \Rightarrow y \geq -\infty$, lo cual equivale a que y_2 no esté restringida.

Conjunto 4.2a

1. (a) \mathbf{AV}_1 no está definida

$$(e) \mathbf{V}_2\mathbf{A} = (-14 \quad -32)$$

Conjunto 4.2b

1. (a) Inversa =
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conjunto 4.2c

3. Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $w = 30y_1 + 40y_2$ sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 5, 5y_1 - 5y_2 \geq 2, 2y_1 - 6y_2 \geq 3 \\ y_1 &\geq -M (\Rightarrow y_1 \text{ irrestricta}), y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución: $y_1 = 5, y_2 = 0, w = 150$

6. Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $w = 3y_1 + 4y_2$ sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 1, 2y_1 - y_2 \geq 5, y_1 \geq 3 \\ y_2 &\text{ irrestricta} \end{aligned}$$

Solución $y_1 = 3, y_2 = -1, w = 5$

8. (a) $(x_1, x_2) = (3, 0), z = 15; (y_1, y_2) = (3, 1), w = 14$. Intervalo (14, 15)

9. (a) La solución dual no es factible; de ahí que no puede ser óptima aun cuando $z = w = 17$.

Conjunto 4.2d

2. (a) Factibilidad: $(x_2, x_4) = (3, 15) \Rightarrow$ factible.

Optimalidad: Costos reducidos de $(x_1, x_3) = (0, 2) \Rightarrow$ óptima.

4.

| Básica | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | Solución |
|--------|-------|-------|----------------|----------------|-------|----------------|
| z | 0 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{12}{5}$ |
| x_1 | 1 | 0 | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{4}{5}$ |
| x_2 | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | 0 | $\frac{6}{5}$ |
| x_5 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |

La solución es óptima y factible.

7. Valor objetivo: A partir de la primal, $z = c_1x_1 + c_2x_2$ y desde la dual $w = b_2y_1 + b_2y_2 + b_3y_3, b_1 = 4, b_2 = 8, c_1 = 2, c_2 = 5 \Rightarrow z = w = 34$.

Conjunto 4.3a

2. (a) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) = unidades diarias SC320, SC325, SC340 y SC370

Maximizar $z = 9.4x_1 + 10.8x_2 + 8.75x_3 + 7.8x_4$ sujeto a

$$10.5x_1 + 9.3x_2 + 11.6x_3 + 8.2x_4 \leq 4800$$

$$20.4x_1 + 24.6x_2 + 17.7x_3 + 26.5x_4 \leq 9600$$

$$3.2x_1 + 2.5x_2 + 3.6x_3 + 5.5x_4 \leq 4700$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 100, x_3 \geq 100, x_4 \geq 100$$

- (b) Sólo se puede incrementar la capacidad del estanado porque su precio dual es positivo ($= .4944$).
- (c) Los precios duales correspondientes a las cotas inferiores son ≤ 0 ($- .6847$, -1.361 , 0 y -5.3003), lo que significa que las cotas tienen un efecto adverso en la rentabilidad.
- (d) El precio dual del estanado es de $\$.4944/\text{min}$ válido en el intervalo $(8920, 10201.72)$, el cual corresponde a un incremento máximo de la capacidad de sólo 6.26% .

Conjunto 4.3b

2. El nuevo camión de bomberos es rentable debido a su costo reducido $= -2$.
3. Las piezas PP3 y PP4 no forman parte de la solución óptima. Los costos reducidos actuales son $.1429$ y 1.1429 . Por consiguiente, la tasa de deterioro del ingreso por unidad es de $\$.1429$ para PP3 y de $\$1.1429$ para PP4.

Conjunto 4.4a

1. (b) No, porque el punto E es factible, y el simplex dual debe permanecer no factible hasta que se alcance el óptimo.
4. (c) Agregue la restricción artificial $x_1 \leq M$. El problema no tiene una solución factible.

Conjunto 4.5a

4. Sea Q la cantidad de alimento semanal en lb ($= 5200, 9600, 15000, 20000, 26000, 32000, 38000, 42000$, correspondientes a las semanas 1, 2, ..., y 8). Solución óptima: Piedra caliza (calcio) $= .028Q$, maíz $= .649Q$ y soya $.323Q$. Costo $= .81221Q$.

Conjunto 4.5b

1. (a) La restricción adicional es redundante.

Conjunto 4.5c

2. (a) Nuevos valores duales $= (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$. La solución actual permanece óptima.
- (c) Nuevos valores duales $= (-\frac{1}{8}, \frac{11}{4}, 0, 0)$. $z = .125s_1 + 2.75s_2 = 13.5$. Nueva solución: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4, z = 14$.

Conjunto 4.5d

1. $\frac{p}{100}(y_1 + 3y_2 + y_3) - 3 \geq 0$. Para $y_1 = 1, y_2 = 2$, y $y_3 = 0$, $p \geq 42.86\%$.
3. (a) Costo reducido de los camiones de bomberos = $3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 5 = 2 > 0$. Los camiones de bomberos no son rentables.

CAPÍTULO 5**Conjunto 5.1a**

4. Asigne un costo muy alto, M , a la ruta de Detroit al destino ficticio.
6. (a y b) Use $M = 10,000$. La solución se muestra en negritas. Costo total = \$49,710.

| | 1 | 2 | 3 | Oferta |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------------------|--------|
| Planta 1 | 600 | 700 | 400 | 25 |
| Planta 2 | 320 | 300 | 350 | 40 |
| Planta 3 | 23 | 17 | | |
| Excedente en planta 4 | 500 | 480 | 450 | 30 |
| | 25 | 5 | | |
| Demandada | 1000 | 1000 | M | 13 |
| | 13 | | | |
| Demandada | 36 | 42 | 30 | |

- (c) Costo excedente en la ciudad 1 = \$13,000.
9. La solución (en millones de galones) se muestra en negritas. En el área 2 habrá un faltante de 2 millones de galones. Costo total = \$304,000.

| | A1 | A2 | A3 | Oferta |
|-------------|-----------------------|----------|-----------------------|--------|
| Refinería 1 | 12 | 18 | M | 6 |
| Refinería 2 | 4 | 2 | | 5 |
| Refinería 3 | 30 | 10 | 8 | 6 |
| Ficticia | 20 | 25 | 12 | 6 |
| | 4 | 50 | 50 | 2 |
| Demandada | M | 2 | | |
| | 4 | 8 | 7 | |

Conjunto 5.2a

2. Costo total = \$804. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

| Día | Nuevas | Servicio de afilado | | | |
|-----------|--------|---------------------|----------|----------|------------|
| | | Durante la noche | a 2 días | a 3 días | Desechadas |
| lunes | 24 | 0 | 6 | 18 | 0 |
| martes | 12 | 12 | 0 | 0 | 0 |
| miércoles | 2 | 14 | 0 | 0 | 0 |
| jueves | 0 | 0 | 20 | 0 | 0 |
| viernes | 0 | 14 | 0 | 0 | 4 |
| sábado | 0 | 2 | 0 | 0 | 12 |
| domingo | 0 | 0 | 0 | 0 | 22 |

5. Costo total = \$190,040. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

| Periodo | Capacidad | Cantidad producida | Entrega |
|---------|-----------|--------------------|--|
| 1 | 500 | 500 | 400 para el (periodo) 1 y 100 para el 2 |
| 2 | 600 | 600 | 200 para el 2, 220 en el 3 y 180 para el 4 |
| 3 | 200 | 200 | 200 para el 3 |
| 4 | 300 | 200 | 200 para el 4 |

Conjunto 5.3a

1. (a) Noroeste: costo = \$42. Costo mínimo = \$37. Vogel: costo = \$37.

Conjunto 5.3b

5. (a) Costo = \$1475. (b) $c_{12} \geq 3, c_{13} \geq 8, c_{23} \geq 13, c_{31} \geq 7$.

Conjunto 5.4a

5. Use el código (ciudad, fecha) para definir las filas y columnas del problema de asignación. Ejemplo: La asignación (D,3)-(A,7) significa salir de Dallas el 3 de enero y regresar de Atlanta el 7 de junio a un costo de \$400. La solución se muestra en negritas. Costo = \$1180. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

| | (A, 7) | (A, 12) | (A, 21) | (A, 28) |
|---------|--------|---------|---------|---------|
| (D, 3) | 400 | 300 | 300 | 280 |
| (D, 10) | 300 | 400 | 300 | 300 |
| (D, 17) | 300 | 300 | 400 | 300 |
| (D, 25) | 300 | 300 | 300 | 400 |

6. Asignación óptima: I-d, II-c, III-a, IV-b.

CAPÍTULO 6

Conjunto 6.1a

1. Para la red (i): (a) 1-3-4-2. (b) 1-5-4-3-1. (c y d) Vea la figura B.5.

5. Nombre los cuadrados en secuencia como A, B, ..., H comenzando en el cuadrado superior izquierdo en la primera fila. Cada cuadrado es un nodo con los cuadrados adyacentes conectados por arcos. Cada uno de los nodos D y E tiene el máximo de arcos que emanan y por consiguiente deben ser reemplazados con los dos números que tienen más números no adyacentes, sea saber, los números 1 y 8. Este problema tiene más de una solución. Vea la figura B6.

Conjunto 6.2a

2. (a) 1-2, 2-5, 5-6, 6-4, 4-3. Longitud total = 12 millas.
 5. Alta presión: 1-2-3-4-6. Baja presión: 1-5-7 y 5-9-8.

Conjunto 6.3a

1. Compre un auto nuevo en los años 1 y 4. Costo total = \$8900. Vea la figura B.7.
 4. Para el arco $(i, v_i) - (i + 1, v_{i+1})$, defina $p(q) = \text{valor} (\text{número del artículo } i)$. Solución: Seleccione una unidad de cada uno de los artículos 1 y 2. Valor total = \$80. Vea la figura B.8.

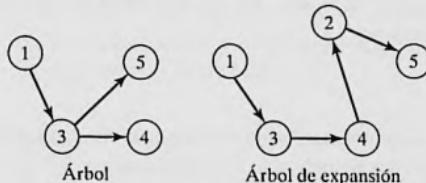


FIGURA B.5



FIGURA B.6

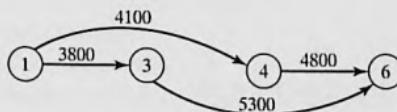


FIGURA B.7

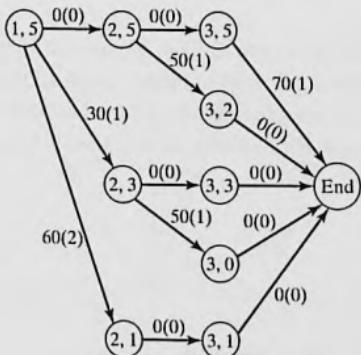


FIGURA B.8

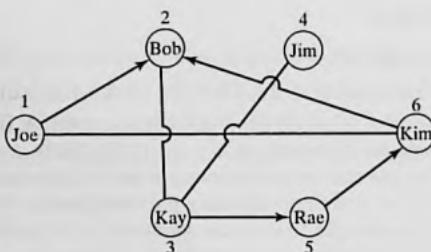


FIGURA B.9

Conjunto 6.3b

1. (c) Elimine todos los nodos excepto 4, 5, 6, 7 y 8. Distancia más corta = 8 asociada con las rutas 4-5-6-8 y 4-6-8.

Conjunto 6.3c

1. (a) 5-4-2-1, distancia = 12.
 4. La figura B.9 resume la solución. Cada arco tiene longitud unitaria. Las flechas indican las rutas en una dirección. Solución del ejemplo: Bob a Joe: Bob-Kay-Rae-Kim-Joe. Máximo de contactos = 4.

Conjunto 6.3d

1. (a) El lado derecho de las ecuaciones correspondientes a los nodos 1 y 5 son 1 y -1, respectivamente, todos los demás = 0. Solución óptima: 1-3-5 o 1-3-4-5, distancia = 90.

Conjunto 6.4a

1. Corte 1: 1-2, 1-4, 3-4, 3-5, capacidad = 60.

Conjunto 6.4b

1. (a) Capacidades excedentes: arco (2-3) = 40, arco (2-5) = 10, arco (4-3) = 5.
 (b) Nodo 2: 20 unidades, nodo 3: 30 unidades, nodo 4: 20 unidades.
 (c) No, porque no hay capacidad excedente en el nodo 1.
 7. El máximo de tareas es 4. Rif-3, Mai-1, Ben-2, Kim-5. Ken no tiene tarea alguna.

Conjunto 6.5a

3. Vea la figura B.10.

Conjunto 6.5b

1. Ruta crítica: 1-3-4-5-6-7. Duración = 19.

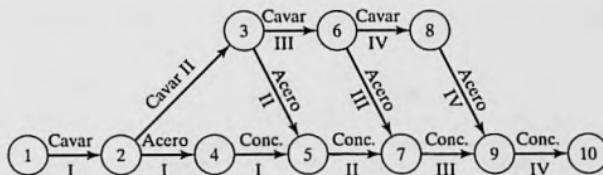


FIGURA B.10

Conjunto 6.5c

3. (a) 10. (b) 5. (c) 0.
 5. (a) Ruta crítica: 1-3-6, duración = 45 días.
 (b) A, D y E.
 (c) Cada una de las actividades C, D y G se demorarán 5 días. E no se verá afectada.
 (d) Equipo mínimo = 2 unidades.

CAPÍTULO 7**Conjunto 7.1a**

2. Los puntos $(1,0)$ y $(0,2)$ están en Q , pero $\lambda(1,0) + (1 - \lambda)(0,2) = (\lambda, 2 - 2\lambda)$ no quedan en Q para $0 < \lambda < 1$.

Conjunto 7.1b

2. (b) Solución única con $x_1 > 1$ y $0 < x_2 < 1$. Vea la figura B.11.
 (d) Una infinitud de soluciones.
 (f) Ninguna solución.
 3. (a) Base porque $\det \mathbf{B} = -4$.
 (d) No es una base porque una base debe incluir exactamente 3 vectores independientes.

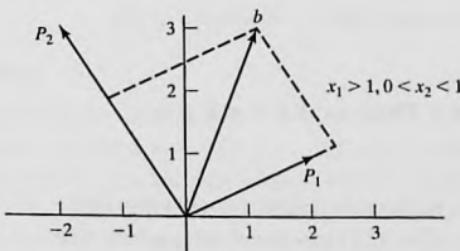


FIGURA B.11

Conjunto 7.1c

1.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} .3 & -.2 \\ .1 & .1 \end{pmatrix}$$

| Básica | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | Solución |
|--------|-------|-------|-------|-------|----------|
| z | 1.5 | -.5 | 0 | 0 | 21.5 |
| x_3 | 0 | .5 | 1 | 0 | 2 |
| x_4 | .5 | 0 | 0 | 1 | 1.5 |

La solución es factible pero no óptima.

4. Óptima $z = 34$.

Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$ sujeto a $x_1 \leq 4, x_2 \leq 6, x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0$

Conjunto 7.2a

1. (a) \mathbf{P}_1 debe salir.

(b) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ es una base factible.

2. Para el vector básico \mathbf{X}_B , tenemos

$$(z_j - c_j) = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B \mathbf{I} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B - \mathbf{c}_B = \mathbf{0}$$

7. El número de puntos extremos adyacentes es $n - m$, suponiendo que no hay degeneración.

10. En el caso de degeneración, la cantidad de puntos extremos es menor que la de soluciones básicas, de lo contrario son iguales.

11. (a) nueva $x_j = \frac{1}{\alpha}$ vieja x_j .

(b) nueva $x_j = \frac{\beta}{\alpha}$ vieja x_j .

Conjunto 7.2b

2. (b) $(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 2, 0)$, $z = 5$.

Conjunto 7.3a

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, .75, 1, 0, 1)$, $z = 22$.

Conjunto 7.4a

2. Maximizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeto a $\mathbf{YA} \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{Y} \geq 0$.

Conjunto 7.4b

5. Método 1: $(b_1, b_2, b_3) = (4, 6, 8) \Rightarrow$ valor objetivo dual = 34.

Método 2: $(c_1, c_2) = (2, 5) \Rightarrow$ valor objetivo primal = 34.

6. Minimizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeto a $\mathbf{YA} = \mathbf{C}$, \mathbf{Y} no restringida.

Conjunto 7.5a

1. $-\frac{2}{7} \leq t \leq 1$

2. (a)

| Solución básica | Intervalo aplicable de t |
|---|---------------------------------------|
| $(x_2, x_3, x_6) = (5, 30, 10)$ | $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ |
| $(x_2, x_3, x_1) = (\frac{25}{4}, \frac{90}{4}, 5)$ | $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{5}{2}$ |
| $(x_2, x_4, x_1) = (\frac{5}{2}, 15, 20)$ | $\frac{5}{2} \leq t \leq \infty$ |

5. $\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = (4 - \frac{3t}{2} - \frac{3t^2}{2}, 1 - t^2, 2 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2})$. La base permanece óptima en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Conjunto 7.5b

- (a) $t_1 = 10, B_1 = (P_2, P_3, P_4)$
- En $t = 0$ $(x_1, x_2, x_3) = (0.4, 1.8, 1)$. Permanece básica en el intervalo $0 \leq t \leq 1.5$. Ninguna solución factible con $t > 1.5$.

CAPÍTULO 8**Conjunto 8.1a**

- G_5 : Minimizar $s_5^+, 55x_p + 3.5x_f + 5.5x_s - .0675x_g + s_5^- - s_5^+ = 0$.
- Sea x_1 = Cantidad de estudiantes del primer año en el estado, x_2 = estudiantes de primer año de fuera del estado, x_3 = estudiantes de primer año internacionales.

G_i : Minimizar $s_i^-, i = 1, 2, \dots, 5$, sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 + s_1^- - s_1^+ = 1200$,

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + s_2^- - s_2^+ = 0, - .1x_1 - .1x_2 + .9x_3 + s_3^- - s_3^+ = 0,$$

$$.125x_1 - .05x_2 - .556x_3 + s_4^- - s_4^+ = 0, -.2x_1 + .8x_2 - .2x_3 + s_5^- - s_5^+ = 0$$

Todas las variables son no negativas.

- Sea x_j = Cantidad de corridas de producción en el turno $j, j = 1, 2, 3$.

Minimizar $z = s_1^- + s_1^+$, sujeto a $-100x_1 + 40x_2 - 80x_3 + s_1^- - s_1^+ = 0$,

$$4 \leq x_1 \leq 5, 10 \leq x_2 \leq 20, 3 \leq x_3 \leq 20$$

Conjunto 8.2a

- Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^- + s_3^- + s_4^+ + s_5^+$

Solución: $x_p = .0201, x_f = .0457, x_s = .0582, x_g = 2$ centavos, $= 1.45$

El impuesto sobre la gasolina se queda a \$1.45 millones del objetivo.

- x_1 = lb de piedra caliza/día, x_2 = libra de maíz/día, x_3 = lb de soya/día.

Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^+ + s_3^- + s_4^+ + s_5^+$

Solución: $x_1 = 166.08$ lb, $x_2 = 2778.56$ lb, $x_3 = 3055.36$ lb, $z = 0$. El problema tiene soluciones óptimas alternativas. Todos los objetivos se satisfacen, pero los objetivos 3 y 4 se sobresatisfacen.

7. x_j = Cantidad de unidades del producto $j, j = 1, 2$.

Asigne un peso relativamente alto a las restricciones de cuota.

Función objetivo: Minimizar $z = 100s_1^- + 100s_2^- + s_3^+ + s_4^+$

Solución: $x_1 = 80$, $x_2 = 60$, $s_3^+ = 100$ minutos, $s_4^+ = 120$ minutos.

Las cuotas de producción se pueden satisfacer con 100 minutos de tiempo extra para la máquina 1 y 120 minutos de tiempo extra para la máquina 2.

Conjunto 8.2b

2. Solución de G_1 : $x_p = .01745$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 21.33$,

$s_4^+ = 19.33$, todas las demás = 0. Los objetivos G_1 , G_2 y G_3 satisfacen, G_4 no.

Problema G_4 : Las mismas restricciones que G_1 más $s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s_3^- = 0$.

Solución de G_4 : $x_p = .0201$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 2$, $s_3^+ = 1.45$. Todas las demás variables = 0. El objetivo de G_5 no se satisface.

Problema G_5 : Igual que G_4 más $s_4^+ = 0$.

Solución de G_5 : Igual que G_4 , lo que significa que el objetivo 5 no se puede satisfacer ($s_5^+ = 1.45$).

CAPÍTULO 9

Conjunto 9.1a

3. x_{ij} = Cantidad de botellas de tipo i asignadas al individuo j , donde $i = 1$ (llena), 2 (medio llena), 3 (vacía).

Restricciones:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7, x_{21} + x_{22} + x_{23} = 7, x_{31} + x_{32} + x_{33} = 7$$

$$x_{11} + .5x_{21} = 3.5, x_{12} + .5x_{22} = 3.5, x_{13} + .5x_{23} = 3.5$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7, x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7, x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7$$

Todas las x_{ij} son enteros no negativos.

Solución: Use una función objetivo ficticia.

| Estado | Cantidad de botellas asignadas al individuo | | |
|-------------|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| Llena | 1 | 3 | 3 |
| Medio llena | 5 | 1 | 1 |
| Vacía | 1 | 3 | 3 |

6. y = Suma original de dinero, x_j = Cantidad tomada en la noche $j, j = 1, 2, 3$.

x_4 = Cantidad entregada a cada marinero por el primer oficial.

Minimizar $z = y$ sujeto a $3x_1 - y = 2, x_1 + 3x_2 - y = 2, x_1 + x_2 + 3x_3 - y = 2, y - x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1$. Todas las variables son enteros no negativos.

Solución: $y = 79 + 81n, n = 0, 1, 2, \dots$ y mínima = 79.

10. Lado 1: 5, 6 y 8 (27 minutos). Lado 2: 1, 2, 3, 4 y 7 (28 minutos). El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

12. $x_{ij} = 1$ si el estudiante i selecciona el curso j , y cero de lo contrario, c_{ij} = calificación de preferencia asociada, C_j = capacidad del curso j . Maximizar $z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}$ sujeto a $\sum_{j=1}^6 x_{ij} = 2, i = 1, 2, \dots, 10, \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq C_j, j = 1, 2, \dots, 6$

Solución: Curso 1:estudiantes (2, 4, 9), 2: (2, 8), 3: (5, 6, 7, 9), 4: (4, 5, 7, 10), 5: (1, 3, 8, 10), 6: (1, 3). Calificación total = 1775.

Conjunto 9.1b

1. Sea $x_j = 1$ si se selecciona la ruta j y 0 si no es así. Distancia total de la ruta ABC, 1, 2, 3, 4, ABC) = $10 + 32 + 4 + 15 + 9 = 80$ millas.

Minimizar $z = 80x_1 + 50x_2 + 70x_3 + 52x_4 + 60x_5 + 44x_6$ sujeto a

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1, x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1, x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 \geq 1, x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1, x_j = (0, 1), \text{ para todas las } j.$$

Solución: Seleccione las rutas (1, 4, 2) y (1, 3, 5), $z = 104$. El cliente 1 debe ser saltado en una de las dos rutas.

2. Solución: el comité de 3 miembros se forma con los individuos a, d y f . El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

7. $x_t = 1$ si se selecciona el transmisor t , 0 si no es así, $x_c = 1$ si se sirve a la comunidad c , 0 si no es así, c_t = costo del transmisor t . S_c = conjunto de transmisores que sirven a la comunidad c , P_j = población de la comunidad j .

Maximizar $z = \sum_{c=1}^{15} P_c x_c$ sujeto a

$$\sum_{t \in S_c} x_t \geq x_c, c = 1, 2, \dots, 15, \sum_{t=1}^7 c_t x_t \leq 15$$

Solución: Construir los transmisores 2, 4, 5, 6 y 7. Se sirve a todas las comunidades excepto a la 1.

Conjunto 9.1c

2. Sea x_j = cantidad de artefactos producidos en la máquina $j, j = 1, 2, 3$. $y_j = 1$ si se utiliza la máquina j y 0 si no es así. Minimizar $z = 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 300y_1 + 100y_2 + 200y_3$ sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2000, x_1 - 600y_1 \leq 0, x_2 - 800y_2 \leq 0, x_3 - 1200y_3 \leq 0, x_1, x_2, x_3 \geq 500$ y enteros, $y_1, y_2, y_3 = (0, 1)$.

Solución: $x_1 = 600, x_2 = 500, x_3 = 900, z = \$11,300$.

3. Solución: El sitio 1 se asigna a los destinos 1 y 2, y el sitio 2 se asigna a los destinos 3 y 4, $z = 18$.
10. x_e = cantidad de boletos (sencillos) de Eastern, x_u = cantidad de boletos de US Air, x_c = cantidad de boletos de Continental. e_1 y e_2 son variables binarias, u y c son enteros no negativos. Maximizar $z = 1000(x_e + 1.5x_u + 1.8x_c + 5e_1 + 5e_2 + 10u + 7c)$ sujeto a $e_1 \leq x_e/2$, $e_2 \leq x_e/6$, $u \leq x_u/6$ y $c \leq x_c/5$, $x_e + x_u + x_c = 12$.
 Solución: Compre 2 boletos en Eastern y 10 boletos en Continental. Bonificación = 39,000 millas.

Conjunto 9.1d

1. Sea x_{ij} = Cantidad entera asignada al cuadrado (i,j) . Use una función objetivo ficticia con todos los coeficientes cero.

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 15, i = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^3 x_{ij} = 15, j = 1, 2, 3,$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{33} = 15, x_{31} + x_{22} + x_{13} = 15,$$

$$(x_{11} \geq x_{12} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{12} - 1), (x_{11} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{13} - 1),$$

$$(x_{12} \geq x_{13} + 1 \text{ o } x_{12} \leq x_{13} - 1), (x_{11} \geq x_{21} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{21} - 1),$$

$$(x_{11} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{11} \leq x_{31} - 1), (x_{21} \geq x_{31} + 1 \text{ o } x_{21} \leq x_{31} - 1),$$

$$x_{ij} = 1, 2, \dots, 9, \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

Solución:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Soluciones alternativas: Intercambie las filas 1 y 3 o las columnas 1 y 3.

3. x_j = Cantidad de unidades diarias del producto j .

Maximizar $z = 25x_1 + 30x_2 + 22x_3$ sujeto a

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 100 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 90 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 120 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y entero}$$

Solución. Producir 26 unidades del producto 1, 3 del producto 2, ninguna del producto 3, y utilizar la ubicación 2.

12. Defina $v = zw$, $v \leq z$, $v \leq w$, $v \geq z + w - 1$, $0 \leq v \leq 1$, z y w binarias.

Conjunto 9.2a²

2. (a) $z = 6, x_1 = 2, x_2 = 0.$
 (b) $z = 12, x_1 = 0, x_2 = 3.$
3. (a) $z = 7.25, x_1 = 1.75, x_2 = 1.$
 (d) $z = 10.5, x_1 = .5, x_2 = 2.$
9. PLE equivalente 0-1:

Maximizar $z = 18y_{11} + 36y_{12} + 14y_{21} + 28y_{22} + 8y_{31} + 16y_{32} + 32y_{33}$
 sujeto a $15y_{11} + 30y_{12} + 12y_{21} + 24y_{22} + 7y_{31} + 14y_{32} + 28y_{33} \leq 43.$

Todas las variables son binarias.

Solución: $z = 50, y_{12} = 1, y_{21} = 1$, todas las demás = 0. De forma equivalente,
 $x_1 = 2, x_2 = 1$. La versión 0-1 requirió 41 nodos. La original requiere 29.

Conjunto 9.2b

1. (a) Corte legítimo porque pasa por un punto entero y no elimina a ningún punto entero factible. Puede verificar este resultado trazando el corte en el espacio de soluciones de programación lineal.
2. (a) Solución entera óptima: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 6), z = 26.$
 Solución redondeada: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 6)$ — no factible.

CAPÍTULO 10**Conjunto 10.2A**

6. Maximizar $z = 15(t/100)(53 - 100(t/100)), 10 \leq t \leq 60$

La demanda será cero en $t = 53$. Por lo tanto, la búsqueda se puede limitar al intervalo $(10, 53)$. Inicie la búsqueda en $t = 10\%$.

Conjunto 10.3C

4. Represente un cromosoma con una cadena de diez elementos binarios generados al azar de modo que la carta $i = 0(1)$ signifique que pertenece a la pila 1 (2).
 Aptitud = $|36 - \text{suma de cartas en la pila } 1| + |36 - \text{producto de cartas en la pila } 2|$.

Iteración 0:

P1: 1011011010, Pile 1: (2, 5, 8, 10), Pile 2: (1, 3, 4, 6, 7, 9),

$$z = |36 - 25| + |36 - 4536| = 11 + 4500 = 4511$$

P2: 0011011111, P3: 0100110101, P4: 11001101111

²Use el módulo de programación entera de TORA para generar el árbol de ramificación y acotamiento.

CAPÍTULO 11**Conjunto 11.1a**

3. Cada sitio (más el hotel) representa una ciudad. La tarifa del taxi entre ubicaciones representa la distancia.

Conjunto 11.2a

1. (a) PL para cota inferior:

$$\text{Minimizar } z = 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2r_5$$

sujeto a

$$r_1 + r_2 \leq 120, r_1 + r_3 \leq 220, r_1 + r_4 \leq 150, r_1 + r_5 \leq 210$$

$$r_2 + r_3 \leq 80, r_2 + r_4 \leq 110, r_2 + r_5 \leq 130$$

$$r_3 + r_4 \leq 160, r_3 + r_5 \leq 185$$

$$r_4 + r_5 \leq 190$$

todas las r_i no negativas

- (b) Tanto *amplAssign.txt* como *amplLP.txt* dan una cota inferior de 695 millas. La solución del modelo de asignación incluye subrecorridos (1-4-1, 2-5-3-2), por lo que no es óptima.
6. (a) Cada proyecto representa una ciudad. La tabla siguiente da el número de distintos empleados que entran a y salen de la oficina del gerente cuando se cambia del proyecto i al proyecto j (es decir la cantidad de "x" que no emparejan entre la columna i y la columna j). El objetivo es encontrar un "recorrido" a través de todos los proyectos que minimice el tráfico total.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 5 | |
| 2 | 4 | | 6 | 4 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | | 4 | 8 | 7 |
| 4 | 6 | 4 | 4 | | 6 | 5 |
| 5 | 6 | 6 | 8 | 6 | | 5 |
| 6 | 5 | 3 | 7 | 5 | 5 | |

- (b) Cota inferior obtenida con *solutionAssign.txt* es 26. Aun cuando la cota inferior resultó ser exactamente igual al recorrido mínimo verdadero, la solución de asignación asociada incluye subrecorridos; es decir, 1-3-1, 2-4-5-6-2. El recorrido óptimo obtenido con *amplCut.txt* es 1-2-6-5-4-3-1.

Conjunto 11.3a

3. Vea la figura B.12.

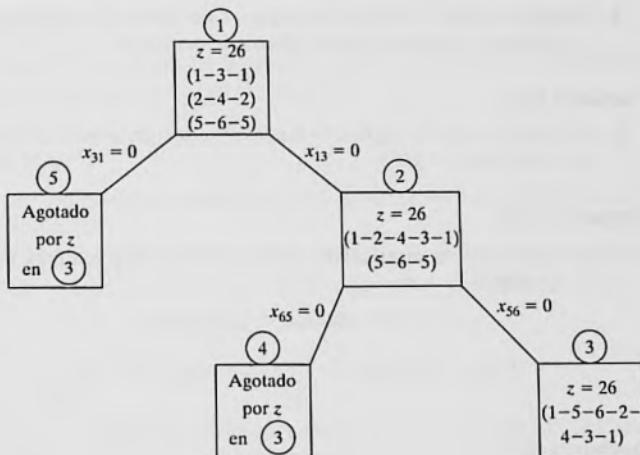


FIGURA B.12

CAPÍTULO 12**Conjunto 12.1a**

1. Solución: Distancia más corta = 21 millas. Ruta 1-3-5-7.

Conjunto 12.2a

3. Solución: Distancia más corta = 17. Ruta: 1-2-3-5-7.

Conjunto 12.3a

2. (a) Solución: Valor = 120. $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 3), (0, 4, 1), (0, 2, 2)$ o $(0, 6, 0)$.
5. Solución: Puntos totales = 250. Seleccione 2 cursos a partir de I, 3 de II, 4 a partir de III y 1 de IV.
7. Sea $x_j = 1$ si se acepta la solicitud j , y 0 si no. El modelo de la mochila equivalente es
 Maximizar $z = 78x_1 + 64x_2 + 68x_3 + 62x_4 + 85x_5$ sujeto a
 $7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leq 23, x_j = (0, 1), j = 1, 2, \dots, 5$
- Solución: Aceptar todas excepto la primera solicitud. Valor = 279.

Conjunto 12.3b

1. (a) Solución: Contratar 6 para la semana 1, contratar 1 para la semana 2, despedir 2 para la semana 3, contratar 3 para la semana 4 y contratar 2 para la semana 5.

3. Solución: Rentar 7 autos en la semana 1, devolver 3 por la semana 2, rentar 4 para la semana 3, y ninguna acción durante la semana 4.

Conjunto 12.3c

2. Decisiones para los siguientes 4 años: Conservar, conservar, reemplazar, conservar. Costo total = \$458.

Conjunto 12.3d

3. (a) Sean x_i y y_i la cantidad de ovejas conservadas y vendidas al final del periodo i , y defina $z_i = x_i + y_i$.

$$f_n(z_n) = \max_{y_n=z_n} \{p_n y_n\}$$

$$f_i(z_i) = \max_{y_i \leq z_i} \{p_i y_i + f_{i+1}(2z_i - 2y_i)\}, i = 1, 2, \dots, n-1$$

CAPÍTULO 13

Conjunto 13.3a

2. (a) Costo total por semana = \$51.50
 (b) Costo total por semana = \$50.20, $y^* = 239.05$ lb.
 4. (a) Seleccionar la política 1 porque su costo por día es de \$2.17 en contraste con \$2.50 para la política 2.
 (b) Política óptima: Pedir 100 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 10 unidades.

Conjunto 13.3b

2. Política óptima: Pedir 500 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 130 unidades. Costo por día = \$258.50.
 4. No hay ventaja alguna si $TCU_1(y_m) \leq TCU_2(q)$, lo cual se traduce en ninguna ventaja si el factor de descuento no excede de .9344%.

Conjunto 13.3c

1. Solución obtenida con AMPL/Solver: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (4.42, 6.87, 4.12, 7.2, 5.8)$, costo = \$568.12,
 4. Restricción: $\sum_{i=1}^4 \frac{365D_i}{y_i} \leq 150$.

Solución obtenida con Solver/AMPL: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (155.3, 118.82, 74.36, 90.09)$, costo = \$54.71.

Conjunto 13.4a

1. (a) 500 unidades requeridas al inicio de los períodos 1, 4, 7 y 10.

Conjunto 13.4b

3. Producir 173 unidades en el periodo 1, 180 en el periodo 2, 240 en el periodo 3, 110 en el periodo 4 y 203 en el periodo 5.

Conjunto 13.4c

- (a) No, porque el inventario no debe mantenerse innecesariamente al final del horizonte.
 (b) (i) $0 \leq z_1 \leq 5, 1 \leq z_2 \leq 5, 0 \leq z_3 \leq 4; x_1 = 4, 1 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 4$.
 (ii) $5 \leq z_1 \leq 12, 0 \leq z_2 \leq 7, 0 \leq z_3 \leq 4; x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 7, 0 \leq x_3 \leq 4$.
- (a) $z_1 = 7, z_2 = 0, z_3 = 6, z_4 = 0$. Costo total = \$33.

Conjunto 13.4d

- Utilizar el inventario inicial para satisfacer toda la demanda del periodo 1 y 4 unidades del periodo 2, y así se reduce la demanda en los cuatro periodos a 0, 22, 90 y 67, respectivamente.
 Solución óptima: Pedir 112 unidades en el periodo 2 y 67 unidades en el periodo 4. Costo total = \$632.

Conjunto 13.4e

- Solución: Producir 210 unidades en enero, 255 en abril, 210 en julio y 165 en octubre.

CAPÍTULO 14**Conjunto 14.1a**

- (a) .15 y .25, respectivamente. (b) .571. (c) .821.
- $n \geq 23$.
- $n > 253$.

Conjunto 14.1b

- $\frac{5}{32}$.
- Sea p = probabilidad de que Liz gane. La probabilidad de que John gane es $3p$, la cual es igual a la probabilidad de que Jim gane. La probabilidad de que Ann gane es $6p$. Debido a que uno de los cuatro gana, $p + 3p + 3p + 3p + 6p = 1$.
 - $\frac{3}{13}$.
 - $\frac{7}{13}$.
 - $\frac{6}{13}$.

Conjunto 14.1c

3. (a) .375. (b) .6.
7. .9545.

Conjunto 14.2a

2. (a) $K = 20$.
3. $P[\text{Demanda} \geq 1100] = .3$.

Conjunto 14.3a

3. (a) $P[50 \leq \text{ejemplares vendidos} \leq 70] = .6667$.
 (b) Cantidad esperada de ejemplares no vendidos = 2.67
 (c) Utilidad neta esperada = \$22.33

Conjunto 14.3b

1. Media = 3.667, varianza = 1.556.

Conjunto 14.3c

1. (a) $P(x_1 = 1) = P(x_2 = 1) = .4$, $P(x_1 = 2) = P(x_2 = 2) = .2$, $P(x_1 = 3) = P(x_2 = 3) = .4$.
 (b) No, porque $P(x_1, x_2) \neq P(x_1)P(x_2)$.

Conjunto 14.4a

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.
2. .0547.

Conjunto 14.4b

1. .8646.
2. (a) $P[n = 0] = 0$.
 (b) $P[n \geq (2 + 1)]$; $P[n \geq 3]$; 1.

Conjunto 14.4c

1. $\lambda = 12 \text{ llegadas/min. } P[t \leq 5 \text{ seg}] = .63$.

Conjunto 14.4d

2. .001435.

CAPÍTULO 15**Conjunto 15.1a**

1. Pesos para A, B y C = (.44214,.25184,.30602).

Conjunto 15.1b

2. CR > .1 para todas las matrices excepto A. $(w_S, w_J, w_M) = (.331, .292, .377)$. Seleccionar Maisa.
4. Todas las matrices son consistentes. $(w_H, w_P) = (.502, .498)$. Seleccionar H.

Conjunto 15.2a

2. (a) Vea la figura B.13.
 (b) EV(maíz) = - \$8250, EV(soya) = \$250. Seleccionar la soya.
6. (a) Vea la figura B.14.
 (b) EV(juego) = - \$.025. No participar en el juego.

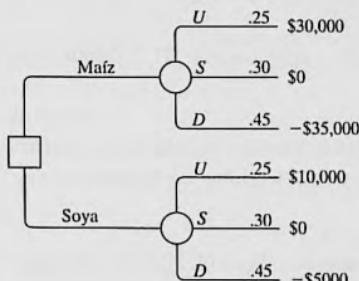


FIGURA B.13

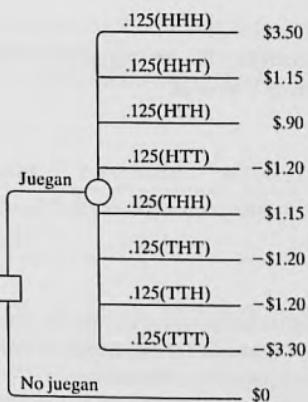


FIGURA B.14

12. Ciclo de mantenimiento óptimo = 8 años. Costo por año = \$397.50.
15. Tasa de producción óptima = 49 piezas por día.
19. El nivel debe estar entre 99 y 151 galones.

Conjunto 15.2b

2. Sea z el evento de tener un artículo defectuoso en una muestra de tamaño 5.
Respuesta: $P\{A|z\} = .6097$, $P\{B|z\} = .3903$.
4. (a) Ingreso esperado si usted publica el libro = \$196,000.
Ingreso esperado si utiliza un editor = \$163,000.
- (b) Si la encuesta predice éxito, publique usted el libro, de lo contrario acuda a un editor.
7. (b) Envíe el lote a B si ambos artículos están defectuosos, de lo contrario envíelo a A .

Conjunto 15.2c

1. (a) Valor esperado = \$5, por consiguiente no hay ventaja alguna.
(b) Para $0 \leq x < 10$, $U(x) = 0$, y para $x = 10$, $U(x) = 100$.
(c) Participe en el juego.
2. Lotería: $U(x) = 100 - 100p$, con $U(-\$1,250,000) = 0$ y $U(\$900,000) = 100$.

Conjunto 15.3a

1. (a) Todos los métodos: Estudiar toda la noche (acción a_1).
(b) Todos los métodos: Seleccionar las acciones a_2 o a_3 .

Conjunto 15.4a

2. (a) Solución de punto de silla en (2, 3). Valor del juego = 4.
(a) $2 < v < 4$.

Conjunto 15.4b

1. Cada jugador debe combinar las estrategias 50-50. Valor del juego = 0.
2. Matriz de retribución de la policía:

| | 100% A | 50% A-50% B | 100% B |
|---|--------|-------------|--------|
| A | 100 | 50 | 0 |
| B | 0 | 30 | 100 |

Estrategia de la policía: Combinar las estrategias 100% A y 100% B al 50-50.
 Estrategia de Robin: Combinar las estrategias A y B al 50-50. Valor del juego = \$50 (= multa esperada pagada por Robin).

Conjunto 15.4c

1. (a) Matriz de retribuciones para el equipo 1:

| | AB | AC | AD | BC | BD | CD |
|----|----|----|----|----|----|----|
| AB | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| AC | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| AD | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| BC | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| BD | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| CD | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Estrategias óptimas de ambos equipos: Combinar AB y CD al 50-50. Valor del juego = 0.

2. (a) $(m, n) = (\text{Regimientos en el Lugar 1}, \text{regimientos en el lugar 2})$. Cada lugar tiene una retribución de 1 si ganó y de -1 si perdió. Por ejemplo, la estrategia de Blotto (1,1) contra la del enemigo (0,3) ganará el lugar 1 y perderá el lugar 2, con una retribución neta de $1 + (-1)$. Matriz de retribuciones para el coronel Blotto:

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 3,0 | 2,1 | 1,2 | 0,3 |
| 2,0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| 1,1 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| 0,2 | 0 | 0 | -1 | -1 |

Estrategia óptima de Blotto: Blotto combina las estrategias (2-0) y (1-2) al 50-50 y el enemigo combina las estrategias (3-0) y (1-2) al 50-50. Valor del juego = -5, y Blotto pierde. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

CAPÍTULO 16**Conjunto 16.1a**

1. (a) Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 537 unidades.

Conjunto 16.1b

2. Solución: $y^* = 317.82$ galones, $R^* = 46.82$ galones.
3. Solución: $y^* = 316.85$ galones, $R^* = 58.73$ galones. En el ejemplo 14.1-2, $y^* = 319.44$ galones, $R^* = 93.61$ galones. La cantidad de pedido no cambia como en el ejemplo 14.1-2 pero R^* es menor porque la fdp de la demanda tiene una varianza menor.

Conjunto 16.2a

3. $.43 \leq p \leq .82$
 6. 32 abrigos.

Conjunto 16.2b

1. Pedir $9 - x$ si $x < 4.53$, de lo contrario no pedir.

Conjunto 16.3a

2. Pedir $4.61 - x$ si $x < 4.61$, de lo contrario no pedir.

CAPÍTULO 17**Conjunto 17.1a**

2. S1: Patrulla en vigilancia
 S2: Patrulla respondiendo a una llamada
 S3: Patrulla en la escena de la llamada
 S4: Aprehensión realizada
 S5: Transporte a la estación de policía

| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| S1 | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 |
| S2 | 0.1 | 0.3 | 0.6 | 0 | 0 |
| S3 | 0.1 | 0 | 0.5 | 0.4 | 0 |
| S4 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.6 |
| S5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Conjunto 17.2a

2. Probabilidades iniciales:

| S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Cadena de Markov de entrada:

| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| S1 | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 |
| S2 | 0.1 | 0.3 | 0.6 | 0 | 0 |
| S3 | 0.1 | 0 | 0.5 | 0.4 | 0 |
| S4 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 0.6 |
| S5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Matriz de transición de salida (2 pasos o 2 patrullajes) (P_2)

| | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|----|------|------|------|------|------|
| S1 | 0.22 | 0.42 | 0.36 | 0 | 0 |
| S2 | 0.13 | 0.15 | 0.48 | 0.24 | 0 |
| S3 | 0.25 | 0.06 | 0.25 | 0.2 | 0.24 |
| S4 | 0.76 | 0.24 | 0 | 0 | 0 |
| S5 | 0.4 | 0.6 | 0 | 0 | 0 |

$$\text{Probabilidades absolutas de 2 pasos} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)P^2$$

| Estado | Absoluta (2 pasos) |
|--------|---------------------|
| S1 | 0.25 |
| S2 | 0.06 |
| S3 | 0.25 |
| S4 | 0.2 |
| S5 | 0.24 |

$$P[\text{aprehensión, S4, en 2 patrullajes}] = .2$$

Conjunto 17.3a

- (a) Utilizando *excelMarkovChains.xls*, la cadena es periódica con periodo de 3.
 (b) Los estados 1, 2 y 3 son transitorios, el estado 4 es absorbente.

Conjunto 17.4a

- (a) Cadena de Markov de entrada:

| | S | C | R |
|---|-----|-----|-----|
| S | 0.8 | 0.2 | 0 |
| C | 0.3 | 0.5 | 0.2 |
| R | 0.1 | 0.1 | 0.8 |

Probabilidades de estado estable:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)P$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Resultados de salida

| Estado | Estado estable | Tiempo de regreso medio |
|--------|----------------|-------------------------|
| S | 0.50 | 2.0 |
| C | 0.25 | 4.0 |
| R | 0.25 | 4.0 |

$$\text{Ingresos esperados} = 2 \times .5 + 1.6 \times .25 + .4 \times .25 = \$1,500$$

- (b) Los días soleados regresarán cada $\mu_{SS} = 2$ días, es decir dos días sin sol.

5. (a) Cadena de Markov de entrada:

| | never | sometimes | always |
|-----------|-------|-----------|--------|
| never | 0.95 | 0.04 | 0.01 |
| sometimes | 0.06 | 0.9 | 0.04 |
| always | 0 | 0.1 | 0.9 |

(b) Resultados de salida

| Estado | Estado estable | Tiempo de regreso medio |
|-----------|----------------|-------------------------|
| never | 0.441175 | 2.2666728 |
| sometimes | 0.367646 | 2.7200089 |
| always | 0.191176 | 5.2307892 |

44.12% never, 36.76% sometimes, 19.11% always

- (c) Impuestos recaudados esperados/año = $.12(\$5000 \times .3676 + 12,000 \times .1911) \times 70,000,000 = \$34,711,641,097.07$

Conjunto 17.5a

1. (a) Probabilidades iniciales:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cadena de Markov de entrada:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | .3333 | .3333 | .3333 | 0 |
| .3333 | 0 | .3333 | 0 | .3333 |
| .3333 | .3333 | 0 | 0 | .3333 |
| .5 | 0 | 0 | 0 | .5 |
| 0 | .3333 | .3333 | .3333 | 0 |

| Estado | Absoluto (3 pasos) | Estado estable |
|--------|--------------------|----------------|
| 1 | .07407 | .214286 |
| 2 | .2963 | .214286 |
| 3 | .2963 | .214286 |
| 4 | .25926 | .142857 |
| 5 | .07407 | .214286 |

- (b) $a_5 = .07407$
 (c) $\pi_5 = .214286$
 (d) $\mu_{15} = 4.6666$.

| | $(I - N)^{-1}$ | | | | Mu |
|---|----------------|-------|-------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 5 | |
| 1 | 2 | 1 | 1 | .6667 | 4.6666 |
| 2 | 1 | 1.625 | .875 | .3333 | 3.8333 |
| 3 | 1 | .875 | 1.625 | .3333 | 3.8333 |
| 4 | 1 | .5 | .5 | 1.3333 | 3.3333 |

5. (a) Cadena de Markov de entrada:

| | A | B | C |
|---|------|------|-----|
| A | .75 | .1 | .15 |
| B | .2 | .75 | .05 |
| C | .125 | .125 | .75 |

| | Estado | Estado estable |
|---|--------|----------------|
| A | | .394737 |
| B | | .307018 |
| C | | .298246 |

A: 39.5%, B: 30.7%, C: 29.8%

| | $(I - N)^{-1}$ | | Mu |
|---|----------------|---------|------------------|
| | A | C | B |
| A | 5.71429 | 3.42857 | A 9.14286 |
| C | 2.85714 | 5.71429 | C 8.57143 |

| | 1 | 2 | C |
|---|---------|---------|------------------|
| A | 5.88235 | 2.35294 | A 8.23529 |
| B | 4.70588 | 5.88235 | B 1.5882 |

A → B, 9.14 años
 A → C: 8.23 años

Conjunto 17.6a

2. (a) Estados: 1 semana, 2 semanas, 3 semanas, biblioteca

| Matriz P: | | | | |
|-----------|---|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | lib |
| 1 | 0 | 0.3 | 0 | 0.7 |
| 2 | 0 | 0 | 0.1 | 0.9 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| lib | 0 | 0 | 0 | 1 |

(b)

| | 1 | 2 | 3 | Mu |
|---|---|-----|-----|------|
| | 1 | 2 | 3 | lib |
| 1 | 1 | 0.3 | .03 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | .01 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | | | | 1.33 |
| | | | | 1.1 |
| | | | | 1 |

Conservo el libro 1.33 semanas en promedio.

8. (a)

| Matriz P: | | | | | |
|-----------|-----|------|------|------|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | F |
| 1 | 0.2 | 0.8 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0.22 | 0.78 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0.25 | 0.75 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 0.7 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

- (b)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | Mu |
|---|------|-------|-------|-------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | F |
| 1 | 1.25 | 1.282 | 1.333 | 1.429 | 1 |
| 2 | 0 | 1.282 | 1.333 | 1.429 | 2 |
| 3 | 0 | 0 | 1.333 | 1.429 | 3 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1.429 | 4 |
| | | | | | 5.29 |
| | | | | | 4.04 |
| | | | | | 2.76 |
| | | | | | 1.43 |

- (c) Para poder llevar el Cal II, el estudiante debe terminar en 16 semanas (4 transiciones) o menos. Promedio de transiciones necesarias = 5.29. Por consiguiente, un estudiante promedio no será capaz de terminar el Cal I a tiempo.
- (d) No, de acuerdo con la respuesta en (c).

CAPÍTULO 18

Conjunto 18.1a

1. (a) Productividad = 71%.
 (b) Los dos requisitos no pueden satisfacerse al mismo tiempo.

Conjunto 18.2a

1.

| Situación | Cliente | Servidor |
|-----------|----------|----------------------------|
| (a) | Avión | Pista de despegue |
| (b) | Pasajero | Taxi |
| (h) | Auto | Espacio de estacionamiento |

Conjunto 18.3a

1. (b) (i) $\lambda = 6$ llegadas por hora, tiempo entre llegadas promedio = $\frac{1}{6}$ horas.
 (c) (i) $\mu = 5$ servicios por hora, tiempo de servicio promedio = .2 horas.
3. (a) $f(t) = 20e^{-20t}, t > 0$.
 (b) $P\{t > \frac{15}{60}\} = .00674$.
7. La retribución de Jim es de 2 centavos con probabilidad $P[t \leq 1] = .4866$ y – 2 centavos con probabilidad $P[t \geq 1] = .5134$. En 8 horas, Jim le paga a Ann = 17.15 centavos.
10. (a) $P[t \leq 4 \text{ minutos}] = .4866$.
 (b) Porcentaje de descuento promedio = 6.208.

Conjunto 18.4a

1. $p_{n \geq 5}(1 \text{ hora}) = .55951$.
4. (a) $p_2(t = 7) = .24167$.
6. (a) Combinados $\lambda = \frac{1}{10} + \frac{1}{7}$, $p_2(t = 5) = .219$.

Conjunto 18.4b

2. (a) $p_0(t = 3) = .00532$.
 (c) $p_{n \leq 17}(t = 1) = .9502$.

5. $p_0(4) = .37116$.
 8. (a) Tamaño de pedido promedio = $25 - 7.11 = 17.89$ artículos.
 (b) $p_0(t = 4) = .00069$.

Conjunto 18.5a

3. (a) $p_{n \geq 3} = .4445$.
 (b) $p_{n \leq 2} = .5555$.
 6. (a) $p_j = .2, j = 0, 1, 2, 3, 4$.
 (b) Cantidad esperada en el taller = 2 clientes.
 (c) $p_4 = .2$.

Conjunto 18.6a

1. (a) $L_q = 1p_6 + 2p_7 + 3p_8 = .1917$ carros.
 (b) $\lambda_{\text{perdida}} = .1263$ autos por hora. Número promedio perdido en 8 horas = 1.01 carros.
 (c) Cantidad de espacios vacíos = $c - (L_s - L_q) = c - \sum_{n=0}^8 np_n + \sum_{n=c+1}^8 (n - c)p_n$.

Conjunto 18.6b

2. (a) $p_0 = .2$.
 (b) Ingreso mensual promedio = $\$50 \times \mu t = \375 .
 (c) Pago esperado = $\$40 \times L_q = \128 .
 5. (a) $p_0 = .4$.
 (b) $L_q = .9$ autos.
 (c) $W_q = 2.25$ min.
 (d) $p_{n \geq 11} = .0036$.
 6. (d) El número de espacios es al menos de 13.

Conjunto 18.6c

1. (a) $p_0 = .3654$.
 (b) $W_q = .207$ horas.
 (c) Cantidad esperada de espacios vacíos = $4 - L_q = 3.212$.
 (d) $p_5 = .04812$.
 (e) Una reducción de 40% disminuye W_s a aproximadamente 9.6 minutos ($\mu = 10$ autos/h).
 4. (a) $p_8 = .6$.
 (b) $L_q = 6.34$ generadores.
 (c) La probabilidad de encontrar un espacio vacío no puede exceder de .4 independientemente de la capacidad de la banda. Esto significa que la mejor utilización del departamento de ensamble es del 60%.

7. (a) $1 - p_5 = .962$.
 (b) $\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_5 = .19$ clientes por hora.

Conjunto 18.6d

2. Para $c = 2$, $W_q = 3.446$ horas y para $c = 4$, $W_q = 1.681$ horas, una mejora de más de 51%.
 5. Sea K la cantidad de espacios en la sala de espera. Aplicando TORA, $p_0 + p_1 + \dots + p_{K+2} \geq .999$ produce $K \geq 10$.
 7. (a) $p_{n \geq 4} = .65772$.
 (e) Promedio de computadoras ociosas = .667 computadoras.

Conjunto 18.6e

2. (c) Utilización = 81.8%.
 (d) $p_2 + p_3 + p_4 = .545$.
 4. (a) $p_{40} = .00014$.
 (b) $p_{30} + p_{31} + \dots + p_{39} = .02453$.
 (d) Cantidad esperada de espacios ocupados = $L_s - L_q = 20.043 - .046 \approx 20$.
 (f) Probabilidad de no encontrar un espacio de estacionamiento = $1 - p_{n \leq 29} = .02467$. La cantidad de estudiantes que pueden estacionarse en un periodo de 8 horas es aproximadamente de 4.

Conjunto 18.6f

2. (a) Aproximadamente 7 asientos.
 (b) $p_{n \geq 8} = .2911$.

Conjunto 18.6g

1. (b) Promedio de mecánicos ociosos = 2.01.
 (d) $P(2 \text{ o } 3 \text{ servidores ociosos}) = p_0 + p_1 = .34492$.
 4. (a) $L_s = 1.25$ máquinas.
 (b) $p_0 = .33342$.
 (c) $W_s = .25$ horas.
 6. $\lambda = 2$ llamadas por hora por bebé, $\mu = .5$ bebés por hora, $R = 5$, $K = 5$.
 (a) Cantidad de bebés despiertos = $5 - L_s = 1$ bebé.
 (b) $p_5 = .32768$.
 (c) $p_{n \leq 2} = .05792$.

Conjunto 18.7a

2. (a) $E[t] = 14$ minutos y $\text{var}[t] = 12$ minutos². $L_s = 7.8672$ carros.

4. $\lambda = .0625$ prescripciones por minuto, $E[t] = 15$ minutos, $\text{var}[t] = 9.33$ minutos².
- $p_0 = .0625$.
 - $L_q = 7.3$ prescripciones
 - $W_s = 132.17$ minutos

Conjunto 18.9a

2. Use $(M/M/1):(GD/10/10)$. El costo por hora es de \$431.50 para el técnico 1 y de \$386.50 con el técnico 2.
4. (b) $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2\lambda}{c_1}}$
- (c) Tasa de producción óptima = 2725 piezas por hora.

Conjunto 18.9b

2. (a) El costo por hora es de \$86.4 con dos técnicos y de \$94.80 con tres.
 (b) Pérdida por descompostura = $\$30 \times W_s = \121.11 con dos técnicos y de \$94.62 con tres.
4. Tasa de descomposturas por máquina, $\lambda = .36125$ por hora, $\mu = 10$ por hora. El modelo $(M/M/3):(GD/20/20)$ resulta $L_s = .70529$ máquinas. Ingreso perdido = \$36.60 y el costo de tres técnicos = \$60.

Conjunto 18.9c

1. (a) Números de técnicos en reparaciones ≥ 5 .
 (b) Número de técnicos en reparaciones ≥ 4 .

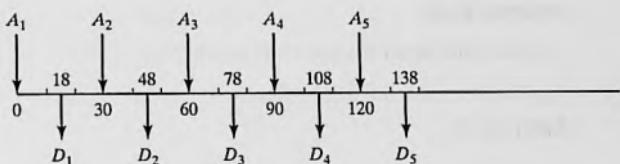
CAPÍTULO 19**Conjunto 19.1a**

4. (a) $P(H) = P/T = .5$. Si $0 \leq R \leq .5$, Jim obtiene \$10.00. Si $.5 < R \leq 1$, Jan obtiene \$10.00.
7. Muestreo del tiempo de espera: Si $0 \leq R \leq .5$, $L = 1$ dfa. Si $.5 < R \leq 1$, $L = 2$ dfas. Demanda por día: Si $0 \leq R \leq .2$, demanda = 0 unidades. Si $.2 < R \leq .9$, demanda = 1 unidad. Si $.9 < R \leq 1$, demanda = 2 unidades. Use una R para muestrear L . Si $L = 1$, use otra R para muestrear la demanda de un día, de lo contrario si $L = 2$, use una R para generar la demanda del dfa 1 y luego otra R para generar la demanda del dfa 2.

Conjunto 19.2a

1. (a) Discreta.

FIGURA B.15

**Conjunto 19.3a**

4. Vea la figura B.15.

Conjunto 19.3b

1. $t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - R)$, $\lambda = 4$ clientes por hora.

| Cliente | R | t (hr) | Tiempo de llegada |
|---------|--------|----------|-------------------|
| 1 | — | — | 0 |
| 2 | 0.0589 | 0.015176 | 0.015176 |
| 3 | 0.6733 | 0.279678 | 0.294855 |
| 4 | 0.4799 | 0.163434 | 0.458288 |

2. $t = a + (b - a)R$.

4. (a) $0 \leq R < .2$: $d = 0$, $.2 \leq R < .5$: $d = 1$, $.5 \leq R < .9$: $d = 2$, $.9 \leq R \leq 1$: $d = 3$.

9. Si $0 \leq R \leq p$, entonces $x = 0$, de lo contrario $x = \left(\text{entero m\'aximo } \leq \frac{\ln(1-R)}{\ln q} \right)$.

Conjunto 19.3c

1. $y = -\frac{1}{10} \ln(.0589 \times .6733 \times .4799 \times .9486) = .401$ horas.

6. $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, donde $x_i = 10 + 10R_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Conjunto 19.4a

1. En el ejemplo 16.4-1, longitud del ciclo = 4. Con los nuevos parámetros el ciclado no fue evidente después de que se generaron 50 números aleatorios. La conclusión es que la juiciosa selección de los parámetros es importante.

Conjunto 19.5a

2. (a) Basado en observaciones.
(b) Basado en el tiempo.
3. (a) 1.48 clientes.
(b) 7.4 horas.

Conjunto 19.6a

2. Intervalo de confianza: $15.07 \leq \mu \leq 23.27$.

CAPÍTULO 20**Conjunto 20.1a**

1. (a) Sin puntos estacionarios.
- (b) Mínimo en $x = 0$.
- (c) Punto de inflexión en $x = 0$, mínimo en $x = .63$ y máximo en $x = -.63$.
4. $(x_1, x_2) = (21, 1)$ o $(2, 4)$.

Conjunto 20.2a

1. (b) $(\partial x_1, \partial x_2) = (2.83, -2.5) \partial x_2$

Conjunto 20.2b

3. Condiciones necesarias: $2\left(x_i - \frac{x_n^2}{x_i}\right) = 0, i = 1, 2, \dots, n - 1$. La solución es $x_i = \sqrt[n]{C}, i = 1, 2, \dots, n$. $\partial f = 2\delta \sqrt[n]{C^{2-n}}$.
6. (b) Solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{5}{74}, -\frac{10}{74}, \frac{155}{74}, \frac{60}{74}\right)$, la cual es un punto mínimo.

Conjunto 20.2c

2. Puntos mínimos: $(x_1, x_2, x_3) = (-14.4, 4.56, -1.44)$ y $(4.4, 44, .44)$.

CAPÍTULO 21**Conjunto 21.1a**

2. (c) $x = 2.5$, logrado con $\Delta = .000001$.
- (e) $x = 2$, logrado con $\Delta = .000001$.

Conjunto 21.1b

1. De acuerdo con la expansión de Taylor $\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$. La hessiana \mathbf{H} es independiente de \mathbf{X} porque $f(\mathbf{X})$ es cuadrática. Además, la expansión dada es exacta porque las derivadas de mayor orden son cero. Por consiguiente $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ representa $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 - \mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{X}^0)$. Debido a que \mathbf{X} satisface $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, \mathbf{X} debe ser óptima independientemente de la elección de la \mathbf{X}^0 inicial.

Conjunto 21.2a

2. Solución óptima: $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 17$.
4. Sea $w_j = x_j + 1, j = 1, 2, 3, v_1 = w_1w_2, v_2 = w_1w_3$. Entonces,

Maximizar $z = v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 + 1$

sujeto a $v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 \leq 9$, $\ln v_1 - \ln w_1 - \ln w_2 = 0$,

$\ln v_2 = \ln w_1 - \ln w_3 = 0$, todas las variables son no negativas.

Conjunto 21.2b

1. Solución: $x_1 = 1, x_2 = 0, z = 4$.
2. Solución: $x_1 = 0, x_2 = .4, x_3 = .7, z = -2.35$.

Conjunto 21.2c

1. Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$
sujeto a $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1.28y \leq 10$
 $9x_1^2 + 16x_3^2 - y^2 = 0$
 $7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$
 $x_1, x_2, x_3, y \geq 0$

Índice¹

A

- Acertijo Sudoku como programación lineal entera, 320
Actividad crítica en CPM definición, 252 determinación de, 254
Algoritmo aditivo, 336 de Barrier, 134. *Vea también* Algoritmo de punto interior de búsqueda, dicótomo, 699 de descomposición, 22.22-27 de Dijkstra, 221-224. *Vea también* Algoritmo de Floyd de Floyd, 225-228. *Vea también* algoritmo de Dijkstra de Kamarkar. *Vea* Algoritmo de punto interior de punto interior, E.29-39 definición, 5 simplex generalizado, 164-165
Algoritmo de búsqueda tabú, 358-361 aplicación a TSP, 416-419 aplicación de PLE, 376-381

- criterio de aspiración, 361 intensificación y diversificación, 361 lista tabú, 358 periodo de tenencia tabú, 358
Algoritmo de ramificación y acotamiento agente viajero, 358 (TSP), 395-428 programación entera, 336-340
Algoritmo de recocido simulado, 365-371 aplicación a TSP, 420-422 aplicación de PLE, 382-386 condición de aceptación, 366 programa de temperatura, 366
Algoritmo del árbol de expansión mínima, 212-214 restringida, 363
Algoritmo del plano de corte PLE (programación lineal entera), 344-348 TSP (agente viajero), 395-396
Algoritmo genético, 371-376 aplicación a la PLE, 386-391 aplicación al TSP, 423-426 códigos genéticos, 371 cruce, 371, 372 mutación, 371

¹Los números de página con prefijos se refieren a los capítulos y apéndices disponibles en el sitio web. Por ejemplo 22.3-7 se refiere a las páginas 3 a 7 del capítulo 22, y C.4-8 a las páginas 4 a 8 del apéndice C.

- Algoritmo simplex.
 condición de factibilidad, 80, 85, 276
 condición de optimalidad, 80, 85, 132, 276
 operaciones en filas de Gauss-Jordan, 80, 85
 pasos de, 85, 278
 relaciones, 80
 variable de entrada, 80, 276
 variable de salida, 80, 276
- Algoritmo simplex generalizado, 164-165
- Algoritmo simplex primal. *Vea* Métodos de algoritmo simplex
- Algoritmo SUMT, 726
- Algoritmos de programación entera
 agente viajero
 plano de corte, 410, 411
 ramificación y acotamiento, 407-409
 enumeración implícita. *Vea* Algoritmo aditivo
 plano de corte, 344-348, 410-411
 ramificación y acotamiento, 336-340
 acotamiento, 338, 341
 ramificación, 337, 341
 sondeo, 338, 341
- Algoritmos de programación no lineal, 699-727
- Almacenamiento (de combustible), 13, 26.2-9
- Alternativa óptima en PL, 102
- AMPL, 31-34, 130, C.1-40
 análisis de sensibilidad en PL, 108, 129-130
 archivos de entrada
 hoja de cálculo, C.23
 lectura, C.16
 tabla, C.18
 archivos de salida
 hoja de cálculo, C.23
 impresión, C.17
 tabla, C.21
 comandos interactivos, C.24
 componentes de, C.2
 conjuntos, C.3
 indexados, C.14
 subconjuntos, C.13-14
 ejecución del modelo AMPL, C.26
 expresión matemática, C.11-13
 modelo algebraico, C.3-10
 modelo largo, C.1
 modelos de ejemplo
- capítulo 2, C.28
 capítulo 5, C.28.30
 capítulo 6, C.30-34
 capítulo 8, C.37-38
 capítulo 9, C.37-38
 capítulo 13, C.38-40
 capítulo 21, C.39-40
- Análisis de casos
 agente viajero
 formación de imágenes de alta resolución en Australia, 395
 árboles de decisión
 límites de reservación en hoteles, 26.54-56
 colas
 personal de ventas por teléfono en Qantas, 26.62-67
 sistema de transporte interno, 26.59-61
 heurística
 almacenamiento de combustible, 26.2-9
 generación de petición de líneas en FedEx, 351
 programación de eventos comerciales, 26.12-16
 inventario
 cadena de abasto de Dell, 26.56-58
 modelo de asignación
 programación de eventos comerciales, 26.48-50
 PJA (Proceso de jerarquía analítica)
 diseño de una instalación de manufactura integrada por computadora (CIM), 26.51-54
 probabilidades de Bayes
 evaluación de Casey, 26.36-41
 programación de metas
 diseño de una instalación de manufactura integrada por computadora, 26.41-48
 hospital Monte Sinaí, 26.26-30
 programación dinámica
 corte de troncos en Weyerhauser, 26.41-48
 programación entera
 hospital Monte Sinaí, 26.26-30
 organización de rutas marítimas, 26.20-26

- personal de ventas por teléfono en Qantas, 26.62-67
- programación lineal
almacenamiento de combustible, 26.2-9
producción de válvulas cardíacas, 26, 9-12
- ruta más corta
ahorro de dólares federales para viáticos, 26.16-19
- sistema de transporte interno, 26.59-61
- teoría de juegos
partidos de la Copa Ryder, 26.54-56
- transportación
organización de rutas marítimas, 26.20-26
- vidrio de construcción PFG, 26.30-36
- Análisis de regresión, 23.6-8
utilizando programación matemática, 64, 305
- Análisis de sensibilidad en
Método Jacobiano, 689
- programación dinámica, 438
- programación lineal. *Vea Programación lineal*
- Análisis postóptimo, 165-173. *Vea también*
Programación paramétrica
- Aplicaciones de OR, seleccionadas. *Vea Análisis de casos*
- Árbol
de decisiones, 523-525
definición de, 210
- Árbol de expansión
definición de, 210
solución básica en red capacitada, 22.9
- Arte de modelado, 6
- Atributo en una simulación, 654
- B**
- Balanceo del modelo de transporte, 177-178
- Base, 270
- Base restringida, 709, 717
representación vectorial de, 270-271
restringida, 709-711
- Bayes, probabilidades de, 492, 529-533
- Bordes en el espacio de soluciones en PL, 78
- Box-Mueller, método, 659
- Bucle (o ciclo) en una red, 210
- Búsqueda codiciosa, heurística, 352-356
- C**
- Cadena de Markov ergódica, 578
- Cadenas de Markov, 571-589
absorción, probabilidad de, 576, 578
clasificación de los estados en una cadena de Markov, 576
- conjunto cerrado, 576
- matriz de transición en n pasos, 574
- modelo de decisión basado en costos, 580
- probabilidades absolutas, 574
- probabilidades de estado estable, 578
- probabilidades de transición, 574
- tiempo del primer paso, 583
- tiempos de retorno medios, 578
- Cambio en la cola, 595
- Cantidad de pedido económica. *Vea EOQ*
- Capital, presupuesto de, 316
- Ciclado en PL, 100-101, 135
- Ciclo. *Vea Bucle*
- Clasificación del estado. *Vea Cadenas de Markov*
- Coeficiente de correlación, 23.8
- Cola
cambio en la, 595
salirse de la, 595
- Cola M/D/1. *Vea Fórmula de Pollaczek-Khintchine*
- Cola M/M/I, 616-622
- Cola M/M/c, 624-632
- Cola M/M/R, 633-634
- Colas no Poisson, 636
- Combinación convexa, 268
- Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), 694-695
- Conjunto convexo, 268
- Control de producción en inventario
modelo de la ruta más corta, visto como un, 220
- periodo único, 40
- periodos múltiples, 41, 182
con nivelación de la producción, 43
- Control de semáforos, 52
- Corte combinado, 316
- Corte fraccionario, 346
- Cortes en flujo máximo en la red, 235

problema del agente viajero, 395-396
 programación entera, 344-348
Costo imputado, 156. *Vea también Precio dual*
Costo reducido, 123, 156, 276
Covarianza, 498
CPM. *Vea Método de la ruta crítica*
Criterio
 de aspiración en la búsqueda tabú, 361
 de Hurwicz, 538
 de Laplace, 539
 de Savage. *Vea Matriz de arrepentimiento maximin*, 538
Chapman-Kolomogrov, ecuaciones de, 574
Chebyshev, modelo, 306

D

Dados, experimento, 496
Definiciones de red, 210
Degeneración, 99, 135. *Vea también Ciclado en PL*
Desigualdades, conversión a ecuaciones, 69
Desistimiento en colas, 595
Determinante de una matriz cuadrada, D.4
Diagrama de tasa de transición, en colas, 607
Dicótomo, algoritmo, 600
Dieta, problema de la, 24
Dimensionalidad, maleficio de, 454
Disciplina en colas, 595
Distribución
 de probabilidad continua, 492
 de probabilidad marginal, 491, 498
 del tiempo de espera, primero en llegar, primero en ser atendido, 577
 discreta, 496
 uniforme, 493-494
Distribución binomial, 500
 aproximación de Poisson de, 501
 cálculos de probabilidad con excelStatTables.xls, 501
Distribución de Poisson, 501, 601
 aproximación, binomial, 502
 cálculos con excelStatTables.xls, 502
Distribución exponencial, 503, 597-598

cálculos de probabilidad con excelStatTables.xls, 504
 negativa, 503
 olvido o falta de memoria, 597
Distribución normal, 504
 cálculos con excelStatTables.xls, 505
 tablas estadísticas, 729
Distribuciones empíricas, 506-508

E

Ecuación de balanceo en colas, 607
Ecuación recursiva de retraso en PD, 433
Ecuaciones de Chapman-Kolomogrov, 574
EOQ
 con limitación, 469
 dinámico
 modelo con costo de preparación, 476-483
 modelo sin costo de preparación, 473-474
estático
 clásico, 460-463
 con limitación de almacenamiento, 469-470
 con reducciones de precio, 465-468
 probabilizado, 553-559
Error de redondeo, 89, 91, 100
Espacio de muestreo, 489
Esquina
 noroeste, solución de inicio, 188
 punto de, 19
Estado
 absorbente. *Vea Cadenas de Markov*
 en programación dinámica, definición de, 432
Estado estable en cadenas de Markov. *Vea Colas en cadenas de Markov*. *Vea Modelos de colas*
 simulación. *Vea Simulación de evento*
 discreto
Estocástica, 720
Estrategias en juegos, combinadas y puras, 545
Estudio OR, fases de estudio, 9
Estudios de casos, E.1-34
 inventario, E.23-25, E.28-30
 programación de metas, E.15-16
 programación dinámica, E.23, E.34
 programación entera, E.23-25

programación lineal, E.1-7, E.13-15
pronosticación, E.34
redes, E.11-13, E.33
teoría de decisión, E.25-28

Etapa en programación dinámica, definición de, 430

Evento en
probabilidad, 489
simulación, 653

Excel Solver. *Vea* Solver (basado en Excel)

Experimento
del lanzamiento de datos, 496
probabilidad y, 489

FDA. *Vea* Función de densidad acumulada
fdp. *Vea* Función de densidad de probabilidad

Fijación de precios en PL, híbrida, 133

Flotantes, en CPM, 257

Forma de ecuación en PL, 69-72

Forma de producto de una matriz inversa, D.9
en el algoritmo simplex revisado, 278

Formas cuadráticas, D.14-15

Fórmula
de colas de Little, 613
de muestreo normal de Box-Muller, 659
de Pollaczek-Khintchine fórmula, 636

fpd, conjunta, 497

Función
cónica, D.15
convexa, D.15
de densidad acumulada (FDA), 493

Función de densidad de probabilidad (fdp)
conjunta, 497
definición de, 493
marginal, 497

Funciones de utilidad, 534-536

G

Generador de números aleatorios,
semilla, 661

Gestión de calidad del agua, 54

Gradiente
método de, 703
restringido, 686

H

Heurística
definición, 5
Silver-Meal, 484-486
tipos de
búsqueda codiciosa, 352-356
metaheurística, 357-376
TSP, 412-415

Histograma de frecuencias, 506

I

Independencia lineal de vectores, 270

Índice de optimismo, 538

Intensificación y diversificación en la búsqueda tabú, 361

Intervalo de incertidumbre, 699

Inventario, revisión continua, 458

Iteración
de políticas, 25.7
definición, 5

J

Ji cuadrada, tabla estadística, 731

Juego de suma cero, 541
entre dos personas, 542

K

Kamarkar, algoritmo de, E.29-39

Karush-Kuhn-Tucker (KKT), condiciones, 694-695

Kendall, notación de 612

Königsberg, puentes de, 211

L

Leyes de probabilidad
condicional, 491
de la adición de, 490

Límite central, teorema del, 504
 Límites 6-sigma, 505
 Little, fórmula de, 613
 Lotería, en una función de utilidad, 535

M

Maleficio de dimensionalidad, 454
Matrices, D.1-16
 adición de, D.1
 operaciones con matrices simples, repaso de,
 140-142
 producto de, D.2-3
Matrices particionadas
 inversas, D.11
 producto de, D.4
Matriz
 cuadrada, determinante de una, D.4
 de arrepentimiento (Savage), 540
 de rango completo
 no singular, 270, D.6
Matriz inversa, D.6
 determinante de, D.4
 métodos de cálculo,
 adjunta, D.7
 forma de producto, D.9
 matriz particionada, D.11
 operaciones de filas (Gauss-Jordan), D.8
 ubicación en la tabla simplex, 143
Metaheurística, 357-376
 algoritmos
 de búsqueda tabú, 358-361
 de recocido simulado, 365-371
 genético, 371-376
 aplicaciones
 árbol de expansión mínima restringida,
 363
 asignación de almacenes, 363
 colocación de rótulos cartográficos, 364
 coloreado de mapas, 369
 programación de horarios, 368
 secuenciación de trabajos, 359, 367, 374
Método
 congruencial multiplicativo para obtener
 números aleatorios, 661

de aproximación de Vogel (VAM), 190
 de búsqueda de la sección dorada, 699
 de búsqueda directa, 699-702
 de combinaciones lineales, 724
 de dos fases, 94-97. *Vea también Método M*
 de Gauss-Jordan, 80, 85, D.8
 de gradiente, 703
 de la ruta crítica (CPM), cálculos, 252-255
 de Newton-Raphson, 681
 de penalización en PL. *Vea Método M*
 de pesos, programación de metas, 306-307
 del ascenso más pronunciado. *Vea también*
 Método de gradiente
 húngaro. *Vea Modelo de asignación.*
 M, 89-92. *Vea también Método de dos fases*
 preventivo, programación de metas, 308-312
Método Jacobiano, 683-690
 relación con el método Lagrangiano, 691
Método Lagrangiano, 691
Método simplex dual, 133, 159-161, 292. *Vea*
también Algoritmo simplex generalizado
 forma matricial revisada, 289
 motivación para, 292
 restricciones artificiales en el, 162
 variables acotadas, 289
Método simplex revisado
 dual, 282
 primal, 278, 291
Métodos de algoritmo simplex
 dual, 159-161, 282
 generalizado, 164-165
 primal, 79-85
 revisado, 133, 278-281
Mezcla y refinación, modelos de, 57-60
Modelado
 arte del, 5
 niveles de abstracción en el, 5
Modelo
 de afilado de herramientas, 183-185
 de colas de autoservicio, 631
 de colas, general de Poisson, 606
 de Chebyshev para análisis de regresión, 306
 de embarque de carga. *Vea* *Modelo de la*
 mochila
 de equipo de vuelo. *Vea* *Modelo de la*
 mochila

- de inversión, 35-37, 449-452
- de mezcla y refinación, 57-60
- de muerte pura, 604-606
- de nacimiento puro, 600-603
- de nivel de aspiración en colas, 643
- de planificación de la mano de obra, 48-51.
 - Vea también* Tamaño de la fuerza de trabajo
- de programación de autobuses, 49-51
- de programación del empleo, 22.6-8
- de Reddy Mikks, 13
- de reemplazo de equipo, 217, 446-448
- de secuenciación de trabajos, 330-332
- de servicio de máquinas, 633-634
- de TOYCO, 114
- de transbordo, 22.15-17
- matemático, definición de, 5, 12
- Modelo de asignación, 200-208
 - problema del agente viajero, uso en el, 398
 - relación con el método simplex, 206
- Modelo de flujo máximo, 234-240
 - algoritmo de, 236
 - cortes en, 235
 - formulación de PL de, 244
 - residuos para calcular el, 237
 - solución con Solver del, 245
- Modelo de red capacitada, 22.1-14
 - algoritmo basado en simplex, 22.9-14
 - conversión a incapacitada, 22.9
 - equivalencia de PL, 22.4-6
- Modelo de transporte
 - algoritmo, 191-195
 - aplicaciones, 175, 182-186
 - balanceo de, 177-178
 - definición, 175
 - equivalencia de PL, 176
 - solución utilizando,
 - AMPL, 196
 - Solver, 196
 - solución de inicio, 187-191
 - tabla, 177
- Modelo OR, elementos de un, 3
 - niveles de abstracción, 6
- Modelos de inventario
 - determinístico
 - dinámico, 471-483
 - EOQ, 460-463
 - EOQ con limitación, 469-470
 - estático, 460-470
 - heurístico (Silver-Meal), 484-486
 - reducciones de precios, 465-468
 - probabilístico, 553-568
 - EOQ, 553-559
 - política s-S, 564-566
 - problema newsvendor, 560-562
 - varios períodos, 567-568
- Modelos
 - de línea de espera. *Vea* Sistemas de colas
 - de pronosticación, 23.1-10
 - de renovación urbana, 52-54
 - MRP (planeación de requerimiento de materiales), 471
- Muestreo a partir de distribuciones de probabilidad
 - de convolución, 655
 - de Poisson, 617
 - Erlang, 657
 - inverso, 654, 655
 - normal, 659
 - triangular, 656
 - uniforme, 656
- Muestreo en procesos de simulación, métodos de aceptación y rechazo, 654
 - convolución, 657-658
 - inversos, 655-656
 - normal de Box-Muller, 659
- Muestreo, espacio de, 489
- Multiplicadores
 - Lagrangianos, 692
 - método de, 192. *Vea también* Precio dual.
 - Vea también* Algoritmo de transporte
- N**
- Notación de Kendall, 612
- O**
- Olvido de la exponencial, 597
- Operación triple (algoritmo de Floyd), 225
- Optimización clásica
 - método de Newton-Raphson, 681-683

- no restringida, 678-683
- restringida, 683-696
 - condiciones de Karush-Khun-Tucker, 693-696
 - método Jacobiano, 683-687
 - método Lagrangiano, 691-692

- P**
- Paso
 - adelantado, en CPM, 253
 - retrasado en CPM, 253
- Periodo
 - de calentamiento, *vea* Periodo transitorio transitorio en simulación, 671
- PERT. *Vea* Técnica de evaluación y revisión de programas
- Planificación
 - de requerimiento de materiales. *Vea* MRP militar, 65
- Política
 - de inventario, 457
 - $s-S$, 564-566
- Pollaczek-Khintchine, fórmula de, 636
- Pre solucionador, 135
- Precio dual
 - determinación algebraica, 115, 291
 - determinación gráfica, 110
 - intervalos de factibilidad y, 115
 - relación con variables duales, 155
- Precio sombra. *Vea* Precio dual
- Presupuesto de capital, 316
- Principio de optimalidad, programación dinámica, 432
- Probabilidad básica, repaso de, 489-512
- Probabilidad
 - condicional, ley de, 491
 - continua, distribución, 492
 - de transición. *Vea* Cadenas de Markov
- Probabilidades
 - de Bayes, 492, 529-533
 - posteriores. *Vea* Probabilidades de Bayes previas, 529. *Vea también* Probabilidades de Bayes
- Problema
 - de cargo fijo, 325-326
 - de cobertura de conjunto, 320
 - de enteros puros, 316
 - de la dieta, 24
 - de la mochila, 220, 435-440
 - de N reinas, como PLE, 334
 - de newsvendor, 560-562
- Problema de la ruta más corta
 - algoritmos de
 - Dijkstra, 221
 - Floyd, 225
 - PD, 429
 - PL, 230
 - transbordo, 242
 - aplicaciones, 217-221
 - solución de computadora, obtenida utilizando
 - AMPL, 245
 - Solver, 245
 - TORA, 240
- Problema del agente viajero, 395-428
 - algoritmos exactos
 - de ramificación y acotamiento, 407-410
 - plano de corte, 410-411
 - algoritmos heurísticos
 - de inversión, 413-415
 - vecino más cercano, 413
 - algoritmos metaheurísticos
 - de recocido simulado, 420-422
 - de tabú, 416-419
 - genético, 423-426
 - aplicaciones
 - agrupamiento de proteínas, 396
 - arte de la Mona Lisa, 396
 - corte de papel tapiz, 406
 - formación de imágenes de alta resolución, 395
 - formación de imágenes de objetos celestes, 396, 405
 - recolección de pedidos en un almacén, 407
 - secuenciación de pinturas, 396
 - secuenciación del DNA, 405
 - tarjeta de circuito integrado, 396, 405
 - vehículos guiados automáticos, 405
 - cota inferior, 401
 - matriz de distancias, modelo asimétrico, 397
 - modelo de asignación, relación con, 398
 - solución de, 399

- solución de recorrido abierto, 400
- subrecorridos, 398
- Problema del elevador, 8
- Problema dual en PL
 - definición del, 137-140, 290
 - interpretación económica
 - restricción dual, 156-158
 - variables duales, 154-155. *Vea también* Precio dual
- solución óptima, 143-146, 291
- teoría de dualidad débil, 290
- uso en el algoritmo de transporte, 199-200
- Problema entero
 - combinado, 316
 - entero puro, 316
- Proceso de decisión Markoviano, 25.1-20
 - método de iteración de políticas, 25.10-13
 - solución de enumeración exhaustiva, 25.7-10
 - solución de programación lineal, 25.16-19
- Proceso de jerarquía analítica (PJA), 513-519
 - consistencia, 517-518
 - matriz de comparación normalizada, 517
 - matriz de comparación por pares, 516
- Proceso de Markov, definición de, 571
- Programación
 - cuadrática, 715
 - de autobuses, modelo de, 49-50
 - de intervalo, E.14
- Programación de metas, 301-314
 - método de los pesos, 306-307
 - método preventivo, 308-312
 - regla de eliminación, 309-313
 - de columnas, 311-312
 - solución eficiente, 307
 - variables de desviación, 302
- Programación de restricción, 391-392
 - propagación de la restricción, 391
- Programación dinámica, 429-456
 - aplicaciones
 - inventario determinístico, 457-483
 - inventario probabilístico, 458
 - modelo de inversión, 449-452
 - modelo de la mochila, 435-440
 - operación de un aserradero, 26.41-48
 - problema de la ruta más corta, 429-432
- reemplazo de equipo, 446-448
- tamaño de la fuerza de trabajo, 443-445
- ecuación recursiva, 432
- estado en, 432, 435
- etapas en, 430, 435
- modelos determinísticos, 453
- modelos probabilísticos, 24.1-12
- principio de optimalidad, 432
- problema de dimensionalidad, 453
- proceso de decisión markoviano, 25.3-5
- recursividad hacia adelante, 433
- recursividad hacia atrás, 433
- Programación lineal
 - aplicaciones, 35-68. *Vea también* Análisis de casos
 - solución de punto de esquina, 19. *Vea también* Solución de punto extremo
 - solución factible, 15
 - óptima, 15
 - solución gráfica de un modelo de dos variables
 - maximización, 16
 - minimización, 24
 - solución no factible, 15
 - análisis de sensibilidad. *Vea también* Análisis postótimo
 - algebraico, 114-126
 - con AMPL, 129-130
 - con Solver, 129-130
 - con TORA, 129
 - costo reducido, 123, 150, 156, 275
 - gráfico, 108-113
 - precio dual, 110, 115, 155, 324
 - análisis postótimo 165-173. *Vea también* Análisis de sensibilidad de programación lineal
 - cambios de factibilidad (lado derecho), 166-167
 - cambios de optimalidad (función objetivo), 171-172
 - restricción, adición de, 169-170
 - variable adicional, 171
 - Programación lineal paramétrica, 294-299. *Vea también* Programación lineal análisis de sensibilidad
 - Programación separable, 707-715
 - convexa, 711-713

Propiedad de falta de memoria. *Vea Olvido de la exponencial*
 Prueba de bondad de ajuste, 509-511
 Prueba de Ji cuadrada. *Vea Prueba de bondad del ajuste*
 Prueba de Kolmogorov-Smirnov, 509
 Puentes de Königsberg, 211
 Punto de esquina en PL, 19. *Vea también Punto extremo en PL*
 relación con el punto extremo en PL, 298
 relación con la solución básica, 73
 Punto de silla, 543
 Punto de volver a pedir, 461
 Punto extremo en PL
 definición de, 267
 relación con la solución básica, 275
 visto gráficamente como punto de esquina, 19

R

Ramificación y acotamiento, algoritmo de, 336
 Razón insuficiente, principio de, 537
 Recursividad hacia adelante, en programación dinámica, 432
 Recursos, tipos de, 84
 Red conectada, 210
 Redes, ruta en, 210
 Redondeo, error de, 89, 91, 100
 Reducciones de precios, en el inventario, 465-468
 Regla de eliminación de columnas en programación de metas, 309-313
 Regla de factibilidad del 100% en PL, 122
 Regla de optimidad del 100% en PL, 128
 Relaciones primal-dual en PL, 141-146, 273
 Representación con PL de redes
 flujo máximo, 244
 método de la ruta crítica, 261
 red capacitada, 22.1-3
 ruta más corta, 230
 Residuos en red, 236
 Restricción
 Uno - u - otro, Si - entonces, 330-331
 Restricciones
 artificiales en el método simplex dual, 162
 de no negatividad, 15
 secundarias, 170

Revisión continua del inventario, 458
 Revisiones periódicas de inventario, 458
 Riesgo, tipos de, 535
 Rotación de la aguja, experimento, 496
 Ruta crítica, 252
 Ruta, en redes, 210

S

Sección dorada, método, 699
 Silla, punto, 544-566
 Simulación, 6
 Montecarlo, 647-649
 Simulación de evento discreto
 estado estable, 671
 lenguajes, 674
 mecánica de la, 663-668
 muestreo, 654-660
 observaciones estadísticas, métodos para reunir, 670-674
 de réplica, 673
 de subintervalo, 671
 regenerativo, 671
 periodo transitorio, 671, 673
 Sistemas de colas, 593-637
 modelo de servicio de máquinas, 633-634
 modelo general de Poisson, 606-609
 modelos de decisión, 638-642
 de costos, 592, 639-640
 de nivel de aspiración, 643-644
 modelos de un solo servidor, 616-622
 modelos de varios servidores, 623-632
 modelos no Poisson, 636
 Solución
 de inicio de transporte de costo mínimo, 188
 eficiente en la programación de metas, 307
 factible, 3
 no acotada en PL, 104, 278, 291
 no factible en PL, 106
 óptima, 3, 15
 subóptima, 3
 Solución básica, 73-75, 269
 relación con punto de esquina (extremo), 73, 269
 Solución gráfica
 juegos, 545-547

- maximización en PL, 16
 minimización en PL, 24
Soluciones de sondeo a fondo en el algoritmo de ramificación y acotamiento,
 338, 341
Solver, comercial, 135
Solver (Excel-based), 27-31
Suavización exponencial, 23.5
Subóptima, solución, 3
- T**
- Tabla estadística de Chi (χ^2) cuadrada,** 731
Tabla simplex, 79, 133
 álgebra matricial de, 134
 cálculos de fila objetivo, 150
 diseño de, 142
Tablas estadísticas, 729
 basadas en Excel (para 16 fdp), 497, 501, 502,
 504, 505
 de función de distribución normal, 729
 estudiantil t, 730
 $J\chi$ cuadrada, 731
Tamaño
 de la fuerza de trabajo, modelo, utilizando
 PD, 443-445
 de lote económico de Wilson. *Vea EOQ*
Técnica de evaluación y revisión de programas (PERT), 247, 262-264
Números seudoaleatorios, 661
Técnica del promedio móvil, 23.1-3
Técnicas OR, 5
Temas computacionales en PL, 131-136
Tenencia tabú, 358
Teorema
 de dualidad débil, 290
 del límite central, 504
Teoría de juegos, suma cero, 541-547
 punto de silla, 543
 solución óptima
 gráfica, 545-547
 programación lineal, 548-550
 valor del juego, 543
Tiempo
 de espera en modelos EOQ, 461
- de primer paso. *Vea Cadenas de Markov*
 medio de retorno. *Vea Cadenas de Markov*
Toma de decisiones, tipos de, 535
 certidumbre, 513-520
 colas, E.30-33
 incertidumbre, 537-541
 riesgo, 523-536
 transportación, E.7-11
Transpuesta de una matriz, D.3
TSP. *Vea Problema del agente viajero*
- V**
- Valor**
 de un juego, 543
 medio, 496. *Vea también Valor esperado,*
 definición de
 unitario de un recurso. *Vea Precio dual*
Valor esperado, definición, 495
 de variables aleatorias conjuntas, 497-498
VAM. *Vea Método de aproximación de Vogel*
Variable
 artificial en el método simplex, 89. *Vea*
también Método M
 basada en el tiempo en simulación, 666
 basada en observaciones, en una simulación,
 667
 básica, 74, 270
 de exceso, 70
 de holgura, 70
 no básica, 74, 270
Variable dual
 relación con el precio dual, 154
 valor óptimo de la 144-146
Variable irrestricta, 33, 44
Variables
 con cota superior, 283
 de desviación en programación de metas, 302
 tipos de
 acotadas, 283
 artificiales, 89
 básicas, 74
 binarias, 315, 316
 de desviación, 302
 de holgura, 70
 enteras, 315

- exceso, 70
irrestrictas, 33, 44
no básicas, 74
- Variables acotadas
algoritmo simplex dual para, 209
algoritmo simplex primal para, 283-287
definición, 283
- Variables aleatorias
definición de, 492
- desviación estándar, 496
varianza, 496
valor esperado, 495
- Varianza de una variable aleatoria, 469-470
- Vecindad, en heurística codiciosa, 352
- Vectores, D.1-3
 independencia lineal de, 270, D.2
- Vogel, método de, 190
- Volver a pedir, punto, 461



Novena edición

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

HAMDY A. TAHA

Esta novena edición del reconocido libro de Taha contiene, de manera más concisa que las anteriores, tanto el texto como el software de apoyo, con el fin de que el lector se enfoque de lleno en la puesta en ejecución algorítmica y práctica de las técnicas de investigación de operaciones.

El libro recalca que, si bien el modelado matemático es la piedra angular de la IO, en la decisión final se deben tomar en cuenta factores incuantificables, como el comportamiento humano; asimismo, hace hincapié en que la definición correcta de los problemas es la fase más importante y más difícil de la IO. Por último, la obra presenta varias aplicaciones que utilizan ejemplos resueltos y problemas específicos.

Novedades en esta edición:

- La nueva sección 3.7 ofrece un marco de trabajo (sin necesidad de utilizar matemáticas) sobre cómo implementar los diferentes algoritmos de programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y de punto interior) en códigos comerciales, con el fin de incrementar la velocidad de cómputo y la precisión necesarias para resolver problemas muy grandes.
- El nuevo capítulo 10 cubre la heurística y la metaheurística diseñadas para obtener buenas soluciones aproximadas a problemas de programación entera y combinatoria.
- El nuevo capítulo 11, dedicado al importante problema del agente viajero, incluye varias aplicaciones y el desarrollo de algoritmos de solución heurísticos y exactos.
- Todos los algoritmos de los capítulos 10 y 11 se codificaron en Excel para una agradable experimentación interactiva con los modelos.
- En todos los capítulos se agregaron numerosos problemas nuevos.
- También se actualizó el software TORA.

Para mayor información, visite:
pearsoneducacion.net/taha

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net

ISBN 978-607-32-0796-6



9 786073 207966