



Problemas de Máquinas Eléctricas

2ª Edición

**Jesús Fraile Mora
Jesús Fraile Ardanuy**

MFN 0000021885

GAS

621.810

.F73

Pro

2015

Et 1

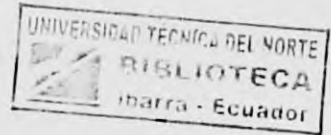
MÁQUINAS ELÉCTRICAS

~ CIRCUITOS MAGNÉTICOS

~ TRANSFORMADORES

~ MÁQUINAS ELÉCTRICAS

~ MÁQUINAS ADMINISTRATIVAS



PROBLEMAS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS



PROBLEMAS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

SEGUNDA EDICIÓN

Jesús Fraile Mora

Departamento de Ingeniería Civil: Hidráulica, Energía y Medio Ambiente

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Universidad Politécnica de Madrid

Jesús Fraile Ardanuy

Departamento de Electrónica Física

E.T.S. Ingenieros de Telecomunicación

Universidad Politécnica de Madrid

Garceta
grupo editorial

PROBLEMAS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS SEGUNDA EDICIÓN

Jesús Fraile Mora; Jesús Fraile Ardanuy

ISBN: 978-84-1622-814-0

IBERGARCETA PUBLICACIONES, S.L., Madrid, 2015

Edición: 1ª.

Nº de páginas: 400

Formato: 20×26

Materia BIC: THRM. Motores eléctricos

Reservados los derechos para todos los países de lengua española. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 270 y siguientes del código penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeran o plagiaran, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste electrónico, químico, mecánico, electro-óptico, grabación, fotocopia o cualquier otro, sin la previa autorización escrita por parte de la editorial.

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos), www.cedro.org, si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

PROBLEMAS DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS. SEGUNDA EDICIÓN.

ISBN: 978-84-1622-814-0

© Jesús Fraile Mora; Jesús Fraile Ardanuy

COPYRIGHT © 2015 IBERGARCETA PUBLICACIONES, S.L.

info@garceta.es

Edición: 1ª.

Impresión: 1ª.

Depósito legal: M- 19496-2015

Impresión: Print House, marca registrada de Coplar, S.A.

OI: 214/2016

IMPRESO EN ESPAÑA-PRINTED IN SPAIN

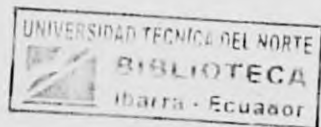
Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: Este libro puede incluir referencias a sitios web gestionados por terceros y ajenos a IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, que se incluyen sólo con finalidad informativa. IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, no asume ningún tipo de responsabilidad por los daños y perjuicios derivados del uso de los datos personales que pueda hacer un tercero encargado del mantenimiento de las páginas web ajenas a IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, y del funcionamiento, accesibilidad y mantenimiento de los sitios web no gestionados por IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, directamente. Las referencias se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas.

*Me lo contaron y lo olvidé
Lo vi y lo entendí;
Lo hice y lo aprendí
(Confucio)*

Contenido

Prólogo	IX
1. Circuitos magnéticos y conversión de energía	1
Sumario de fórmulas	2
Problemas resueltos	10
Problemas suplementarios	49
2. Principios generales de las máquinas eléctricas	63
Sumario de fórmulas	64
Problemas resueltos	71
Problemas suplementarios	100

3. Transformadores.	107
Sumario de fórmulas.	108
Problemas resueltos.	116
Problemas suplementarios.	175
4. Máquinas asíncronas.	185
Sumario de fórmulas.	186
Problemas resueltos.	199
Problemas suplementarios.	271
5. Máquinas síncronas.	279
Sumario de fórmulas.	280
Problemas resueltos.	288
Problemas suplementarios.	335
6. Máquinas de corriente continua.	343
Sumario de fórmulas.	344
Problemas resueltos.	352
Problemas suplementarios.	383
Bibliografía.	389



Prólogo

El propósito de este libro de problemas de máquinas eléctricas es servir de complemento a los libros de texto básicos para ayudar a los estudiantes de ingeniería a adquirir un conocimiento más completo de esta rama de la ingeniería eléctrica. Este texto, publicado en esta 2.ª edición por Ibergarceta Publicaciones, SL, es el complemento ideal del libro de «Máquinas Eléctricas», 7.ª Edición, de Jesús Fraile Mora y publicado por la editorial mencionada en el mes de abril del año 2015. En lo que concierne a la obra que aquí se presenta, están resueltos con detalle no solamente los problemas propuestos en el libro de texto, sino que se han añadido otros suplementarios en los que se señala la respuesta final, lo que ha dado lugar a un total de 321 problemas que facilitan el estudio de todos los tipos de máquinas eléctricas. Los temas de los capítulos corresponden a los contenidos que normalmente se imparten en los cursos básicos de electrotecnia y/o de máquinas eléctricas de las Escuelas Técnicas españolas y de las nuevas Titulaciones de Grado que se han establecido en los últimos años en las universidades españolas.

Para mayor comodidad y economía de espacio, cada capítulo comienza con un sumario de fórmulas a modo de recordatorio de los principios teóricos pertinentes; las fórmulas se presentan sin explicaciones detalladas, por lo que es necesario que el estudiante haya estudiado previamente la teoría correspondiente en su libro de texto. A continuación se incluye una gama de problemas totalmente resueltos; se han elegido de forma que proporcionen una visión clara y progresiva de los principios enunciados. En algunos casos se plantean problemas similares para recalcar las ideas fundamentales, y de este modo, conseguir que el estudiante asimile los principios básicos con corrección y confianza. El gran número de problemas presentados sirve de revisión completa de toda la materia analizada en cada capítulo, aclarando y fijando los conceptos esenciales. Por último, se adjuntan unos problemas suplementarios, en los que únicamente se da el resultado final, que sirven como repaso completo del material del capítulo.

Debe destacarse que uno de los aspectos fundamentales en la resolución de problemas radica en hacer un razonamiento riguroso y preciso de los principios físicos que se incluyen en los mismos. Es por ello de suma importancia el estudio previo y razonado de la teoría correspondiente. Hay que advertir al estudiante que no existe un camino de aprendizaje corto; debe ser paciente, su trabajo consiste en esforzarse por comprender el significado de lo que estudia, desarrollando una capacidad para enfrentarse ante situaciones nuevas. Si un problema se resiste al primer intento, significa que hay aspectos de la teoría que aún no entiende, por lo que deberá volver a estudiar con detalle el libro de texto. Al intentar de nuevo la resolución, probablemente llegará al resultado correcto. Si un problema le resulta difícil, debe tener fe en sus fuerzas, el aprendizaje supone el desarrollo de destrezas especiales que debe ir adquiriendo de un modo paulatino. Debe recordarse el viejo proverbio que dice: *«La teoría sin práctica es parálisis, pero la práctica sin teoría es ciega»*. Para una formación completa se necesita que la teoría y la práctica vayan unidas en perfecta simbiosis y este debe ser el objetivo de una enseñanza universitaria de calidad.

Los autores desean aprovechar esta oportunidad, para expresar su sincero agradecimiento a los compañeros del Área de Ingeniería Eléctrica de una gran parte de las universidades españolas por animarnos a publicar esta obra. A Dña. Cristina Gordillo Iracheta, secretaria del Laboratorio de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, por su ingrata tarea de pasar a ordenador la mayoría de las fórmulas del texto. A Dña. Concepción Fernández Madrid, editora universitaria de Ibergarceta Publicaciones, SL, por su entusiasmo e interés en que este libro fuera una realidad. A nuestros alumnos de las Escuelas de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos y de Telecomunicación de la UPM, porque son los verdaderos destinatarios de nuestro trabajo. Por último, queremos expresar nuestra gratitud a nuestras familias por comprender nuestra vocación docente, por su continuo apoyo y comprensión durante las largas horas dedicadas a la redacción de este libro.

Jesús Fraile Mora
Jesús Fraile Ardanuy

Circuitos magnéticos y conversión de energía

Contenido

- 1.1. Circuitos magnéticos
- 1.2. Energía y coenergía magnética
- 1.3. Pérdidas de energía en los núcleos ferromagnéticos
- 1.4. Circuitos magnéticos excitados con corriente alterna
- 1.5. Circuito eléctrico equivalente de una bobina con núcleo de hierro alimentada con corriente alterna
- 1.6. Conversión de energía en sistemas magnéticos con movimiento de traslación
- 1.7. Conversión de energía en sistemas magnéticos rotativos alimentados por una sola fuente
- 1.8. Conversión de energía en sistemas magnéticos rotativos alimentados por varias fuentes

Ejercicios resueltos

Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

1.1. Circuitos magnéticos

a) Ecuaciones de Maxwell en magnetostática y relación entre los campos magnéticos

$$\nabla B = 0; \nabla \times H = J; B = \mu H \quad (1.1)$$

- B : inducción magnética (teslas);
 H : intensidad del campo magnético (A/m);
 J : densidad de corriente (A/m²);
 μ : permeabilidad magnética; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$: permeabilidad magnética del vacío.

b) Ley de Ampère

$$\oint_{\gamma} H \cdot dl = \int_S J \cdot ds = \sum i = Ni = F_m \Rightarrow Hl = F_m = Ni \quad (1.2)$$

- F_m : fuerza magnetomotriz (At);
 N : espiras;
 i : corriente (A);
 l : longitud magnética media (m).

c) Circuitos o recintos sin f.m.m

$$\nabla \times H = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} H \cdot dl = 0 \Rightarrow H = -\nabla V_m \quad (1.3)$$

- V_m : potencial magnético (A/m).

d) Flujo magnético (Φ)

El flujo magnético Φ que atraviesa un área S que viene definido por:

$$\Phi = \int_S B \cdot ds \Rightarrow \Phi = BS \quad (1.4)$$

- Φ : flujo magnético (Wb);
 S : superficie (m²).

e) Reluctancia (R_m)

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (1.5)$$

La reluctancia R_m se mide en henrios⁻¹;

- l : longitud magnética media;
 S : superficie;
 μ : permeabilidad.

f) Permeancia (P_m)

La permeancia magnética se mide en henrios.

$$P_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu S}{l} \quad (1.6)$$

g) Ley de Hopkinson

$$F_m = \Phi R_m \quad (1.7)$$

h) Coeficiente de Hopkinson (ν)

$$\nu = \frac{\Phi_u}{\Phi_t} = \frac{\Phi_u + \Phi_\sigma}{\Phi_u} = 1 + \frac{\Phi_\sigma}{\Phi_u} \quad (1.8)$$

- Φ_t : flujo magnético total;
 Φ_σ : flujo magnético que se dispersa por el aire;
 Φ_u : flujo útil.

i) Primer lema de Kirchhoff en circuitos magnéticos

$$\sum \phi = 0 \quad (1.9)$$

j) Segundo lema de Kirchhoff en circuitos magnéticos

$$\sum F_m = \sum \Phi R_m \quad \text{o también:} \quad \sum F_m = \sum V_m = \sum HI \quad (1.10)$$

k) Asociación de reluctancias magnéticas en serie

$$R_{mt} = \sum R_{mi} \quad (1.11)$$

l) Asociación de reluctancias magnéticas en paralelo

$$\frac{1}{R_{mt}} = \sum \frac{1}{R_{mi}} \quad (1.12)$$

1.2. Energía y coenergía magnética

a) Ecuación de tensión en una bobina de N espiras

$$u = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.13)$$

b) Balance energético en una bobina

$$dW_e = dW_R + dW_m \quad (1.14)$$

dW_e : diferencial de energía eléctrica que entra al circuito;

dW_R : diferencial de energía disipada en la resistencia

R : resistencia de la bobina por efecto Joule;

dW_m : diferencial de energía suministrada al campo magnético.

c) Energía magnética almacenada

$$W_m = \int_0^\phi F_m d\Phi \quad (1.15)$$

d) Coenergía magnética almacenada

$$W_m = \int_0^\phi \Phi dF_m \quad (1.16)$$

e) Energía y coenergía en sistemas magnéticos lineales

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} F_m \Phi = R_m \Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{R_m} \quad (1.17)$$

f) Definición de coeficiente de autoinducción de una bobina

$$L = N \frac{\Phi}{i} \quad (1.18)$$

g) Coeficiente de autoinducción de una bobina en función de la reluctancia

$$L = N^2 \frac{\Phi}{Ni} = N^2 \frac{\Phi}{F_m} = \frac{N^2}{R_m} \quad (1.19)$$

h) Energía y coenergía magnética en función del coeficiente de autoinducción

$$W_m^* = W_m' = \frac{1}{2} L \frac{F_m^2}{N^2} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad (1.20)$$

1.3. Pérdidas de energía en los núcleos ferromagnéticos

a) Pérdidas por histéresis

$$P_{H1} = fW_{H1} = fV \oint HdB = fV (\text{área del ciclo}) \quad (1.21)$$

- P_{H1} : potencia perdida por histéresis;
 W_{H1} : energía perdida por histéresis;
 f : frecuencia en Hz;
 V : volumen del material.

b) Fórmula de Steinmetz de las pérdidas por histéresis

$$P_{H1} = k_{H1} f V B_m^\alpha \quad (1.22)$$

- k_{H1} : coeficiente de Steinmetz (varía entre 100 y 200);
 α : exponente de Steinmetz (varía entre 1,5 y 2,5);
 B_m : inducción magnética máxima en teslas.

c) Pérdidas por corrientes de Foucault (pérdidas por corrientes parásitas)

$$P_f = k_f f^2 B_m^2 a^2 \sigma V \quad (1.23)$$

- k_f : coeficiente de Foucault;
 f : frecuencia en Hz;
 B_m : inducción magnética máxima en teslas;
 a : espesor de las chapas;
 V : volumen del material.

1.4. Circuitos magnéticos excitados con corriente alterna

a) Tensión de alimentación

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t \quad (1.24)$$

- U : valor eficaz de la tensión alterna aplicada;
 ω : $2\pi f$: pulsación de la c.a.;
 f : frecuencia en Hz.

b) Flujo magnético en el núcleo

$$\Phi(t) = \frac{1}{N} \int u \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} U \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{N2\pi f} U \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (1.25)$$

N : número de espiras de la bobina.

c) Relación entre la tensión aplicada y el flujo magnético

$$U = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_m = 4,44 f N \Phi_m \quad (1.26)$$

U : tensión en valor eficaz,

Φ_m : flujo máximo. El flujo magnético se retrasa 90° respecto a la tensión aplicada.

1.5.

Circuito eléctrico equivalente de una bobina con núcleo de hierro alimentada con corriente alterna

a) Relación entre el flujo magnético y la corriente de excitación de la bobina

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{N i_{exc}}{l} = \mu \frac{N i_{exc}}{l} S \quad (1.27)$$

i_{exc} : corriente de excitación instantánea que circula por el devanado,

N : número de espiras;

l : longitud magnética media,

S : sección transversal del núcleo;

μ : permeabilidad.

b) Relación entre la tensión y la corriente de excitación de la bobina

$$u = N \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu N^2 S}{l} \frac{di_{exc}}{dt} \quad (1.28)$$

c) Coeficiente de autoinducción de la bobina

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l} \quad (1.29)$$

d) Pérdidas en el hierro en función de la tensión, la corriente de excitación y el f.d.p.

$$P_{Fe} = U I_{exc} \cos \varphi_{exc} \quad (1.30)$$

e) Componente de corriente de pérdida en el hierro

$$I_{Fe} = I_{exc} \cos \varphi_{exc} \quad (1.31)$$

f) Componente de corriente de imanación o magnetización

$$I_{\mu} = I_{exc} \sin \varphi_{exc} \quad (1.32)$$

g) Parámetros del circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro

$$R_{FE} = \frac{U}{I_{Fe}}; X_{\mu} = \frac{U}{I_{\mu}} \quad (1.33)$$

1.6.

Conversión de energía en sistemas magnéticos con movimiento de traslación

a) Fuerza de atracción cuando el movimiento se realiza a flujo constante

$$f = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{\Phi = \text{cte}} \quad (1.34)$$

W_m : energía magnética almacenada.

La fuerza mecánica sobre la armadura móvil *tiende a reducir la energía almacenada* en el circuito magnético.

b) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) y en circuitos magnéticos lineales

$$f = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{dR_m}{dx} \quad (1.35)$$

La fuerza sobre la armadura móvil tendrá el sentido *de reducir la reluctancia* del circuito magnético.

c) Fuerza de atracción cuando el movimiento se realiza a corriente constante

$$f = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial x} \right]_{I = \text{cte}} \quad (1.36)$$

W'_m : coenergía magnética almacenada.

La fuerza mecánica sobre la armadura móvil *tiende a aumentar la coenergía almacenada* en el circuito magnético.

- d) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en circuitos magnéticos lineales

$$f = \frac{1}{2} F_m^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R_m} \right) = \frac{1}{2} F_m^2 \frac{dP_m}{dx} \quad (1.37)$$

P_m : permeancia del circuito magnético.

F_m : f.m.m.

- e) Fuerza de atracción (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en circuitos magnéticos lineales

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (1.38)$$

i : corriente eléctrica;

L : inductancia.

La fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia L .

1.7.

Conversión de energía en sistemas magnéticos rotativos alimentados por una sola fuente

- a) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante)

$$T = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right]_{\phi = \text{cte}} \quad (1.39)$$

- b) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) y en sistemas lineales:

$$T = - \frac{1}{2} \phi^2 \frac{dR_m}{d\theta} \quad (1.40)$$

El par tiende a alinear el eje magnético de rotor con el del estator.

- c) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a corriente constante)

$$T = + \left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right]_{i = \text{cte}} \quad (1.41)$$

- d) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a corriente constante) y en sistemas lineales

$$T = \frac{1}{2} F_m^2 \frac{dP_m}{d\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} \quad (1.42)$$

P_m : permeancia del circuito magnético

L : inductancia de la bobina.

1.8.

Conversión de energía en sistemas magnéticos rotativos alimentados por varias fuentes

a) Relaciones de los flujos magnéticos con las corrientes

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\psi] = [L][i] \quad (1.43)$$

$[\psi]$: vector de flujos magnéticos totales concatenados por las bobinas;

$[L]$: matriz de inductancias de los devanados;

$[i]$: vector de las corrientes que circulan por los arrollamientos.

b) Relaciones de las tensiones con las corrientes

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [u] = [R][i] + \frac{d}{dt} [L][i] \quad (1.44)$$

c) Expresiones de la energía y coenergía en sistemas lineales y en función de los flujos

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} F_{m1} \phi_1 + \frac{1}{2} F_{m2} \phi_2 = \frac{1}{2} i_1 \psi_1 + \frac{1}{2} i_2 \psi_2 \quad (1.45)$$

donde

$$F_{m1} = N_1 i_1; \quad F_{m2} = N_2 i_2. \quad (1.46)$$

d) Expresiones de la energía y coenergía en sistemas lineales y en función de los coeficientes de inductancia de los devanados

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \Rightarrow W_m = W'_m = \frac{1}{2} [i]' [L] [i] \quad (1.47)$$

e) Par de rotación (cuando el movimiento se realiza a flujo constante) en función de los coeficientes de inductancia

$$T = \frac{1}{2} [i_1 \quad i_2] \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{1}{2} [i]' \frac{\partial}{\partial \theta} [L] [i] \quad (1.48)$$

donde $[i]'$ es el vector traspuesto de $[i]$.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1. Calcular la intensidad que debe aplicarse a la bobina del circuito magnético de la Figura 1.1 para establecer en la columna derecha un flujo de 10^{-3} Wb. La permeabilidad relativa se supone que es constante en todos los puntos y de valor $\mu_r = 400$, y la sección $S = 10 \text{ cm}^2$ es la misma en toda la estructura, excepto en la columna izquierda, que vale 20 cm^2 . La longitud l es igual a 10 cm. Calcular también el flujo en la columna central.

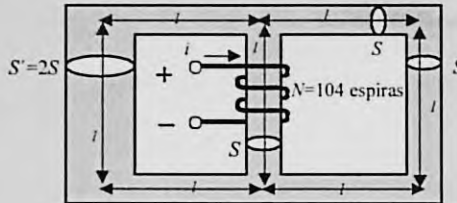


Figura 1.1

Solución

Las reluctancias en las diversas ramas del circuito magnético tienen los siguientes valores:

$$\text{Reluctancia de la rama central: } R_m = \frac{l}{\mu S} \Rightarrow R_m = \frac{0,1}{400 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1,989 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$$\text{Reluctancia de la rama derecha: } R_{m1} = \frac{3l}{\mu S} = 3R_m$$

$$\text{Reluctancia de la rama izquierda: } R_{m2} = \frac{l}{\mu 2S} + \frac{2l}{\mu S} = 2,5R_m$$

De este modo el circuito equivalente eléctrico de la Figura 1.1 es el mostrado en la Figura 1.2. Se ha denominado Φ al flujo magnético que circula por la rama central y Φ_1 y Φ_2 a los flujos magnéticos de las ramas laterales derecha e izquierda, respectivamente.

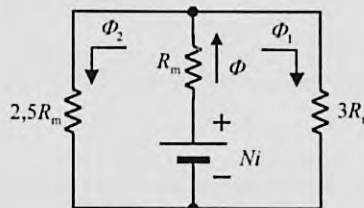


Figura 1.2

En este circuito se cumple:

- 1) Primer lema de Kirchhoff en el nudo superior: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$
- 2) Segundo lema de Kirchhoff en las mallas derecha e izquierda, respectivamente:

$$Ni = \Phi R_m + \Phi_1 (3R_m); \quad Ni = \Phi R_m + \Phi_2 (2,5R_m)$$

De estas ecuaciones se deduce la expresión:

$$2,5Ni = 13\Phi_1 R_m$$

que, al sustituir los valores numéricos da lugar a la siguiente corriente en la bobina:

$$i = \frac{13 \cdot 10^{-3} \cdot 1,989 \cdot 10^5}{2,5 \cdot 104} = 9,95 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación de las mallas magnéticas resulta:

$$Ni = \Phi R_m + 3\Phi_1 R_m$$

lo que da lugar a un valor del flujo magnético en el brazo central:

$$\Phi = \frac{Ni - 3\Phi_1 R_m}{R_m} = \frac{104 \cdot 9,95 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,989 \cdot 10^5}{1,989 \cdot 10^5} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

- 1.2. Un circuito magnético tiene una sección uniforme de 8 cm^2 y una longitud magnética media igual a 0,3 metros. Si la curva de magnetización del material viene expresada aproximadamente por la ecuación:

$$B = \frac{1,55 H}{77 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

Calcular la c.c. en amperios que debe introducirse en la bobina de excitación, que tiene 100 espiras, para producir un flujo en el núcleo de $8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$.

Solución

En la Figura 1.3a se muestra el circuito magnético, en el que se muestran las dimensiones principales del mismo. El valor de la inducción magnética en el núcleo tiene un valor:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ T}$$

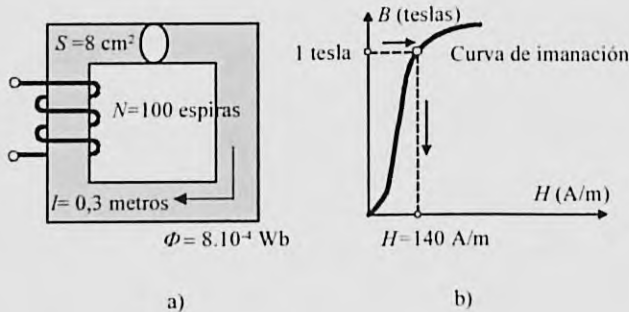


Figura 1.3

Llevando este valor de la inducción magnética a la curva de imanación o magnetización del material de la Figura 1.3b se obtiene el siguiente valor de la intensidad del campo magnético:

$$1 = \frac{1,55H}{77 + H} \Rightarrow H = 140 \text{ A/m}$$

Como quiera que el valor del campo magnético es igual a:

$$H = \frac{NI}{l}$$

se obtiene un valor de la corriente:

$$140 = \frac{100I}{0,3} \Rightarrow I = 0,42 \text{ A}$$

1.3. Calcular la corriente necesaria en la bobina de la Figura 1.4 para producir una inducción magnética en el entrehierro igual a 0,8 teslas. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene expresada por la función:

$$B = \frac{1,6H}{75 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

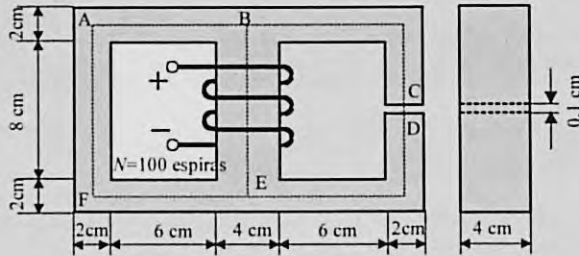


Figura 1.4

Solución

En la Figura 1.5 se muestra el circuito equivalente eléctrico. El valor de la intensidad de campo magnético en el entrehierro, teniendo en cuenta que la inducción magnética en el mismo es de 0,8 teslas, será:

$$H_e = \frac{B_l}{\mu_0} = \frac{0,8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 6,366 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

De este modo la d.d.p. magnética entre los nudos C y D es igual a:

$$U_{m,e} = U_{m,CD} = H_e l_e = 6,366 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 636,6 \text{ At}$$

Por otro lado, como quiera que en la rama CD, la inducción magnética es igual a 0,8 teslas, la intensidad de campo magnético correspondiente a la columna de la derecha, teniendo en cuenta la curva de magnetización del material tendrá un valor:

$$B_1 = 0,8 = \frac{1,6H_1}{75 + H_1} \Rightarrow H_1 = 75 \text{ A/m}$$

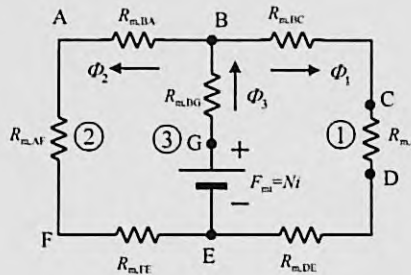


Figura 1.5

En consecuencia, la d.d.p. magnética entre los nudos BC y DE serán:

$$U_{m,BC} = U_{m,DE} = 75 \cdot (6 + 2 + 1 + 4 + 1) \cdot 10^{-2} = 10,5 \text{ At}$$

y por consiguiente, la d.d.p. magnética total entre los nudos B y E será igual a:

$$U_{m,BE} = U_{m,BC} + U_{m,CD} + U_{m,DE} = 2 \cdot 10,5 + 636,6 = 657,6 \text{ At}$$

Como quiera que la longitud magnética media (o longitud geométrica media) entre A y B es la misma que entre F y E e igual a 9 cm, y que la longitud entre A y F es de 10 cm, la intensidad del campo magnético en esta zona será:

$$H_2(\text{zona BAFE}) = \frac{657,6}{(2,9 + 10) \cdot 10^{-2}} = 2\,348,6 \text{ A/m}$$

que llevado a la curva de imanación del material nos da una inducción magnética en esta zona de valor:

$$B_2 = \frac{1,6 \cdot 2\,348,6}{75 + 2\,348,6} = 1,55 \text{ T}$$

que corresponde a un flujo magnético $\Phi_2 = B_2 S = 1,55 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$. Además el flujo magnético en el núcleo derecho es igual a:

$$\Phi_1 = B_1 S = 0,8 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 0,64 \text{ mWb}$$

Por tanto, el flujo magnético en el núcleo central es igual a la suma de los dos anteriores:

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 1,88 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a un valor de la inducción magnética:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S} = \frac{1,88 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-4}} = 1,175 \text{ T}$$

lo que da lugar a una intensidad de campo magnético en la curva de imanación de valor: $H_3 = 207,7 \text{ A/m}$. Es por ello que la d.d.p. magnética entre los nudos B y G es:

$$U_{m,BG} = H_3 l = 207,7 \cdot 0,1 = 20,77 \text{ At}$$

y, por tanto, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$F_{m1} = U_{m,BE} + U_{m,BG} = 657,6 + 20,77 = 678,37 \text{ At}$$

y la corriente necesaria en la bobina será:

$$I = \frac{678,37}{100} = 6,78 \text{ A}$$

1.4. En la estructura magnética mostrada en la Figura 1.6, la inducción magnética en el entrehierro de la derecha es de 1 tesla. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1,5H}{1000 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

La longitud $l = 10 \text{ cm}$ y la sección transversal es uniforme y vale 5 cm^2 . Calcular las corrientes I_1 e I_2 que deben circular por las bobinas para que el flujo en el entrehierro izquierdo sea nulo.

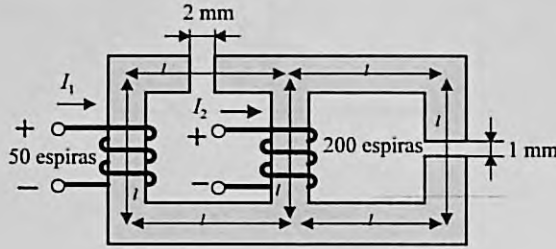


Figura 1.6

Solución

En la Figura 1.7 se muestra el circuito equivalente eléctrico del circuito magnético de la Figura 1.6. Al ser la inducción magnética en el núcleo de la derecha $B_2 = 1 \text{ tesla}$, el valor del campo magnético correspondiente es:

$$H_{e2} = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 7,96 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

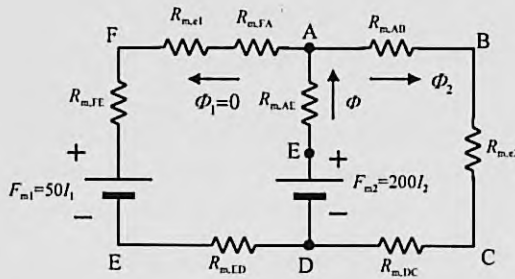


Figura 1.7

Por otro lado, la intensidad del campo magnético en los tramos AB y CD se obtienen de la curva de imanación del material, en el que se deduce:

$$1 = \frac{1,5 \cdot H_{Fe2}}{1000 + H_{Fe2}} \Rightarrow H_{Fe2} = 2000 \text{ A/m}$$

Por consiguiente, la d.d.p. magnética entre los nudos A y B (que es la misma que entre C y D) vale:

$$U_{m,AB} = H_{Fe2} l_{AB} = 2000 \cdot 0,15 = 300 \text{ At} = U_{m,CD}$$

y la d.d.p. magnética necesaria en el entrehierro de la derecha es:

$$U_{m,BC} = H_{e2} l_{AB} = 7,96 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 796 \text{ At}$$

De este modo, la d.d.p. magnética entre los nudos A y D es igual a:

$$U_{m,AD} = U_{m,AB} + U_{m,BC} + U_{m,CD} = 300 + 796 + 300 = 1396 \text{ At}$$

Como quiera que el flujo magnético en el entrehierro izquierdo debe ser nulo ($\Phi_1 = 0$), la f.m.m. de la bobina izquierda debe ser igual a la tensión magnética anterior, es decir:

$$F_{m,1} = U_{m,AD} \Rightarrow 50I_1 = 1396 \Rightarrow I_1 \approx 28 \text{ A}$$

de donde se deduce que la corriente necesaria en la bobina 1 es de aproximadamente 28 A.

Además, como consecuencia de no haber flujo magnético en el núcleo izquierdo, el flujo magnético en el núcleo central será el mismo que en el núcleo derecho, es decir, $\Phi = \Phi_2$ y como la sección de la estructura magnética es uniforme, se deduce que la inducción magnética y la intensidad del campo magnético en el núcleo central son, respectivamente:

$$B = B_2 = 1 \text{ tesla} \quad H_{Fc} = H_{Fc2} = 2000 \text{ A/m}$$

Como consecuencia de ello, la d.d.p. magnética entre los nudos E y A vale:

$$U_{m,EA} = 2000 \cdot 0,1 = 200 \text{ At}$$

por lo que la f.m.m. total de la bobina 2 debe ser:

$$F_{m,2} = U_{m,AD} + U_{m,EA} = 1396 + 200 = 1596 \text{ At}$$

El valor anterior debe ser igual $N_2 I_2$, por lo que se obtiene finalmente una corriente en la bobina 2:

$$1596 = 200 \cdot I_2 \Rightarrow I_2 \approx 8 \text{ A}$$

1.5. La estructura magnética mostrada en la Figura 1.8, está construida con un material cuya curva de imanación se expresa por:

$$B = \frac{1,5H}{100 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

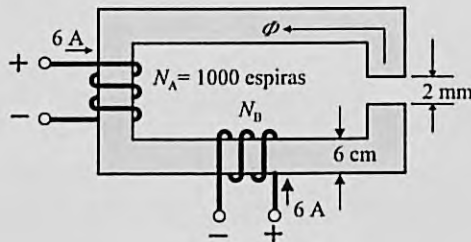


Figura 1.8

La longitud de la trayectoria magnética media en el núcleo es igual a 0,75 m. Las medidas de la sección transversal son de $6 \times 8 = 48 \text{ cm}^2$. La longitud del entrehierro es de 2 mm y el flujo en el mismo es igual a 4 mWb (en el sentido indicado en la Figura 1.8). Determinar el número de espiras de la bobina B.

Solución

En la Figura 1.9 se muestra el circuito equivalente eléctrico del esquema de la Figura 1.8.

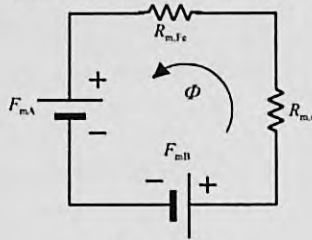


Figura 1.9

Las f.m.m. de las bobinas son, respectivamente:

$$F_{m,A} = N_A I_A = 1000 \cdot 6 = 6000 \text{ At}; \quad F_{m,B} = N_B \cdot 6$$

y como el flujo magnético en el entrehierro es de 4 mWb, los valores de la inducción y campo magnético en el entrehierro serán:

$$\Phi_c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B_c = \frac{\Phi_c}{S_c} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{48 \cdot 10^{-4}} = 0,833 \text{ teslas} \Rightarrow H_c = \frac{0,833}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 6,63 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

La inducción anterior es la misma que en el material de hierro, por lo que de acuerdo con su curva de imanación, se obtiene un valor del campo magnético:

$$B_{Fe} = B_c = 0,833 \text{ teslas}; \quad 0,833 = \frac{1,5 H_{Fe}}{100 + H_{Fe}} \Rightarrow H_{Fe} = 125 \text{ A/m}$$

y en el circuito equivalente de la Figura 1.9 se puede escribir:

$$F_{m,B} - F_{m,A} = \Phi_c R_{m,Fe} + \Phi_c R_{m,e} = H_{Fe} l_{Fe} + H_c l_c = 125 \cdot 0,75 + 6,63 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1419,75 \text{ At}$$

que al sustituir los valores de las f.m.m. da lugar a:

$$6N_B - 6000 = 1419,75 \Rightarrow N_B = 1236,625 \approx 1237 \text{ espiras}$$

- 1.6. El núcleo magnético mostrado en la Figura 1.10 tiene una sección transversal uniforme igual a 100 cm^2 . La bobina A tiene 1000 espiras circulando una c.c. de 0,5 A. en la dirección indicada. Determinar el valor de la corriente I_B , para conseguir un flujo nulo en el brazo central. La permeabilidad relativa es $\mu_r = 200$.

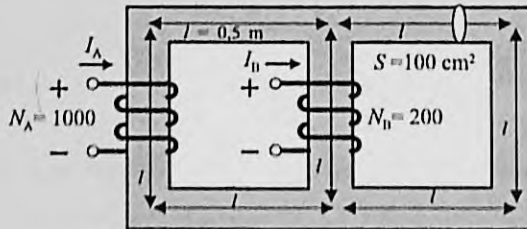


Figura 1.10

Solución

En la Figura 1.11 se muestra el circuito equivalente eléctrico del circuito magnético de la Figura 1.10. Como quiera que la permeabilidad es constante, la reluctancia magnética de cada tramo tiene un valor:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} = \frac{0,5}{200 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 1,99 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

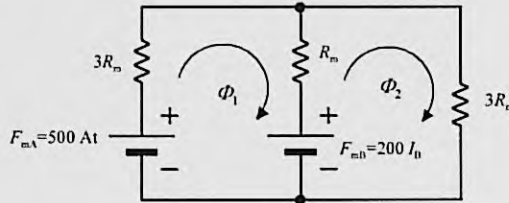


Figura 1.11

Al ser el circuito magnético lineal y conocer las reluctancias del sistema, se puede aplicar el método de las corrientes de malla para calcular los flujos correspondientes, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\text{Malla 1: } F_{m,A} - F_{m,B} = 4R_m\phi_1 - R_m\phi_2; \quad \text{Malla 2: } F_{m,B} = -R_m\phi_1 + 4R_m\phi_2$$

Como el flujo en el brazo central debe nulo, se cumple: $\phi_{\text{brazo central}} = \phi_2 - \phi_1 = 0$, es decir, $\phi_1 = \phi_2$ y despejando los flujos de las ecuaciones anteriores e igualándolos entre sí, se llega a la conclusión de que la f.m.m. de la bobina B debe ser la mitad que la de la bobina A, y como la de esta vale $F_{m,A} = N_A I_A = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ At}$, resulta:

$$F_{m,B} = \frac{F_{m,A}}{2} = \frac{500}{2} = 250 = 200 \cdot I_B \Rightarrow I_B = 1,25 \text{ A}$$

1.7. El circuito magnético de la Figura 1.12 está construido con un material, cuya curva de magnetización viene dada por:

$$B = \frac{1,5H}{50 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

La sección de la columna central vale 50 cm^2 y en el resto es uniforme y de valor 25 cm^2 . Si $N_1 = N_2 = 360$ espiras, calcular el valor de $I_1 = I_2$ para producir un flujo de $5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ en el entrehierro.

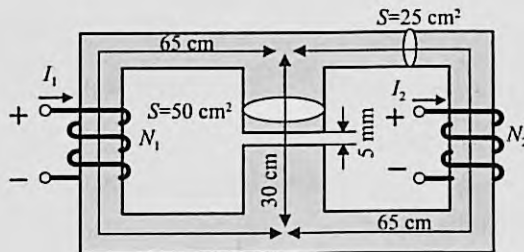


Figura 1.12

Solución

En la Figura 1.13 se muestra el esquema eléctrico equivalente. Al ser el flujo en el entrehierro central de 5 mWb, la inducción magnética correspondiente será:

$$B_c = \frac{\Phi_c}{S_c} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ tesla}$$

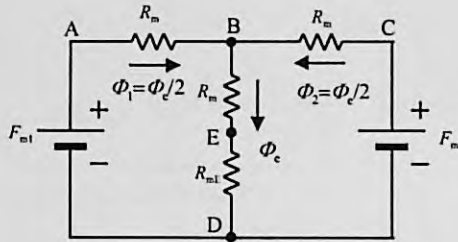


Figura 1.13

que corresponde a una intensidad de campo magnético necesaria en el entrehierro:

$$H_c = \frac{B_c}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 7,96 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

Para el hierro del núcleo central el campo magnético necesario, de acuerdo con la curva de imanación del material, es:

$$B_{BE} = 1 = \frac{1,5H_{BE}}{50 + H_{BE}} \Rightarrow H_{BE} = 100 \text{ A/m}$$

Por consiguiente, la tensión magnética necesaria en el núcleo central viene dada por:

$$U_{m,BD} = U_{m,BE} + U_{m,ED} = 100 \cdot 0,3 + 7,96 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 30 + 3980 = 4010 \text{ At}$$

Debido a la simetría geométrica del circuito y teniendo en cuenta que según el enunciado se cumple $F_{m1} = F_{m2}$, se cumple que:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\Phi_c}{2}$$

que corresponden a las inducciones magnéticas:

$$B_1 = B_2 = \frac{\Phi/2}{S} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ tesla}$$

y por consiguiente, la intensidad de campo magnético correspondiente al tramo derecho CB es:

$$B_{CB} = 1 \text{ tesla} = \frac{1,5H_{CB}}{50 + H_{CB}} \Rightarrow H_{CB} = 100 \text{ A/m}$$

De este modo, la f.m.m. necesaria en la bobina de la derecha del circuito de la Figura 1.12 es:

$$F_{m2} = U_{m,CB} + U_{m,BD} = 100 \cdot 0,65 + 4010 = 4075 \text{ At} = 360 \cdot I_2$$

de donde se deduce el valor de la corriente:

$$I_2 = \frac{4075}{360} = 11,32 \text{ A}$$

1.8. La estructura magnética de la Figura 1.14 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de magnetización vienen expresadas por las ecuaciones:

$$B_1 = \frac{1,1H_1}{5000 + H_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{2,1H_2}{2000 + H_2} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

Calcular la intensidad I que debe circular por la bobina para producir un flujo de $1,5 \cdot 10^{-4}$ Wb; si la sección es uniforme y vale 15 cm^2 .

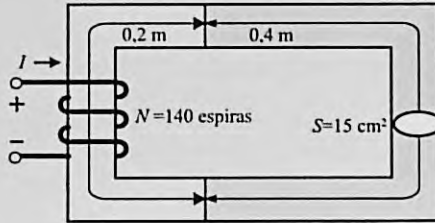


Figura 1.14

Solución

En la Figura 1.15 se muestra el esquema eléctrico correspondiente. Como quiera que el flujo magnético en el núcleo es de $1,5 \cdot 10^{-4}$ Wb, la inducción magnética en los dos materiales de la Figura 1.14 es:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{15 \cdot 10^{-4}} = 0,1 \text{ T}$$

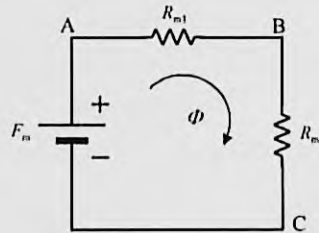


Figura 1.15

lo que corresponde a los siguientes campos magnéticos:

$$B_1 = 0,1 = \frac{1,1H_1}{5000 + H_1} \quad \Rightarrow \quad H_1 = 500 \text{ A/m}$$

$$B_2 = 0,1 = \frac{2,1H_2}{2000 + H_2} \quad \Rightarrow \quad H_2 = 100 \text{ A/m}$$

en consecuencia, las d.d.p. magnéticas necesarias para cada material son:

$$U_{m,AB} = H_1 l_{AB} = 500 \cdot 0,2 = 100 \text{ At}; \quad U_{m,BC} = H_2 l_{BC} = 100 \cdot 0,4 = 40 \text{ At}$$

y por tanto, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$F_m = U_{m,AB} + U_{m,BC} = 100 + 40 = 140 = 140I \quad \Rightarrow \quad I = 1 \text{ A}$$

1.9. Una estructura magnética homogénea, tiene una longitud magnética media igual a 50 cm; y tiene una sección uniforme de 10 cm². La bobina tiene 100 espiras y la curva de magnetización viene expresada por:

$$B = \frac{15H}{100 + H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

Cuando circula por la bobina una intensidad de 0,1 A, se pide el valor del coeficiente de autoinducción calculado por los tres procedimientos siguientes:

- Empleando la fórmula: $L = N \, d\Phi/di$.
- Utilizando la expresión: $L = N\Phi/i$.
- Calculando la energía magnética almacenada mediante la integral:

$$W_m = \text{volumen} \int_0^B H \cdot dB \text{ e igualándola a } 1/2 Li^2.$$

Solución

a) Teniendo en cuenta que la curva de imanación del material y la expresión del campo magnético son, respectivamente, de la forma:

$$B = \frac{15H}{100 + H}; \quad H = \frac{Ni}{l}$$

la expresión del flujo magnético de la bobina es:

$$\Phi = BS = \frac{15H}{100 + H} S = \frac{15 \frac{Ni}{l}}{100 + \frac{Ni}{l}} S$$

Teniendo en cuenta los parámetros del circuito magnético de la bobina: $l = 0,5 \text{ m}$; $S = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2$; $N = 100$, al sustituir en la ecuación anterior resulta:

$$\Phi = \frac{15 \frac{100i}{0,5}}{100 + \frac{100i}{0,5}} \cdot 10^{-3} = \frac{3i}{100 + 200i}$$

y por consiguiente, se obtiene la siguiente expresión del coeficiente de autoinducción en función de la corriente en la bobina:

$$L = N \frac{d\Phi}{di} = 100 \frac{d}{di} \left[\frac{3i}{100 + 200i} \right] = 100 \frac{3 \cdot (100 + 200i) - 200 \cdot 3 \cdot i}{(100 + 200i)^2} = \frac{3 \cdot 10^4}{(100 + 200i)^2}$$

que para $i = 0,1 \text{ A}$ tiene un valor:

$$L = \frac{3 \cdot 10^4}{120^2} = 2,083 \text{ H}$$

Al coeficiente de autoinducción anterior se le denomina *coeficiente de autoinducción incremental*.

b) En este caso, el valor del campo magnético es:

$$H = \frac{Ni}{l} = \frac{100 \cdot 0,1}{0,5} = 20 \text{ A/m}$$

de donde se deduce una inducción y un flujo magnético en el núcleo, respectivamente:

$$B = \frac{15 \cdot 20}{100 + 20} = 2,5 \text{ teslas}; \quad \Phi = BS = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$



y por tanto, el coeficiente de autoinducción será:

$$L = N \frac{\Phi}{i} = 100 \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 2,5 \text{ H}$$

c) En la Figura 1.16 se muestra la curva de imanación del material magnético, donde el área sombreada corresponde a la densidad de energía almacenada, es decir energía almacenada por unidad de volumen.

Recuérdese que la energía almacenada tiene la siguiente expresión:

$$W_m = \text{volumen} \int_0^B H \cdot dB = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \int_0^{2,5} \frac{100B}{5-B} dB$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$B = \frac{15H}{100+H} \quad \Rightarrow \quad 100B + BH = 15H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{100B}{15-B}$$

y por consiguiente se obtiene:

$$W_m = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot \int_0^{2,5} \frac{B}{5-B} dB = 5 \cdot 10^{-2} \left(\int_0^{2,5} 1 + \frac{15}{15-B} \right) \cdot dB = 5 \cdot 10^{-2} \left[-B - 15 \cdot \ln(15-B) \right]_0^{2,5}$$

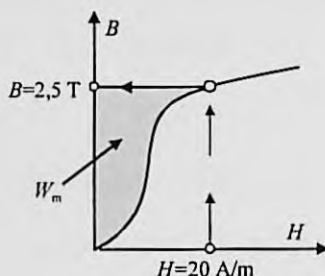


Figura 1.16

que operando da lugar a:

$$W_m = 5 \cdot 10^{-2} \left[-2,5 - 15 \cdot \ln 12,5 + 15 \cdot \ln 15 \right] = 0,011738 \text{ J}$$

Teniendo en cuenta que la energía magnética almacenada en función del coeficiente de autoinducción tiene la expresión

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2$$

resultará:

$$L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{2 \cdot 0,011738}{0,1^2} = 2,348 \text{ henrios}$$

1.10. Una bobina con núcleo de hierro, tiene 500 espiras, siendo su resistencia despreciable. La sección del núcleo es uniforme y vale 25 cm^2 , siendo la longitud magnética media igual a 80 cm. La curva de imanación del material es:

$$B = \frac{2H}{150+H} \quad B: \text{teslas}; H: \text{A/m}$$

Si la tensión aplicada es alterna y de 230 V eficaces y la frecuencia es de 50 Hz. Calcular:

- El circuito equivalente de la bobina;
- La corriente de excitación.

Nota: se conoce por la información proporcionada por el fabricante, que a la tensión asignada o nominal de 230 V, las pérdidas en el núcleo son de 5 W/kg. El peso específico del material es igual a 7,8 kg/dm³.

Solución

En la Figura 1.17 se muestra el circuito magnético de la bobina y su curva de imanación.

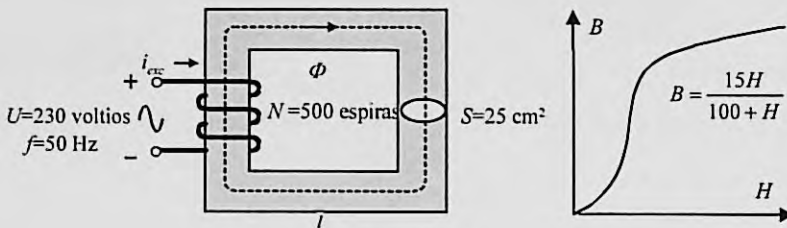


Figura 1.17

- a) El peso del hierro es:

$$\text{Peso del hierro} = \text{volumen del hierro} \times \text{peso específico} = 25 \cdot 10^{-2} (\text{dm}^2) \cdot 8 (\text{dm}) \cdot 7,8 \text{ kg/dm}^3 = 15,6 \text{ kg}$$

Por consiguiente las pérdidas en el hierro son:

$$P_{\text{Fe}} = 5 \text{ W/kg} \cdot 15,6 \text{ kg} = 78 \text{ W}$$

y la componente I_{Fe} de la corriente valdrá:

$$P_{\text{Fe}} = 78 = UI_{\text{Fe}} = 230I_{\text{Fe}} \Rightarrow I_{\text{Fe}} = 0,34 \text{ A}$$

Por ello la resistencia equivalente a las pérdidas en el hierro es:

$$R_{\text{Fe}} = \frac{U}{I_{\text{Fe}}} = \frac{230}{0,34} = 678,2 \Omega$$

En una bobina alimentada con corriente alterna se cumple:

$$U = 4,44 fN\Phi_m$$

de donde se deduce un valor del flujo máximo:

$$\Phi_m = \frac{230}{4,44 \cdot 50 \cdot 500} = 2,07 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a una inducción máxima en el núcleo de valor:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = 0,828 \text{ T}$$

y en consecuencia, a una intensidad del campo magnético en el núcleo, de acuerdo con la curva de imanación:

$$0,828 = \frac{2H_m}{150 + H_m} \Rightarrow H_m \approx 106 \text{ A/m}$$

Suponiendo que la corriente de imanación sea sinusoidal (es decir sin deformación), el valor de la intensidad de campo magnético eficaz sería:

$$H_{ef} \approx \frac{H_m}{\sqrt{2}}$$

es decir:

$$H_{ef} = \frac{106}{\sqrt{2}} = 74,9 \text{ A/m} = \frac{NI_\mu}{l} = \frac{500I_\mu}{0,8} \Rightarrow I_\mu = 0,12 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$X_\mu = \frac{230}{0,12} = 1718 \Omega$$

En la Figura 1.10a se muestra el circuito eléctrico equivalente y en la Figura 1.18b, el diagrama fasorial correspondiente.

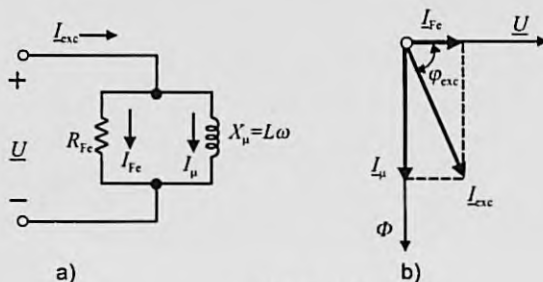


Figura 1.18

b) De acuerdo con los valores calculados anteriormente y de acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 1.18b, la corriente de excitación de la bobina es de la forma:

$$I_{exc} = 0,34 - j0,12 = 0,36 \angle -19,4^\circ$$

es decir, corresponde a una corriente de 0,36 A, con un f.d.p. de valor $\cos 19,4^\circ = 0,943$.

1.11. Una bobina con núcleo de hierro, absorbe una corriente de 0,5 A cuando se aplica una tensión sinusoidal de 230 V eficaces a sus bornes. Si la potencia absorbida es de 30 W, deducir el circuito equivalente de la bobina.

Solución

Si se denomina φ_{exc} al ángulo que forma la tensión con la corriente absorbida por la bobina y teniendo en cuenta los valores del enunciado, se puede escribir:

$$P_0 = P_{Fe} = 30 = 230 \cdot 0,5 \cdot \cos \varphi_{exc}$$

de donde se deduce:

$$\cos \varphi_{exc} = 0,261 ; \quad \text{sen} \varphi_{exc} = 0,965$$

Por tanto, las componentes de la corriente (ver Figura 1.18 del problema anterior) son:

$$I_{Fe} = 0,5 \cdot 0,261 = 0,13 \text{ A} ; \quad I_\mu = 0,5 \cdot 0,965 = 0,483 \text{ A}$$

por lo que los valores de los parámetros del circuito equivalente son:

$$R_{Fe} = \frac{230}{0,13} = 1769 \Omega ; \quad X_\mu = \frac{230}{0,483} = 476,2 \Omega$$

1.12. Un cerrojo eléctrico consiste en una armadura fija cilíndrica hueca y un vástago cilíndrico, dispuestos como se indica en la Figura 1.19. Supuesto que la reluctancia del hierro es despreciable frente a la del entrehierro, y que la unión vástago-armadura presenta un entrehierro despreciable frente al entrehierro principal g . Calcular:

- La energía almacenada en el entrehierro en julios si $g = 1$ cm; la superficie del entrehierro es de $0,8$ cm² y la intensidad de excitación es de 1 A. de c.c.
- La fuerza magnética en el caso anterior.

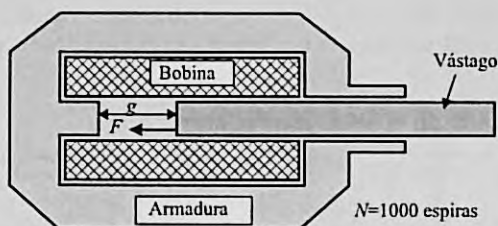


Figura 1.19

Solución

a) La energía magnética almacenada en el entrehierro en función de la f.m.m. de la bobina y de la reluctancia del circuito magnético viene expresada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{R_m} \quad \text{donde se cumple: } F_m = NI; \quad R_m = \frac{x}{\mu_0 S}$$

que al sustituir valores nos da:

$$F_m = NI = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ At}; \quad R_m = \frac{10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}} = 9,947 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}; \quad W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^6}{9,947 \cdot 10^7} = 5,027 \cdot 10^{-3} \text{ julios}$$

b) La fuerza magnética de atracción del cerrojo está expresada por:

$$f = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0}$$

Pero de acuerdo con la ley de Hopkinson, el flujo magnético es igual a:

$$\phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{1000}{9,947 \cdot 10^7} \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

de donde se deduce una inducción magnética:

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{10^{-5}}{0,8 \cdot 10^{-4}} \approx 0,125 \text{ T}$$

y, por consiguiente la fuerza magnética vale:

$$f = \frac{1}{2} \frac{0,125^2 \cdot 0,8 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0,497 \text{ N}$$

1.13. El núcleo magnético de la Figura 1.20 tiene una sección transversal cuadrada de $3 \times 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$. El entrehierro $x = 5 \text{ mm}$. La bobina tiene 250 espiras y una resistencia de 10Ω . La d.d.p. magnética que necesita el hierro es despreciable. Calcular la energía almacenada en el entrehierro y la fuerza total que actúa sobre la armadura cuando se aplican a la bobina 200 V de c.c.

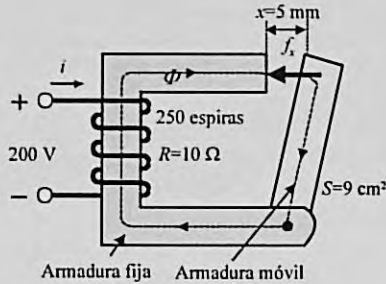


Figura 1.20

Solución

a) La corriente absorbida por la bobina vale:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{200}{10} = 20 \text{ A}$$

por lo que la f.m.m. de la bobina es: $F_m = NI = 250 \cdot 20 = 5000 \text{ At}$.

El valor de la reluctancia del entrehierro es:

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 4,42 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

y como quiera que la energía magnética almacenada viene expresada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{R_m}$$

al sustituir valores en la ecuación anterior resulta:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{5000^2}{4,42 \cdot 10^6} = 2,827 \text{ J}$$

b) La expresión de la fuerza magnética de atracción es:

$$f = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0}$$

donde se tiene:

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} = \frac{5000}{4,42 \cdot 10^6} = 1,131 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,131 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-4}} = 1,257 \text{ T}$$

y al sustituir el valor de la inducción magnética anterior en la expresión de la fuerza, resulta:

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,257^2 \cdot 9 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 565,8 \text{ N}$$

1.14. La estructura magnética de la Figura 1.21 tiene una permeabilidad relativa $\mu_r = 100$; la longitud de la trayectoria magnética media es igual a 1 m en el hierro. El valor de la sección transversal es de 100 cm^2 . La longitud total del entrehierro (dos partes) es de 0,2 cm. El flujo en el entrehierro es de $4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$ y su sentido es el indicado en la Figura. La bobina A tiene 1 000 espiras y la B tiene N espiras, circulando por ambas bobinas una c.c. de 6 A. Se pide:

- Determinar el número de espiras de la bobina B.
- Calcular la fuerza con que es atraída la armadura móvil.
- Si se coloca una espira como se indica en la Figura 1.21, ¿cuál será la lectura del voltímetro?:
 - Si la corriente de alimentación es de c.c.
 - Si la corriente de alimentación es sinusoidal y de tal magnitud que produzca el mismo valor eficaz de flujo en el entrehierro. La frecuencia es de 50 Hz.

Nota: se supone para resolver el apartado c) que el entrehierro está abierto.

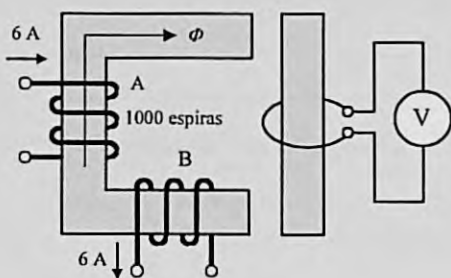


Figura 1.21

Solución

a) En la Figura 1.22 se muestra el circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Figura 1.21. Los valores de las reluctancias magnéticas del hierro y del entrehierro son, respectivamente:

$$R_{m,Fe} = \frac{l}{\mu S} = \frac{1}{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 7,96 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}; \quad R_{m,c} = \frac{l}{\mu_0 S} = \frac{0,2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}} = 1,592 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$$

y en la malla del circuito de la Figura 1.22 se cumple:

$$F_{mA} - F_{mB} = \Phi(R_{m,Fe} + R_{m,c}) = 4 \cdot 10^{-3}(7,96 \cdot 10^5 + 1,592 \cdot 10^5) = 3820,8 \text{ At}$$

Como quiera que la f.m.m. del devanado A es igual a 6000 At resulta:

$$F_{mA} - F_{mB} = 3820,8 = 6000 - 6N_B \Rightarrow N_B = 363,2 \approx 363 \text{ espiras}$$

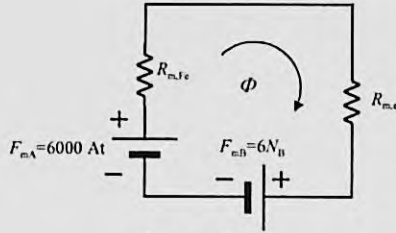


Figura 1.22

b) El valor de la inducción magnética en los entrehierros es:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0,4 \text{ T}$$

y la fuerza de atracción de la armadura móvil, teniendo en cuenta que existen dos entrehierros vale:

$$f = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{0,4^2 \cdot 10^{-2}}{4\pi 10^{-7}} = 1273,24 \text{ N} = \frac{1273,24}{9,8} = 129,92 \text{ kg} \approx 130 \text{ kg}$$

c) En c.c. no existe variación del flujo magnético con el tiempo, lo que significa que no habrá f.e.m. inducida en la espira, por lo que la lectura del voltímetro será cero. Sin embargo, en c.a. y con la armadura separada (entrehierro abierto), el flujo magnético será de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$$

por lo que la f.e.m. inducida en la espira, de acuerdo con la ley de Faraday será:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 100\pi \cdot \sin 100\pi t = 1,777 \sin \omega t$$

y el voltímetro señalará el valor eficaz de la f.e.m. anterior, es decir:

$$U = \frac{1,777}{\sqrt{2}} = 1,257 \text{ V}$$

1.15. Hallar una expresión de la fuerza en el bloque deslizante A de la Figura 1.23. Despreciar la reluctancia del hierro. Las bobinas están alimentadas con c.c. y los parámetros son:

$$N_1 = 200; N_2 = 100; i_1 = 10 \text{ A}; i_2 = 15 \text{ A}; x = 3 \text{ mm}; a = 10 \text{ mm}; S = 10 \text{ cm}^2$$

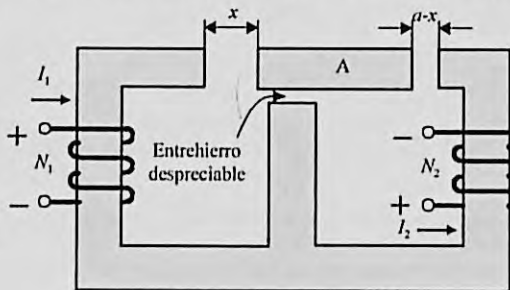


Figura 1.23

Solución

En la Figura 1.24 se ha dibujado el circuito eléctrico equivalente en el que la reluctancia del entrehierro izquierdo vale:

$$R_{m1} = \frac{3 \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^7 \cdot 10^3} = 2,387 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

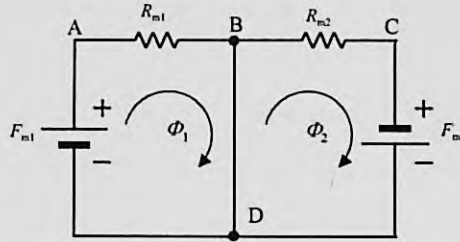


Figura 1.24

Obsérvese en dicha figura que, al despreciar el entrehierro central, las dos mallas son independientes. En la malla de la izquierda se tiene una f.m.m. y un flujo correspondiente que vienen expresados por:

$$F_{m1} = N_1 I_1 = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ At}; \quad \phi_1 = \frac{2000}{2,387 \cdot 10^6} = 8,378 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Por lo que la inducción magnética en el entrehierro izquierdo es igual a:

$$B_1 = \frac{\phi_1}{S} = \frac{8,378 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,8378 \text{ T}$$

mientras que en el entrehierro de la derecha, los valores de la reluctancia, d.d.p. magnética y flujo magnético son, respectivamente:

$$R_{m2} = \frac{7 \cdot 10^3}{4\pi \cdot 10^7 \cdot 10^3} = 5,57 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}; \quad F_{m2} = N_2 I_2 = 100 \cdot 15 = 1500 \text{ At}; \quad \phi_2 = \frac{1500}{5,57 \cdot 10^6} = 2,693 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que da lugar a una inducción magnética en el entrehierro de la derecha:

$$B_2 = \frac{\phi_2}{S} = \frac{2,693 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,2693 \text{ T}$$

y, por consiguiente, las fuerzas mecánicas que tienden a reducir cada entrehierro son respectivamente:

$$f_1 = \frac{1}{2} \frac{B_1^2 S}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,8378^2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 279,28 \text{ N}; \quad f_2 = \frac{1}{2} \frac{B_2^2 S}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,2693^2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 28,86 \text{ N}$$

la fuerza f_1 se dirige hacia la izquierda para reducir el entrehierro izquierdo, mientras que la fuerza f_2 se dirige hacia la derecha con el objeto de reducir el entrehierro derecho. Al ser la fuerza f_1 superior a f_2 , la fuerza resultante sobre el bloque deslizante tiende hacia la izquierda y tiene un valor:

$$f_T = f_1 - f_2 = 279,28 - 28,86 = 250,42 \text{ N}$$

1.16. La Figura 1.25 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 500 espiras. La sección transversal es uniforme en toda la estructura magnética y vale 20 cm^2 . Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en el entrehierro. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 20 A, calcular para los siguientes valores del espesor del entrehierro: $x_1 = 3 \text{ cm}$ y $x_2 = 2 \text{ cm}$, las siguientes magnitudes:

- El flujo en el entrehierro.
- La inductancia de la bobina;
- La energía magnética en el entrehierro.
- La fuerza que actúa sobre la armadura móvil.
- Si la armadura móvil se mueve muy lentamente desde $x_1 = 3 \text{ cm}$ a $x_2 = 2 \text{ cm}$, determinar:
 - El cambio en la coenergía magnética almacenada.
 - La energía eléctrica suministrada por la fuente de alimentación, suponiendo despreciable la resistencia eléctrica de la bobina y el rozamiento de la armadura móvil.
 - El trabajo mecánico realizado, comprobando el balance energético del sistema.

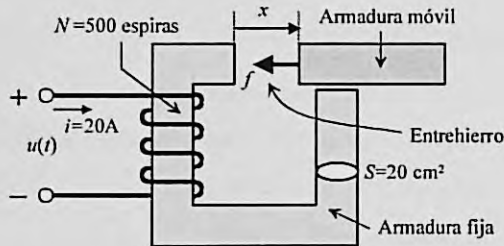


Figura 1.25

Solución

a) La reluctancia del circuito magnético se limita a la reluctancia del entrehierro, cuyo valor para cada espesor del mismo es:

$$x = 3 \text{ cm} \Rightarrow R_{m1} = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 11,937 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$x = 2 \text{ cm} \Rightarrow R_{m2} = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 7,958 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

La f.m.m. aplicada a la bobina es, en ambos casos, $F_m = Ni = 500 \cdot 20 = 10^4 \text{ At}$, por lo que los flujos correspondientes serán:

$$\phi_1 = \frac{F_m}{R_{m1}} = \frac{10^4}{11,94 \cdot 10^6} = 0,8378 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} ; \phi_2 = \frac{F_m}{R_{m2}} = \frac{10^4}{7,96 \cdot 10^6} = 1,257 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

En la Figura 1.26 se muestra un diagrama f.m.m.-flujo magnético que permite definir los puntos de funcionamiento. Obsérvese que P_1 representa el punto de trabajo inicial (para un entrehierro $x = 3 \text{ mm}$) y que tiene por coordenadas una f.m.m. de 10^4 At y un flujo magnético $\phi_1 = 0,8378 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$, mientras que P_2 es el punto de trabajo final (para un entrehierro $x = 2 \text{ mm}$), que tiene por coordenadas una f.m.m. de 10^4 At y un flujo magnético $\phi_2 = 1,257 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$. Si el paso de P_1 a P_2 se hace lentamente, entonces la corriente es constante y el camino seguido es la vertical que va desde P_1 hasta P_2 .

b) La inductancia de la bobina es función de la reluctancia del circuito magnético y viene expresada por:

$$L = \frac{N^2}{R_m}$$

y al sustituir los valores de las reluctancias para los dos espesores del entrehierro señalados, da lugar a:

$$L_1 = 0,02094 \text{ H}; L_2 = 0,03142 \text{ H}$$

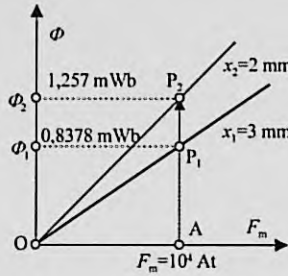


Figura 1.26

c) La energía magnética está definida por:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

que, teniendo en cuenta los valores de las inductancias obtenidas en el apartado anterior, corresponde a los valores:

$$W_{m1} = \frac{1}{2} L_1 i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,02094 \cdot 20^2 = 4,189 \text{ J}; W_{m2} = \frac{1}{2} L_2 i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,03142 \cdot 20^2 \approx 6,285 \text{ J}$$

Al ser el sistema lineal, las energías magnéticas almacenadas coinciden con las coenergías. Para calcular estas vamos a utilizar el diagrama f.m.-flujo señalado en la Figura 1.27. Para el punto P_1 correspondiente al punto de trabajo inicial, la coenergía almacenada inicial viene definida por el área del triángulo OAP_1 cuyo valor es, según se muestra en la Figura 1.27a):

$$W'_{m1} = \frac{1}{2} F_m \phi_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 0,8378 \cdot 10^{-3} = 4,189 \text{ julios}$$

Para el punto P_2 , correspondiente al punto de trabajo final, la coenergía almacenada final viene definida por el área del triángulo OAP_2 , cuyo valor es según se muestra en la Figura 1.28 b):

$$W'_{m2} = \frac{1}{2} F_m \phi_2 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 1,257 \cdot 10^{-3} = 6,285 \text{ julios}$$

valores que coinciden con los calculados a partir de la inductancia de la bobina.

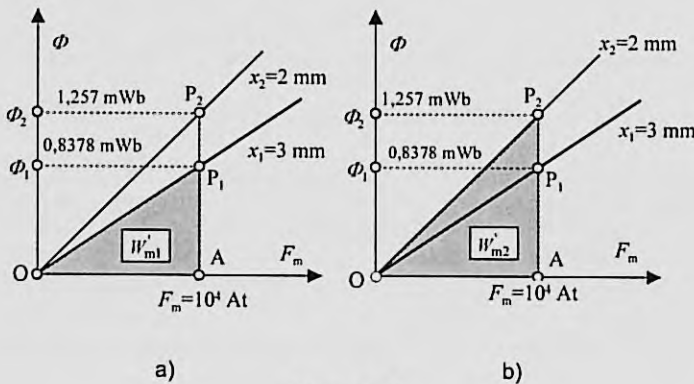


Figura 1.27

d) La expresión de la fuerza, si la corriente es constante y en función de la inductancia de la bobina, es:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

Teniendo en cuenta que la inductancia se expresa en función del espesor del entrehierro por:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \mu_0 S}{x}$$

Los valores de la derivada de la inductancia y de la fuerza mecánica serán respectivamente:

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{N^2 \mu_0 S}{x^2} = -\frac{L}{x} \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{2} i^2 \frac{L}{x}$$

que para $x = 3 \text{ cm}$ y $x = 2 \text{ cm}$ nos da unos valores de la fuerza:

$$|f_1| = \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{0,02094}{3 \cdot 10^{-2}} = 139,6 \text{ N}; \quad |f_2| = \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{0,0314}{2 \cdot 10^{-2}} = 314,2 \text{ N}$$

e1) Si la armadura se mueve muy lentamente, la traslación se realizará a corriente constante. El cambio en la coenergía magnética almacenada, será:

$$\Delta W'_m = W'_{m2} - W'_{m1} = 6,285 - 4,189 = 2,096 \text{ J}$$

e2) La energía eléctrica suministrada por la fuente vendrá expresada por:

$$\Delta W_e = F_m (\Phi_2 - \Phi_1) = 10^4 (1,257 \cdot 10^{-3} - 0,8378 \cdot 10^{-3}) = 4,192 \text{ J}$$

en la Figura 1.28 se muestra el área correspondiente.

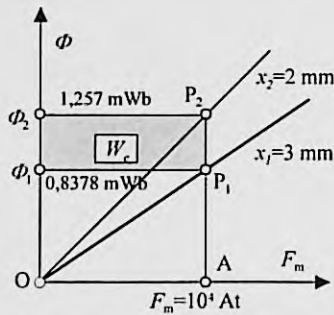


Figura 1.28

e3) El trabajo mecánico desarrollado será:

$$\Delta W_{mec} = \int f dx = \int -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} dx = \int_{L_1}^{L_2} -\frac{1}{2} i^2 dL = -\frac{1}{2} i^2 (L_2 - L_1)$$

es decir:

$$\Delta W_{mec} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot (0,03142 - 0,02094) = 2,096 \text{ J}$$

Para poder determinar el sentido geométrico de la energía mecánica desarrollada por el movimiento de la armadura móvil, téngase en cuenta que el principio de conservación de la energía aplicado al sistema viene expresado por:

$$\Delta W_e = \Delta W_m + \Delta W_{mec} = N i \Delta \Phi = F_m \Delta \Phi \quad (1)$$

y como quiera que además se cumple la siguiente relación entre la energía y coenergía magnética:

$$W_m + W'_m = F_m \Phi$$

al diferenciar la ecuación anterior resulta:

$$\Delta W_m + \Delta W'_m = F_m \Delta \Phi + \Phi \Delta F_m = F_m \Delta \Phi \quad (2)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\Delta F_m = 0$, debido a que la f.m.m se mantiene constante en la transición. Igualando los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\Delta W_m + \Delta W_{mec} = F_m \Delta \Phi = \Delta W_m + \Delta W'_m \Rightarrow \Delta W_{mec} = +\Delta W'_m \quad (3)$$

es decir, el trabajo mecánico se hace a consta del incremento de la coenergía magnética almacenada. En la Figura 1.29 se muestra la resta de áreas de la Figura 1.27, que es la diferencia entre las coenergías final e inicial y que de acuerdo con la ecuación (3) representa el trabajo mecánico producido. Obsérvese que el área es un triángulo de base la distancia entre P_1 y P_2 y de altura OA, por lo que el área correspondiente será:

$$\text{Área del triángulo } OP_1P_2 = \frac{1}{2} (1,257 \cdot 10^{-3} - 0,8378 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^4 = 2,096 \text{ J}$$

que coincide, como es lógico, con el valor obtenido anteriormente.

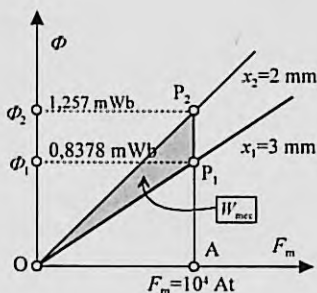


Figura 1.29

1.17. La Figura 1.30 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene N espiras. El movimiento de la armadura móvil se limita al plano horizontal (eje x).

Las dimensiones son las señaladas en la figura, siendo la profundidad del electroimán de c metros. Se desprecia la resistencia eléctrica de la bobina, la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en los entrehierros. Si se aplica a la bobina una tensión sinusoidal de la forma:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$$

Calcular la expresión de la fuerza mecánica instantánea que actuará sobre la armadura móvil.

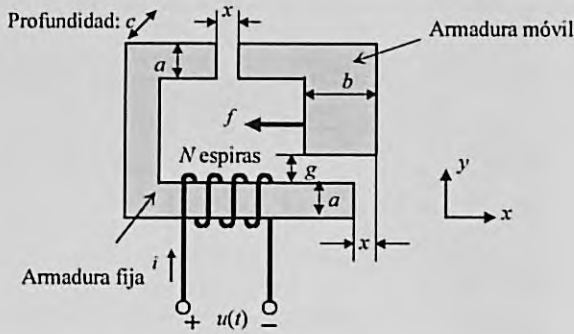


Figura 1.30

Solución

Los valores de las reluctancias de los entrehierros son:

$$\text{Entrehierro superior: } R_{m,e1} = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{x}{\mu_0 a c}; \quad \text{Entrehierro inferior: } R_{m,e2} = \frac{g}{\mu_0 S'} = \frac{g}{\mu_0 (b-x)c}$$

Al aplicar una tensión alterna a la bobina, se produce un flujo magnético alterno de amplitud constante y que se deduce de la ecuación:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t = N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\sqrt{2} U}{N\omega} \text{sen} \omega t$$

y como quiera que la fuerza para flujo constante se obtiene de la siguiente expresión:

$$f = - \left[\frac{\partial W_m}{\partial x} \right]_{\Phi=\text{cte}} = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d R_m}{dx}$$

al sustituir valores se obtiene:

$$f = - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2} U}{N\omega} \text{sen} \omega t \right)^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{\mu_0 a c} + \frac{g}{\mu_0 (b-x)c} \right]$$

y operando resulta finalmente:

$$f = - \frac{U^2}{N^2 \omega^2 \mu_0 c} \left[\frac{1}{a} + \frac{g}{(b-x)^2} \right] \text{sen}^2 \omega t$$

1.18. El circuito magnético de la Figura 1.31 está realizado con un material de permeabilidad infinita. La sección del núcleo es uniforme en toda la estructura y vale 10 cm^2 . El entrehierro de la izquierda es de 1 mm y el de la derecha de 2 mm . La bobina tiene 500 espiras y su resistencia eléctrica es de 10Ω . Calcular:

- a) La tensión de corriente continua que debe aplicarse a la bobina para que la inducción en el entrehierro izquierdo sea de 1 T .

- b) El coeficiente de autoinducción de la bobina.
 c) Contestar a las preguntas anteriores si la bobina se coloca en la columna de la izquierda.

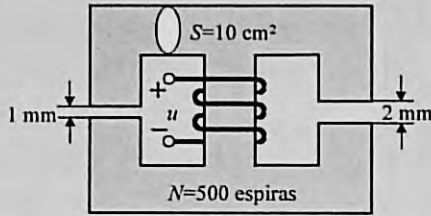


Figura 1.31

Solución

a) En la Figura 1.32 se muestra el circuito eléctrico equivalente al circuito magnético de la Figura 1.31, en el que los valores de las reluctancias de los entrehierros son:

$$\text{Reluctancia entrehierro izquierdo: } R_{m1} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,796 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\text{Reluctancia entrehierro derecho: } R_{m2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1,592 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} = 2R_{m1}$$

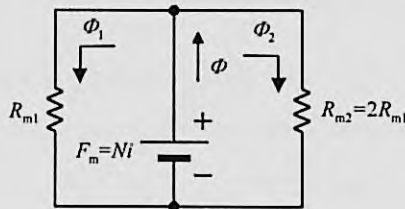


Figura 1.32

Como quiera que la inducción magnética en el entrehierro izquierdo es de 1 tesla, el flujo magnético correspondiente vale:

$$\Phi_1 = B_1 S = 1 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3} \text{ Wb}$$

Por tanto, de acuerdo con la Figura 1.32, la f.m.m. necesaria en la bobina será:

$$F_m = \Phi_1 R_{m1} = 0,796 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 796 \text{ At}$$

De este modo se requerirá una corriente en la bobina de valor:

$$i = \frac{F_m}{N} = \frac{796}{500} = 1,592 \text{ A}$$

lo que corresponde a una tensión necesaria en la alimentación de c.c.:

$$u = Ri = 10 \cdot 1,592 = 15,92 \text{ V}$$

b) El flujo magnético por el entrehierro derecho vale:

$$\Phi_2 = \frac{F_m}{R_{m2}} = \frac{796}{1,592 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Por consiguiente, el flujo por la rama central en el que se ha colocado la bobina tendrá el siguiente valor:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 1 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

y, por definición de coeficiente de autoinducción, se tiene:

$$L = N \frac{\Phi}{i} = 500 \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{1,592} = 0,471 \text{ H}$$

El resultado anterior se puede verificar por medio de otra definición de la inductancia en función de la reluctancia equivalente del circuito magnético que ve la bobina y que es la resultante de la asociación en paralelo de R_{m1} y R_{m2} . Como esta última es el doble de la primera, el resultado es 2/3 el valor de la primera, es decir:

$$L = \frac{N^2}{R_{m,eq}} = \frac{500^2}{\frac{2}{3} \cdot 0,796 \cdot 10^6} = 0,471 \text{ H}$$

que coincide con el resultado anterior.

c1) Si la bobina se coloca en la columna de la izquierda, el circuito eléctrico equivalente será el mostrado en la Figura 1.33, en el que la reluctancia del entrehierro derecho queda en cortocircuito con la rama central; es por ello que el flujo que produce ahora la bobina es el mismo que el Φ_1 de la Figura 1.32 (ya que la inducción magnética en este entrehierro sigue siendo de 1 tesla). En consecuencia, la f.m.m. necesaria en la bobina seguirá siendo de 796 At y la tensión de alimentación necesaria será de 15,92 V, igual que en caso anterior.

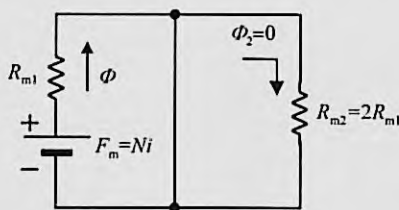


Figura 1.33

En cuanto al valor de la inductancia de la bobina, tendrá ahora una magnitud:

$$L = N \frac{\Phi}{i} = 500 \frac{1 \cdot 10^{-3}}{1,592} = 0,314 \text{ H}$$

1.19. El circuito magnético de la Figura 1.34 está realizado con un material de permeabilidad infinita. Las reluctancias magnéticas de los tres entrehierros señalados son respectivamente R_{m1} , R_{m2} y R_{m3} . Las bobinas tienen N_1 y N_2 espiras. Calcular:

- Las expresiones de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de los devanados.
- El coeficiente de acoplamiento magnético de las bobinas.

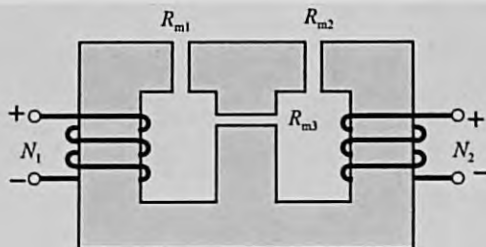


Figura 1.34

Solución

a) Vamos a considerar primeramente el esquema de la Figura 1.35a, en el que solamente se alimenta la bobina de la izquierda 1 con una corriente i_1 y se deja abierta la bobina 2 de la derecha. En la Figura 1.35b se muestra el esquema eléctrico equivalente. El flujo total que produce la bobina 1 es Φ_{11} , parte del cual, el denominado Φ_{21} , atraviesa la bobina 2 y parte se cierra por el entrehierro central en forma de flujo de dispersión Φ_{d1} .

Se observa en la Figura 1.35b, que las reluctancias R_{m2} y R_{m3} están en paralelo y su resultante está en serie con R_{m1} . Por ello el flujo magnético Φ_{11} vendrá expresado por:

$$\Phi_{11} = \frac{F_{m1}}{R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} = \frac{R_{m2} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} F_{m1} = \frac{R_{m2} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} N_1 i_1 \quad (1)$$

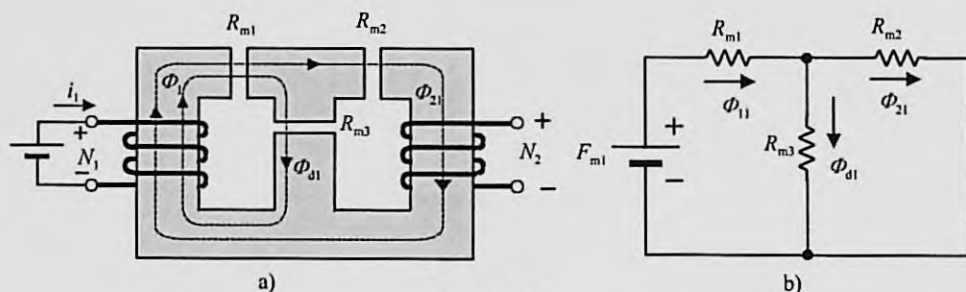


Figura 1.35

Al aplicar la definición de coeficiente de autoinducción se puede escribir:

$$L_{11} = N_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1} = N_1^2 \frac{R_{m2} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} \quad (2)$$

que es el valor de la inductancia de la bobina 1. A partir de la expresión (1) y teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.35b y la regla del divisor de corriente, se puede obtener el flujo magnético Φ_{21} , es decir, el flujo que atraviesa el devanado 2 producido por el devanado 1, resultando ser:

$$\Phi_{21} = \Phi_{11} \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} N_1 i_1 \quad (3)$$

y, por consiguiente, el coeficiente de inducción mutua L_{21} vale:

$$L_{21} = N_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} \quad (4)$$

Vamos a considerar ahora el esquema de la Figura 1.36a, en el que solamente se alimenta la bobina 2 con una corriente i_2 y se deja abierta la bobina 1 de la izquierda. En la Figura 1.36b se muestra el esquema eléctrico equivalente. El flujo total que produce la bobina 2 es Φ_{22} , parte del cual, el denominado Φ_{12} , atraviesa la bobina 1 y parte se cierra por el entrehierro central en forma de flujo de dispersión Φ_{d2} .

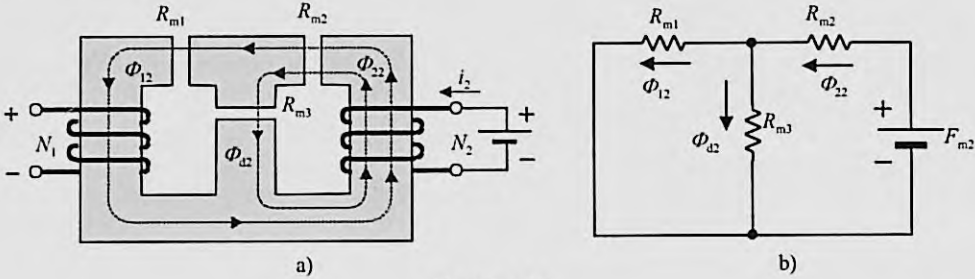


Figura 1.36

Se observa en la Figura 1.36b que las reluctancias R_{m1} y R_{m3} están en paralelo y su resultante está en serie con R_{m2} ; es por ello que el flujo magnético Φ_{22} vendrá expresado por:

$$\Phi_{22} = \frac{F_{m2}}{R_{m2} + \frac{R_{m1} R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}}} = \frac{R_{m1} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} F_{m2} = \frac{R_{m1} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} N_2 i_2 \quad (5)$$

y al aplicar la definición de coeficiente de autoinducción se obtiene:

$$L_{22} = N_2 \frac{\Phi_{22}}{i_2} = N_2^2 \frac{R_{m1} + R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} \quad (6)$$

que es el valor de la inductancia de la bobina 2. A partir de la expresión (5) y teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.36b y la regla del divisor de corriente se puede obtener el flujo magnético Φ_{12} , es decir, el flujo que atraviesa el devanado 1 producido por el devanado 2, resultando ser:

$$\Phi_{12} = \Phi_{22} \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} = \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} N_2 i_2 \quad (7)$$

y, por consiguiente, el coeficiente de inducción mutua L_{12} será:

$$L_{12} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2} = N_1 N_2 \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} \quad (8)$$

Si se comparan las ecuaciones (4) y (8) se observa la siguiente igualdad:

$$L_{12} = L_{21} = M = N_1 N_2 \frac{R_{m3}}{R_{m1} R_{m2} + R_{m2} R_{m3} + R_{m3} R_{m1}} \quad (9)$$

es decir, coinciden los dos coeficientes de inducción mutua y que se designan de una forma conjunta como M .

b) Debe señalarse que si no existieran flujos de dispersión en el circuito habría un acoplamiento magnético perfecto entre las bobinas 1 y 2. Sin embargo, la existencia de estos flujos da lugar a la definición de los siguientes coeficientes de acoplamiento:

1) Coeficiente de acoplamiento del devanado 1, que se define del siguiente modo:

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}$$

y que teniendo en cuenta la expresión (3) se cumple:

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} \quad (10)$$

2) Coeficiente de acoplamiento del devanado 2, que se define del siguiente modo:

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$$

y que teniendo en cuenta la expresión (7) se cumple:

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} \quad (11)$$

3) Coeficiente de acoplamiento total entre los devanados 1 y 2, que se define del siguiente modo:

$$k = \sqrt{k_1 k_2}$$

y teniendo en cuenta los resultados (10) y (11) da lugar a:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{R_{m3}}{\sqrt{(R_{m1} + R_{m3})(R_{m2} + R_{m3})}} \quad (12)$$

El lector puede comprobar que se cumple la siguiente relación:

$$M = k \sqrt{L_{11} L_{22}} \quad (13)$$

expresión que relaciona el coeficiente de inducción mutua con los coeficientes de autoinducción de cada bobina.

1.20. El circuito magnético de la Figura 1.37 está realizado con un material de permeabilidad infinita. Existen tres entrehierros con espesores de 1 mm, 2 mm y 3 mm. La sección del circuito magnético es constante y vale 10 cm². Las bobinas tienen $N_1 = 200$ y $N_2 = 100$ espiras.

- Se alimenta únicamente la bobina 1 con una c.c. de 10 A. Calcular los flujos magnéticos Φ_{11} , Φ_{21} y Φ_{d1} y también el coeficiente de acoplamiento del devanado 1.
- En el caso anterior, determinar el coeficiente de autoinducción L_{11} y el de inducción mutua L_{21} .
- Se alimenta a continuación únicamente la bobina 2 con una corriente continua de 20 A. Calcular los flujos magnéticos Φ_{22} , Φ_{12} y Φ_{d2} y también el coeficiente de acoplamiento del devanado 2.
- En el caso anterior, determinar el coeficiente de autoinducción L_{22} y el de inducción mutua L_{12} .
- ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento total entre ambas bobinas?

Nota: aplíquense los resultados del problema anterior.

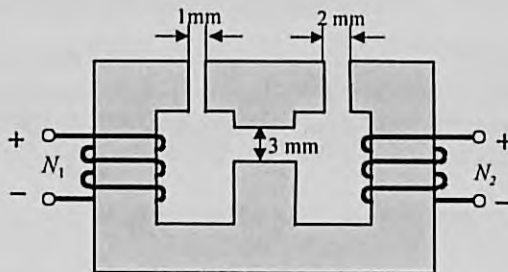


Figura 1.37

Solución

a) Las reluctancias de los tres entrehierros señalados en la Figura 1.37 son, respectivamente:

$$\text{Reluctancia entrehierro izquierdo: } R_{m1} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,796 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$\text{Reluctancia entrehierro derecho: } R_{m2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 1,592 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} = 2R_{m1}$$

$$\text{Reluctancia entrehierro central: } R_{m3} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 2,387 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} = 3R_{m1}$$

Al alimentar solamente la bobina 1, la f.m.m. correspondiente es $F_{m1} = N_1 i_1 = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ At}$ y, aplicando los resultados del problema anterior, se obtiene:

$$\Phi_{11} = \frac{R_{m2} + R_{m3}}{R_{m1}R_{m2} + R_{m2}R_{m3} + R_{m3}R_{m1}} N_1 i_1 = \frac{2R_{m1} + 3R_{m1}}{2R_{m1}^2 + 6R_{m1}^2 + 3R_{m1}^2} \cdot 2000 = \frac{5}{11R_{m1}} \cdot 2000 = \frac{5}{11 \cdot 0,796 \cdot 10^6} \cdot 2000 = 1,142 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{11} \frac{R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = 1,142 \frac{3R_{m1}}{2R_{m1} + 3R_{m1}} = 1,142 \frac{3}{5} = 0,6852 \text{ mWb}; \quad \Phi_{d1} = \Phi_{11} - \Phi_{21} = 1,142 - 0,6852 = 0,4568 \text{ mWb};$$

$$k_1 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{0,6852}{1,142} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b) Las inductancias L_{11} y L_{21} son:

$$L_{11} = N_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1} = 200 \frac{1,142 \cdot 10^{-3}}{10} = 22,84 \text{ mH}; \quad L_{21} = N_2 \frac{\Phi_{21}}{i_1} = 100 \frac{0,6852 \cdot 10^{-3}}{10} = 6,852 \text{ mH}$$

c) Al alimentar solamente la bobina 2, la f.m.m. correspondiente es $F_{m2} = N_2 i_2 = 100 \cdot 20 = 2000 \text{ At}$ y, aplicando los resultados del problema anterior, se obtiene:

$$\Phi_{22} = \frac{R_{m1} + R_{m3}}{R_{m1}R_{m2} + R_{m2}R_{m3} + R_{m3}R_{m1}} N_2 i_2 = \frac{R_{m1} + 3R_{m1}}{2R_{m1}^2 + 6R_{m1}^2 + 3R_{m1}^2} \cdot 2000 = \frac{4}{11R_{m1}} \cdot 2000 = 0,914 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{22} \frac{R_{m3}}{R_{m1} + R_{m3}} = 0,914 \frac{3R_{m1}}{R_{m1} + 3R_{m1}} = 0,914 \frac{3}{4} \approx 0,6852 \text{ mWb}; \quad \Phi_{d2} = \Phi_{22} - \Phi_{12} = 0,914 - 0,6852 \approx 0,229 \text{ mWb}$$

$$k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{0,6852}{0,914} = \frac{3}{4} = 0,75$$

d) Las inductancias L_{22} y L_{12} son:

$$L_{22} = N_2 \frac{\Phi_{22}}{i_2} = 100 \frac{0,914 \cdot 10^{-3}}{20} = 4,57 \text{ mH}; \quad L_{12} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{i_2} = 200 \frac{0,6852 \cdot 10^{-3}}{20} = 6,852 \text{ mH}$$

e) El coeficiente de acoplamiento total vale:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{0,6 \cdot 0,75} = 0,6708$$

podemos comprobar que se cumple la siguiente relación:

$$M = k \sqrt{L_{11} L_{22}} = 0,6708 \sqrt{22,84 \cdot 4,57} \approx 6,852 \text{ mH}$$

1.21. Las inductancias del dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.38 son:

$$L_{aa} = L_1 + L_2 \cos 2\theta ;$$

$$L_{bb} = L_1 - L_2 \cos 2\theta ;$$

$$L_{a2} = L_m \cos \theta ;$$

$$L_{b2} = L_m \sin \theta ;$$

$$L_{ab} = L_2 \sin 2\theta ; L_{22} = \text{constante}$$

Calcular la expresión del par producido, si las corrientes son de la forma:

$$i_a = I_m \cos \omega t ;$$

$$i_b = I_m \sin \omega t ; i_2 = I_2$$

y el rotor se mueve a una velocidad angular $\Omega = \omega$, estando definida la posición del rotor por la expresión: $\theta = \Omega t + \delta$.

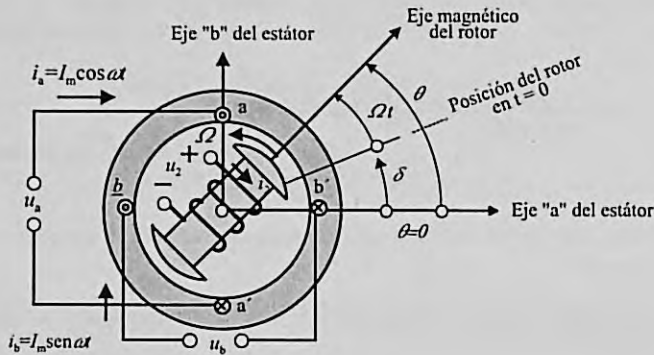


Figura 1.38

Solución

a) El par responde a la expresión matricial siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{a2} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{b2} \\ L_{2a} & L_{2b} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_2 \end{bmatrix}$$

que, al desarrollar, conduce a la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2} i_a^2 \frac{dL_{aa}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_b^2 \frac{dL_{bb}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_a i_b \frac{dL_{ab}}{d\theta} + i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

Los valores de las derivadas de las inductancias son las siguientes:

$$\frac{dL_{aa}}{d\theta} = -2L_2 \sin 2\theta ; \frac{dL_{bb}}{d\theta} = +2L_2 \sin 2\theta ; \frac{dL_{a2}}{d\theta} = -L_m \sin \theta ; \frac{dL_{b2}}{d\theta} = L_m \cos \theta ; \frac{dL_{ab}}{d\theta} = 2L_2 \cos 2\theta ; \frac{dL_{22}}{d\theta} = 0$$

Al sustituir estas derivadas en la expresión del par se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} i_a^2 [-2L_2 \sin 2\theta] + \frac{1}{2} i_b^2 [+2L_2 \sin 2\theta] + i_a i_b [2L_2 \cos 2\theta] + i_a i_2 [-L_m \sin \theta] + i_b i_2 [+L_m \cos \theta]$$

y, teniendo en cuenta las expresiones de las corrientes eléctricas, resulta:

$$T = -L_2 I_m^2 \sin 2\theta \cdot \cos^2 \omega t + L_2 I_m^2 \sin 2\theta \cdot \sin^2 \omega t + 2L_2 I_m^2 \cos 2\theta \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t - L_m I_2 I_m \sin \theta \cdot \cos \omega t + L_m I_2 I_m \cos \theta \cdot \sin \omega t$$

que al simplificar conduce a la siguiente expresión:

$$T = -L_2 I_m^2 \sin 2(\theta - \omega t) - L_m I_2 I_m \sin(\theta - \omega t)$$

y como quiera que $\theta = \Omega t + \delta = \omega t + \delta$ se convierte en:

$$T = -L_2 I_m^2 \sin 2\delta - L_m I_2 I_m \sin \delta \quad (1)$$

La expresión del par no depende del tiempo. Este problema explica el funcionamiento de un *motor síncrono bifásico de polos salientes*. Obsérvese que al girar el motor a la velocidad $\Omega = \omega$ denominada *velocidad de sincronismo*, se obtiene un par instantáneo que no depende del tiempo. El primer término de (1) es el par de reluctancia y se debe a los polos salientes de rotor y el segundo término es el par propio del motor. En los motores con rotor cilíndrico (configuración de polos lisos) el par de reluctancia no existe y solamente tiene efecto el segundo sumando de (1).

1.22. En el sistema electromecánico de la Figura 1.39, los valores de las inductancias propias de las bobinas y de la inductancia mutua son, respectivamente:

$$L_{11} = 5 + 2 \cos 2\theta ; L_{22} = 3 + \cos 2\theta ; L_{12} = L_{21} = M = 10 \cos \theta$$

Si los devanados se alimentan con corrientes continuas de valores: $i_1 = 1 \text{ A}$; $i_2 = 0,5 \text{ A}$, calcular:

- La energía magnética almacenada en función de θ .
- El par mecánico desarrollado en función de θ .

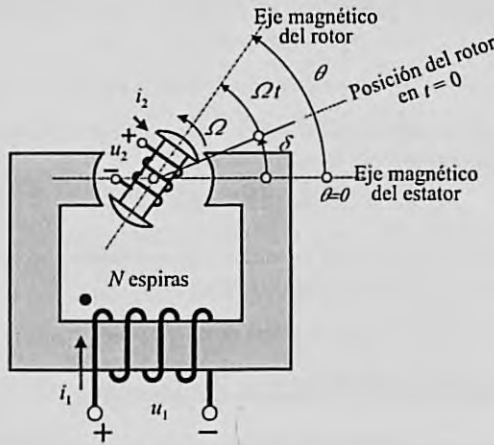


Figura 1.39

Solución

a) La expresión general de la energía magnética almacenada (que coincide con la coenergía por ser el sistema lineal) en un sistema con dos devanados es de la forma:

$$W_m = W_m' = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + M i_1 i_2$$

y al sustituir los valores de las corrientes y de las inductancias resulta:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}(5 + 2\cos 2\theta) \cdot 1^2 + \frac{1}{2}(3 + \cos 2\theta) \cdot 0,5^2 + 10(\cos \theta) \cdot 1 \cdot 0,5$$

es decir:

$$W_m = W'_m = 2,5 + \cos 2\theta + 0,375 + 0,125\cos 2\theta + 5\cos \theta = 2,875 + 1,125\cos 2\theta + 5\cos \theta$$

b) El par mecánico desarrollado a corriente constante tiene la expresión:

$$f = + \left[\frac{\partial W'_m}{\partial \theta} \right]_{i=\text{cte}} = -2,25 \sin 2\theta - 5 \sin \theta$$

1.23. El dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.39 (problema anterior) tiene una inductancia máxima y mínima en el devanado del rotor de 0,6 H y 0,3 H, respectivamente. Los valores máximos y mínimos de la inductancia correspondiente del estátor son de 1 H y 0,5 H, respectivamente. La inductancia mutua máxima es de 0,7 H.

Ambos devanados llevan una corriente constante de valor $\sqrt{2}$ A. Calcular

- El par cuando $\theta = 45^\circ$.
- Si el rotor se mueve lentamente desde $\theta = 90^\circ$ hasta $\theta = 0^\circ$ calcular:
 - El trabajo mecánico realizado.
 - El cambio en la energía magnética almacenada.
 - La entrada eléctrica.
- Si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s, calcular las f.e.m. e_1 y e_2 producidas en los devanados en el instante en que el rotor pasa por la posición $\theta = 45^\circ$.

Solución

a) Debido a los salientes magnéticos de las estructuras del estátor y del rotor de la máquina eléctrica de la Figura 1.39, los coeficientes de autoinducción de ambos devanados deben ser de la forma:

$$L_{ij} = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2} + \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} \cos 2\theta$$

y teniendo en cuenta los valores máximo y mínimo de las inductancias que señala el enunciado, se tienen las siguientes expresiones para los devanados del estátor y del rotor respectivamente:

$$\text{Inductancia del estátor: } L_{11} = \frac{1 + 0,5}{2} + \frac{1 - 0,5}{2} \cos 2\theta = 0,75 + 0,25 \cos 2\theta$$

$$\text{Inductancia del rotor: } L_{22} = \frac{0,6 + 0,3}{2} + \frac{0,6 - 0,3}{2} \cos 2\theta = 0,45 + 0,15 \cos 2\theta$$

Como quiera que la inductancia mutua máxima entre ambos arrollamientos es de 0,7 H y es evidente que su valor depende del coseno del ángulo que forman los ejes del estátor y del rotor, se puede escribir:

$$L_{12} = L_{21} = M = 0,7 \cos \theta$$

b) La expresión general del par electromagnético entre ambos devanados es:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}$$

y, calculando las derivadas que se incluyen en la ecuación anterior, resulta:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 (-0,5 \sin 2\theta) + \frac{1}{2} i_2^2 (-0,3 \sin 2\theta) + i_1 i_2 (-0,7 \sin \theta)$$

Como quiera que los valores de las corrientes son: $i_1 = i_2 = \sqrt{2}$, al sustituir en la ecuación anterior se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-0,5 \operatorname{sen} 2\theta) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-0,3 \operatorname{sen} 2\theta) + 2 \cdot (-0,7 \operatorname{sen} \theta) = -0,8 \operatorname{sen} 2\theta - 1,4 \operatorname{sen} \theta$$

Por consiguiente, cuando $\theta = 45^\circ$, resulta:

$$T = -0,8 \operatorname{sen} 90^\circ - 1,4 \operatorname{sen} 45^\circ = -0,8 - 1,4 \frac{1}{\sqrt{2}} = -1,79 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b1) El trabajo mecánico desarrollado cuando el rotor se mueve lentamente entre $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 0^\circ$ es:

$$W_{\text{mec}} = \int_{90^\circ}^{0^\circ} d\theta = \int_{90^\circ}^{0^\circ} (0,8 \operatorname{sen} 2\theta - 1,4 \operatorname{sen} \theta) d\theta = [0,4 \cos 2\theta + 1,4 \cos \theta]_{90^\circ}^{0^\circ} = 0,4 + 1,4 - (-0,4) - 0 = 2,2 \text{ J}$$

b2) La expresión de la energía magnética almacenada es:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$$

y al sustituir los valores de las inductancias y de las corrientes se obtiene:

$$W_m = \frac{1}{2} (0,75 + 0,25 \cos 2\theta) \cdot 2 + \frac{1}{2} (0,45 + 0,15 \cos 2\theta) \cdot 2 + (0,7 \cos \theta) \cdot 2 = 1,2 + 0,4 \cos 2\theta + 1,4 \cos \theta$$

lo que indica que la energía magnética almacenada en la situación inicial ($\theta = 90^\circ$) vale:

$$W_{mi} = 1,2 + 0,4 \cos 180^\circ + 1,4 \cos 90^\circ = 0,8 \text{ J}$$

y en la situación final ($\theta = 0^\circ$) es:

$$W_{mf} = 1,2 + 0,4 \cos 0^\circ + 1,4 \cos 0^\circ = 3 \text{ J}$$

En consecuencia, el cambio en la energía magnética almacenada vale:

$$\Delta W_m = W_{mf} - W_{mi} = 3 - 0,8 = 2,2 \text{ J}$$

b3) La energía eléctrica que entra en los arrollamientos es de la forma:

$$dW_e = u i dt = N \frac{d\Phi}{dt} i dt = i d\Psi \Rightarrow \Delta W_e = i \Delta\Psi$$

donde se ha llamado $\Psi = N \Phi$ al flujo concatenado total por el devanado respectivo. De este modo, para el devanado 1 se tiene ($i_1 = i_2 = \sqrt{2}$) y el valor del flujo concatenado total es de la forma:

$$\Psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = \sqrt{2} [0,75 + 0,25 \cos 2\theta + 0,7 \cos \theta]$$

que para $\theta = 90^\circ$ tiene un valor inicial:

$$\Psi_{1i}(\theta = 90^\circ) = \sqrt{2} [0,75 + 0,25 \cos 180^\circ + 0,7 \cos 90^\circ] = 0,5\sqrt{2}$$

y para $\theta = 0^\circ$ tiene un valor final:

$$\Psi_{1f}(\theta = 0^\circ) = \sqrt{2} [0,75 + 0,25 \cos 0^\circ + 0,7 \cos 0^\circ] = 1,7\sqrt{2}$$

por lo que el incremento de energía eléctrica que entra en el devanado 1 vale:

$$\Delta W_{e1} = i_1 \Delta\Psi = i_1 (\Psi_{1f} - \Psi_{1i}) = \sqrt{2} (1,7\sqrt{2} - 0,5\sqrt{2}) = 2,4 \text{ J}$$

De un modo similar para el devanado 2 resulta:

$$\psi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 = \sqrt{2} [0,75 \cos\theta + 0,45 + 0,15 \cos 2\theta]$$

que para $\theta = 90^\circ$ tiene un valor inicial:

$$\psi_{2i}(\theta = 90^\circ) = \sqrt{2} \cdot [0,75 \cos 90^\circ + 0,45 + 0,15 \cos 180^\circ] = 0,3\sqrt{2}$$

y para $\theta = 0^\circ$ tiene un valor final:

$$\psi_{2f}(\theta = 0^\circ) = \sqrt{2} [0,75 \cos 0^\circ + 0,45 + 0,15 \cos 0^\circ] = 1,3\sqrt{2}$$

por lo que el incremento de energía eléctrica que entra en el devanado 2 será:

$$\Delta W_{e2} = i_2(\psi_{2f} - \psi_{2i}) = \sqrt{2}(1,3\sqrt{2} - 0,3\sqrt{2}) = 2 \text{ J}$$

por tanto, la energía que entrega la red a los devanados de la máquina en su movimiento de giro es:

$$\Delta W_e = \Delta W_{e1} + \Delta W_{e2} = 2,4 + 2 = 4,4 \text{ J}$$

Obsérvese que se cumple el balance energético del sistema, es decir cuando el rotor se mueve lentamente, los devanados absorben de la red una energía eléctrica de 4,4 J, el rotor desarrolla un trabajo mecánico de 2,2 J y se produce un aumento de la energía magnética almacenada en el sistema de 2,2 J.

c) Las f.e.m. inducidas en las bobinas se obtienen de las expresiones siguientes:

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{11}i_1 + L_{12}i_2); \quad e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21}i_1 + L_{22}i_2)$$

que se transforman en:

$$e_1 = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta}i_2\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta}i_2\right) \cdot \Omega$$

$$e_2 = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{22}}{d\theta}i_2\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta}i_1 + L_{12} \frac{dL_{22}}{d\theta}i_2\right) \cdot \Omega$$

y, teniendo en cuenta que las inductancias y sus derivadas respectivas son:

$$L_{11} = 0,75 + 0,25 \cos 2\theta \Rightarrow \frac{dL_{11}}{d\theta} = -0,5 \sin 2\theta$$

$$L_{22} = 0,45 + 0,15 \cos 2\theta \Rightarrow \frac{dL_{22}}{d\theta} = -0,3 \sin 2\theta$$

$$L_{12} = L_{21} = M = 0,7 \cos \theta \Rightarrow \frac{dL_{12}}{d\theta} = \frac{dL_{21}}{d\theta} = -0,7 \sin \theta$$

Al sustituir en las ecuaciones de las f.e.m. se obtiene:

$$e_1 = -\left(\frac{dL_{11}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{12}}{d\theta}i_2\right) \cdot \Omega = -[(-0,5 \sin 2\theta)i_1 + (-0,7 \sin \theta)i_2] \cdot \Omega$$

$$e_2 = -\left(\frac{dL_{21}}{d\theta}i_1 + \frac{dL_{22}}{d\theta}i_2\right) \cdot \Omega = -[(-0,7 \sin \theta)i_1 + (-0,3 \sin 2\theta)i_2] \cdot \Omega$$

Sustituyendo los valores de las corrientes $i_1 = i_2 = \sqrt{2}$ A y la velocidad angular $\Omega = 100$ rad/s resulta finalmente:

$$e_1 = 100\sqrt{2} [0,5 \sin 2\theta + 0,7 \sin \theta]; \quad e_2 = 100\sqrt{2} [0,7 \sin \theta + 0,3 \sin 2\theta]$$

que para $\theta = 45^\circ$ dan lugar a:

$$e_1 = 100\sqrt{2} [0,5 \sin 90^\circ + 0,7 \sin 45^\circ] = 140,71 \text{ V}$$

$$e_2 = 100\sqrt{2} [0,7 \sin 45^\circ + 0,3 \sin 90^\circ] = 112,43 \text{ V}$$

1.24. Una máquina eléctrica tiene forma cilíndrica tanto en la estructura del estator como la del rotor. Los valores de las inductancias propias y mutua son:

$$L_{11} \text{ (estator)} = 0,1 \text{ H}; L_{22} \text{ (rotor)} = 0,04 \text{ H}; L_{12} = L_{21} = M = 0,05 \cos \theta \text{ H}$$

donde θ expresa el ángulo que forman los ejes de ambos devanados.

- Si la máquina gira a una velocidad $\Omega = 200 \text{ rad/s}$ y por uno de los devanados circula una corriente $10 \text{ sen } 200t$ ¿cuál será la f.e.m. máxima (de pico) inducida en la otra bobina?
- Supóngase que los devanados se conectan en serie y circula por ellos una corriente $10 \text{ sen } 200t \text{ A}$ ¿para qué velocidades del rotor desarrollará la máquina un par medio?
- ¿Cuál es el valor máximo del par medio que puede obtenerse en el caso b)?

Nota: despreciar las resistencias eléctricas de los devanados.

Solución

a) En la Figura 1.40 se muestra el esquema correspondiente de la máquina. Supongamos entonces que se excita la bobina del estator por una corriente: $i_1(t) = 10 \text{ sen } 200t \text{ A}$, y el devanado 2 se deja abierto ($i_2 = 0 \text{ A}$), el valor de la f.e.m. inducida en el devanado 2 se obtiene de la expresión:

$$e_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{21}i_1 + L_{22}i_2) = \frac{d}{dt}(L_{21}i_1) = \frac{d}{dt}[(0,05 \cos \theta) \cdot (10 \text{ sen } 200t)]$$

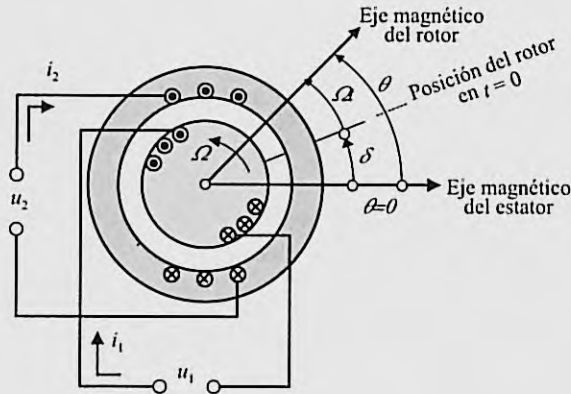


Figura 1.40

y como quiera que $\theta = \Omega t + \delta = 200t + \delta$, el valor de la f.e.m. será:

$$e_2 = \frac{d}{dt}[(0,05 \cos \theta) \cdot (10 \text{ sen } 200t)] = \frac{d}{dt}[(0,05 \cos(200t + \delta)) \cdot (10 \text{ sen } 200t)] = 100 \cos(200t + \delta)$$

que corresponde a una tensión máxima o de pico de 100 V.

b) La expresión del par mecánico producido es de la forma:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} = (-0,05 \text{ sen } \theta) i_1 i_2$$

y teniendo en cuenta que se tiene:

$$i_1(t) = i_2(t) = 10 \operatorname{sen} 200t; \theta = \Omega t + \delta$$

al sustituir en la expresión del par se obtiene:

$$T = -0,05 \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \cdot 100 \operatorname{sen}^2 200t = -5 \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \frac{1 - \cos 400t}{2} = -2,5 \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + 2,5 \cos 400t \cdot \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$$

Obsérvese en la expresión anterior que si el rotor está parado, el par es igual a $-5 \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}^2 200t$, cuyo valor medio es $-2,5 \operatorname{sen} \delta \operatorname{N}\cdot\text{m}$, pero también se produce un par medio distinto de cero si el rotor se mueve a la velocidad: angular: $\Omega = 400 \operatorname{rad/s}$. Téngase en cuenta que para esta velocidad, la expresión instantánea del par sería:

$$T = -2,5 \operatorname{sen}(400t + \delta) + 2,5 \cos 400t \cdot \operatorname{sen}(400t + \delta)$$

cuyo valor medio, denominando $\alpha = \Omega t = 400t$, sería:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\Omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2,5 \operatorname{sen}(\alpha + \delta) d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2,5 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \delta) d\alpha$$

La primera integral es nula y la segunda vale:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2,5 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \delta) d\alpha = 1,25 \operatorname{sen} \delta$$

El par medio es, por consiguiente, igual a $1,25 \operatorname{sen} \delta \operatorname{N}\cdot\text{m}$, y se desarrolla cuando la velocidad es de $400 \operatorname{rad/s}$. El valor máximo del par es de $1,25 \operatorname{N}\cdot\text{m}$.

1.25. Una máquina eléctrica con salientes magnéticos, tanto en el estátor como en el rotor, tiene las siguientes inductancias en henrios:

$$L_{11} (\text{estátor}) = 0,75 + 0,35 \cos 2\theta; L_{22} (\text{rotor}) = 0,5 + 0,2 \cos 2\theta;$$

$$L_{12} L_{21} = L_{21} = M (\text{estátor-rotor}) = 0,8 \cos \theta$$

Las resistencias de los devanados son despreciables. Si por el devanado del estátor circula una corriente $i_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} 314t$, y el rotor está en cortocircuito, calcular:

- la corriente $i_2(t)$ que circulará por el rotor
- el par resultante, cuando $\theta = 135^\circ$.

Solución

a) En la Figura 1.41 se muestra el esquema correspondiente de la máquina. Al excitar la bobina del estátor por una corriente: $i_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} 314t$, y estar el devanado 2 en cortocircuito, la tensión en el devanado 2 es nula. Como quiera que esta es igual a:

$$u_2 = 0 = -e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21}i_1 + L_{22}i_2) = -\frac{d}{dt}[(0,8 \cos \theta) \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen} 314t + (0,5 + 0,2 \cos 2\theta) i_2]$$

es decir:

$$u_2 = 0 = (0,8 \cos \theta) \cdot \sqrt{2} \cdot 314 \cos 314t + (0,5 + 0,2 \cos 2\theta) \cdot \frac{di_2}{dt}$$

que para $\theta = 135^\circ$ nos da:

$$u_2 = 0 = -0,8 \cdot 314 \cdot \cos 314t + 0,5 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 1,6 \cdot 314 \cdot \cos 314t$$

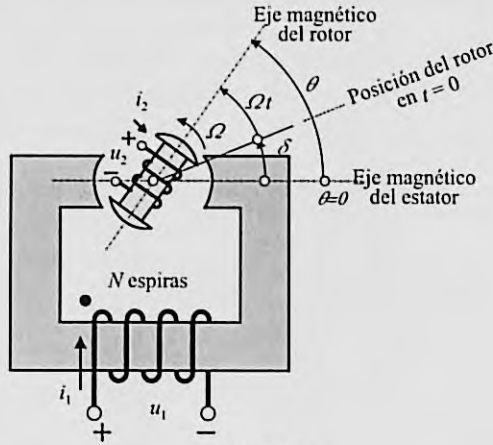


Figura 1.41

Y, por consiguiente:

$$i_2(t) = \int 1,6 \cdot 314 \cdot \cos 314t = 1,6 \operatorname{sen} 314t + C$$

Si se considera que en $t = 0$ la corriente i_2 es cero, se tiene finalmente una corriente en el devanado del rotor:

$$i_2(t) = 1,6 \operatorname{sen} 314t$$

b) La expresión del par es:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta}$$

cuyo resultado es:

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 (-0,7 \operatorname{sen} 2\theta) + \frac{1}{2} i_2^2 (-0,4 \operatorname{sen} 2\theta) + i_1 i_2 (-0,8 \operatorname{sen} \theta)$$

y, que para $\theta = 135^\circ$, da lugar al siguiente resultado:

$$T = 0,35 i_1^2 + 0,2 i_2^2 + i_1 i_2 (-0,566 \operatorname{sen} \theta)$$

que teniendo en cuenta los valores de las corrientes que circulan por los devanados: $i_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} 314t$; $i_2(t) = 1,6 \operatorname{sen} 314t$ se obtiene:

$$T = 0,7 \operatorname{sen}^2 314t + 0,512 \operatorname{sen} 314t - 1,28 \operatorname{sen} 314t = -0,068 \operatorname{sen} 314t$$

es decir:

$$T = -0,068 \frac{1 - \cos 628t}{2} = 0,034 (\cos 628t - 1)$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 1.26. La estructura magnética de la Figura 1.42 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de imanación están expresadas por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Armadura fija: } B_1 = \frac{2H_1}{150 + H_1}; \quad \text{Armadura móvil: } B_2 = \frac{2,3H_2}{275 + H_2}$$

donde B se expresa en teslas y H en A/m. Calcular la corriente necesaria que debe circular por la bobina de excitación para que la inducción magnética en los entrehierros sea de 0,6 T.

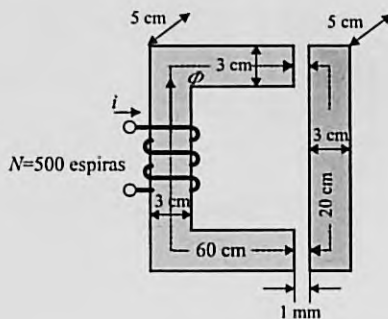


Figura 1.42

Resp. 2,03 A

- 1.27. El material del circuito magnético de la Figura 1.43 tiene una curva de magnetización expresada por:

$$B = \frac{2H}{150 + H}; \quad B: \text{ en teslas; } H: \text{ en A/m}$$

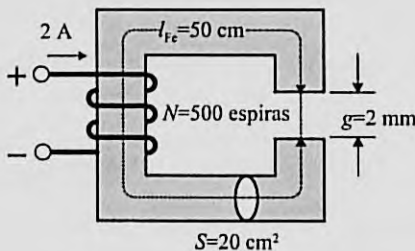


Figura 1.43

La sección transversal es uniforme y vale 20 cm^2 , la longitud media en el material magnético es de 50 cm y el entrehierro es de 2 mm. Si se aplica a la bobina una corriente de 2 A, calcular la inducción magnética resultante en el entrehierro.

Resp. 0,919 T

- 1.28. La Figura 1.44 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 100 espiras. La sección transversal de toda la estructura magnética es de 10 cm^2 . Los entrehierros tienen espesores: $g = 1 \text{ mm}$; $x = 2 \text{ mm}$. Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en los entrehierros. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 10 A , calcular
- El flujo magnético en la zona en que está situada la bobina.
 - La inductancia de la bobina.
 - La fuerza que actúa sobre la armadura móvil cuando el entrehierro central x es igual a 2 mm .

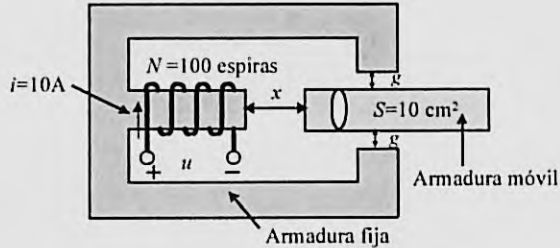


Figura 1.44

Resp. a) $\Phi = 0,5027 \text{ mWb}$; b) $L = 5,027 \text{ mH}$; c) $f = 100,53 \text{ N}$

- 1.29. La Figura 1.45 muestra dos bobinas idénticas de coeficiente de autoinducción L e inductancia mutua M , colocadas en el núcleo central a ambos lados del entrehierro. Se sabe que al conectar las bobinas en serie (uniendo a' con b) y que la inductancia total medida entre a y b' dio un valor de 20 mH . ¿Cuál será la inductancia total si se conectan las bobinas en paralelo, es decir, uniendo a con b y a' con b' y midiendo la inductancia resultante entre a y a' ?

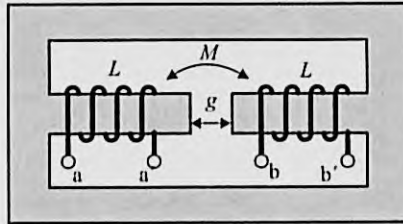


Figura 1.45

Resp. $L_{\text{paralelo}} = 5 \text{ mH}$

- 1.30. El circuito magnético de la Figura 1.46 tiene una reluctancia del hierro despreciable y dispone de dos entrehierros de espesores g_1 y g_2 y secciones S_1 y S_2 , respectivamente. El devanado superior de la izquierda tiene N_1 espiras y el inferior dispone de N_2 espiras. Calcular las expresiones de los coeficientes de autoinducción de cada bobina y el de inducción mutua.

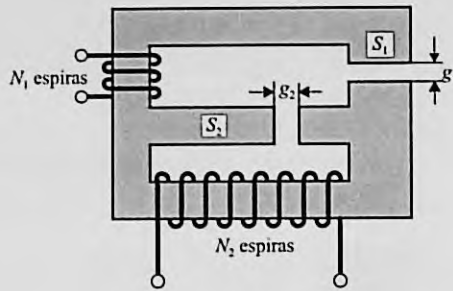


Figura 1.46

$$\text{Resp. } L_1 = \frac{N_1^2}{g_1} \mu_0 S_1; \quad L_2 = N_2^2 \mu_0 \left(\frac{S_1}{g_1} + \frac{S_2}{g_2} \right); \quad L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{g_1} \mu_0 S_1$$

- 1.31. En el circuito de la Figura 1.47 la sección del núcleo magnético es uniforme y vale $S = 20 \text{ cm}^2$. La reluctancia del hierro es despreciable y los entrehierros tienen los espesores señalados. Las bobinas tienen 100 espiras y 50 espiras, respectivamente.

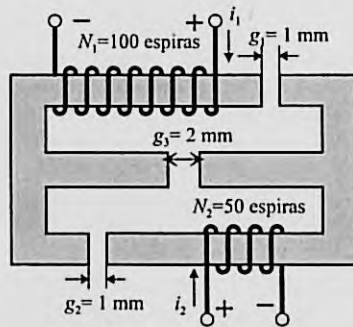


Figura 1.47

- Se aplica una corriente $i_1 = 10 \text{ A}$ al devanado 1; calcular el flujo magnético total Φ_{11} que produce este devanado y el flujo Φ_{21} que atraviesa al devanado 2.
- Se desconecta la alimentación de la bobina 1 y se alimenta la bobina 2 con una corriente $i_2 = 10 \text{ A}$. Calcular el flujo magnético total Φ_{22} que produce este devanado y el flujo Φ_{12} que atraviesa al devanado 1.
- A partir de los resultados anteriores, calcular los coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 de ambas bobinas y también el coeficiente de inducción mutua $L_{12} = L_{21} = M$.
- ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento entre ambos devanados?

$$\text{Resp. a) } \Phi_{11} = 1,508 \text{ mWb}; \quad \Phi_{21} = 1,005 \text{ mWb}; \quad \text{b) } \Phi_{22} = 0,754 \text{ mWb}; \quad \Phi_{12} = 0,503 \text{ mWb}$$

$$\text{c) } L_{11} = 15,08 \text{ mH}; \quad L_{22} = 3,77 \text{ mH}; \quad L_{12} = L_{21} = M = 5,03 \text{ mH}; \quad \text{d) } k = 0,666.$$

1.32. El circuito de la Figura 1.48 tiene una sección transversal uniforme igual a 10 cm^2 . La reluctancia del hierro es infinita y los entrehierros tienen todos 1 mm de espesor. La bobina 1 tiene 200 espiras y la bobina 2 tiene 100 espiras. Calcular

- Los coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 de ambas bobinas y el coeficiente de inducción mutua $L_{12} = L_{21} = M$.
- Repetir el problema si el entrehierro del núcleo derecho se aumenta hasta 3 mm .

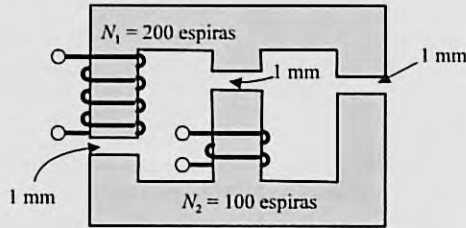


Figura 1.48

Resp. a) $L_{11} = 3,35 \text{ mH}$; $L_{22} = 0,838 \text{ mH}$; $L_{12} = L_{21} = M = 0,838 \text{ mH}$;
b) $L_{11} = 2,87 \text{ mH}$; $L_{22} = 0,718 \text{ mH}$; $L_{12} = L_{21} = M = 0,1077 \text{ mH}$

1.33. En la Figura 1.49 se muestra una estructura de hierro ideal (sin reluctancia magnética) que tiene dos devanados de $N_1 = 100$ espiras y $N_2 = 50$ espiras. El circuito magnético tiene una sección uniforme de 10 cm^2 y existen tres entrehierros de espesores 1 mm , 2 mm y 3 mm , respectivamente. Calcular:

- Los coeficientes de autoinducción e inducción mutua de los devanados.
- Se aplica a la bobina 1 una tensión sinusoidal de 10 V de valor eficaz y 50 Hz , determinar la tensión inducida en la bobina 2.

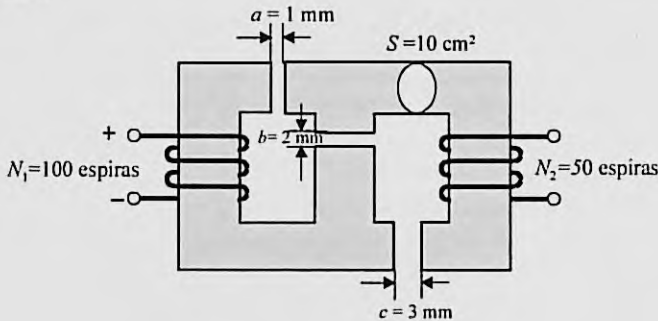


Figura 1.49

Resp. a) $L_{11} = 5,71 \text{ mH}$; $L_{22} = 0,857 \text{ mH}$; $L_{12} = L_{21} = M = 1,14 \text{ mH}$; b) 2 V

1.34. Dos bobinas con núcleo de aire y resistencias despreciables, tienen unos coeficientes de autoinducción e inducción mutua que son funciones de un desplazamiento lineal x de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$L_{11} = 2 + 10x; L_{22} = 4 + 20x; L_{12} = L_{21} = M = 2 - 10x$$

donde x se mide en metros y las inductancias en henrios; si se alimentan las bobinas con c.c. de valores $I_1 = +20 \text{ A}$; $I_2 = -10 \text{ A}$. Calcular:

- a) El trabajo mecánico desarrollado cuando el desplazamiento x varía entre $x = 0$ y $x = 0,1$ m.
 b) En la situación del apartado anterior, hallar el incremento de energía magnética almacenada en el sistema y las energías eléctricas suministradas por los generadores que alimentan las bobinas.
 c) La fuerza mecánica media desarrollada para $x = 0,1$ m, cuando la bobina 1 se alimenta con una tensión sinusoidal de la forma:

$$u_1 = 170\sqrt{2} \sin 0t \text{ V,}$$

con la bobina 2 cortocircuitada.

$$\text{Resp. a) } W_{\text{mec}} = 500 \text{ J; b) } \Delta W_{\text{mag}} = 500 \text{ J; } W_1 = 600 \text{ J; } W_2 = 400 \text{ J; c) } f = 250 \text{ N}$$

- 1.35. Dos bobinas con núcleo de aire y resistencias despreciables, tienen unos coeficientes de autoinducción e inducción mutua que son funciones de un desplazamiento lineal x de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$L_{11} = 1 + x; L_{22} = 2(1 + x); L_{12} = L_{21} = M = 1 - x;$$

donde x se mide en metros y las inductancias en henrios. Determinar:

- a) La d.d.p. en circuito abierto que se obtiene en los terminales de la bobina 2, si la corriente en la bobina 1 es $i_1 = 10 \sin t$ A y el desplazamiento x varía sinusoidalmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $x(t) = 0,5 \cos t$.
 b) la d.d.p. en circuito abierto que se obtiene en la bobina 2 si se aplica una tensión a la bobina 1 de la forma: $u_1 = 10 \sin t$ y $x = 0,5$ m.
 c) si se cortocircuita la bobina 2 y se aplica a la bobina 1 una tensión: $u_1 = 17 \sin t$ V y con $x = 0,5$ m, ¿cuál será el valor de la corriente i_2 ?

$$\text{Resp. a) } e_2 = 10 \cos t - 5 \cos 2t \text{ V; b) } e_2(t) = \frac{10}{3} \sin t \text{ V; c) } i_2 = 2 \cos t \text{ A}$$

- 1.36. El circuito magnético de la Figura 1.50 tiene una sección transversal uniforme de $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2$ y una longitud magnética media en el hierro de 1 m. La curva de imanación del hierro se puede aproximar por la ecuación:

$$B = \frac{2H}{200 + H}; B \text{ en teslas y } H \text{ en A/m}$$

el entrehierro es de 1 mm y la bobina tiene 250 espiras. Si se aplica a la bobina una corriente de 4 A, calcular:

- a) El flujo magnético en el entrehierro.
 b) La energía magnética almacenada en el hierro.
 c) La energía almacenada en el entrehierro.
 d) El coeficiente de autoinducción de la bobina;
 e) Repetir el problema si el entrehierro se reduce a 0,5 mm.

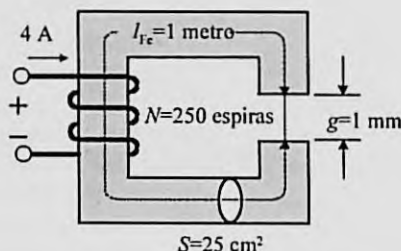


Figura 1.50

$$\text{Resp. a) } \Phi = 2,51 \text{ mWb; b) } W_{\text{m(Fe)}} = 0,1952 \text{ J; c) } W_{\text{m(ent)}} = 1,0027 \text{ J; d) } 0,1569 \text{ H; e) } \Phi = 3,46 \text{ mWb; } W_{\text{m(Fe)}} = 0,486 \text{ J; } W_{\text{m(ent)}} = 0,9527 \text{ J; } 0,2163 \text{ H}$$

1.37. En la Figura 1.51 se muestran dos bobinas de coeficientes de autoinducción L_1 y L_2 , respectivamente e inductancia mutua M . Al disponer las bobinas en serie como señala la Figura 1.51a, la inductancia total medida en la entrada fue de $L_a = 2,5$ H, mientras que con el montaje de la Figura 1.51b la inductancia equivalente fue $L_b = 1,1$ H. Si se sabe que la inductancia L_1 es ocho veces la inductancia L_2 , calcular:

- Las inductancias L_1 y L_2 de las bobinas.
- La inductancia mutua M .
- El coeficiente de acoplamiento.

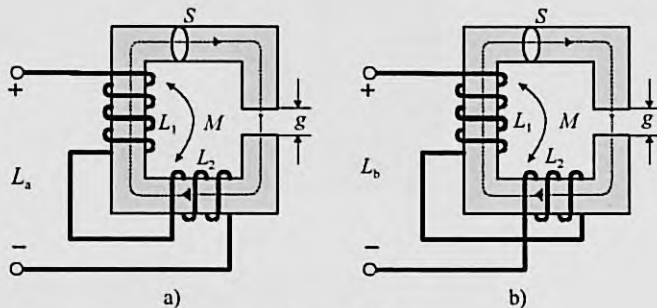


Figura 1.51

Resp. a) $L_1 = 1,60$ H; $L_2 = 0,20$ H; b) $M = 0,35$ H; c) $k = 0,619$

1.38. El circuito magnético de la Figura 1.52 tiene una sección transversal uniforme de 10 cm^2 , y las demás dimensiones son las señaladas en la figura. La bobina tiene 1000 espiras y el material ferromagnético de las armaduras fija y móvil tiene una permeabilidad relativa de 1000. La armadura móvil tiene una masa de 1 kg.

- ¿Qué corriente debe aplicarse a la bobina para mantener suspendida la armadura móvil a una distancia $x = 1 \text{ cm}$?
- ¿Cuál es el valor de la inductancia de la bobina para esa posición de equilibrio?
- ¿Cuál es la energía magnética almacenada?

Nota: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

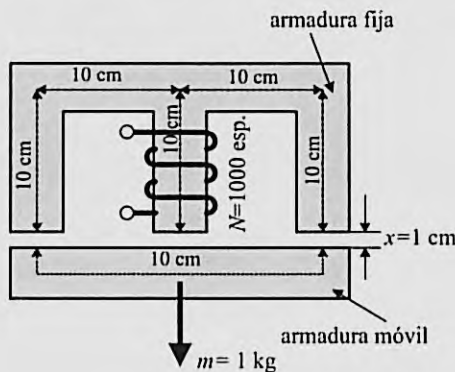


Figura 1.52

Resp. a) 1,55 A; b) 0,0827 H; 0,1 J

- 1.39. En el circuito magnético de la Figura 1.53 la permeabilidad del hierro es infinita. La bobina de excitación tiene 100 espiras. El entrehierro central tiene un espesor de 2 mm y una superficie de 20 cm² y el entrehierro derecho tiene un espesor de 1 mm y una superficie de 10 cm². Si la bobina se alimenta con una c.c. de 10 A, calcular:
- Los flujos magnéticos: Φ , Φ_1 y Φ_2 .
 - La inductancia de la bobina.
 - La energía magnética almacenada en el sistema.

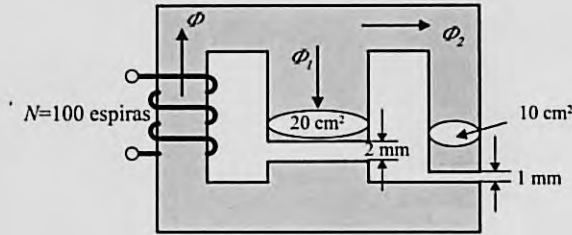


Figura 1.53

Resp. a) 2,513 mWb; 1,256 mWb; 1,256 mWb; b) 25,13 mH; c) 1,257 J

- 1.40. El material del circuito magnético de la Figura 1.54 tiene una reluctancia despreciable. Las dimensiones son las mostradas en la figura, siendo la sección de toda la estructura de $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$. La armadura móvil superior solamente se puede desplazar en el plano horizontal, permaneciendo el espesor del entrehierro central en el valor constante de 1 mm. Las bobinas tienen cada una 100 espiras.

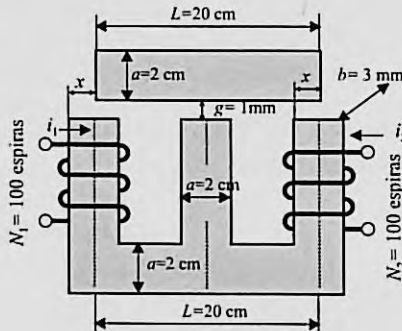


Figura 1.54

Si se supone que $x = 0,5\text{ cm}$, calcular para esta posición de la armadura móvil:

- Los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua de las bobinas.
- Si se alimentan las bobinas con unas corrientes $i_1 = 20\text{ A}$, $i_2 = 30\text{ A}$, calcular para $x = 0,5\text{ cm}$, la fuerza a que se ve sometida la armadura móvil.
- Para los valores de las corrientes anteriores ¿cuál será el valor del desplazamiento x para el cual la armadura móvil no está sometida a ninguna fuerza?

Resp. a) $L_1 = 3,53\text{ mH}$; $L_2 = 1,65\text{ mH}$; $L_1 = 0,707\text{ mH}$; b) 16,49 N hacia la derecha; c) $x = 1,2\text{ cm}$

1.41. El circuito magnético de la Figura 1.55 tiene una permeabilidad del hierro infinita. La bobina de excitación tiene 100 espiras recorridas por una corriente de 10 A. La armadura fija es de sección circular, siendo el área de la parte izquierda de 20 cm^2 y la de la parte derecha de 10 cm^2 . La armadura móvil es un tronco de cono con una sección de 20 cm^2 en su cara izquierda y de 10 cm^2 en su cara derecha. Si $a = b = 10 \text{ cm}$, calcular:

- La inductancia de la bobina en función de la posición x .
- La fuerza a la que está sometida la armadura móvil en función de x .
- Los valores numéricos de los apartados anteriores para $x = 5 \text{ cm}$.
- Si la sección de la armadura fija fuera constante y de valor 20 cm^2 y la armadura móvil fuera un cilindro de sección transversal constante y también de 20 cm^2 ¿estaría sometida la armadura móvil a alguna fuerza para alguna posición de x ?

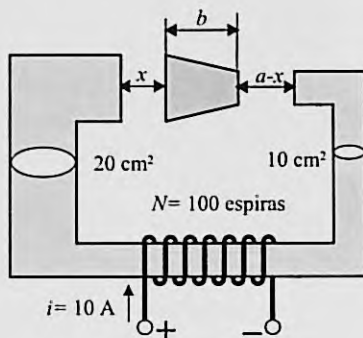


Figura 1.55

Resp. a) $L = 0,1676 \text{ mH}$; b) $0,0559 \text{ N}$ hacia la derecha; c) No; la inducción sería la misma en cada base (cara) del cilindro móvil, por lo que las fuerzas sobre las caras izquierda y derecha serían iguales y de sentido contrario para cualquier valor de x y no habría fuerza neta sobre la armadura móvil.

1.42. Un apilamiento de chapa magnética de acero al silicio de 10 kg de peso ha sido sometida a un ensayo de pérdidas en el hierro con el cuadro de Epstein excitado con una gama de inducciones sinusoidales a distintas frecuencias, dando el resultado mostrado la tabla siguiente:

Frecuencia (Hz)	Inducción máxima (T)	Pérdidas totales en el hierro (W)
25	1,2	4,7
25	1,6	8,8
50	1,2	11,1

Si las pérdidas por histéresis y corrientes de Foucault (en W/kg) se pueden expresar, respectivamente, por las siguientes fórmulas:

$$P_{H1} = k_{H1} f B_m^{\alpha}; \quad P_F = k_F f^2 B_m^2$$

donde k_{H1} y k_F son constantes para una determinada chapa y espesor, f es la frecuencia y B_m es la inducción máxima.

Determinar:

- Los valores de las constantes k_H y k_F y del exponente de Steinmetz α .
- Las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault para la muestra ensayada y para una frecuencia de 50 Hz y con una inducción máxima de 1,5 T.

Resp. a) $k_H = 0,0103$; $k_F = 9,44 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 2,219$; b) $P_H = 6,332$ W; $P_F = 1,328$ W

- 1.43. El circuito magnético de la Figura 1.56 tiene una sección transversal uniforme y una relación no lineal entre el flujo magnético Φ (en Wb) en el entrehierro y la f.m.m. F_m de la bobina (en At) para cada espesor x del entrehierro (en metros) que viene expresada por la ecuación:

$$\Phi = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{x^2} \sqrt{F_m}$$

La bobina de excitación tiene 100 espiras y se alimenta con una corriente continua de 4 A. Calcular para los espesores de entrehierro $x = 1$ cm y $x = 0,5$ cm las siguientes magnitudes:

- La energía magnética almacenada.
- La coenergía magnética almacenada.
- La inductancia de la bobina.
- La fuerza media desarrollada por la armadura móvil cuando se desplaza desde $x = 1$ cm hasta $x = 0,5$ cm manteniendo constante la corriente de alimentación de 4 A (aplíquese la expresión: $f_{med} = [\Delta W_m' / \Delta x]_i$).
- Responder a la pregunta anterior si el movimiento se realiza manteniendo el flujo magnético constante en el valor inicial de 6 mWb (aplíquese la expresión: $f_{med} = [\Delta W_m / \Delta x]_\Phi$).

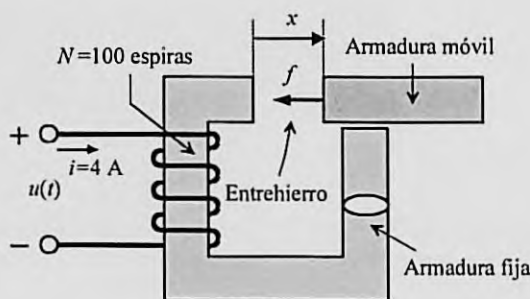


Figura 1.56

Resp. a) $W_m(x = 1 \text{ cm}) = 0,8$ J; $W_m(x = 0,5 \text{ cm}) = 3,2$ J; b) $W_m'(x = 1 \text{ cm}) = 1,6$ J; $W_m'(x = 0,5 \text{ cm}) = 6,4$ J; c) $L = 0,4$ H; d) $f_{med} = -960$ N; e) $f_{med} = -480$ N.

- 1.44. En la Figura 1.57 se muestra un núcleo no ferromagnético sobre el que está arrollado un devanado 1 que tiene encima una espira 2 conductora cortocircuitada. Las inductancias son:

$$L_{11} = 1 \text{ H}; L_{22} = 1 \text{ mH}; L_{12} = L_{21} = M = 3 \cdot 10^{-3} / x \text{ H}$$

donde x se mide en metros y las inductancias en henrios. Se suponen despreciables las resistencias del devanado 1 y de la espira 2; la espira 2 tiene una masa de 0,1 kg.

- a) ¿Cuál será la posición de equilibrio x si se aplica al devanado 1 una corriente alterna de la forma $i_1 = 5 \cos t$ amperios?
- b) Calcular en el caso anterior la tensión u que debe aplicarse al devanado 1.

Nota: la aceleración de la gravedad en la zona es $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Nota histórica: este problema se debe a Elihu Thomsom y se denomina *experimento de la espira o anillo saltarin (jumping ring)*.

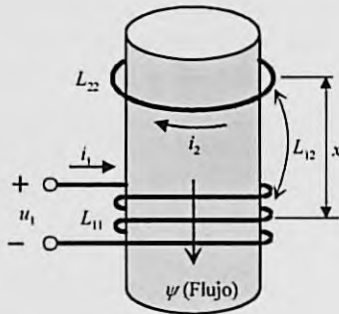


Figura 1.57

Resp. a) $x = 48,58 \text{ cm}$; b) $u_1(t) = -4,81 \text{ sen } t \text{ V}$

- 1.45. En la Figura 1.58 se muestra un cilindro relleno de material ferromagnético que trabaja en la zona lineal de su curva de imanación. Sobre él se ha construido una bobina con gran número de espiras que tiene una resistencia eléctrica $R_1 = 50 \Omega$ y una inductancia $L_{11} = 0,5 \text{ H}$. A una distancia de $x \text{ m}$ del centro de la bobina anterior y a su derecha se dispone de una pequeña espira construida de aluminio con una resistencia eléctrica $R_2 = 0,2 \Omega$ y una inductancia cuando está en cortocircuito de valor $L_{22} = 1 \text{ mH}$.

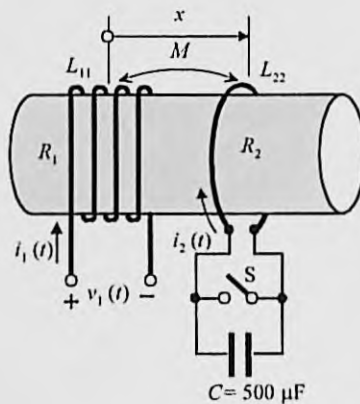


Figura 1.58

El coeficiente de inductancia mutua entre la bobina y la espira sigue la siguiente ley:

$$M = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{x} \text{ H (x en metros).}$$

La espira está cerrada por un interruptor S y un condensador $C = 500 \mu\text{F}$. La bobina se conecta a una red cuya tensión instantánea es:

$$u_1(t) = 230\sqrt{2} \cos 314t$$

Supóngase que inicialmente el interruptor S está cerrado y que, por tanto, la espira queda en cortocircuito; calcular:

- Las corrientes instantáneas i_1 e i_2 tanto en la bobina como en la espira.
- La fuerza media a que está sometida la espira para $x = 5 \text{ cm}$.
- Contestar a las preguntas anteriores cuando se abre el interruptor S y la espira se cierra a través del condensador.

Resp. a) $i_1(t) = 1,54\sqrt{2} \cos(314t - 65^\circ) \text{ A}$; $i_2(t) = 13\sqrt{2} \cos(314t - 212^\circ) \text{ A}$; b) $f_{\text{med}} = +3,41 \text{ N}$ (repulsión);
c) $i_1(t) = 1,38\sqrt{2} \cos(314t - 72,5^\circ) \text{ A}$; $i_2(t) = 0,72\sqrt{2} \cos(314t - 74^\circ) \text{ A}$; $f_{\text{med}} = -0,198 \text{ N}$ (atracción).

- 1.46. Considérese la máquina eléctrica con simetría cilíndrica de la Figura 1.59. Los valores de las inductancias de los devanados (medidas en henrios) son las siguientes:

$$L_{11} = 5; L_{22} = 4; L_{12} = L_{21} = M = 2 \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre los ejes de las bobinas. Calcular el par eléctrico producido a rotor parado y para un ángulo $\theta = 45^\circ$, cuando las corrientes que circulan por los devanados son las siguientes:

- $i_1 = i_2 = 10 \text{ A}$.
- $i_1 = 10 \text{ A}$; $i_2 = 10\sqrt{2} \cos \alpha t \text{ A}$.
- $i_1 = i_2 = 10\sqrt{2} \cos \alpha t \text{ A}$.
- $i_1 = 10\sqrt{2} \cos \alpha t \text{ A}$ y el devanado 2 del estator en cortocircuito.

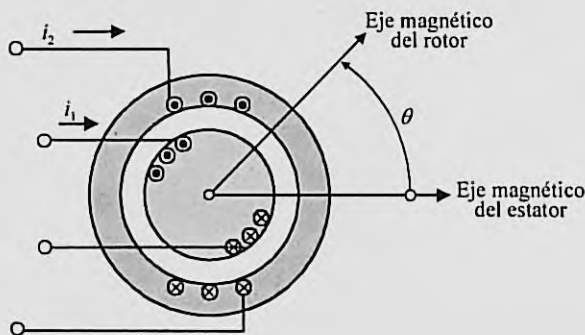


Figura 1.59

Resp. a) $T = -200/\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$; b) $T = -50 \cos \omega t \text{ N} \cdot \text{m}$;
c) $T = -\left(\frac{50}{\sqrt{2}} \cos^2 \omega t\right) \text{ N} \cdot \text{m}$; d) $T = +25 \cos^2 \omega t \text{ N} \cdot \text{m}$.

1.47. Considérese la máquina eléctrica con simetría cilíndrica de la Figura 1.60. Los valores de las inductancias de los devanados son:

$$L_{11} = 4 \text{ H}; L_{22} = 2 \text{ H}; L_{12} = L_{21} = M = 1 \cos \theta \text{ H}$$

donde θ es el ángulo entre los ejes de las bobinas. Las bobinas están conectadas en serie y llevan una corriente $i(t) = 10\sqrt{2} \cos \omega t$ A. Con el rotor parado, calcular:

- La expresión del par instantáneo que actúa sobre el rotor en función de la posición θ del mismo.
- En el caso anterior, determinar el par medio para $\theta = 90^\circ$.
- Si se desprecian las resistencias de los devanados y la corriente del rotor es $i_1(t) = 10\sqrt{2} \cos \omega t$ y se cortocircuita el devanado del estátor ¿cuál es el par medio desarrollado para $\theta = 45^\circ$?
- Si la corriente del estátor es $i_2(t) = 10\sqrt{2} \cos \omega t$ y se cortocircuita el devanado del rotor, ¿cuál es el par para $\theta = 45^\circ$?

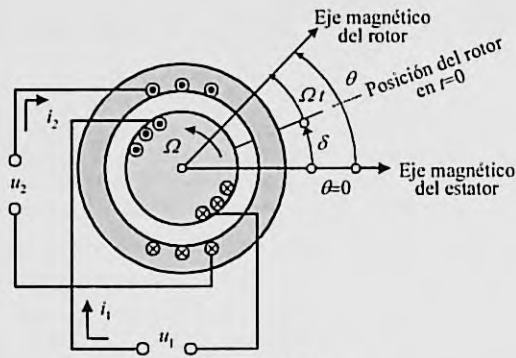


Figura 1.60

Resp. a) $T(t) = -2 I^2 \sin \theta \cos^2 \omega t$; b) $T = -100 \text{ N}\cdot\text{m}$; c) $T = +25 \text{ N}\cdot\text{m}$; d) $12,5 \text{ N}\cdot\text{m}$.

1.48. En el esquema de la Figura 1.61, los valores de las inductancias son:

$$L_{aa} = L_{bb} = 0,1 \text{ H}; L_{22} = 0,2 \text{ H}; L_{a2} = 0,1 \cos \theta \text{ H}; L_{b2} = 0,1 \sin \theta \text{ H}; L_{ab} = 0$$

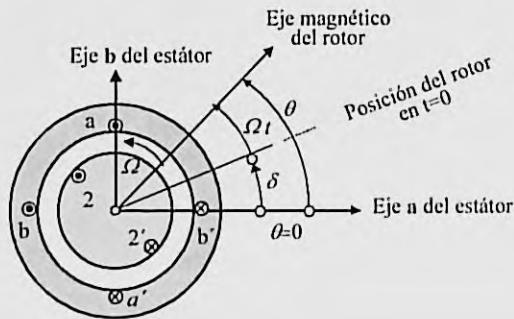


Figura 1.61

- Si el rotor está en reposo y las corrientes son $i_a = 5$ A; $i_b = 5$ A; $I_2 = 10$ A, calcular el par desarrollado en función de θ .
- En el caso anterior, si se deja que gire el rotor ¿se moverá o permanecerá en reposo? Si ocurre esto último ¿para qué valor de θ se parará?
- Si $I_2 = 10$; $i_a(t) = 5\sqrt{2}\cos 100t$ A; $i_b(t) = 5\sqrt{2}\sin 100t$ A; y se mueve el rotor a la velocidad angular Ω , de manera que $\theta = \Omega t + \delta$, ¿cuál debe ser el valor de Ω para que la máquina desarrolle un par útil? ¿Cuál será la expresión del par producido?
- Si el par resistente es igual a 5 N·m, calcular el ángulo de carga δ .
- Calcular en el caso anterior las expresiones de las tensiones aplicadas al estátor u_a y u_b si estos devanados tienen resistencias despreciables.

Resp. a) $T(\theta) = 5(-\sin \theta + \cos \theta)$ N·m; b) $T = 0$ N·m, $\theta = 45^\circ$; $\Omega = 100$ rad/s; $T = 5\sqrt{2}\sin \delta$ N·m;
 d) $\delta = -45^\circ$; e) $u_a(t) = 111,8\sqrt{2}\sin(100t + 153,43^\circ)$ V; $u_b(t) = 111,8\sqrt{2}\sin(100t + 63,43^\circ)$ V

- 1.49.** La máquina eléctrica mostrada en la Figura 1.62 tiene un devanado en el estátor de resistencia $R_1 = 100$ ohmios e inductancia $L_{11} = 0,5$ H. El devanado de rotor tiene una resistencia $R_1 = 1$ Ω y una inductancia $L_{11} = 0,2 + 0,1 \cos 2\theta$ H. El coeficiente de inducción mutua entre ambos devanados es $L_{12} = L_{21} = M = 0,1 \cos \theta$ H. Si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s y se aplican a los devanados unas corrientes de valores $i_1 = 1$ A; $i_2 = 2$ A, calcular:
- Las expresiones de las tensiones instantáneas aplicadas a las bobinas en función de la posición del rotor.
 - El par en el rotor.
 - La potencia eléctrica total que absorben los arrollamientos de la red.

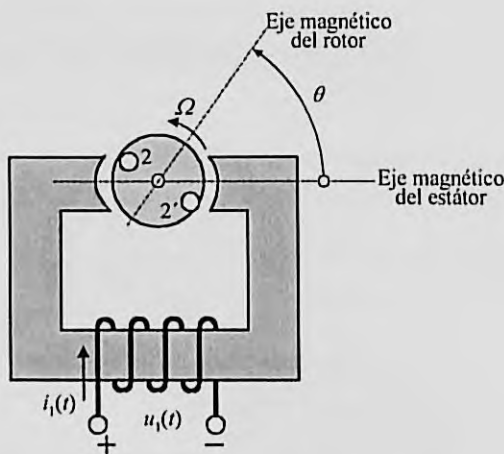


Figura 1.62

Resp. a) $u_1 = 100 - 50 \sin \theta$ V; $u_2 = 5 - 10 \sin \theta - 100 \sin 2\theta$ V; b) $T = -2,5 \sin 2\theta - 0,5 \sin \theta$ N·m;
 c) $P_{e1} = 100 - 50 \sin \theta$ W; $P_{e2} = 25 - 50 \sin \theta - 500 \sin 2\theta$ W; $P_e(\text{total}) = 125 - 100 \sin \theta - 500 \sin 2\theta$ W

1.50. En la Figura 1.63 se muestra un motor de reluctancia variable bifásico. Las bobinas del estátor se alimentan con las corrientes siguientes:

$$i_1 = \sqrt{2} 10 \sin 314t \text{ A}; i_2 = \sqrt{2} 10 \cos 314t \text{ A}.$$

Si las inductancias de los devanados son de la forma:

$$L_{11} = 1 + 0,5 \cos 2\theta \text{ H}; L_{22} = 1 - 0,5 \cos 2\theta \text{ H}; L_{12} = L_{21} = M = 0,5 \sin 2\theta \text{ H}$$

Calcular el par medio producido por el rotor si este gira a una velocidad $\Omega = 314 \text{ rad/s}$.

Nota: la posición genérica del rotor es: $\theta = \Omega t + \delta$.

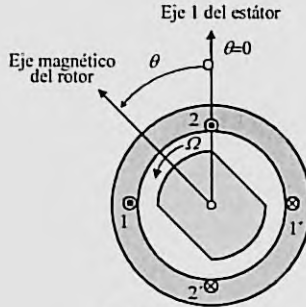


Figura 1.63

Resp. $T = 0,1 \sin 2\delta \text{ N}\cdot\text{m}$

1.51. En la máquina de reluctancia variable de la Figura 1.64, la inductancia de la bobina de alimentación es de la forma: $L = L_a + L_b \cos 2\theta \text{ H}$. Calcular:

- El par que actúa sobre el rotor en función de la corriente i en la bobina y la posición θ del rotor;
- El par medio si el rotor gira a una velocidad angular $\Omega \text{ rad/s}$ y la corriente de la bobina es de la forma:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos \alpha t.$$

Nota: la posición del rotor para $t = 0$ es $\theta = \delta$.

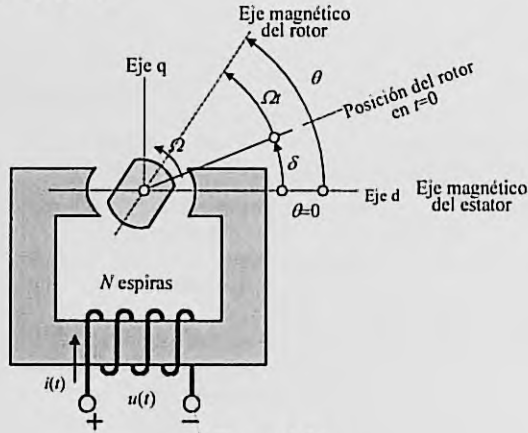


Figura 1.64

Resp. a) $T = -I^2 L_b \sin 2\theta \text{ N}\cdot\text{m}$; b) $T_{\text{med}} = -\frac{L_b I^2}{2} \sin 2\delta \text{ N}\cdot\text{m}$

Circuitos magnéticos y conversión de energía

Contenido

- 2.1. Pérdidas en una máquina eléctrica
 - 2.2. Potencia asignada o nominal
 - 2.3. Rendimiento
 - 2.4. F.m.m. y campo magnético en el entrehierro de una máquina eléctrica
 - 2.5. F.e.m. inducida en un devanado de una máquina eléctrica
 - 2.6. Factores que afectan a la f.e.m. inducida en un devanado
- Ejercicios resueltos
Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

2.1. Pérdidas en una máquina eléctrica

a) Pérdidas en el cobre

$$P_{Cu} = \sum R_j i_j^2 \quad (2.1)$$

P_{Cu} : potencia perdida en el cobre;

R_j e i_j : representan, respectivamente, la resistencia y la corriente que corresponden al devanado j , ya sea del inductor o del inducido.

b) Pérdidas en el hierro

Son las pérdidas por histéresis y las pérdidas por corrientes de Foucault (parásitas) y se calculan mediante la expresión:

$$P_{Fe} = P_{Hl} + P_F = (k_{Hl} f B_m^\alpha + k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma) V \quad (2.2)$$

P_{Fe} : potencia perdida en el hierro;

P_{Hl} : potencia perdida por histéresis;

P_F : potencia perdida por corrientes de Foucault o corrientes parásitas;

k_{Hl} y k_F : constantes;

f : frecuencia;

B_m : inducción magnética máxima;

a : espesor de las chapas magnéticas;

σ : conductividad de las mismas;

α : parámetro, y

V : volumen de hierro.

c) Pérdidas mecánicas (rozamiento y ventilación)

$$P_{fw} = An + Bn^3 \quad (2.3)$$

P_{fw} : pérdidas mecánicas;

n : velocidad del rotor;

A y B : constantes.

d) Pérdidas fijas y variables

$$P_r = P_{Fe} + P_{fw}; \quad P_v = P_{Cu} \quad (2.4)$$

Nota: las pérdidas fijas P_r son las pérdidas en el hierro P_{Fe} más las pérdidas mecánicas P_{fw} ; las pérdidas variables P_v son las pérdidas en el cobre P_{Cu} .

2.2. Potencia asignada o nominal

a) Valor asignado

Valor de una magnitud, asignado generalmente por un fabricante, para una condición de funcionamiento especificada de una máquina.

b) Potencia asignada

Valor numérico de la potencia incluido en las características asignadas.

2.3. Rendimiento

a) Definición

$$\eta = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia total}} = \frac{P_u}{P_T} \quad (2.5)$$

b) Rendimiento en función de las pérdidas fijas y variables

$$\eta = \frac{S \cos \varphi}{S \cos \varphi + P_f + b S^2} = \frac{S}{S + (P_f + b S^2) / \cos \varphi} \quad (2.6)$$

S : potencia aparente;

P_f : pérdidas fijas;

$P_v = b S^2$ pérdidas variables;

$\cos \varphi$: factor de potencia.

c) Factor de utilización o índice de carga

$$C = \frac{S}{S_N} \quad (2.7)$$

S : potencia aparente útil;

S_N : potencia asignada.

d) Índice de carga óptimo

$$C_{opt} = \frac{S_{\eta_{máx}}}{S_N} \quad (2.8)$$

$S_{\eta_{máx}}$: potencia de máximo rendimiento.

e) Determinación del índice de carga óptimo

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_f}{bS_N^2}} = \sqrt{\frac{\text{Pérdidas fijas}}{\text{Pérdidas variables a la potencia nominal}}} \quad (2.9)$$

2.4.

F.m.m. y campo magnético en el entrehierro de una máquina eléctrica

a) Ley de Ampère

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \quad (2.10)$$

- N : número de espiras;
 H : intensidad del campo magnético;
 i : corriente que circula por el devanado.

b) Simetría del campo magnético

$$H(\theta) = -H(\theta + \pi) \quad \square \quad (2.11)$$

Nota: el campo magnético tiene simetría impar de 180° eléctricos.

c) Elección de la anchura del camino γ para aplicar la ley de Ampère

$$\text{Anchura} = 180^\circ \text{ eléctricos} \quad (2.12)$$

d) Campo magnético de una bobina de N espiras y paso diametral (anchura de la bobina, 180° eléctricos)

$$H = \frac{Ni}{2g} \quad (2.13)$$

- g : espesor del entrehierro;
 i : corriente de la bobina.

e) Inducción magnética de una bobina de N espiras y paso diametral (anchura de la bobina, 180° eléctricos)

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Ni}{2g} \quad (2.14)$$

f) F.m.m. o tensión magnética en el entrehierro

$$F_m(\theta) = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.15)$$

g) F.m.m. o tensión magnética en el entrehierro producida por una bobina de paso diametral

$$F_m(\theta) = \frac{Ni}{2} \quad (2.16)$$

h) Desarrollo en serie de Fourier de la f.m.m. o tensión magnética producida por una bobina de paso diametral

$$F_m(\theta) = \frac{4 Ni}{\pi 2} \left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \dots \right] \quad (2.17)$$

θ : ángulo eléctrico desde el eje de la bobina hasta un punto cualquiera del entrehierro.

i) Armónico fundamental de f.m.m. de una bobina de paso diametral

$$F_m(\theta)_1 = \frac{4 Ni}{\pi 2} \cos\theta \quad (2.18)$$

j) Inducción magnética del armónico fundamental producida por una bobina de paso diametral

$$B(\theta) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{Ni}{2g} \cos\theta \quad (2.19)$$

k) Armónico fundamental de f.m.m. de una bobina de paso diametral recorrida por una corriente alterna

$$F_m(\theta, t) = \frac{4 Ni_m}{\pi 2} \cos\omega t \cos\theta \quad (2.20)$$

l) Armónico fundamental de f.m.m. de un devanado distribuido

$$F_m(\theta) = \frac{4}{\pi} k_d \frac{N_f i}{2p} \cos\theta \quad (2.21)$$

k_d : factor de distribución;
 N_f : espiras por fase del devanado;
 $2p$: número de polos.

m) F.m.m. producida por un devanado trifásico (Teorema de Ferraris)

$$F_m(\theta, t) = \frac{3}{2} F_{m\max} \cos(\omega t - \theta); \quad F_m = \frac{4}{\pi} k_d \frac{N_f I_m}{2p} \quad (2.22)$$

n) Velocidad del campo magnético giratorio (velocidad de sincronismo)

$$n = \frac{60f}{p} \quad (2.23)$$

ñ) F.m.m. producida por un devanado de m fases

$$F_m(\theta, t) = \frac{m}{2} F_m \cos(\omega t - \theta) \quad (2.24)$$

o) F.m.m. producida por un devanado monofásico (Teorema de Leblanc)

$$F_m(\theta, t) = \frac{F_m}{2} \cos(\omega t + p\alpha) + \frac{F_m}{2} \cos(\omega t - p\alpha) \quad (2.25)$$

2.5. F.e.m. inducida en un devanado de una máquina eléctrica

a) F.e.m. generada en un devanado concentrado estacionario de paso diametral con un flujo magnético inductor alterno

$$e_2 = N_2 \omega_2 \Phi_m \sin \omega_2 t \cos \theta \quad (2.26)$$

θ : ángulo eléctrico entre el eje de la bobina y el flujo inductor;

N_2 : número de espiras del devanado concentrado;

$\Phi_1 = \Phi_m \cos \omega t$: flujo inductor de c.a.

b) F.e.m. eficaz generada en un devanado concentrado estacionario de paso diametral con un flujo magnético inductor alterno

$$E_2 = \frac{N_2 \omega_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow E_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_2 f_1 \Phi_m = 4,44 N_2 f_1 \Phi_m \quad (2.27)$$

E_2 : f.e.m. inducida;

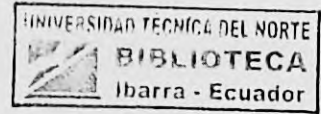
N_2 : número de espiras;

f_1 : frecuencia;

Φ_m : flujo magnético.

c) F.e.m. generada en un devanado concentrado rotativo de paso diametral con un flujo magnético constante

$$e_2 = N_2 p \Omega \Phi_m \sin p \Omega t ; \omega_2 = p \Omega ; f_2 = \frac{np}{60} \quad (2.28)$$



- N_2 : número de espiras; p : pares de polos;
 Ω : velocidad angular de giro;
 Φ_m : flujo inductor;
 f_2 : frecuencia de la f.e.m. inducida.

d) F.e.m. eficaz generada en un devanado concentrado rotativo de paso diametral con un flujo magnético constante

$$E_2 = \frac{N_2 p \Omega \Phi_m}{\sqrt{2}} \quad (2.29)$$

- E_2 : f.e.m. inducida;
 N_2 : número de espiras del inducido;
 Ω : velocidad angular mecánica;
 Φ_m : flujo magnético;
 p : pares de polos.

e) Relación entre la frecuencia del inducido, la frecuencia del inductor, el número de pares de polos y la velocidad de giro

$$f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \quad (2.30)$$

2.6. Factores que afectan a la f.e.m. inducida en un devanado

a) Factor de forma k_f

$$k_f = \frac{\text{valor eficaz}}{\text{valor medio}} \quad (2.31)$$

b) Factor de distribución k_d

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{qp\gamma}{2}}{q \text{sen} \frac{p\gamma}{2}} \quad (2.32)$$

- q : número de ranuras por polo y fase de la máquina;
 $2p$: número de polos;
 γ : ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas.

c) Factor de distribución k_d en función de la extensión del devanado

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{p\gamma_1}{2}}{\frac{p\gamma_1}{2}} \quad (2.33)$$

γ_1 : ángulo geométrico total que abarca el bobinado. Para una máquina trifásica se cumple: $p\gamma_1 = \pi/3$.

d) Factor de paso o factor de acortamiento k_p

$$k_p = \cos \frac{p\alpha}{2} \quad (2.34)$$

α : ángulo geométrico de acortamiento;

p : pares de polos.

e) Expresión general de la f.e.m. eficaz inducida por fase en un devanado

$$E = 4k_f k_d k_p N f \Phi_m \quad (2.35)$$

k_f : factor de forma;

k_d : factor de distribución;

k_p : factor de acortamiento;

N : número de espiras por fase;

f : frecuencia de la f.e.m.;

Φ_m : flujo magnético máximo.

f) Factor de distribución k_{dh} para un armónico de f.e.m. de orden h

$$k_{dh} = \frac{\text{sen} \frac{qph\gamma}{2}}{q \text{sen} \frac{ph\gamma}{2}} \quad (2.36)$$

q : número de ranuras por polo y fase de la máquina;

$2p$: número de polos;

γ : ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas;

h : orden del armónico.

g) Factor de paso k_{ph} para un armónico de f.e.m. de orden h

$$k_{ph} = \cos \frac{ph\alpha}{2} \quad (2.37)$$

α : ángulo geométrico de acortamiento;

p : pares de polos;

h : orden del armónico.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. Una máquina eléctrica de 100 kVA tiene unas pérdidas fijas de 1 000 W y unas pérdidas variables de 1 500 W a plena carga (asignada). Calcular:

- a) El rendimiento de la máquina, cuando trabaja a 1/2 de la plena carga con f.d.p. 0,8.
- b) El índice de carga óptimo.
- c) La potencia de máximo rendimiento.

Solución

a) La expresión del rendimiento de una máquina eléctrica en función del índice de carga C y de las pérdidas fijas P_f y variables P_v viene definida por:

$$\eta = \frac{C S_N \cos \varphi}{C S_N \cos \varphi + P_f + C^2 P_v}$$

y como quiera que la potencia nominal es $S_N = 100$ kVA y las pérdidas son: $P_f = 1$ kW, $P_v = 1,5$ kW, al sustituir en la ecuación anterior, tomando un índice de carga $C = 1/2$, resulta:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,8}{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,8 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1,5} = 96,68\%$$

b) El índice de carga óptimo se deduce de la siguiente ecuación:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_f}{P_v}} = \sqrt{\frac{1}{1,5}} = 0,8165$$

c) Como quiera que el índice carga es el cociente entre la potencia que entrega la máquina respecto a la nominal, el índice de carga óptimo en particular será el cociente de la potencia que entrega la máquina para máximo rendimiento y la potencia nominal es decir:

$$C_{\text{opt}} = \frac{S_{\eta \text{máx}}}{S_N}$$

de donde se deduce:

$$S_{\eta \text{máx}} = C_{\text{opt}} S_N = 0,8165 \cdot 100 = 81,65 \text{ kVA}$$

2.2. Una máquina de 20 kVA, tiene unas pérdidas en el cobre a plena carga de 400 W, unas pérdidas en el hierro de 150 W y unas pérdidas mecánicas de 200 W. Determinar:

- a) El rendimiento a 3/4 de la plena carga con f.d.p. 0,8.
- b) El rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,9.
- c) La potencia aparente de máximo rendimiento.
- d) El rendimiento en el caso anterior para f.d.p. unidad.

Solución

a) De los datos de la máquina, se deduce que tiene una potencia nominal o asignada: $S_N = 20$ kVA. Además, las pérdidas en el cobre a plena carga (que son las pérdidas variables) son: $P_{Cu} = P_V = 0,4$ kW. Por otro lado, las pérdidas en el hierro son: $P_{Fe} = 0,15$ kW y las pérdidas mecánicas valen: $P_{fw} = 0,20$ kW. Las dos pérdidas anteriores constituyen las pérdidas fijas de la máquina, es decir: $P_f = P_{Fe} + P_{fw} = 0,35$ kW. Es por ello que el rendimiento de la máquina para un índice de carga $C = 3/4$ y f.d.p. 0,8 tendrá el siguiente valor:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_f + C^2 P_V} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 20 \cdot 0,8}{\frac{3}{4} \cdot 20 \cdot 0,8 + 0,35 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0,4} = 95,43\%$$

b) El rendimiento a plena carga, es decir para $C = 1$ y f.d.p 0,9 es:

$$\eta = \frac{1 \cdot 20 \cdot 0,9}{1 \cdot 20 \cdot 0,9 + 0,35 + 1^2 \cdot 0,4} = \frac{18}{18,75} = 96\%$$

c) En primer lugar se ha de obtener el índice de carga óptimo de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_f}{P_V}} = \sqrt{\frac{0,35}{0,4}} = 0,9354$$

de donde se deduce una potencia aparente de máximo rendimiento:

$$S_{\eta_{\max}} = C_{opt} S_N = 0,9354 \cdot 20 = 18,71 \text{ kVA}$$

d) El valor del rendimiento máximo para la potencia anterior y con f.d.p. unidad será:

$$\eta_{\max} = \frac{0,9354 \cdot 20 \cdot 1}{0,9354 \cdot 20 \cdot 1 + 0,35 + 0,9354^2 \cdot 0,4} = 96,39\%$$

2.3. Se tiene la estructura magnética de la Figura 2.1. El entrehierro tiene un espesor g . Se coloca en el rotor una bobina de paso diametral AA' formada por N espiras por las que circula una corriente i . Dibujar la curva de inducción B producida y dar la expresión del desarrollo en serie de Fourier de la misma. Se desprecia la reluctancia del hierro.

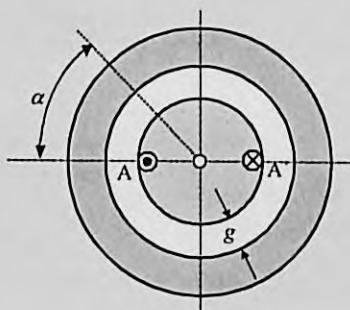


Figura 2.1

Solución

En las Figuras 2.2a, b y c se muestran unos recintos de integración γ de π radianes de anchura, que se van girando para barrer los conductores del rotor y aplicar a los mismos la ley de Ampère. Teniendo en cuenta que se desprecia la reluctancia del hierro y la simetría del campo magnético H , que se repite cada π radianes e invierte su signo resulta:

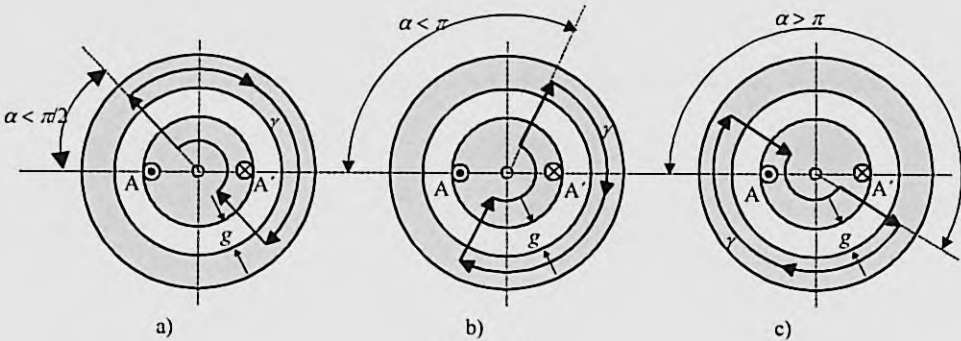


Figura 2.2

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum Ni \Rightarrow H_m = \frac{Ni}{2g} \Rightarrow B_m = \mu_o H = \frac{\mu_o Ni}{2g} \quad (1)$$

Téngase en cuenta para hacer el cálculo de la integral anterior, que el recinto γ de la Figura 2.2 se recorre en el sentido de las agujas del reloj, por lo que la suma de las f.m.m. que atraviesan el recinto γ se deben tomar como positivas si estas entran hacia el plano de la página, lo que está de acuerdo con la regla del sacacorchos, que señala que el sentido positivo de las corrientes es el sentido de traslación de un sacacorchos cuando gira en el sentido en que se recorre el camino de integración. Así, el lector puede comprobar que en las Figuras 2.2a y b, el producto Ni corresponde a los N conductores que existen en la ranura A' y que son positivos (corriente entrante). Es por ello que cuando el ángulo α va variando desde 0 hasta π radianes, la f.m.m. es positiva, dando lugar por consiguiente a un campo magnético positivo. Sin embargo, en la Figura 2.2c, en la que $\alpha > \pi$ radianes, el producto Ni es negativo, ya que corresponde a los conductores existentes en la ranura A que llevan corrientes que son salientes al plano de la página y por tanto, negativos; es por este motivo que desde $\alpha = \pi$ hasta $\alpha = 2\pi$, el campo es negativo. En la Figura 2.3 se muestran estos resultados, en los que se ha dibujado la forma de la distribución de la inducción magnética en el entrehierro de la máquina a base de desarrollar la superficie de la misma.

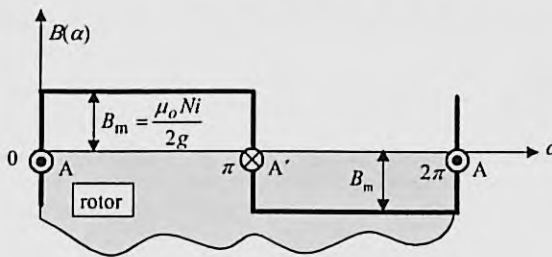


Figura 2.3

El desarrollo en serie de Fourier de esta onda es de la forma:

$$B(\alpha) = B_{m1} \sin \alpha + B_{m2} \sin 2\alpha + \dots + B_{mh} \sin h\alpha + B_{mn} \sin n\alpha \quad (2)$$

en la que los valores de los coeficientes que aparecen en los términos sinusoidales se calculan mediante la siguiente integral:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin h\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{B_m}{h} [-\cos h\alpha]_0^\pi = \frac{2B_m}{\pi h} (1 - \cos h\pi) \quad (3)$$

de acuerdo al resultado anterior, cuando el orden h del armónico es par, el coeficiente de inducción correspondiente se anula, es decir:

$$B_{m2} = B_{m4} = B_{m6} = \dots = 0$$

por lo que la serie de Fourier solamente tiene armónicos impares siendo el desarrollo el siguiente:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots} \frac{1}{h} \sin h\alpha = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{2g} \sum_{h=1,3,5,\dots} \frac{1}{h} \sin h\alpha \quad (4)$$

que desarrollando los tres primeros términos da como resultado final:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{2g} \left[\sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \dots + \frac{1}{h} \sin h\alpha + \dots \right] \quad (5)$$

2.4. Se tiene la estructura magnética de la Figura 2.4. Los parámetros son idénticos a los del problema anterior, pero ahora las bobinas A-A' y B-B' están acortadas un ángulo eléctrico γ . Dibujar la curva de inducción B producida y obtener el desarrollo en serie de Fourier de la misma. Deducir conclusiones prácticas.

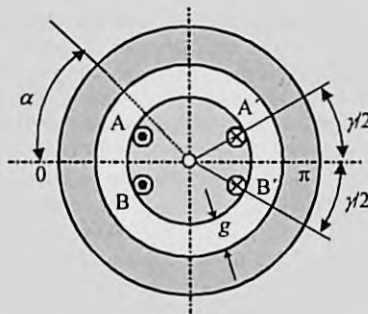


Figura 2.4

Solución

De una forma análoga al problema anterior, en la Figura 2.5 se muestran diversos recintos de integración β de π radianes de anchura para aplicar la ley de Ampère al mismo, teniendo en cuenta que se desprecia la reluctancia del hierro y la simetría del campo magnético H que se repite cada π radianes e invierte su signo, se obtiene la expresión general siguiente:

$$\oint_{\beta} H \cdot dl = \sum Ni \Rightarrow B = \mu_0 \frac{\sum Ni}{2g} \quad (\text{ya que } B = \mu_0 H) \quad (1)$$

El resultado de la integral anterior va variando conforme el recinto β se va moviendo, barriendo el rotor y el estátor pero manteniendo siempre constante la anchura de integración de π radianes. Y así resulta que conforme el ángulo α de

inicio del camino de integración varía desde 0° hasta $\gamma/2$ (esto corresponde al instante mostrado en la primera imagen de la Figura 2.5), la suma de las corrientes que atraviesan el contorno β de integración es el producto $-Ni$ de los N conductores existentes en la ranura A de la Figura 2.5a y que llevan cada uno una corriente i que es saliente al plano del papel, y por tanto de carácter negativo (puesto que el recinto β se recorre a derechas) más el producto $+Ni$ de los N conductores existentes en la ranura A' que llevan cada uno una corriente i que es entrante al plano del papel y por tanto de carácter positivo respecto al contorno, es por ello que el resultado final es cero como se expresa en la siguiente ecuación:

$$a) \quad 0 < \alpha < \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \sum Ni = (-Ni)_A + (Ni)_{A'} = 0 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{\sum Ni}{2g} = 0$$

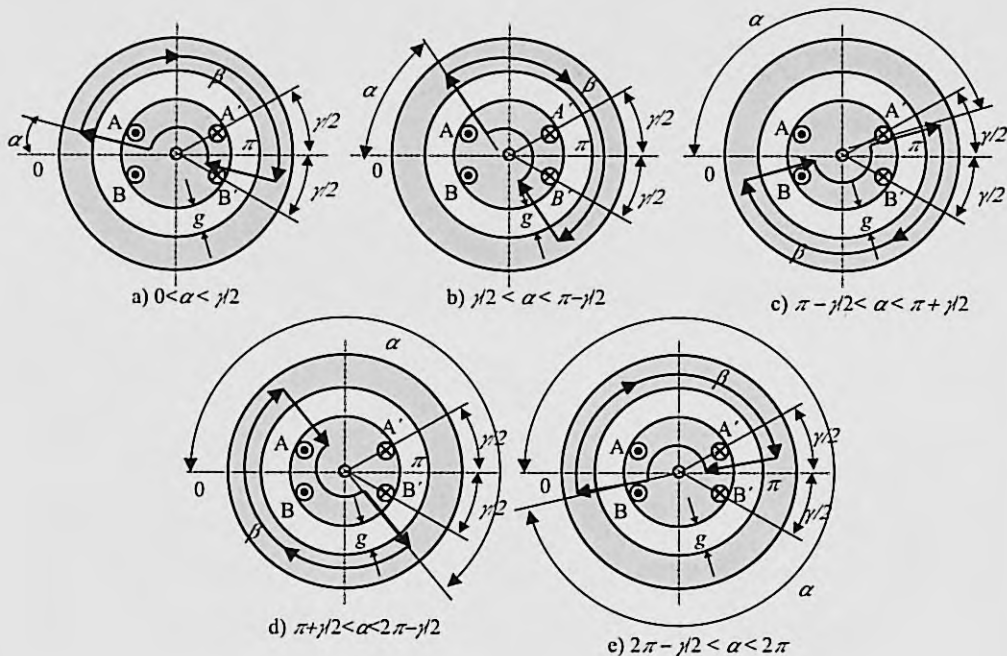


Figura 2.5

Si se va moviendo sucesivamente el recinto de integración (como muestran las demás imágenes de la Figura 2.5), el resultado que se va obteniendo es el siguiente:

$$b) \quad \frac{\gamma}{2} < \alpha < \pi - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \sum Ni = (Ni)_{A'+B'} = 2Ni \Rightarrow B = 2 \frac{\mu_0 Ni}{2g} = B_m$$

ya que en este recinto (Figura 2.5b) solamente existen los amperioconductores positivos de las ranuras A' y B'.

$$c) \quad \pi - \frac{\gamma}{2} < \alpha < \pi + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \sum Ni = 0 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{\sum Ni}{2g} = 0$$

En este caso, se compensan los amperioconductores positivos de la ranura B' con los negativos de la ranura B (Figura 2.5c).

$$d) \quad \pi + \frac{\gamma}{2} < \alpha < 2\pi - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \sum Ni = -2Ni \Rightarrow B = -2 \frac{\mu_0 Ni}{2g} = -B_m$$

ya que en este recinto (Figura 2.5d) solamente existen los amperioconductores negativos de las ranuras A y B.

$$e) \quad 2\pi - \frac{\gamma}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sum Ni = 0 \Rightarrow B = \mu_0 \frac{\sum Ni}{2g} = 0$$

ya que se compensan los amperioconductores positivos de la ranura A' con los negativos de la ranura A (Figura 2.5e).

Estos valores parciales se han llevado a un esquema desarrollado de la máquina y cuyo resultado se muestra en la Figura 2.6, que muestra la distribución de la inducción magnética producida por los conductores. El desarrollo en serie de Fourier de esta onda es de la forma:

$$B(\alpha) = B_{m1}\text{sen}\alpha + B_{m3}\text{sen}3\alpha + \dots + B_{mh}\text{sen}h\alpha + \dots +$$

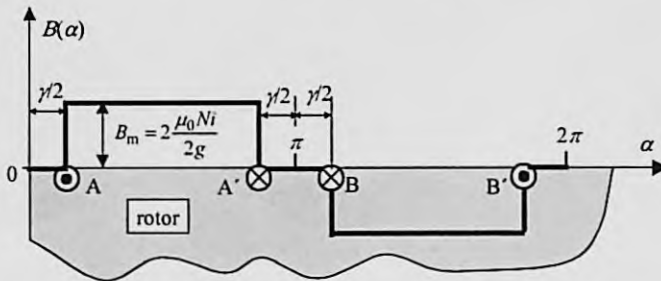


Figura 2.6

cuyos coeficientes son:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \int B_m \text{sen}h\alpha d\alpha = \left[\int_0^{\gamma/2} \text{sen}h\alpha d\alpha + \int_{\gamma/2}^{\pi-\gamma/2} B_m \text{sen}h\alpha d\alpha \right] = \frac{2B_m}{\pi h} \left[\cos \frac{h\gamma}{2} - \cos \left(\pi - \frac{\gamma}{2} \right) h \right] = \frac{4B_m}{\pi h} \cos \frac{h\gamma}{2}$$

ya que se anulan para los armónicos pares, dando lugar al siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots} \frac{1}{h} \cos \frac{h\gamma}{2} \text{sen}h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[2 \frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots} \frac{1}{h} \cos \frac{h\gamma}{2} \text{sen}h\alpha \quad (2)$$

que es de la forma desarrollada siguiente:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left[2 \frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \left[\cos \frac{\gamma}{2} \text{sen}\alpha + \frac{1}{3} \cos \frac{3\gamma}{2} \text{sen}3\alpha + \dots + \frac{1}{h} \cos \frac{h\gamma}{2} \text{sen}h\alpha + \dots \right] \quad (3)$$

Si se compara este resultado con el (5) del problema anterior se observa que el resultado es el mismo que se obtendría considerando que las dos bobinas están concentradas (de ahí que el valor de B_m sea ahora el doble que en el caso anterior, puesto que ahora son dos bobinas en vez de una) pero introduciendo un factor reductor expresado por:

$$k_\alpha = \cos \frac{h\gamma}{2}$$

denominado *factor de paso*, donde h es el orden del armónico.

- 2.5. Considerar la estructura magnética de la Figura 2.7, que contiene 8 ranuras en las que se colocan 4 bobinas de N espiras cada una, recorridas por una corriente i . En el supuesto de despreciar la reluctancia del hierro, dibujar la curva de inducción magnética producida por el conjunto. Deducir conclusiones prácticas.

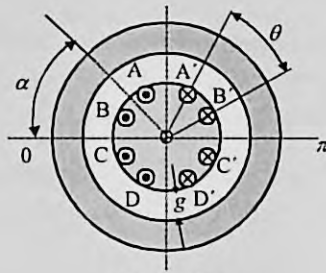


Figura 2.7

Solución

En cada ranura existen N conductores recorridos por una corriente i , es por ello que los amperioconductores en cada ranura del rotor valen Ni . Por otra parte el ángulo geométrico entre ranuras consecutivas es de $\theta = \pi/4$ radianes = 45° . Al aplicar la ley de Ampère al recinto γ de la Figura 2.8 se tiene:

$$\oint_{\gamma} H \cdot dl = \sum Ni \quad (1)$$

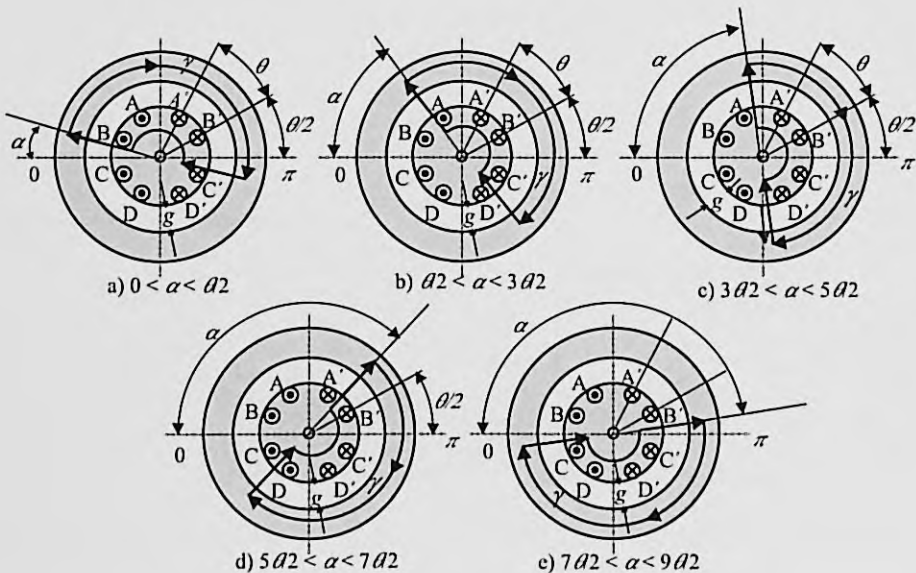


Figura 2.8

El recinto γ debe tener, como siempre, una anchura de π radianes (realmente debe ser de π radianes magnéticos). Se tomará el primer recinto γ para un ángulo de referencia $\alpha < \theta/2$ y se irá girando alrededor de la circunferencia de la máquina, tal como muestra la Figura 2.8, para ir barriendo toda su periferia y determinar, de este modo, el valor del campo magnético H en cada punto del entrehierro, lo que da lugar a los resultados siguientes:

$$a) 0 < \alpha < \frac{\theta^{\circ}}{2} \Rightarrow \sum Ni = +2Ni - 2Ni = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow B = 0$$

ya que los amperioconductores positivos de las ranuras A' y B' se anulan con los negativos de las ranuras A y B (Figura 2.8a).

$$b) \frac{\theta}{2} < \alpha < \frac{3\theta}{2} \Rightarrow \sum Ni = +3Ni - Ni = 2Ni \Rightarrow H = 2 \frac{Ni}{2g} \Rightarrow B = 2 \frac{\mu_0 Ni}{2g}$$

ya que son positivos los amperioconductores de las ranuras A', B' y C' y negativos los de la ranura A (Figura 2.8b).

$$c) \frac{3\theta}{2} < \alpha < \frac{5\theta}{2} \Rightarrow \sum Ni = +4Ni \Rightarrow H = 4 \frac{Ni}{2g} \Rightarrow B = 4 \frac{\mu_0 Ni}{2g} = B_m$$

ya que solamente existen amperioconductores positivos debidos a las ranuras A', B' y C' y D' (Figura 2.8c).

$$d) \frac{5\theta}{2} < \alpha < \frac{7\theta}{2} \Rightarrow \sum Ni = +3Ni - Ni = 2Ni \Rightarrow H = \frac{2Ni}{2g} \Rightarrow B = 2 \frac{\mu_0 Ni}{2g}$$

ya que son positivos los amperioconductores de las ranuras B', C' y D' y negativos los de la ranura D (Figura 2.8d).

$$e) \frac{7\theta}{2} < \alpha < \frac{9\theta}{2} \Rightarrow \sum Ni = +2Ni - 2Ni = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow B = 0$$

ya que se cancelan los amperioconductores positivos de las ranuras C' y D' con los negativos de las ranuras C y D (Figura 2.8e).

Los valores de las inducciones anteriores se han llevado a la Figura 2.9 (realmente estos valores calculados definen solamente el semiperiodo positivo de la onda, pero se ha ampliado a la onda completa en virtud de la simetría impar) que muestra de este modo la distribución de la inducción magnética en el entrehierro. Para mayor aclaración se han destacado las cotas correspondientes a las diversas posiciones de los conductores. Se ha llamado B_m a la máxima inducción de la onda escalonada y que corresponde al valor existente entre $3\theta/2$ y $5\theta/2$, es decir:

$$B_m = 4 \frac{\mu_0 Ni}{2g}$$

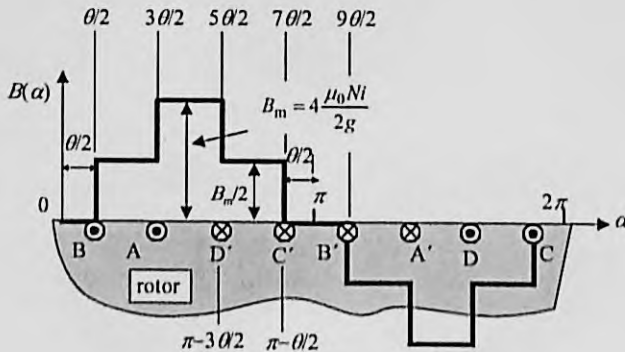


Figura 2.9

El desarrollo en serie de Fourier de la onda anterior es de la forma:

$$B(\alpha) = B_{m1} \sin \alpha + B_{m3} \sin 3\alpha + \dots + B_{mh} \sin h\alpha + \dots$$

en la que el coeficiente B_{mh} se calcula así:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \left[\int_{\theta/2}^{3\theta/2} \frac{B_m}{2} \operatorname{sen} h\alpha d\alpha + \int_{3\theta/2}^{5\theta/2} B_m \operatorname{sen} h\alpha d\alpha + \int_{5\theta/2}^{7\theta/2} \frac{B_m}{2} \operatorname{sen} h\alpha d\alpha \right] = \frac{2B_m}{\pi h} \left[\cos \frac{h\theta}{2} + \cos \frac{3h\theta}{2} \right]$$

donde se ha tenido en cuenta y como se señala en la Figura 2.19 que se cumplen las identidades siguientes:

$$\frac{5\theta}{2} = \pi - \frac{3\theta}{2} \quad ; \quad \frac{7\theta}{2} = \pi - \frac{\theta}{2}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las identidades trigonométricas siguientes:

$$\begin{aligned} \cos \frac{h\theta}{2} &= \cos \left(\frac{2h\theta}{2} - \frac{h\theta}{2} \right) = \cos \frac{2h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{2h\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2} \\ \cos \frac{3h\theta}{2} &= \cos \left(\frac{2h\theta}{2} + \frac{h\theta}{2} \right) = \cos \frac{2h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{2h\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2} \end{aligned}$$

y sumando las dos igualdades anteriores resulta:

$$\cos \frac{h\theta}{2} + \cos \frac{3h\theta}{2} = 2 \cos \frac{2h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2}$$

por lo que la expresión de los coeficientes de la inducción magnética se puede escribir:

$$B_{mh} = \frac{4B_m}{\pi h} \cos \frac{2h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2}$$

Como además se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{4h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{2h\theta}{2} \cos \frac{2h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} = \frac{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2} \cos \frac{h\theta}{2} \cos \frac{2h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} = \cos \frac{h\theta}{2} \cos \frac{2h\theta}{2}$$

resulta:

$$B_{mh} = \frac{4B_m}{\pi h} \frac{\operatorname{sen} \frac{4h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}}$$

De este modo, el desarrollo en serie de Fourier quedaría así:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{4h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} \operatorname{sen} h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[4 \frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{4h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} \operatorname{sen} h\alpha \quad (1)$$

que desarrollando para los tres primeros armónicos nos da:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left[4 \frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \left[\frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen} \frac{4\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen} \frac{12\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}} \operatorname{sen} 3\alpha + \frac{1}{5} \frac{\operatorname{sen} \frac{20\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{5\theta}{2}} \operatorname{sen} 5\alpha + \dots + \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{4h\theta}{2}}{4 \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} \operatorname{sen} h\alpha + \dots \right]$$

El resultado (1) se puede ampliar a devanados que tengan q ranuras por polo y N conductores por ranura, sin más que sustituir el número 4 por q ; así resulta:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{qh\theta}{2}}{q \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} \operatorname{sen} h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[q \frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{qh\theta}{2}}{q \operatorname{sen} \frac{h\theta}{2}} \operatorname{sen} h\alpha \quad (2)$$

donde θ indica el ángulo eléctrico entre ranuras consecutivas. Observando las ecuaciones (1), o en general (2), se puede señalar que el resultado del desarrollo en serie de Fourier de la inducción producida por un arrollamiento distribuido es el

mismo que el que se obtendría considerando todas las bobinas concentradas (valor señalado en la cantidad puesta en corchetes antes del sumatorio de las expresiones (1) o (2)), pero introduciendo un *factor de distribución* expresado por:

$$k_d = \frac{\text{sen } \frac{qh\theta}{2}}{q \text{ sen } \frac{h\theta}{2}} \quad (3)$$

Debe señalarse que cuando el número de ranuras por polo y fase q aumenta indefinidamente, al mismo tiempo que el ángulo eléctrico entre ranuras consecutivas θ tiende a cero, con la condición de mantener constante la extensión o espacio ocupado por el devanado $\sigma = q\theta$, tal como se señala en la Figura 2.10, se cumplen los siguientes límites:

$$\text{sen } \frac{qh\theta}{2} = \text{sen } \frac{h\sigma}{2} ; \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} q \text{ sen } \frac{h\theta}{2} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } \frac{h\sigma}{2q}}{1/q} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{h\sigma}{2} \cos \frac{h\sigma}{2q} = \frac{h\sigma}{2}$$

por lo que la expresión (2) para devanados uniformemente distribuidos ocupando una extensión σ se convierte en:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left[q \frac{\mu_0 N_i}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen } \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \text{sen } h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu_0 N_i}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen } \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \text{sen } h\alpha \quad (4)$$

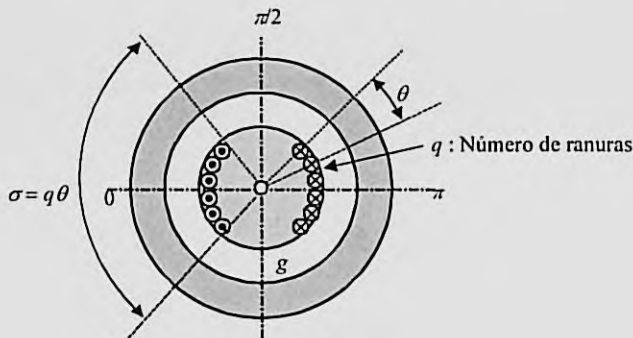


Figura 2.10

donde se ha denominado N_i al número total de espiras del devanado que es igual a qN , siendo N el número de conductores por ranura. Es por ello que en este caso el factor de distribución (3) se transforma en este caso en:

$$k_d = \frac{\text{sen } \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \quad (5)$$

donde σ recibe el nombre de *extensión de fase*. En el Problema 2.7 se demuestran estas expresiones de un modo directo.

2.6. Considerar la estructura magnética de la Figura 2.11, en donde se muestra un rotor bobinado con un arrollamiento uniformemente distribuido, con un total de N espiras. El devanado puede considerarse como una generalización del problema anterior cuando el número de ranuras se hace muy elevado. Dibujar la forma de B y obtener su desarrollo

en serie de Fourier.

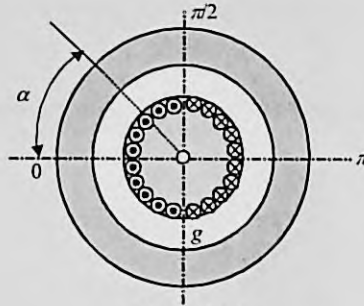


Figura 2.11

Solución

En este problema el número de conductores en un paso polar de π radianes es N , por lo que los amperioconductores que existen en un ángulo β (siempre que en este recinto todos los conductores lleven la misma corriente i) valen:

$$\text{Amperioconductores} = \frac{Ni}{\pi} \beta \quad \text{At}$$

y de este modo al aplicar la ley de Ampère al recinto de la Figura 2.12 se obtiene:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum N_i i$$

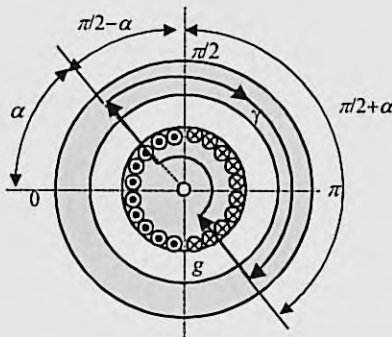


Figura 2.12

cuyo resultado es:

$$1) \text{ Para } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow H \cdot 2g = -\frac{Ni}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{Ni}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \Rightarrow H = \frac{Ni\alpha}{\pi g} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni\alpha}{\pi g}$$

$$2) \text{ Para } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow H \cdot 2g = \frac{Ni}{\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) - \frac{Ni}{\pi} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow H = \frac{Ni}{\pi g} (\pi - \alpha) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{\pi g} (\pi - \alpha)$$

Ambas expresiones coinciden para $\alpha = \pi/2$, que corresponde al valor máximo de la inducción y cuyo valor es:

$$B_m = \frac{\mu_0 Ni}{2g}$$

que corresponde a una forma de onda de inducción en el entrehierro, tal como se muestra en la Figura 2.13.

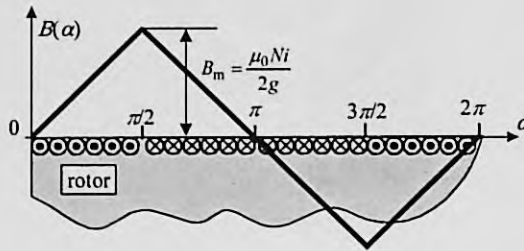


Figura 2.13

El desarrollo en serie de Fourier es de la forma general:

$$B(\alpha) = B_{m1} \text{sen} \alpha + B_{m3} \text{sen} 3\alpha + \dots B_{mh} \text{sen} h\alpha + \dots$$

en la que el coeficiente genérico B_{mh} se calcula de la forma siguiente:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 Ni \alpha}{\pi g} \text{sen} h\alpha d\alpha + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mu_0 Ni (\pi - \alpha)}{\pi g} \text{sen} h\alpha d\alpha \right]$$

que resolviendo, teniendo en cuenta el resultado de la integral siguiente:

$$\int \alpha \text{sen} h\alpha d\alpha = \frac{1}{h^2} \text{sen} h\alpha - \frac{\alpha}{h} \text{cosh} \alpha$$

da lugar a:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{\pi g} \left[\frac{2}{h^2} \text{sen} h \frac{\pi}{2} - \frac{1}{h^2} \text{sen} h\pi \right]$$

que se anula para h par y para h impar se tiene:

$$h = 1, 3, 5, \dots \Rightarrow B_{mh} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{\pi g} \frac{2}{h^2} \text{sen} \frac{h\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}}$$

lo que corresponde al siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}} \text{sen} h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}} \text{sen} h\alpha$$

que desarrollando para los tres primeros armónicos nos da:

$$B(\alpha) = \frac{4 \mu_0 Ni}{\pi 2g} \left[\frac{\text{sen} \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \alpha + \frac{1}{3} \frac{\text{sen} \frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} \text{sen} 3\alpha + \dots + \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h\pi}{2}}{h \frac{\pi}{2}} \text{sen} h\alpha + \dots \right]$$

El resultado es un caso particular del Problema 2.5 cuando la extensión del devanado es $q\theta = \pi$, que se denomina *extensión de fase*. Esta distribución es la que tienen los arrollamientos del inducido de las máquinas de corriente continua y suponen un factor de distribución expresado por:

$$k_d = \left[\frac{\text{sen} \frac{h\pi}{2}}{h \frac{\pi}{2}} \right]$$

- 2.7. Considerar la estructura magnética de la Figura 2.14, donde se muestra un rotor bobinado con un arrollamiento uniformemente distribuido, con un total de N espiras que ocupan una extensión de fase de σ radianes. Dibujar la forma de la inducción B y obtener su desarrollo en serie de Fourier.

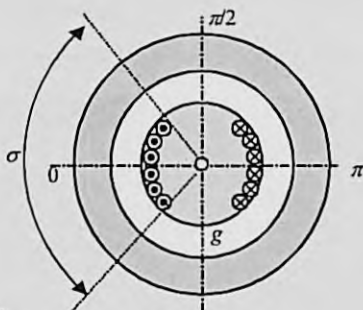


Figura 2.14

Solución

El número de conductores que hay en el arco σ es N por lo que los amperioconductores que existen en un ángulo β (siempre que en este recinto todos los conductores lleven la misma corriente i) vale:

$$\text{Amperio conductor es } = \frac{Ni}{\sigma} \beta$$

y al aplicar la ley de Ampère al circuito γ de la Figura 2.15a resulta:

$$\text{a) Para } -\frac{\sigma}{2} < \alpha < +\frac{\sigma}{2}; \oint H \cdot dl = \sum Ni \Rightarrow H 2g = -\frac{Ni}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{2} - \alpha \right) + \frac{Ni}{\sigma} \left[\frac{\sigma}{2} + \alpha \right]$$

de donde resulta:

$$H = \frac{Ni\alpha}{\sigma g} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni\alpha}{\sigma g}$$

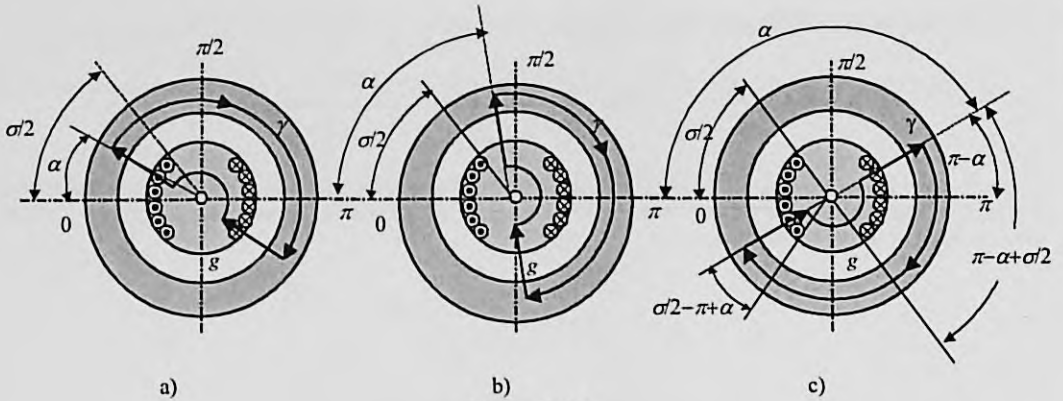


Figura 2.15

Para el circuito de la Figura 2.15b se tiene:

$$b) \text{ Para } \frac{\sigma}{2} < \alpha < \pi - \frac{\sigma}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni \sigma}{2 \sigma g} = \frac{\mu_0 Ni}{2g}$$

Para el circuito de la Figura 2.15c se tiene:

$$c) \text{ Para } \pi - \frac{\sigma}{2} < \alpha < \pi + \frac{\sigma}{2} \Rightarrow 2Hg = \frac{Ni}{\sigma} \left(\pi - \alpha + \frac{\sigma}{2} \right) - \frac{Ni}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{2} - \pi + \alpha \right) \Rightarrow H = \frac{Ni}{\sigma g} (\pi - \alpha) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{\sigma g} (\pi - \alpha)$$

lo que da lugar a la curva de inducción desarrollada mostrada en la Figura 2.16.

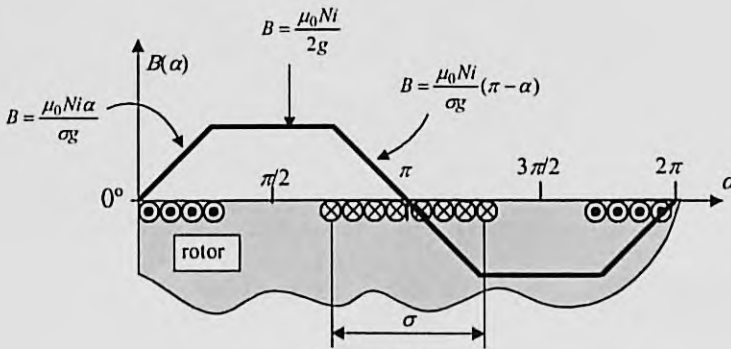


Figura 2.16

El desarrollo en serie de Fourier de la curva anterior es de la forma:

$$B(\alpha) = B_{m1} \text{sen} \alpha + B_{m3} \text{sen} 3\alpha + \dots + B_{mh} \text{sen} h\alpha + \dots$$

en la que el coeficiente genérico B_{mh} se calcula de la forma siguiente:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\sigma/2} \frac{\mu_0 Ni \alpha}{\pi g} \text{sen} h\alpha d\alpha + \int_{\sigma/2}^{\pi - \sigma/2} \frac{\mu_0 Ni}{\pi g} \text{sen} h\alpha d\alpha + \int_{\pi - \sigma/2}^{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{\pi g} (\pi - \alpha) \text{sen} h\alpha d\alpha \right]$$

que da lugar al siguiente resultado:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{\sigma g} \left[\frac{1}{h^2} \operatorname{sen} \frac{h\sigma}{2} (1 - \cosh h\pi) \right]$$

que se anula, como es lógico, para los armónicos pares y el desarrollo en serie de Fourier es:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \operatorname{sen} h\alpha = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu_0 Ni}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \operatorname{sen} h\alpha$$

que desarrollando para los tres primeros armónicos nos da:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0 Ni}{2g} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen} \frac{3\sigma}{2}}{\frac{3\sigma}{2}} \operatorname{sen} 3\alpha + \dots + \frac{1}{h} \frac{\operatorname{sen} \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \operatorname{sen} h\alpha + \dots \right]$$

y que representa un devanado con un factor de distribución:

$$k_d = \frac{\operatorname{sen} \frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}}$$

como ya se demostró en el problema 2.5. Esta solución coincide también con la (1) del Problema 2.6 cuando la extensión de fase σ es igual a π . Esta forma de onda de la inducción magnética se obtiene en los devanados de excitación de los turboalternadores de las centrales térmicas y nucleares.

2.8. El diagrama de la Figura 2.17 representa la forma del campo de un polo saliente de un alternador. Calcular:

- la amplitud del fundamental de la onda de inducción.
- La amplitud de la onda fundamental cuando $\theta = \pi/6$.
- El factor de forma de la onda de inducción cuando $\theta = \pi/6$.

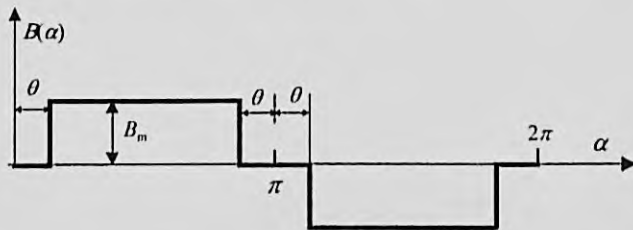


Figura 2.17

Solución

El desarrollo de la onda de inducción es de la forma:

$$B(\alpha) = B_{m1} \operatorname{sen} \alpha + B_{m3} \operatorname{sen} 3\alpha + \dots + B_{mh} \operatorname{sen} h\alpha + \dots$$

en la que el coeficiente genérico B_{mh} se calcula de la forma siguiente:

$$B_{mh} = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi-\theta} B_m \operatorname{sen} h\alpha d\alpha = \frac{2B_m}{\pi h} [\cos h\theta - \cos h(\pi-\theta)]$$

que se anula para los armónicos pares y para los dos primeros armónicos impares nos da:

$$B_{m1} = \frac{4B_m}{\pi} \cos \theta ; B_{m3} = \frac{4B_m}{3\pi} \cos 3\theta$$

a) En consecuencia, la amplitud del primer armónico o fundamental de la onda de inducción es:

$$B_{m1} = \frac{4B_m}{\pi} \cos \theta$$

b) cuyo valor para $\theta = \pi/6$ es:

$$B_{m1} = \frac{4B_m}{\pi} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{4B_m}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2B_m \sqrt{3}}{\pi}$$

c) El factor de forma es el cociente entre el valor eficaz y el valor medio de la onda. El valor medio en un semiperíodo vale:

$$B_{med} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi-\theta} B_m d\alpha = B_m \frac{\pi - 2\theta}{\pi}$$

y el valor eficaz o valor cuadrático medio se calcula de este modo:

$$B_{ef} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi-\theta} B_m^2 d\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\pi} B_m^2 (\pi - \theta - \theta)} = B_m \sqrt{\frac{\pi - 2\theta}{\pi}}$$

De este modo, el factor de forma para el ángulo específico $\theta = \pi/6$ es:

$$k_f = \frac{B_{ef}}{B_{med}} = \sqrt{\frac{\pi}{\pi - 2\theta}} = \sqrt{\frac{\pi}{\pi - \frac{2\pi}{6}}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = 1,225$$

2.9. Se tiene el circuito magnético de la Figura 2.18 formado por un devanado inductor situado en el estátor, alimentado por una c.a. de 50 Hz, que produce un flujo sinusoidal en el entrehierro, de valor máximo 8 mWb. En el rotor se sitúa un arrollamiento de 10 espiras concentradas de paso diametral. Calcular la f.e.m. inducida en la bobina del rotor cuando gira a 1500 r/min. Si se considera como referencia que en $t = 0$, $\theta = 0$.

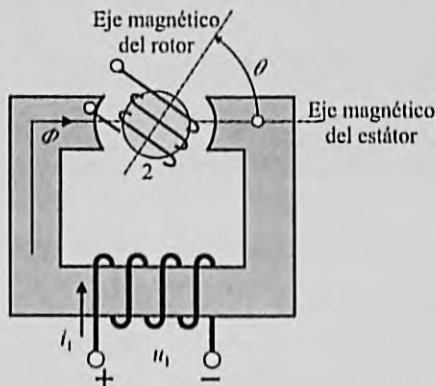


Figura 2.18

Solución

El flujo magnético que llega al rotor es: $\Phi_{\text{rotor}} = \Phi_m \sin \omega t \cos \theta$, donde se tiene:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \quad ; \quad \theta = \Omega t = 2\pi \frac{n}{60} t = 2\pi \frac{100}{60} t = 157t$$

y, por tanto, el flujo es igual a: $\Phi_{\text{rotor}} = 8 \cdot 10^{-3} \sin 314t \cos 157t$ y en consecuencia la f.e.m. inducida será:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{\text{rotor}}}{dt} = -10 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 314 \cdot \cos 314t \cdot \cos 157t + 10 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 157 \cdot \sin 314t \cdot \sin 157t$$

que operando se obtiene, finalmente: $e_2 = -25,12 \cos 314t \cdot \cos 157t + 12,56 \sin 314t \cdot \sin 157t$

2.10. Calcular el valor del factor de distribución de una máquina trifásica que tiene 12 ranuras por polo.

Solución

Si se denomina Q al número total de ranuras, q al número de ranuras por polo y fase y $2p$ al número de polos, se tiene:

$$\frac{Q}{2p} = 12 \text{ ranuras/polo} \quad ; \quad q = \frac{12}{3} = 4 \text{ ranuras/polo y fase}$$

Además el ángulo eléctrico entre dos ranuras consecutivas vale:

$$\theta = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

y, por tanto, el factor de distribución será:

$$k_d = \frac{\frac{\sin \frac{hq\theta}{2}}{q \sin \frac{h\theta}{2}}}{4 \frac{\sin \frac{h \cdot 4 \cdot 15^\circ}{2}}{4 \sin \frac{h \cdot 15^\circ}{2}}} = \frac{\sin 30^\circ}{4 \sin 7,5^\circ} = 0,958$$

donde se ha calculado el factor anterior solamente para el armónico fundamental $h = 1$.

2.11. Una máquina eléctrica tiene un inducido con 9 ranuras por polo, estando las bobinas acortadas en 2 ranuras. Calcular el factor de paso o acortamiento del devanado.

Solución

Al tener el inducido 9 ranuras por polo, el ángulo eléctrico entre ranuras consecutivas es:

$$\theta = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

Como el devanado está acortado en dos ranuras, el ángulo eléctrico de acortamiento es de $2 \cdot 20 = 40^\circ$ y, por consiguiente, el factor de paso o acortamiento del devanado vale:

$$k_p = \cos \frac{40^\circ}{2} = \cos 20^\circ \cong 0,940$$

2.12. El inducido de una máquina bipolar está completamente bobinado, con N espiras uniformemente distribuidas de paso diametral. La f.e.m. inducida en cada espira tiene un valor eficaz de 10 V. ¿Cuál será la f.e.m. inducida en todo el devanado con todas las espiras en serie?

Solución

En la Figura 2.19 se muestra un esquema simplificado del devanado uniformemente distribuido. La f.e.m. total en función de la f.e.m. de cada espira y del factor de distribución viene expresada por:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{espira}} N k_d$$

El valor del factor de distribución del devanado es:

$$k_d = \frac{\text{sen } \frac{q\theta}{2}}{q \text{sen } \frac{\theta}{2}}$$

donde q representa el número de ranuras por polo y θ el ángulo entre ranuras y se cumple:

$$q = \frac{\text{ranuras}}{\text{polo}} = \frac{\text{conductores}}{\text{polo}} = N ; \quad \theta = \frac{\pi}{N}$$

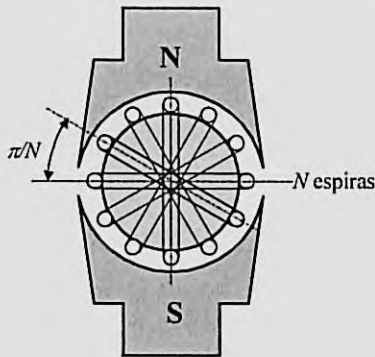


Figura 2.19

que al sustituir en la expresión del factor de distribución (al ser el devanado uniformemente distribuido), nos da:

$$k_d = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } N \frac{\pi}{2N}}{N \text{sen } \frac{\pi}{2N}} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}}{\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{sen } \frac{\pi}{2N}}$$

donde el valor del límite es:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \operatorname{sen} \frac{\pi}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2N}}{\frac{1}{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{N^2} \right) \cos \frac{\pi}{2N}}{\frac{-1}{N^2}} = \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto, la f.e.m. total vale:

$$E_{\text{total}} = 10N \frac{2}{\pi} = \frac{20N}{\pi}$$

2.13. El inducido de una máquina bipolar tiene dos bobinas de paso diametral, una de 100 espiras y otra de 50 espiras, que forman entre sí un ángulo de 30° . El inducido está en el rotor y se hace girar este a una velocidad de 1000 r/min dentro del campo uniforme de los polos, cuya inducción vale 100 gauss. El área de cada bobina es de 400 cm^2 . Si las bobinas se conectan en serie, hallar la lectura que se obtendrá en un voltímetro conectado entre las escobillas de la máquina.

Solución

En la Figura 2.20 se muestra el esquema de la configuración. La inducción es de 100 gauss, es decir, 0,01 teslas. El flujo magnético que atraviesa una espira es:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B S \cos \omega t \quad ; \quad \text{donde } \omega = 2\pi \frac{n}{60}$$

y por consiguiente, el valor de la f.e.m. inducida para una bobina de N_1 espiras será:

$$e = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} = B S N_1 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

de donde se deduce un valor máximo y eficaz de la f.e.m., respectivamente:

$$E_m = B S N_1 \omega \quad ; \quad E_{\text{ef}} = E = \frac{B S N_1 \omega}{\sqrt{2}}$$

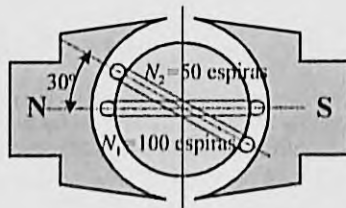


Figura 2.20

Para la espira de 100 espiras señalada en la Figura 2.20, la f.e.m. tiene un valor eficaz:

$$E_{1e} = \frac{10^{-2} \cdot 400 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \frac{1000}{60}}{\sqrt{2}} \cdot 100 = 2,962 \text{ V}$$

y para la bobina de 50 espiras resulta:

$$E_{2c} = \frac{10^2 \cdot 400 \cdot 10^{-4} \cdot 2\pi \frac{1000}{60}}{\sqrt{2}} \cdot 50 = 1,481 \text{ V}$$

Si las dos bobinas se suman en serie, habrá que tener en cuenta que las f.e.m. forman un ángulo entre sí de 30° que es el ángulo en que están desfasadas las bobinas en la máquina. En la Figura 2.21 se muestran dos composiciones vectoriales según que la suma de las f.e.m. sean en serie aditiva o en serie opuesta.

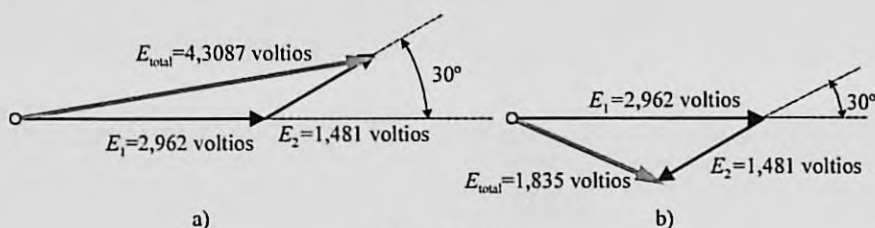


Figura 2.21

El cálculo de la resultante se puede hacer por el teorema del coseno, dando los siguientes resultados respectivamente:

$$\text{Serie aditiva: } E_{\text{total}} = \sqrt{2,962^2 + 1,481^2 - 2 \cdot 2,962 \cdot 1,481 \cos 150^\circ} = 4,3087 \text{ V}$$

$$\text{Serie sustractiva: } E'_{\text{total}} = \sqrt{2,962^2 + 1,481^2 - 2 \cdot 2,962 \cdot 1,481 \cos 30^\circ} = 1,835 \text{ V}$$

2.14. Un alternador trifásico de 20 polos tiene un devanado conectado en estrella de 180 ranuras y 10 conductores por ranura. El flujo por polo tiene un valor máximo de 0,04 Wb y está distribuido sinusoidalmente en el entrehierro. La velocidad es de 300 r/min. Hallar las f.e.m. de fase y línea, en el supuesto de que las bobinas sean de paso diametral.

Solución

La f.e.m. por fase viene expresada por:

$$E_{\text{fase}} = 4,44 f N_{\text{fase}} \Phi_m k_p k_d$$

Como quiera que el alternador tiene 180 ranuras con 10 conductores por ranura, suponen un total de 1800 conductores en el inducido, que equivalen, como es lógico, a 900 espiras en total en las tres fases (una espira está formada por dos conductores: el de ida y el de vuelta), es decir la máquina tiene $900/3 = 300$ espiras/fase.

Por otro lado, de la velocidad de la máquina y el número de polos se puede obtener la frecuencia del alternador:

$$f = \frac{np}{60} = \frac{300 \cdot 10}{60} = 50 \text{ Hz}$$

Llevando estos valores a la expresión de la f.e.m., se obtiene:

$$E_{\text{fase}} = 4,44 \cdot 50 \cdot 300 \cdot 0,04 \cdot k_p k_d = 2664 k_p k_d$$

que es el valor de la f.e.m. en función de los factores de distribución y acortamiento del devanado. Como quiera que según se indica en el enunciado, las espiras son de paso diametral, no existe en consecuencia acortamiento de las bobinas, por lo que en la expresión anterior el factor de paso k_p vale la unidad. Por otro lado, el devanado está distribuido en ranuras a lo largo de toda la periferia del inducido; como existen en total 180 ranuras, el ángulo geométrico entre las mismas es de $\alpha = 360^\circ/180 = 2^\circ$ que corresponde a un ángulo eléctrico:

$$\theta = \text{ángulo eléctrico entre ranuras} = p\alpha = 10 \frac{360^\circ}{180 \text{ ranuras}} = 20^\circ \text{ eléctricos}$$

Por otro lado, el número de ranuras por polo y fase del alternador es igual a:

$$q = \frac{\text{ranuras}}{\text{polo y fase}} = \frac{180}{10 \cdot 3} = 3$$

y como quiera que la expresión del factor de distribución es:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{q\theta}{2}}{q \text{sen} \frac{\theta}{2}}$$

Al sustituir los valores anteriores resulta:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{3 \cdot 20^\circ}{2}}{3 \cdot \text{sen} \frac{20^\circ}{2}} = \frac{\text{sen} 30^\circ}{3 \cdot \text{sen} 10^\circ} = 0,960$$

y por consiguiente, el valor de la f.e.m. generada en el alternador por fase será:

$$E_{\text{fase}} = 2\,664 \cdot 0,960 = 2\,557,45 \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea:

$$E_{\text{línea}} = \sqrt{3} E_{\text{fase}} = \sqrt{3} \cdot 2\,557,45 = 4\,429,6 \text{ V}$$

2.15. Un alternador trifásico conectado en estrella, tiene 6 polos y debe dar una f.e.m. de 380 V a 50 Hz. El estátor tiene 3 ranuras por polo y fase y 4 conductores por ranura. Calcular:

- La velocidad en r/min a la que debe girar el rotor.
- El flujo máximo por polo si tiene una distribución sinusoidal.

Nota: las bobinas son de paso diametral.

Solución

a) El número de polos del alternador es $2p = 6$ y además, la frecuencia de la tensión generada es de 50 Hz, por lo que la velocidad de sincronismo a la que girará la máquina será:

$$n = \frac{60 f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1\,000 \text{ r/min}$$

b) Según el enunciado, la f.e.m. de línea debe ser de 380 V. Al estar la máquina conectada en estrella, la f.e.m. por fase, será:

$$E_{\text{fase}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,39 \text{ V}$$

Pero la f.e.m. de fase viene expresada por:

$$E_{\text{fase}} = 4,44 f N_r \Phi_m k_p k_d$$

El número de conductores del alternador, de acuerdo con el enunciado, es:

$$\text{Número de conductores} = 3 \frac{\text{ranuras}}{\text{polo y fase}} \cdot 6 \text{ polos} \cdot 3 \text{ fases} \cdot 4 \frac{\text{conductores}}{\text{ranura}} = 216 \text{ conductores}$$

Es decir, el inducido tiene $216/2 = 108$ espiras y por consiguiente, el número de espiras por fase es $N_f = 108/3 = 36$. Además al tener la máquina $q = 3$ ranuras por polo y fase, el número total de ranuras es:

$$\text{Número total de ranuras} = 3 \frac{\text{ranuras}}{\text{polo y fase}} \cdot 6 \text{ polos} \cdot 3 \text{ fases} = 54 \text{ ranuras}$$

por tanto, el ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas es:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{54} = 6,66^\circ$$

que corresponde a un ángulo eléctrico:

$$\theta = p\alpha = 3 \cdot 6,66^\circ = 20^\circ$$

Además, el factor de paso del alternador es la unidad, puesto que las bobinas son de paso diametral, es decir:

$$k_p = 1$$

y el valor del factor de distribución viene expresado por:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{q\theta}{2}}{q \text{sen} \frac{\theta}{2}}$$

y al sustituir valores resulta:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{3 \cdot 20^\circ}{2}}{3 \text{sen} \frac{20^\circ}{2}} = \frac{\text{sen} 30^\circ}{3 \text{sen} 10^\circ} \approx 0,96$$

Llevando todos estos parámetros a la expresión de la f.e.m. de fase se tiene:

$$\frac{380}{\sqrt{3}} = 219,39 = 4,44 \cdot 50 \cdot 36 \cdot \Phi_m \cdot 1 \cdot 0,96$$

de donde se obtiene:

$$\Phi_m = 0,0287 \text{ Wb}$$

2.16. El inducido de una alternador de 20 polos, 50 Hz, tiene un total de 180 ranuras. Calcular las f.e.m. que se obtienen en los siguientes casos:

- Cuando se bobina un devanado monofásico utilizando 5 ranuras por polo.
- Repetir el apartado anterior cuando el devanado ocupa todas las ranuras.
- Cuando se bobina un arrollamiento trifásico que ocupa todas las ranuras. Las bobinas son de paso diametral, y en cada ranura se colocan 6 conductores. El flujo está distribuido sinusoidalmente en el entrehierro y tiene un valor máximo de 0,025 Wb.

Solución

a) El ángulo geométrico que forman dos ranuras consecutivas es:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\text{Número ranuras}} = \frac{360^\circ}{180} = 2^\circ$$

Como el alternador tiene 20 polos, el ángulo anterior expresado en grados eléctricos es:

$$\theta = p\alpha = 10 \cdot 2^\circ = 20^\circ$$

La f.e.m. responde a la fórmula general:

$$E = 4,44 f N \Phi_m k_d k_p$$

Pero, al ser las bobinas de paso diametral, el factor de acortamiento o paso es la unidad, es decir, $k_p = 1$. El número total de conductores cuando se bobina el inducido con 5 ranuras por polo es:

$$\text{Número de conductores} = 5 \frac{\text{ranuras}}{\text{polo}} \cdot 20 \text{ polos} \cdot 6 \frac{\text{conductores}}{\text{ranura}} = 600 \text{ conductores} \Rightarrow 300 \text{ espiras}$$

y el factor de distribución es:

$$k_d = \frac{\frac{\text{sen} \frac{q\theta}{2}}{q \text{sen} \frac{\theta}{2}}}{\frac{\text{sen} \frac{5 \cdot 20^\circ}{2}}{5 \text{sen} \frac{20^\circ}{2}}} = \frac{\text{sen} 50^\circ}{5 \text{sen} 10^\circ} = 0,882$$

Llevando estos valores a la expresión de la f.e.m. resulta:

$$E = 4,44 \cdot 50 \cdot 300 \cdot 0,025 \cdot 0,882 = 1468,53 \approx 1470 \text{ V}$$

b) Si el devanado ocupa todas las ranuras posibles, se tiene:

$$\text{Número de conductores} = 180 \text{ ranuras} \cdot 6 \frac{\text{conductores}}{\text{ranura}} = 1080 \text{ conductores} \Rightarrow 540 \text{ espiras}$$

y el número de ranuras por polo y fase es:

$$q = \frac{\text{ranuras}}{\text{polo y fase}} = \frac{180}{20 \cdot 1} = 9$$

por lo que el factor de distribución es en este caso:

$$k_d = \frac{\frac{\text{sen} \frac{9 \cdot 20^\circ}{2}}{9 \text{sen} \frac{20^\circ}{2}}}{\frac{\text{sen} 90^\circ}{9 \text{sen} 10^\circ}} \approx 0,640$$

lo que da lugar a la f.e.m. siguiente:

$$E = 4,44 \cdot 50 \cdot 540 \cdot 0,025 \cdot 0,640 = 1918,1 \text{ V} \approx 1920 \text{ V}$$

c) En este caso, el número de espiras totales del devanado utilizando todas las ranuras y calculado en el apartado anterior es de 540 espiras, pero como en este caso el arrollamiento es trifásico, el número de espiras por fase es:

$$540 \text{ espiras} \Rightarrow N_f = \frac{540}{3} = 180 \text{ espiras/fase}$$

y el número de ranuras por polo y fase es ahora:

$$q = \frac{180}{20 \cdot 3} = 3$$

por lo que el nuevo factor de distribución, al ser el devanado trifásico, vale ahora:

$$k_d = \frac{\frac{\text{sen} \frac{3 \cdot 20^\circ}{2}}{3 \text{sen} \frac{20^\circ}{2}}}{\frac{\text{sen} 90^\circ}{3 \text{sen} 10^\circ}} = 0,96$$

lo que da lugar a una f.e.m. generada por fase:

$$E_f = 4,44 \cdot 50 \cdot 180 \cdot 0,025 \cdot 0,96 = 959,04 \approx 960 \text{ V}$$

2.17. Un rotor bipolar excitado para dar un flujo máximo por polo de 0,02 Wb, gira a 3000 r/min dentro de un estátor que contiene 18 ranuras. Se colocan dos bobinas de 50 espiras A y B en el estátor del modo siguiente: bobina A: lados de bobina en las ranuras 1 y 11; bobina B: lados de bobina en las ranuras 2 y 10. Calcular la f.e.m. resultante cuando las bobinas se conectan en serie. La distribución de flujo es sinusoidal.

Solución

Al tener el rotor 18 ranuras, el ángulo eléctrico que forman dos ranuras consecutivas vale:

$$\theta = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

En la Figura 2.22 se muestra la disposición geométrica de las dos bobinas que indica el enunciado. Como quiera que la bobina A tiene sus lados de bobina, o haces activos, en las ranuras 1 y 11, la anchura de esta bobina es de 10 ranuras, que equivalen a un ángulo eléctrico de 200° ; como quiera que un polo equivale en anchura a 180° eléctricos (o magnéticos), se concluye que la bobina A tiene un alargamiento de bobina de $200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$ eléctricos.

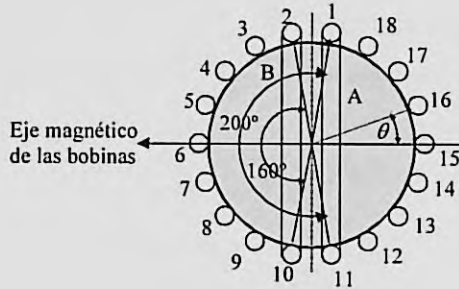


Figura 2.22

De un modo análogo, la bobina B tiene sus lados de bobina, o haces activos, en las ranuras 2 y 10, la anchura de esta bobina es, por tanto, de 8 ranuras, que equivalen a un ángulo eléctrico de 160° ; como quiera que un polo equivale en anchura a 180° eléctricos (o magnéticos), se concluye que la bobina B tiene un acortamiento de bobina de $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$ eléctricos. Por consiguiente, las dos bobinas tienen el mismo ángulo de acortamiento/alargamiento de 20° eléctricos, por lo que el factor de paso (acortamiento/alargamiento) vale en ambos casos:

$$k_p = \cos \frac{20^\circ}{2} = \cos 10^\circ \cong 0,985$$

Al ser un rotor de dos polos y girar a 3000 r/min, la frecuencia será de 50 Hz y las f.e.m.s. producidas en cada bobina, al tener ambas el mismo número de espiras y el mismo factor de acortamiento, son:

$$E_A = 4,44 f N \Phi_m k_p = 4,44 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 0,02 \cdot 0,985 = 218,63 \text{ V} = E_B$$

y la f.e.m. resultante, si las dos bobinas se conectan en serie, al tener ambas el mismo eje magnético, sus f.e.m. o se ponen en serie aditiva, es decir, como suma aritmética de las mismas, dando lugar en este caso a una resultante:

$$E_{A+B} = E_A + E_B \text{ (suma aritmética) } = 218,63 \cdot 2 = 437,25 \text{ V}$$

o en serie sustractiva, en definitiva resta aritmética, que da lugar a una resultante:

$$E_{A-B} = E_A - E_B = 0 \text{ V}$$

2.18. Resolver el problema anterior si la bobina B está situada entre las ranuras 2 y 12.

Solución

En este caso, la disposición geométrica de las bobinas es la mostrada en la Figura 2.23. Las bobinas tienen la misma anchura de 10 ranuras, es decir de 200° eléctricos, o también se puede considerar mirando al contrario, que la anchura es de 8 ranuras, es decir, de 160° . Por tanto, el acortamiento es de 20° eléctricos y las bobinas producen la misma f.e.m. que en el caso anterior de 218,63 voltios. Tal como se observa en la Figura 2.23, los ejes magnéticos de las bobinas forman un ángulo entre sí $\beta = 20^\circ$, por lo que si se unen las bobinas en forma de serie aditiva, tal como señala la Figura 2.24a, se obtiene una f.e.m. resultante de valor:

$$E_{A+B} = 2 \cdot 218,63 \cdot \cos 10^\circ = 430,61 \text{ V}$$

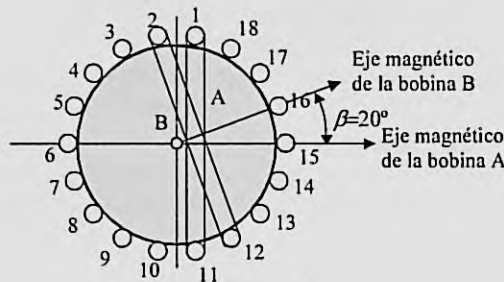


Figura 2.23

mientras que si se conectan en serie sustractiva, la f.e.m. resultante es menor, tal como se señala en la composición geométrica de la Figura 2.24b, dando un resultado de:

$$E_{A-B} = 2 \cdot 218,63 \cdot \sin 10^\circ = 75,93 \text{ V}$$

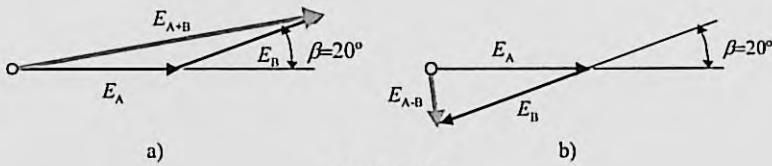


Figura 2.24

2.19. Un alternador trifásico de 20 polos conectado en estrella gira a 300 r/min. El inducido tiene 360 ranuras y 6 conductores por ranura. La anchura de las bobinas es de $5/6$ del paso polar. Si el flujo máximo por polo, de distribución sinusoidal, es de 0,086 Wb. ¿Cuáles serán los valores de las f.e.m. de fase y de línea?

Solución

La f.e.m. generada por fase viene expresada por:

$$E_{\text{fase}} = 4,44 f N_{\text{fase}} \Phi_m k_p k_d$$

Sabiendo que el alternador gira a 300 r/min y que tiene 20 polos, el valor de la frecuencia de la f.e.m. inducida es:

$$f = \frac{np}{60} = \frac{300 \cdot 10}{60} = 50 \text{ Hz}$$

Como quiera que el inducido tiene 360 ranuras y 6 conductores por ranura, el número de conductores totales de la máquina y el número de espiras totales es igual a:

$$N^\circ \text{ de conductores totales} = 360 \text{ ranuras} \cdot 6 \frac{\text{conductores}}{\text{ranura}} = 2160 \text{ conductores} \Rightarrow 1080 \text{ espiras totales}$$

Por tanto, el número de espiras por fase, al tratarse de un alternador trifásico es:

$$N_f = \frac{1080}{3} = 360 \text{ espiras/fase}$$

Por otro lado como el inducido tiene 360 ranuras, el ángulo geométrico entre ranuras consecutivas es:

$$\text{ángulo geométrico entre ranuras} = \frac{360^\circ}{360} = 1^\circ$$

que corresponde a un ángulo eléctrico:

$$\theta = p\alpha = 10 \cdot 1^\circ = 10^\circ \text{ eléctricos}$$

Como el número de ranuras por polo y fase tiene un valor:

$$q = \frac{\text{ranuras}}{\text{polo y fase}} = \frac{360}{20 \cdot 3} = 6$$

el factor de distribución del devanado será:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{q\theta}{2}}{q \text{ sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{\text{sen} \frac{6 \cdot 10}{2}}{6 \text{ sen} \frac{10}{2}} = 0,956$$

Además, las bobinas tienen una anchura de $5/6$ del paso polar, es decir, $(5/6) \cdot 180^\circ = 150^\circ$, por lo que tienen un acortamiento de bobina de $1/6$ del paso polar, es decir, de 30° (que además es la diferencia de $180^\circ - 150^\circ$). Es por ello que el factor de paso de las bobinas vale:

$$k_p = \cos \frac{p\alpha}{2} = \cos \frac{30^\circ}{2} = \cos 15^\circ = 0,966$$

y por consiguiente, llevando todos los valores anteriores a la expresión de la f.e.m. generada por fase se obtiene:

$$E_{\text{fase}} = 4,44 \cdot 50 \cdot 360 \cdot 0,086 \cdot 0,966 \cdot 0,96 = 6347,3 \text{ V}$$

que corresponde a un valor de línea:

$$E_{\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 6347,3 = 10993,8 \text{ V}$$

2.20. Se dispone de una máquina eléctrica bipolar experimental de polos salientes en el estátor, que tiene una distribución de inducción en el entrehierro expresada por la ecuación:

$$B(\theta) = 1,05 \cos \theta + 0,35 \cos 3\theta + 0,21 \cos 5\theta + 0,15 \cos 7\theta \text{ teslas}$$

El paso polar es de 50 cm y la longitud del núcleo de 40 cm. Si el inducido consta de una bobina de 5 espiras con una anchura de $4/5$ del paso polar y la frecuencia de la f.e.m. generada es de 50 Hz, calcular la f.e.m. inducida en la bobina y su valor eficaz.

Solución

Teoría previa

En la Figura 2.25a se muestra un esquema simplificado de una máquina eléctrica bipolar en la que se ha supuesto que la bobina es de paso diametral. En general, si R es el radio del rotor en el que se ha situado el devanado inducido y la máquina tiene $2p$ polos, el paso polar es igual a:

$$\text{Paso polar} = \frac{2\pi R}{2p} = \frac{\pi R}{p}$$

y como la longitud axial (profundidad) del polo es L , la superficie polar vale:

$$S = \frac{\pi R}{p} L \quad (1)$$

En el caso particular de la Figura 2.25a, la máquina es bipolar, por lo que la superficie polar es igual a:

$$S = \pi R L$$

En la Figura 2.25b se muestra la distribución sinusoidal del primer armónico de la inducción magnética que es de la forma:

$$B_1 = B_{m1} \cos \theta$$

donde B_{m1} es la inducción máxima del primer armónico en el centro del polo.

Si se observa la Figura 2.25b, el valor medio de la inducción magnética de una onda sinusoidal en un semiciclo en función de su valor máximo sabemos que vale:

$$B_{med1} = \frac{2}{\pi} B_{m1} \quad (2)$$

En consecuencia, el flujo magnético medio que llega a la espira, que es el flujo total o máximo que sale del polo, será el producto de la inducción media (2) por la superficie polar (1) que da lugar a:

$$\Phi_{m1} = B_{med1} S = \frac{2}{\pi} B_{m1} \frac{\pi R}{p} L = \frac{2 B_{m1} R L}{p} \quad (3)$$

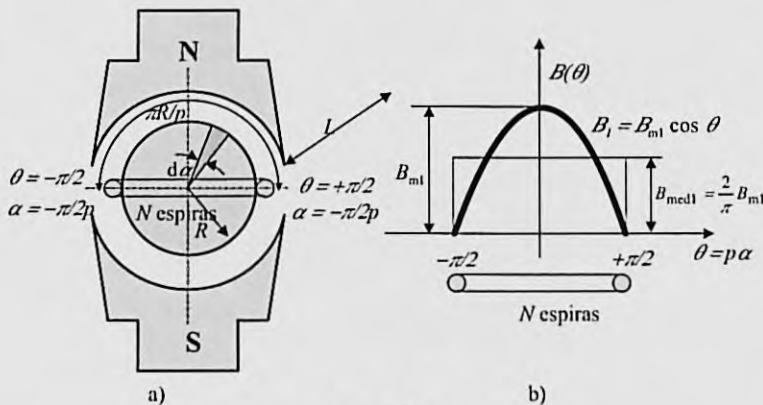


Figura 2.25

Se puede llegar al resultado anterior de otro modo. Recuerdese que en general, el flujo magnético debido al primer armónico de campo que atraviesa una bobina es de la forma:

$$\Phi_{m1} = \int B_1 \cdot ds \tag{4}$$

y como quiera que el diferencial de superficie del rotor de la Figura 2.25a vale:

$$ds = LR d\alpha = \frac{LR d\theta}{p}$$

siendo α el ángulo geométrico y θ el ángulo eléctrico, que sabemos que están relacionados entre sí por la expresión $\theta = p\alpha$. Para la bobina señalada, que se ha supuesto que tiene el paso diametral, el ángulo eléctrico θ varía desde $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$ (o el geométrico varía entre $-\pi/2p$ y $+\pi/2p$). Al calcular la integral se obtiene:

$$\Phi_{m1} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} B_{m1} \cos \theta \frac{LR d\theta}{P} = \frac{2B_{m1}LR}{P} \tag{5}$$

que representa el flujo máximo que atraviesa la bobina debido al primer armónico de inducción y en donde se ha considerado la posición de la bobina señalada en la Figura 2.25a, en la que se recibe el máximo flujo del polo. Vemos que ambos enfoques dan lugar al mismo resultado.

Pero, ¿cómo se calculan los demás flujos que recibe la espira del rotor debido a los armónicos de inducción magnética que llegan de los polos? La determinación de estos flujos magnéticos no es tan obvia como puede parecer a primera vista. Para comprender cómo se calculan se ha preparado la Figura 2.26. En este gráfico se ha dibujado en forma de perspectiva un ciclo completo de la inducción magnética del armónico principal y los tres semiciclos del primer semiperiodo de la inducción magnética del armónico de orden tres. Obsérvese que la primera semionda del armónico fundamental de inducción magnética cubre todo el polo norte y es por ello que la expresión (3) o (5) corresponde al flujo magnético total que produce un polo y que al atravesar las espiras del inducido será el causante de la f.e.m. de primer armónico o principal.

Sin embargo, el armónico de inducción magnética de orden 3 tiene tres semiciclos debajo de cada polo y por tanto, la f.e.m. desarrollada en el devanado del inducido será debida solamente al flujo que le llega de *uno solo* de los semiciclos de la inducción magnética, ya que los otros dos restantes se anulan entre sí. Como quiera que este único flujo resultante cubre solamente un tercio del polo principal, el área correspondiente para el cálculo del flujo que produce el armónico de inducción de orden tres será solamente un tercio del área del polo real. Para aclarar este hecho, en la parte inferior de la Figura 2.26 se ha simulado esta situación considerando tres pequeños polos, en los que cada uno tiene una superficie 1/3 del polo real (los dos polos de la derecha se anulan entre sí, quedando como efectivo únicamente el polo norte de la izquierda).

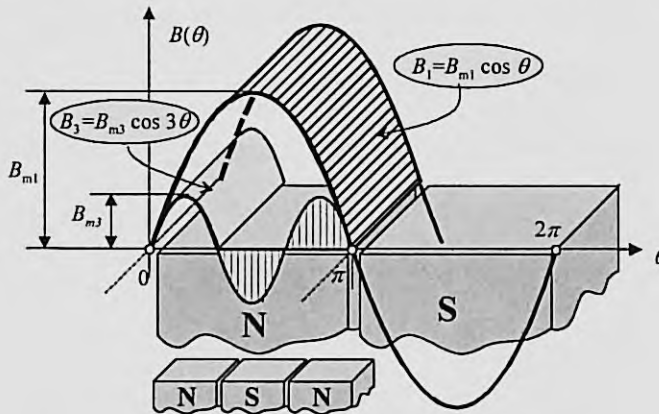


Figura 2.26

El razonamiento anterior se puede generalizar teniendo en cuenta que solamente existen armónicos impares en la distribución de campo magnético en el entrehierro; así, el área de paso de flujo de un armónico de inducción magnética de orden h será $1/h$ veces el área del armónico principal (que es el área del polo). De acuerdo con (3), el flujo máximo Φ_{m1} que llega al rotor debido al armónico fundamental de inducción de valor máximo B_{m1} , siendo S el área del polo, es:

$$\Phi_{m1} = B_{med1} S = \frac{2}{\pi} B_{m1} \frac{\pi R}{p} L = \frac{B_{m1} (2RL)}{p} \quad (6)$$

mientras que el flujo máximo Φ_{mh} correspondiente al armónico de inducción de orden h tendrá una sección de paso de flujo es $S_h = (1/h)S$, por lo que se puede escribir:

$$\Phi_{mh} = B_{medh} \frac{1}{h} S = \frac{2}{\pi} B_{mh} \frac{1}{h} \frac{\pi R}{p} L = \frac{1}{h} \frac{B_{mh} (2RL)}{p} \quad (7)$$

Si se desean calcular a continuación las f.e.m. inducidas por los armónicos de campo magnético, debe tenerse en cuenta que la expresión general de la f.e.m. inducida por un armónico de flujo de orden h , es decir: Φ_{mh} y de frecuencia hf en un devanado distribuido de N espiras que tiene, en general, un coeficiente de devanado k_{wh} será:

$$E_h = 4,44(hf)N\Phi_{mh}k_{wh} = 4,44(hf)N \frac{1}{h} \frac{B_{mh} 2RL}{p} k_{wh} \quad (8)$$

que puede simplificarse de este modo:

$$E_h = 4,44 f N B_{mh} \frac{2RL}{p} k_{wh} \quad (9)$$

Debe destacarse, de acuerdo con esta ecuación, que para el cálculo de la f.e.m. inducida producida por cualquier armónico de inducción, *solamente interviene la frecuencia fundamental, siempre que se utilice el área real del polo principal $2RL/p$ para todos y cada uno de los armónicos considerados*, pero incluyendo, como es lógico, el valor de la inducción magnética y el factor del devanado correspondiente a ese armónico.

Si los conceptos anteriores se aplican al problema propuesto, se observa que la máquina es bipolar ($p = 1$) y como quiera que en este caso el paso polar es de $a = 50$ cm, que corresponde a media circunferencia, es decir, a una longitud πR , el valor del radio del inducido es:

$$R = \frac{a}{\pi} = \frac{0,50}{\pi} \text{ m} \Rightarrow S_{cf} = \frac{2RL}{p} = 2RL = 2 \cdot \frac{0,5}{\pi} \cdot 0,40 = 0,127 \text{ m}^2$$

y las diversas f.e.m., de acuerdo con (9), vendrán expresadas por:

$$E_h = 4,44 f N B_{mh} \frac{2RL}{p} k_{wh} \quad (10)$$

pero teniendo en cuenta que en este problema el ancho de la bobina es $4/5$ del paso polar, la bobina tiene un acortamiento de paso de $p\alpha = (1/5) \cdot 180^\circ = 36^\circ$ y el valor de los factores de paso o acortamiento para cada uno de los armónicos de f.e.m. inducida por los armónicos de inducción son respectivamente:

$$k_p = \cos \frac{hp\alpha}{2} \Rightarrow k_{p1} = \cos \frac{1 \cdot 36^\circ}{2} = \cos 18^\circ = 0,951; k_{p3} = \cos(3 \cdot 18^\circ) = \cos 54^\circ = 0,588;$$

$$k_{p5} = \cos(5 \cdot 18^\circ) = \cos 90^\circ = 0; k_{p7} = \cos(7 \cdot 18^\circ) = \cos 126^\circ = -0,588$$

Al aplicar (10), teniendo en cuenta los datos del enunciado siguientes:

$$f = 50 \text{ Hz}; N = 5 \text{ espiras}, \frac{2RL}{p} = 0,127 \text{ m}^2; B_{m1} = 1,05; B_{m3} = 0,35; B_{m5} = 0,21; B_{m7} = 0,15 \text{ T};$$

se obtienen las respectivas f.e.m.:

$$E_1 = 4,44 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 1,05 \cdot 0,127 \cdot 0,951 = 140,77 \text{ V}; E_3 = 4,44 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 0,35 \cdot 0,127 \cdot 0,588 = 29,01 \text{ V};$$

$$E_5 = 4,44 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 0,21 \cdot 0,127 \cdot 0 = 0 \text{ V}; E_7 = 4,44 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 0,15 \cdot 0,127 \cdot (-0,588) = -12,43 \text{ V};$$

y tomando $\theta = \omega t$, corresponde a la siguiente f.e.m. instantánea:

$$e(t) = 140,77\sqrt{2}\cos\omega t + 29,01\sqrt{2}\cos 3\omega t + 0 \cdot \sqrt{2}\cos 5\omega t - 12,43\sqrt{2}\cos 7\omega t$$

por lo que el valor eficaz es:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2} = \sqrt{140,77^2 + 29,01^2 + 12,43^2} = 144,26 \text{ V}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 2.21. En la Figura 2.27 se muestra la onda de distribución de la inducción magnética en el entrehierro de una máquina eléctrica. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de esta onda.

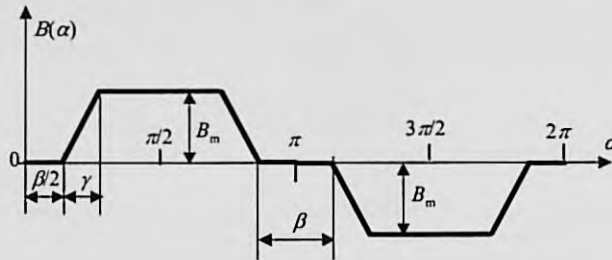


Figura 2.27

$$\text{Resp. } B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h\gamma}{2}}{\frac{h\gamma}{2}} \cos \frac{h \cdot (\gamma + \beta)}{2} \text{sen } h\alpha$$

- 2.22. En la Figura 2.28 se muestra la onda de distribución de la inducción magnética en el entrehierro de una máquina eléctrica. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de esta onda.

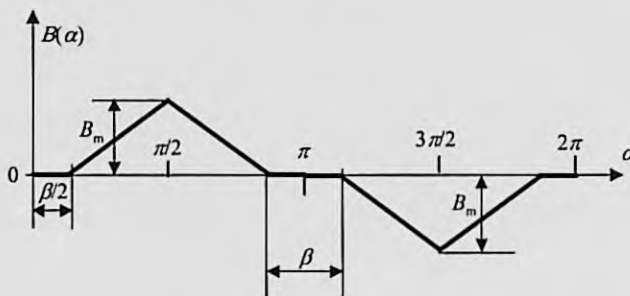


Figura 2.28

$$\text{Resp. } B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen} \frac{h(\pi - \beta)}{4}}{\frac{h(\pi - \beta)}{4}} \cos \frac{h(\pi + \beta)}{4} \text{sen } h\alpha$$

- 2.23. En la Figura 2.29 se muestra la onda de distribución de la inducción magnética en el entrehierro de una máquina eléctrica. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de esta onda.

Nota: la onda tiene t escalones.

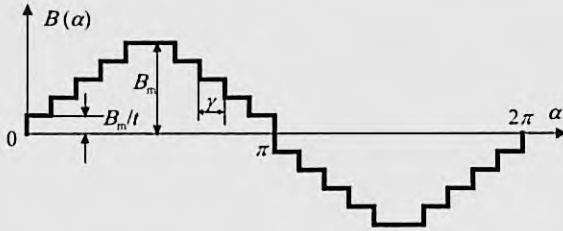


Figura 2.29

$$\text{Resp. } B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\sin \frac{ht\gamma}{2}}{t \sin \frac{h\gamma}{2}} \cos \frac{h(t-1)\gamma}{2} \sin h\alpha$$

- 2.24. En la Figura 2.30 se muestra la onda de distribución de la inducción magnética en el entrehierro de una máquina eléctrica. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de esta onda.

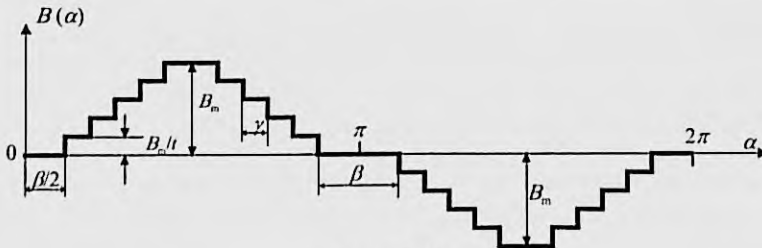


Figura 2.30

$$\text{Resp. } B(\alpha) = \frac{4}{\pi} B_m \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\sin \frac{ht\gamma}{2}}{t \sin \frac{h\gamma}{2}} \cos \frac{h[\beta + (t-1)\gamma]}{2} \sin h\alpha$$

- 2.25. Se dispone de un alternador experimental de 6 polos que gira a 1000 r/min y tiene un inducido constituido por un devanado de 100 espiras de paso diametral. Se analiza con un osciloscopio la f.e.m. inducida y se observa que es constante sobre los dos tercios centrales de cada semiciclo y varía linealmente durante el resto (onda trapecial). Al medir con un voltímetro la tensión eficaz generada señaló una lectura de 200 voltios. Calcular:

- El factor de forma de la onda generada.
- El flujo máximo por polo.

Resp. a) 0,882; b) 9,446 mWb

- 2.26. Un alternador trifásico de polos salientes de 50 Hz, tiene una onda de inducción magnética en el entrehierro tal como se muestra en la Figura 2.31, siendo el valor máximo de 1 T. El paso polar mide 10 cm y la longitud axial de los polos es de 15 cm. Si el inducido ocupa una extensión de fase σ de 60° eléctricos y existen 100 espiras por fase, calcular:
- El flujo máximo por polo.
 - El factor de forma distribución.
 - El factor de distribución.
 - El valor eficaz de la f.e.m. generada por fase.

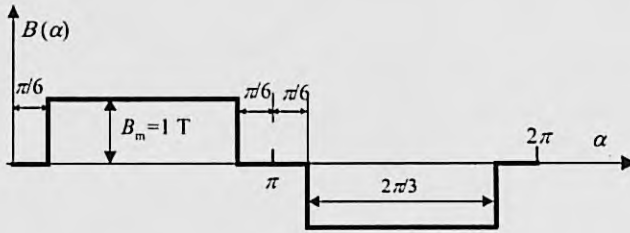


Figura 2.31

Resp. a) 0,01 Wb; b) 1,225; c) 0,955; d) ≈ 234 V

- 2.27. Un turboalternador trifásico de rotor cilíndrico de 4 polos, 50 Hz, tiene una onda de inducción magnética en el entrehierro, tal como se muestra en la Figura 2.32. El paso polar mide 0,8 m y la longitud axial del rotor es de 1,5 m. Si el inducido tiene 60 ranuras con 4 conductores por ranura y las bobinas son de paso completo o diametral, calcular:
- El flujo máximo por polo.
 - El factor de forma.
 - El factor de distribución.
 - El valor eficaz de la f.e.m. generada por fase.

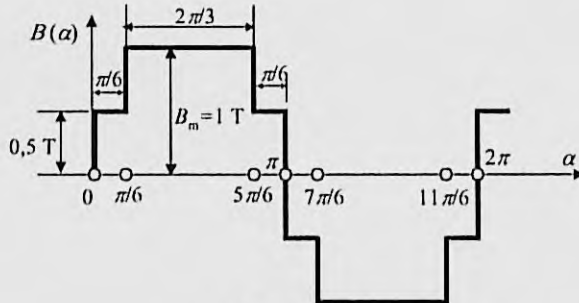


Figura 2.32

Resp. a) 1 Wb; b) 1,039; c) 0,957; d) 7952 V

2.28. El flujo magnético en el entrehierro de un alternador trifásico tiene un 100% del primer armónico, un 50% del tercero y un 30% del quinto. El estátor tiene 9 ranuras por polo y las bobinas son de paso diametral. Si se denomina E_1 a la f.e.m. eficaz por fase del armónico fundamental, calcular:

- El valor eficaz de la f.e.m. de fase.
- El valor eficaz de la f.e.m. de línea.

Resp. a) $E(\text{fase}) = 1,061 E_1$; b) $E(\text{línea}) = 1,736 E_1$

2.29. El estátor de un alternador de 6 polos tiene 72 ranuras. Se colocan tres bobinas de paso diametral de 10 espiras cada una, en las siguientes ranuras: bobina A (ranuras 1 y 13); bobina B (ranuras 2 y 14); bobina C (ranuras 3 y 15). Si las tres bobinas anteriores se conectan en serie (aditiva), calcular:

- la f.e.m. que se obtiene en el devanado así formado si la máquina gira a 1000 r/min y el flujo que tiene carácter sinusoidal tiene un valor de 0,018 Wb por polo.
- Repetir el apartado anterior si la bobina C se coloca entre las ranuras 4 y 16.

Resp. a) 117,2 V; b) 113,6 V

2.30. Un alternador de 4 polos, 50 Hz tiene un inducido con 36 ranuras y devanado en simple capa. Se conectan tres bobinas en serie de 10 espiras cada una, en las siguientes ranuras: bobina A (ranuras 1 y 9); bobina B (ranuras 2 y 10); bobina C (ranuras 5 y 13). Si el flujo magnético en el entrehierro es sinusoidal y vale 0,015 Wb, calcular:

- La f.e.m. que se obtiene en el devanado así formado;
- Repetir el apartado anterior si la bobina C se sustituye por otra de 20 espiras que se coloca en las ranuras 4 y 12.

Resp. a) 81,8 V; b) 118 V

2.31. El inducido de un alternador trifásico conectado en estrella de 6 polos, 50 Hz, dispone de un devanado de simple capa con un acortamiento de bobinas de 30° eléctricos. Cada una de las bobinas tiene 10 espiras y existen 12 ranuras por polo. Sabiendo el flujo máximo es de 0,02 Wb y que tiene distribución sinusoidal, calcular:

- El número de espiras por fase del inducido.
- El factor de distribución.
- El factor de acortamiento.
- La f.e.m. eficaz de línea.

Resp. a) 120 espiras; b) 0,968; c) 0,966; d) $E \approx 8544$ V

2.32. Un alternador trifásico de 8 polos tiene un devanado conectado en estrella de 72 ranuras y 8 conductores por ranura. La distribución de flujo magnético en el entrehierro es sinusoidal y tiene un valor máximo de 0,02 Wb. La velocidad de funcionamiento es de 750 r/min, calcular las fe.m.s. generadas de fase y de línea.

Resp. $E_f \approx 425$ V; $E_l \approx 736$ V

2.33. Un alternador trifásico de 4 polos tiene un inducido con 60 ranuras y con un devanado de doble capa, en el que cada bobina tiene 50 espiras con una anchura de $5/6$ del paso polar. El flujo máximo por polo es de 0,01 Wb y tiene distribución sinusoidal en el entrehierro y el rotor gira a 1500 r/min. Calcular:

- a) El número de espiras por fase.
- b) El factor de distribución.
- c) El factor de acortamiento.
- d) La f.e.m. eficaz generada por fase.

Resp. a) 100 espiras/fase; b) 0,904; c) 0,966; d) 1938,7 V

2.34. Se dispone de un alternador trifásico de 6 polos, 50 Hz, cuyo inducido tiene 3 ranuras por polo y fase, con bobinas de 10 espiras y devanado de doble capa. Las bobinas están acortadas un ángulo eléctrico de 30° y el flujo máximo del armónico fundamental es de 0,1 Wb. El análisis del flujo magnético muestra además un contenido de un 25 por ciento del tercer armónico. Calcular:

- a) El número de espiras por fase.
- b) La f.e.m. eficaz por fase del primer armónico.
- c) La f.e.m. eficaz del tercer armónico.
- d) La f.e.m. total por fase.
- e) La f.e.m. eficaz de línea si la máquina se conecta en estrella.

Resp. a) 180 espiras; b) 3 705,7 V; c) 471,1 V; d) 3 735,5 V; e) 6 418,5 V

2.35 Un alternador trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene un inducido con 48 ranuras y un devanado en simple capa con bobinas de 10 espiras y una anchura de bobinas de 10 ranuras. El flujo magnético en el entrehierro tiene un valor máximo para el armónico fundamental de 0,01 Wb, pero se observa que contiene también un 25% del tercer armónico (respecto al fundamental) y un 15% del quinto armónico. Calcular:

- a) La f.e.m. eficaz por fase del primero, tercero y quinto armónico;
- b) La f.e.m. eficaz de línea de cada uno de los armónicos anteriores;
- c) La f.e.m. eficaz total de fase;
- d) La f.e.m. eficaz total de línea.

Resp. a) De fase: $E_1 = 328,7$ V; $E_3 = 50$ V; $E_5 = 2,8$ V;
b) De línea: $E_1 = 569,3$ V; $E_3 = 0$ V; $E_5 = 4,9$ V; c) 332,5V; d) 569,3 V.

2.36. La inducción magnética en el entrehierro de un alternador trifásico conectado en estrella de 50 Hz, 600 r/min viene definida por la siguiente expresión:

$$B(\alpha) = \sin \theta + 0,3 \sin 3\theta + 0,2 \sin 5\theta$$

donde θ es el ángulo eléctrico desde el inicio del polo norte correspondiente. El inducido tiene 180 ranuras y está formado por bobinas de 3 espiras en simple capa, con una anchura de 15 ranuras. Sabiendo que el diámetro del inducido es de 125 cm y la longitud axial del mismo es de 45 cm, calcular:

- a) La f.e.m. instantánea generada en una bobina para $\theta = \alpha$.
- b) La f.e.m. eficaz de fase de los armónicos de orden 1, 3 y 5.
- c) La f.e.m. eficaz total por fase.
- d) La f.e.m. eficaz de línea.

Resp. a) $e(t) = 72,58\sqrt{2} \sin \omega t + 15,89\sqrt{2} \sin 3\omega t + 3,88\sqrt{2} \sin 5\omega t$;
b) $E_1 = 4151,6$ V; $E_3 = 614,1$ V; $E_5 = 45,9$ V; c) E (fase) = 4197 V;
d) E (línea) = 7191,2 V.

- 2.37. En el problema anterior se conectan por error las fases del alternador en triángulo, en vez de emplear la conexión en estrella. Si la resistencia e inductancia de cada fase es de $0,2 \Omega$ y 1 mH , respectivamente, calcular la expresión instantánea de la corriente que circulará por el inducido del alternador cuando trabaje en vacío.

Resp. Solamente circulará una corriente de tercer armónico de valor: $i_3(t) = 16,5\sqrt{2} \text{ sen}(3\omega t - 78^\circ)$

- 2.38. En la Figura 2.33 se muestra la sección transversal de un alternador de polos lisos (rotor cilíndrico). El radio del rotor es de $0,15 \text{ m}$ y tiene una longitud axial de $0,50 \text{ m}$ y dispone de un devanado concentrado de 200 espiras recorridas por una corriente continua de 20 amperios. El devanado del estátor tiene 100 espiras concentradas, de paso diametral. Si se desprecia la reluctancia del hierro y se sabe que el entrehierro es de 5 mm y que la máquina gira a 3000 r/min calcular:

- La inducción magnética máxima del primer armónico de flujo magnético producido por el inductor del rotor.
- El flujo máximo.
- El valor eficaz de la f.e.m. del armónico fundamental generada en el devanado del estátor.

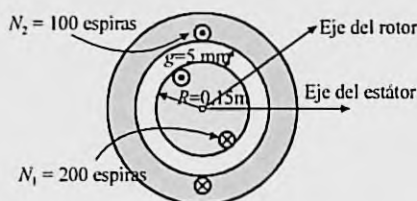


Figura 2.33

Resp. a) $0,64 \text{ T}$; b) $0,096 \text{ Wb}$; c) $2131,2 \text{ V}$

- 2.39. En la Figura 2.34 se muestra la sección transversal de un alternador de polos lisos (rotor cilíndrico). El rotor está formado por cinco bobinas de 100 espiras cada una alimentadas por una corriente continua, $I = 20 \text{ A}$. El ángulo θ es igual a $\pi/6$ radianes. Si el entrehierro es de 5 mm y se prescinde de la reluctancia del hierro, calcular:

- La expresión analítica del desarrollo en serie de Fourier de la inducción magnética en el entrehierro.
- La expresión numérica del desarrollo anterior para los parámetros indicados.

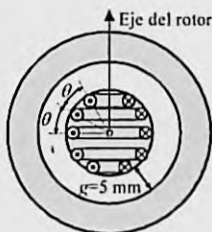


Figura 2.34

$$\text{Resp. a) } B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu_0 N I}{2g} \right] \sum_{h=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{h} \frac{\text{sen } \frac{5h\theta}{2}}{\text{sen } \frac{h\theta}{2}} \cdot \text{sen } h\alpha ; \text{ siendo } N \text{ el número de espiras de una}$$

bobina del rotor y $\theta = \pi/6$. b) $1,19 \text{ sen } \alpha - 0,107 \text{ sen } 3\alpha + 0,017 \text{ sen } 5\alpha + 0,012 \text{ sen } 7\alpha$

- 2.40. En la máquina del problema anterior el inducido tiene 36 ranuras con un devanado de doble capa de una sola espira por bobina y con un acortamiento de fase de tres ranuras. Si el turbogenerador se mueve a 3000 r/min y el diámetro del estátor tiene 0,30 m y su longitud axial es de 1 m, calcular:
- La expresión de la f.e.m. instantánea que se genera por fase.
 - El valor eficaz de la f.e.m. generada por fase.
 - El valor eficaz de la tensión generada de línea si el devanado se conecta en estrella.

Resp. a) $e(t) = 878,3\sqrt{2} \sin \omega t - 38,9\sqrt{2} \sin 3\omega t + 0,7\sqrt{2} \sin 5\omega t + 0,36\sqrt{2} \sin 7\omega t$;
b) $E(\text{fase}) = 879,2\text{V}$; c) $E(\text{línea}) = 1521,3\text{ V}$.

Transformadores

Contenido

- 3.1. Transformador ideal
- 3.2. Transformador real
- 3.3. Circuito equivalente de un transformador
- 3.4. Ensayo en vacío del transformador
- 3.5. Ensayo de cortocircuito del transformador
- 3.6. Caída de tensión en un transformador
- 3.7. Pérdidas y rendimiento de un transformador
- 3.8. Acoplamiento en paralelo de transformadores
- 3.9. Autotransformadores
- Ejercicios resueltos
- Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

3.1. Transformador ideal

a) Expresiones instantáneas de las tensiones y de las f.e.m. en función del flujo magnético

$$u_1 = e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}; e_2 = u_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

Las f.e.m. e_1 y e_2 se adelantan 90° respecto del flujo magnético Φ .

b) Valores eficaces de las tensiones y de las f.e.m. en función del flujo magnético máximo

$$U_1 = E_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_1 \Phi_m; U_2 = E_2 = \frac{N_2 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_2 \Phi_m \quad (3.2)$$

U_1 y U_2 : tensiones de primario y secundario, respectivamente;

E_1 y E_2 : f.e.m. de primario y secundario;

N_1 y N_2 : espiras de primario y secundario;

f : frecuencia;

Φ_m : flujo máximo.

c) Relación de transformación ideal r_t

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (3.3)$$

d) Relación fasorial de corrientes

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2' = \underline{I}_0 + \frac{\underline{I}_2}{r_t} \quad (3.4)$$

3.2. Transformador real

a) Ecuaciones instantáneas de las tensiones

$$u_1 = e_1 + R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt}; e_2 = u_2 + R_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} \quad (3.5)$$

R_1 y R_2 : resistencias de primario y secundario;

$L_{\sigma 1}$ y $L_{\sigma 2}$: inductancias de dispersión primario y secundario.



b) Valores eficaces de las f.e.m.

$$E_1 = 4,44 f N_1 \Phi_m; \quad E_2 = 4,44 f N_2 \Phi_m \quad (3.6)$$

- E_1 y E_2 : f.e.m. de primario y secundario;
 N_1 y N_2 : espiras de primario y secundario;
 f : frecuencia;
 Φ_m : flujo máximo.

c) Ecuaciones fasoriales de las tensiones

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 + R_1 I_1 + j X_1 I_1; \quad \underline{U}_2 = \underline{E}_2 - R_2 I_2 - j X_2 I_2 \quad (3.7)$$

d) Relación de transformación

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (3.8)$$

e) Relación fasorial de las corrientes

$$I_1 = I_0 + \frac{I_2}{r_t} \quad (3.9)$$

3.3. Circuito equivalente de un transformador

a) F.e.m. secundaria y tensión secundaria reducidas al primario

$$E_2' = r_t E_2; \quad U_2' = r_t U_2 \quad (3.10)$$

b) Corriente secundaria reducida al primario

$$I_2' = \frac{I_2}{r_t} \quad (3.11)$$

c) Impedancias secundarias reducidas al primario

$$R_2' = r_t^2 R_2; \quad X_2' = r_t^2 X_2; \quad Z_L' = r_t^2 Z_L \quad (3.12)$$

d) Impedancia de cortocircuito reducida al primario

$$R_{cc} = R_1 + R_2'; \quad X_{cc} = X_1 + X_2' \quad (3.13)$$

e) F.e.m. primaria y tensión primaria reducida al secundario

$$E_1' = \frac{E_1}{r_t}; U_1' = \frac{U_1}{r_t} \quad (3.14)$$

f) Corriente primaria y corriente de vacío reducida al secundario

$$I_1' = r_t I_1; I_0' = r_t I_0 \quad (3.15)$$

g) Impedancias primarias reducidas al secundario

$$R_1' = \frac{R_1}{r_t^2}; X_1' = \frac{X_1}{r_t^2} \quad (3.16)$$

h) Impedancia de cortocircuito reducida al secundario

$$R_{cc}' = R_1' + R_2'; X_{cc}' = X_1' + X_2' \quad (3.17)$$

3.4. Ensayo en vacío del transformador

a) Potencia en vacío medida en el primario

$$P_0 = U_{1N} I_0 \cos \varphi_0 = P_{Fe} \quad (3.18)$$

b) Componentes de la corriente de vacío reducidas al primario

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0; I_{\mu} = I_0 \sin \varphi_0 \quad (3.19)$$

c) Parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente reducida al primario

$$R_{Fe} = \frac{U_1}{I_{Fe}}; X_{\mu} = \frac{U_1}{I_{\mu}} \quad (3.20)$$

d) Relación de transformación

$$r_1 = \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{U_{1N}}{U_{20}} \quad (3.21)$$

U_{20} tensión secundaria en vacío.

3.5. Ensayo de cortocircuito del transformador

a) Potencia de cortocircuito medida en primario

$$P_{cc} = U_{1cc} I_{1N} \cos \varphi_{cc} \quad (3.22)$$

b) Componentes de la tensión de cortocircuito reducidas al primario

$$U_{Rcc} = R_{cc} I_{1N} = U_{1cc} \cos \varphi_{cc} ; U_{Xcc} = X_{cc} I_{1N} = U_{1cc} \sin \varphi_{cc} \quad (3.23)$$

c) Parámetros de la rama serie del circuito equivalente reducida al primario

$$R_{cc} = \frac{U_{Rcc}}{I_{1N}} \cos \varphi_{cc} ; X_{cc} = \frac{U_{Xcc}}{I_{1N}} \sin \varphi_{cc} \quad (3.24)$$

d) Valores relativos de las caídas de tensión respecto a la tensión asignada al primario

$$\varepsilon_{cc} = \frac{U_{1cc}}{U_{1N}} \cdot 100 ; \varepsilon_{Rcc} = \frac{U_{Rcc}}{U_{1N}} \cdot 100 ; \varepsilon_{Xcc} = \frac{U_{Xcc}}{U_{1N}} \cdot 100 \quad (3.25)$$

e) Corriente de cortocircuito de falta

$$I_{1falta} = \frac{U_{1N}}{Z_{cc}} = \frac{U_{1N}}{U_{1cc}} I_{1N} = \frac{100}{\varepsilon_{cc}} I_{1N} \quad (3.26)$$

3.6. Caída de tensión en un transformador

a) Caída de tensión absoluta

$$\Delta U_2 = U_{20} - U_2 \quad (3.27)$$

U_{20} : tensión secundaria en vacío;

U_2 : tensión secundaria en carga.

b) Caída de tensión relativa o regulación

$$\varepsilon_c = \frac{U_{20} - U_2}{U_2} \cdot 100\% \quad (3.28)$$

c) Relación de tensiones

$$\underline{U}_{1N} = \underline{U}_2 + (R_{cc} + jX_{cc})\underline{I}_2 \quad (3.29)$$

d) Fórmula aproximada de Kapp

$$U_{1N} - U_2 = R_{cc}I_2 \cos \varphi_2 + X_{cc}I_2 \sin \varphi_2 \quad (3.30)$$

e) Caída de tensión absoluta en función del índice de carga C

$$U_{1N} - U_2' = CR_{cc}I_{2N} \cos \varphi_2 + CX_{cc}I_{2N} \sin \varphi_2 \quad (3.31)$$

f) Caída de tensión relativa en función del índice de carga C

$$\varepsilon_c = \frac{U_{1N} - U_2'}{U_{1N}} \cdot 100\% = C\varepsilon_{R_{cc}} \cos \varphi_2 + C\varepsilon_{X_{cc}} \sin \varphi_2 \quad (3.32)$$

3.7. Pérdidas y rendimiento de un transformador

a) Pérdidas en vacío

$$P_0 = P_{Fe} \quad (3.33)$$

b) Pérdidas en cortocircuito con corriente nominal

$$[P_{Cu}]_N = P_{cc} = R_{cc}I_{2N}^2 \quad (3.34)$$

c) Pérdidas en el cobre para un índice de carga C en función de las pérdidas en cortocircuito

$$P_{Cu} = R_{cc}I_2^2 = C^2P_{cc} \quad (3.35)$$

d) Rendimiento del transformador

$$\eta = \frac{CU_2I_{2N} \cos \varphi_2}{CU_2I_{2N} \cos \varphi_2 + P_0 + C^2P_{cc}} \quad (3.36)$$

3.8. Acoplamiento en paralelo de transformadores

a) Condiciones que deben cumplir los transformadores

- 1) Deben tener las mismas tensiones primarias y secundarias.
- 2) Los transformadores deben tener el mismo ángulo horario.
- 3) Deben tener idénticas tensiones relativas de cortocircuito (ε_{cc}).

3.8.1. Transformadores con la misma relación de transformación

b) Ecuaciones de las corrientes

$$Z_{ccI} \cdot I = Z_{ccII} \cdot I_{II} = Z_{ccIII} \cdot I_{III} ; I = I_I + I_{II} + I_{III} + \dots \tag{3.37}$$

- I : corriente compleja total;
 $I_I, I_{II}, I_{III}, \dots$: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores.
 $Z_{ccI}, Z_{ccII}, Z_{ccIII}, \dots$: impedancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores.

c) Soluciones de las corrientes parciales

$$I_i = I \frac{Y_i}{Y_T} \Rightarrow I_I = I \frac{Y_I}{Y_T} ; I_{II} = I \frac{Y_{II}}{Y_T} ; I_{III} = I \frac{Y_{III}}{Y_T} \tag{3.38}$$

- I_i : Corriente compleja suministrada por el transformador i ;
 $I_I, I_{II}, I_{III}, \dots$: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores.
 $Y_I = 1/Z_{ccI}$;
 $Y_{II} = 1/Z_{ccII}$;
 $Y_{III} = 1/Z_{ccIII}, \dots$: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores;
 $Y_T = Y_I + Y_{II} + Y_{III} + \dots$: admitancia total.

d) Potencias complejas suministradas por cada transformador

$$S_I = U_2' \cdot I_I^* ; S_{II} = U_2' \cdot I_{II}^* ; S_{III} = U_2' \cdot I_{III}^* \tag{3.39}$$

$S_I, S_{II}, S_{III}, \dots$: potencias complejas suministradas por el transformador I, II, III, etc.

Nota: en las ecuaciones (3.39) se supone que las corrientes están reducidas al primario; en el caso de que estén reducidas al secundario, entonces la tensión debe ser \underline{U} , y las corrientes I, I_I, I_{II}, \dots deben estar referidas al secundario.

e) Relación entre los índices de carga de cada transformador y las caídas de tensión relativas de cortocircuito

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{\varepsilon_{ccII}}{\varepsilon_{ccI}} \tag{3.40}$$

3.8.2. Transformadores con distinta relación de transformación

a) Ecuaciones de las corrientes (circuitos reducidos al secundario)

$$\begin{aligned} \underline{E}_I &= \underline{U}_2 + \underline{Z}_{ccI} \cdot \underline{I}_I ; \underline{E}_{II} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{ccII} \cdot \underline{I}_{II} ; \underline{E}_{III} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{ccIII} \cdot \underline{I}_{III} \\ \underline{I} &= \underline{I}_I + \underline{I}_{II} + \underline{I}_{III} + \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

- \underline{I} : corriente compleja total;
 $\underline{I}_I, \underline{I}_{II}, \underline{I}_{III}, \dots$: corrientes complejas suministradas por cada uno de los transformadores;
 $\underline{Z}_{ccI}, \underline{Z}_{ccII}, \underline{Z}_{ccIII}, \dots$: impedancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores;
 $\underline{E}_I, \underline{E}_{II}, \underline{E}_{III}, \dots$: f.e.m. reducidas al secundario de los transformadores;
 \underline{U}_2 : tensión secundaria común.

Nota: todas las magnitudes están reducidas al secundario.

b) Tensión común secundaria en carga (caso de dos transformadores)

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Y}_I \underline{E}_I + \underline{Y}_{II} \underline{E}_{II} - \underline{I}}{\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}} \quad (3.42)$$

$\underline{Y}_I, \underline{Y}_{II}, \underline{Y}_{III}, \dots$: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores.

Nota: cuando la carga está definida por una admitancia \underline{Y}_L (o impedancia \underline{Z}_L), entonces la corriente total \underline{I} es igual a: $\underline{I} = \underline{Y}_L \cdot \underline{U}_2$. Cuando la carga está definida por una potencia compleja total \underline{S} entonces la corriente total \underline{I} es igual a: $\underline{I} = \underline{S}^* / \underline{U}_2^*$.

c) Tensión común secundaria en vacío (caso de dos transformadores)

$$\underline{U}_{20} = \frac{\underline{Y}_I \underline{E}_I + \underline{Y}_{II} \underline{E}_{II}}{\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}} \quad (3.43)$$

$\underline{Y}_I, \underline{Y}_{II}, \underline{Y}_{III}, \dots$: admitancias de cortocircuito de cada uno de los transformadores.

d) Soluciones de las corrientes parciales (caso de dos transformadores)

$$\underline{I}_I = \underline{Y}_I \frac{\underline{E}_I \underline{Y}_I + (\underline{E}_I - \underline{E}_{II}) \underline{Y}_{II}}{\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II} + \underline{Y}_L} ; \underline{I}_{II} = \underline{Y}_{II} \frac{\underline{E}_{II} \underline{Y}_I + (\underline{E}_{II} - \underline{E}_I) \underline{Y}_I}{\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II} + \underline{Y}_L} \quad (3.44)$$

\underline{Y}_L : admitancia de la carga.

e) Potencias complejas suministradas por cada transformador (caso de dos transformadores)

$$\underline{S}_I = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_1^* ; \underline{S}_{II} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_{II}^* \quad (3.45)$$

$\underline{S}_I, \underline{S}_{II}$: potencias complejas suministradas por el transformador I y II, respectivamente.

3.9. Autotransformadores

a) Ecuaciones complejas de las tensiones (autotransformador reductor)

$$\underline{U}_1 = r_i \underline{U}_2 + [(r_i - 1)^2 \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ab}] \underline{I}_1 ; \underline{U}_2 = \underline{Z}_L \underline{I}_2 \quad (3.46)$$

- \underline{U}_1 : tensión primaria;
 \underline{U}_2 : tensión secundaria;
 r_i : relación de transformación que es superior a la unidad;
 \underline{Z}_{ab} : impedancia de la parte del autotransformador recorrida por la corriente primaria \underline{I}_1 ;
 \underline{Z}_{bc} : impedancia de la parte del transformador recorrida por la corriente común $\underline{I}_2 - \underline{I}_1$;
 \underline{I}_2 : corriente secundaria.
 \underline{Z}_L : impedancia de la carga.

b) Ecuaciones complejas de las tensiones (autotransformador elevador)

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_{bc} + \underline{Z}_{bc} (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) ; \underline{E}_{ac} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{ab} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{bc} (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \quad (3.46)$$

- \underline{U}_1 : tensión primaria;
 \underline{U}_2 : tensión secundaria;
 \underline{Z}_{ab} : impedancia de la parte del autotransformador recorrida por la corriente secundaria \underline{I}_2 ;
 \underline{Z}_{bc} : impedancia de la parte común del autotransformador recorrida por la corriente común $\underline{I}_1 - \underline{I}_2$;
 \underline{I}_2 : corriente secundaria.
 \underline{E}_{ac} : f.e.m. de la parte ab del devanado secundario;
 \underline{E}_{bc} : f.e.m. de la parte bc del devanado común a primario y secundario. De las ecuaciones (3.46) se obtiene:

$$\underline{U}_1 = r_i \underline{U}_2 + [r_i^2 \underline{Z}_{ab} + (1 - r_i)^2 \underline{Z}_{bc}] \underline{I}_1 \quad (3.47)$$

r_i : es la relación de transformación, que en el autotransformador elevador es inferior a la unidad.

c) Relación entre el peso de cobre como autotransformador G_a y como transformador G_t

$$\frac{G_a}{G_t} = 1 - \frac{U_2}{U_1} \quad (3.48)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 3.1.** Un transformador monofásico de 100 kVA, 3000/230 V, 50 Hz tiene 100 espiras en el devanado secundario. Suponiendo que el transformador es ideal, calcular:
- Las corrientes primaria y secundaria a plena carga,
 - El flujo máximo,
 - El número de espiras del arrollamiento primario.

Solución

a) Los valores de las corrientes primaria y secundaria a plena carga son respectivamente:

$$I_1 = \frac{S_N}{U_1} = \frac{100\,000}{3\,000} = 33,33 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{S_N}{U_2} = \frac{100\,000}{230} = 434,8 \text{ A}$$

b) La tensión del secundario, que en el transformador ideal es igual a la f.e.m. secundaria viene expresada por:

$$U_2 = E_2 = 4,44 f N_2 \Phi_m$$

que al sustituir valores da lugar a un flujo máximo:

$$230 = 4,44 \cdot 50 \cdot 100 \cdot \Phi_m \Rightarrow \Phi_m = 10,36 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

c) La relación de tensiones o f.e.m. es igual a la relación de espiras, por lo que resulta:

$$\frac{3\,000}{230} = \frac{N_1}{100} \Rightarrow N_1 \cong 1\,304 \text{ espiras}$$

3.2. Un transformador monofásico de 10 kVA, 230/400 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 230 V, 2 A, 150 W, (medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 10 V, 25 A, 75 W, (medidos en el lado de A.T.). Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.
- Si el primario se alimenta a 230 V, calcular la tensión secundaria cuando el transformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

a) De los datos del ensayo de vacío (que está realizado en el lado de B.T, es decir, del primario) se puede escribir:

$$150 = 230 \cdot 2 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,326; \quad \sin \varphi_0 = 0,945$$

de donde se deducen los valores de las corrientes:

$$I_{Fe} = 2 \cdot 0,326 = 0,652 \text{ A} \quad I_{\mu} = 2 \cdot 0,945 = 1,89 \text{ A}$$

y por consiguiente los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente reducido al primario son:

$$R_{Fe} = \frac{230}{0,652} = 352,8 \Omega; \quad X_{\mu} = \frac{230}{1,89} = 121,7 \Omega$$

El ensayo de cortocircuito está realizado en el lado de A.T, que es el secundario. Por ello, previamente deben pasarse los datos medidos en este ensayo al lado primario, y así resulta:

$$r_t = \frac{230}{400} \approx 0,575; \quad U_{1cc} = r_t U_{2cc} = 0,575 \cdot 10 = 5,75 \text{ V}; \quad I_{1cc} = \frac{I_{2cc}}{r_t} = \frac{25}{0,575} = 43,48 \text{ A}; \quad P_{corto} = 75 \text{ W}$$

A partir de los datos anteriores, ya reducidos al primario, se puede escribir:

$$75 = 5,75 \cdot 43,48 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,3; \quad \sin\varphi_{cc} = 0,954$$

lo que da lugar a una impedancia de cortocircuito reducida al primario de valor:

$$Z_{cc} = \frac{5,75}{43,48} = 0,132 \Omega$$

La resistencia y reactancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es:

$$R_{cc} = 0,132 \cdot 0,3 = 0,0396 \Omega; \quad X_{cc} = 0,132 \cdot 0,954 = 0,126 \Omega$$

b) La relación aproximada entre las tensiones primaria y secundaria en carga viene expresada por:

$$U_1 = r_t U_2 + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \sin\varphi$$

y como los valores conocidos son:

$$U_1 = 230 \text{ V}; \quad I_2 = \frac{S_N}{U_{2N}} = \frac{10000}{400} = 25 \text{ A}; \quad I_2' = \frac{I_2}{r_t} = \frac{25}{0,575} = 43,48 \text{ A}$$

se deduce finalmente una tensión secundaria de valor:

$$230 = 0,575 U_2 + 0,0396 \cdot 43,48 \cdot 0,8 + 0,126 \cdot 43,48 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 391,9 \text{ V}$$

3.3. Un transformador monofásico de 125 kVA, 3 000/400 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 3 000 V; 0,8 A; 1 000 W, (medidos en el primario); cortocircuito: 10 V; 312,5 A; 800 W, (medidos en el secundario). Calcular:

- Los componentes de la corriente de vacío.
- La potencia de pérdidas en el hierro y de pérdidas en el cobre a plena carga.
- El rendimiento a plena carga con f.d.p. unidad; 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo.
- La tensión secundaria a plena carga, con los f.d.p. anteriores (se supone que al primario se le aplica la tensión asignada de 3 000 V).

Solución

a) Del ensayo de vacío se deduce:

$$P_0 = U_1 I_0 \cos\varphi_0 \Rightarrow 1000 = 3000 \cdot 0,8 \cdot \cos\varphi_0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0,417; \quad \sin\varphi_0 = 0,909$$

y, por tanto, las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = I_0 \cos\varphi_0 = 0,8 \cdot 0,417 = 0,333 \text{ A}; \quad I_{\mu} = 0,8 \cdot 0,909 = 0,727 \text{ A}$$

b) La potencia de pérdidas en el hierro es igual a la potencia absorbida en vacío, por lo que se tiene:

$$P_{Fe} = P_0 = 1000 \text{ W}$$

Por otra parte, el ensayo de cortocircuito está hecho con una corriente de 312,5 amperios, y las medidas han sido:

$$P_{corto} = 800 \text{ W}; \quad I_{2corto} = 312,5 \text{ A}$$

y la corriente de plena carga secundaria tiene un valor:

$$I_{2N} = \frac{S_N}{U_{2N}} = \frac{125000}{400} = 312,5 \text{ A}$$

es decir, el ensayo de cortocircuito se ha realizado con corriente nominal, por lo que se cumple:

$$P_{cuN} = P_{cc} = 800 \text{ W} = 0,8 \text{ kW}$$

c) La expresión del rendimiento en función del índice de carga y de las pérdidas del transformador viene expresado por:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

Es por ello que el rendimiento a plena carga con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{1 \cdot 125 \cdot 1}{125 + 1 + 0,8} \approx 98,6\%$$

Cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo o 0,8 capacitivo el rendimiento es igual a:

$$\eta = \frac{1 \cdot 125 \cdot 0,8}{125 \cdot 0,8 + 1 + 0,8} = 98,2\%$$

d) Para resolver este apartado es preciso calcular previamente la rama serie del circuito equivalente del transformador reducido al primario, es decir la resistencia y reactancia de cortocircuito. Estos parámetros se obtienen del ensayo de cortocircuito, que al estar realizado en el lado secundario, se deben reducir las medidas al primario y así se puede escribir:

$$r_t = \frac{3000}{400} = 7,5; U_{l\text{corto}} = U_{lcc} = 10 \cdot 7,5 = 75 \text{ V}; I_{l\text{corto}} = I_{lcc} = I_{1N} = \frac{312,5}{7,5} = 41,67 \text{ A}; P_{\text{corto}} = P_{cc} = 800 \text{ W}$$

de donde se deduce:

$$Z_{cc} = \frac{75}{41,67} = 1,8 \Omega; 800 = 75 \cdot 41,67 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,256; \sin \varphi_{cc} = 0,967$$

y por consiguiente:

$$R_{cc} = 1,8 \cdot 0,256 = 0,461 \Omega; X_{cc} = 1,8 \cdot 0,967 = 1,74 \Omega$$

La ecuación que relaciona las tensiones en carga es:

$$U_1 = r_t U_2 + R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \sin \varphi$$

Cuando el transformador funciona a plena carga y con f.d.p. unidad se tendrá:

$$3000 = 7,5 U_2 + 0,461 \cdot 41,67 \cdot 1 \Rightarrow U_2 = 397,4 \text{ V}$$

Cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo se cumple:

$$3000 = 7,5 U_2 + 0,461 \cdot 41,67 \cdot 0,8 + 1,74 \cdot 41,67 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 392,1 \text{ V}$$

y cuando el f.d.p. es 0,8 capacitivo resulta:

$$3000 = 7,5 U_2 + 0,461 \cdot 41,67 \cdot 0,8 - 1,74 \cdot 41,67 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 403,8 \text{ V}$$

3.4. Un transformador monofásico de 75 kVA, 3000/230 V, 50 Hz, necesita 200 V aplicados al primario para que circule la corriente asignada en cortocircuito, siendo la potencia absorbida en el ensayo de 2 kW. Determinar:

- La caída de tensión relativa y tensión secundaria correspondiente cuando trabaja a plena carga con f.d.p. unidad; 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo.
- Si la potencia absorbida en vacío es de 1,5 kW, calcular el rendimiento a plena y media carga con f.d.p. 0,8.

Solución

a) El valor de la corriente asignada primaria es:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{75\,000}{3\,000} = 25\text{ A} = I_{1cc}$$

y al ser la corriente anterior la que circula en cortocircuito, se deduce:

$$2\,000 = 200 \cdot 25 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,4 ; \sin\varphi_{cc} = 0,917$$

Por consiguiente, la impedancia de cortocircuito y las resistencia y reactancia correspondientes son:

$$Z_{cc} = \frac{200}{25} = 8\ \Omega \Rightarrow R_{cc} = 8 \cdot 0,4 = 3,2\ \Omega ; X_{cc} = 8 \cdot 0,917 = 7,336\ \Omega$$

y por tanto, las caídas relativas en la resistencia y reactancia a plena carga son, respectivamente:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{3,2 \cdot 25}{3\,000} = 2,67\% ; \varepsilon_{Xcc} = \frac{7,336 \cdot 25}{3\,000} = 6,11\%$$

Teniendo en cuenta que la caída de tensión relativa en función del índice de carga y de las caídas relativas anteriores viene expresado por:

$$\varepsilon_c = C[\varepsilon_{Rcc}\cos\varphi + \varepsilon_{Xcc}\sin\varphi] = \frac{U_1 - U_2'}{U_1}$$

de donde se deduce que cuando el transformador trabaja a plena carga con f.d.p. unidad se tiene una caída relativa de tensión:

$$C_1 = 1 ; \cos\varphi = 1 ; \varepsilon_c = 1 \cdot [2,67 \cdot 1] = 2,67\%$$

y para un f.d.p. 0,8 inductivo:

$$C_1 = 1 ; \cos\varphi = 0,8 \text{ inductivo} ; \varepsilon_c = 1 \cdot [2,67 \cdot 0,8 + 6,11 \cdot 0,6] = 5,8\%$$

Cuando el f.d.p. es 0,8 capacitivo se tiene:

$$C_1 = 1 ; \cos\varphi = 0,8 \text{ capacitivo} ; \varepsilon_c = 1 \cdot [2,67 \cdot 0,8 - 6,11 \cdot 0,6] = -1,53\%$$

y como quiera que la caída relativa de tensión se puede expresar también por:

$$\varepsilon_c = \frac{U_1 - r_i U_2}{U_1} \Rightarrow U_2 = \frac{U_1(1 - \varepsilon_c)}{r_i} ; \text{ donde } r_i = \frac{3\,000}{230} = 13,04$$

las tensiones secundarias correspondientes serán:

$$U_2 = \frac{3\,000(1 - 0,0267)}{13,04} = 223,9\text{ V} ; U_2 = \frac{3\,000(1 - 0,058)}{13,04} = 216,7\text{ V} ; U_2 = \frac{3\,000(1 + 0,0153)}{13,04} = 233,6\text{ V}$$

b) Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = P_{Fe} = 1,5\text{ kW} ; P_{cc} = 2\text{ kW}$$

y teniendo en cuenta que la expresión del rendimiento es:

$$\eta = \frac{CS_N \cos\varphi}{CS_N \cos\varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 será:

$$\eta = \frac{75 \cdot 0,8}{75 \cdot 0,8 + 1,5 + 2} = \frac{60}{63,5} = 94,49\%$$

y el rendimiento a media carga con f.d.p. 0,8 vale:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 0,8}{\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 0,8 + 1,5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2} = \frac{30}{30 + 1,5 + 0,5} = \frac{30}{32} = 93,75\%$$

3.5. Un transformador monofásico de 20 kVA, 460/200 V, 50 Hz, tiene unas pérdidas en el hierro a la tensión asignada de 360 W, y unas pérdidas en el cobre a plena carga de 500 W. Calcular:

- El rendimiento a media carga, con f.d.p. 0,8.
- La potencia aparente de máximo rendimiento.
- El rendimiento máximo cuando el f.d.p. es la unidad.

Solución

a) Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = P_{Fe} = 360 \text{ W}; P_{cc} = P_{cuN} = 500 \text{ W}$$

Por consiguiente, el rendimiento a media carga con f.d.p. 0,8 será:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 20\,000 \cdot 0,8}{\frac{1}{2} \cdot 20\,000 \cdot 0,8 + 360 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 500} = \frac{8\,000}{8\,000 + 360 + 125} = 94,28\%$$

b) El índice de carga óptimo viene definido por:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{360}{500}} = 0,8485$$

y como quiera que el índice anterior es el cociente entre la potencia de máximo rendimiento y la potencia asignada al transformador, se obtiene:

$$S_{\eta_{max}} = 20 \cdot 0,8485 = 16,97 \text{ kVA}$$

c) El rendimiento máximo cuando el f.d.p. es la unidad vale:

$$\eta = \frac{0,8485 \cdot 20 \cdot 1}{0,8485 \cdot 20 \cdot 1 + 0,36 + 0,8485^2 \cdot 0,5} = \frac{16,97}{16,97 + 0,72} = 95,93\%$$

3.6. El rendimiento para un factor de potencia unidad de un transformador monofásico de 200 kVA, 3000/400 V, es de 0,98, tanto para la plena carga como para media carga. El f.d.p. en vacío es de 0,2 y la caída de tensión relativa a plena carga con un f.d.p. 0,8 inductivo es del 4%. Determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.

Solución

Teniendo en cuenta que la expresión del rendimiento de un transformador es:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

al aplicarla a las dos condiciones del problema se cumple:

$$0,98 = \frac{1 \cdot 200 \cdot 1}{1 \cdot 200 \cdot 1 + P_0 + 1^2 P_{cc}} ; 0,98 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 1 + P_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{cc}}$$

de donde se deducen las ecuaciones siguientes:

$$P_0 + P_{cc} = 4,082 \text{ kW} ; P_0 + \frac{P_{cc}}{4} = 2,041 \text{ kW}$$

que dan lugar a las siguientes potencias perdidas:

$$P_{cc} = 2,72 \text{ kW} ; P_0 = 1,361 \text{ kW}$$

Teniendo en cuenta además que el f.d.p. en vacío es igual a 0,2, se puede escribir:

$$P_0 = U_1 I_0 \cos \varphi_0 \Rightarrow 1361 = 3000 \cdot I_0 \cdot 0,2$$

de donde se deduce:

$$I_0 = 2,268 \text{ A} ; I_{Fe} = 2,268 \cdot 0,2 = 0,4536 \text{ A} ; I_{\mu} = 2,268 \cdot 0,98 = 2,223 \text{ A}$$

A partir de estas corrientes se obtienen los siguientes parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador reducido al primario:

$$R_{Fe} = \frac{3000}{0,4536} = 6613,7 \Omega \approx 6,61 \text{ k}\Omega ; X_{\mu} = \frac{3000}{2,223} = 1349,5 \Omega \approx 1,35 \text{ k}\Omega$$

Además la corriente de plena carga del secundario tiene un valor:

$$I_{2N} = \frac{S_N}{U_{2N}} = \frac{200000}{400} = 500 \text{ A}$$

que, teniendo en cuenta que la relación de transformación es igual a $n_1 = 3000/400 = 7,5$, corresponde a una corriente del secundario reducida al primario:

$$I_2' = \frac{500}{7,5} = 66,66 \text{ A}$$

Por otro lado, al ser la potencia perdida en cortocircuito de 2720 W, como se ha deducido de las ecuaciones del rendimiento, se puede escribir:

$$P_{cc} = P_{cuN} = 2720 = R_{cc} \cdot I_2'^2 = R_{cc} \cdot 66,66^2 \Rightarrow R_{cc} = 0,612 \Omega$$

Como además la caída de tensión relativa a plena carga es del 4%, resulta:

$$\varepsilon_c = 4\% = \frac{U_1 - U_2}{U_1} = \frac{3000 - 7,5U_2}{3000}$$

de donde se deduce:

$$U_2 = 384 \text{ V} \Rightarrow U_2' = 2880 \text{ V}$$

La reactancia de cortocircuito se despeja de ecuación de la caída de tensión de un transformador (fórmula de Kapp):

$$U_1 - U_2' = 120 = R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \sin \varphi = 0,612 \cdot 66,66 \cdot 0,8 + X_{cc} \cdot 66,66 \cdot 0,6$$

lo que da lugar a:

$$X_{cc} = 2,184 \Omega$$

3.7. El rendimiento máximo de un transformador monofásico de 500 kVA; 3300/500 V, 50 Hz, es del 97% y ocurre para los 3/4 de la plena carga con f.d.p. unidad. Se observa en un ensayo de cortocircuito que son necesarios 330 V aplicados al primario para que circule en ese estado la corriente asignada por el transformador. Calcular la caída relativa de tensión a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

De los datos del enunciado se deduce que el índice de carga óptimo es igual a 3/4 y se puede escribir:

$$C_{opt} = \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}}$$

y como quiera que el rendimiento máximo es igual al 97%, para el cual coinciden las pérdidas fijas con las variables, se tiene:

$$0,97 = \frac{\frac{3}{4} \cdot 500 \cdot 1}{\frac{3}{4} \cdot 500 \cdot 1 + 2P_0}$$

de donde se deduce: $P_0 \approx 5,8$ kW. Llevando este valor a la ecuación del índice de carga óptimo resulta:

$$\frac{9}{16} = \frac{5,8}{P_{cc}}$$

de donde se deduce un valor $P_{cc} \approx 10,31$ kW y por consiguiente se cumple:

$$P_{cc} = 10,31 \text{ kW} = R_{cc} I_{1N}^2 = R_{cc} \cdot 151,51^2 \Rightarrow R_{cc} \approx 0,45 \Omega$$

Como quiera que, según el enunciado, en un ensayo de cortocircuito hacen falta aplicar al primario 330 V para que circule la corriente asignada (nominal), se tiene:

$$U_{1cc} = 330 \text{ V}; I_{1cc} = I_{1N} = \frac{500\,000}{3\,300} = 151,51 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$Z_{cc} = \frac{330}{151,51} = 2,178 \Omega \quad X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2} = \sqrt{2,178^2 - 0,45^2} = 2,13 \Omega$$

De este modo, las caídas relativas de tensión en la resistencia y el reactancia de cortocircuito son, respectivamente:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{0,45 \cdot 151,51}{3\,300} = 2,067\%; \quad \varepsilon_{x_{cc}} = \frac{2,13 \cdot 151,51}{3\,300} = 9,78\%$$

y por tanto la caída relativa de tensión del transformador es:

$$\varepsilon_c = C[\varepsilon_{R_{cc}} \cos \varphi + \varepsilon_{x_{cc}} \sin \varphi] = 2,067 \cdot 0,8 + 9,78 \cdot 0,6 = 7,522\%$$

que es el resultado solicitado en el enunciado del problema.

3.8. Calcular los rendimientos de un transformador de 100 kVA, para media carga, plena carga y 5/4 de la plena carga, con f.d.p.:

- a) Unidad,
b) 0,8.

Las pérdidas en el cobre a plena carga son de 1000 W, y las pérdidas en el hierro son de 1000 W.

Solución

Las pérdidas del transformador son:

$$P_0 = 1 \text{ kW} = P_{Fe} ; P_{cc} = 1 \text{ kW} = P_{cuN}$$

y la expresión del rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

que al aplicarla a los valores del enunciado se tiene que para media carga con f.d.p. unidad:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1} = \frac{50}{50 + 1 + 0,25} = 97,56\%$$

y a plena carga y a 5/4 de la plena carga con f.d.p. unidad se tiene:

$$\eta = \frac{1 \cdot 100 \cdot 1}{1 \cdot 100 \cdot 1 + 1 + 1^2 \cdot 1} = \frac{100}{102} = 98,04\% ; \eta = \frac{\frac{5}{4} \cdot 100 \cdot 1}{\frac{5}{4} \cdot 100 \cdot 1 + 1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 1} = \frac{125}{125 + 1 + 1,56} = \frac{125}{127,56} = 97,99\%$$

y cuando el f.d.p. es 0,8; resulta para los índices de carga anteriores:

$$\eta = \frac{50 \cdot 0,8}{50 \cdot 0,8 + 1 + 0,25} = 96,97\% ; \eta = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + 1 + 1} = 97,56\% \quad \eta = \frac{125 \cdot 0,8}{125 \cdot 0,8 + 1 + 1,56} = 97,50\%$$

3.9. El rendimiento de un transformador monofásico de 100 kVA es de 93,02% cuando suministra la plena carga, con un f.d.p. de 0,8 y de 94,34% a media carga, con f.d.p. unidad. Calcular:

- a) Las pérdidas en el hierro;
b) Las pérdidas en el cobre a plena carga.

Solución

Sabemos que la expresión del rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

que al sustituir en las dos situaciones mencionadas da lugar a:

$$0,9302 = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + P_0 + P_{cc}}; \quad 0,9434 = \frac{50 \cdot 1}{50 \cdot 1 + P_0 + 0,25P_{cc}}$$

de donde se deducen las dos ecuaciones siguientes:

$$6 = P_0 + P_{cc}; \quad 3 = P_0 + 0,25P_{cc}$$

que al resolverlas se obtiene:

$$P_{cc} = 4 \text{ kW}; \quad P_0 = 6 - 4 = 2 \text{ kW}$$

3.10. Dos transformadores monofásicos de 100 kVA, 1000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Las impedancias de cortocircuito reducidas al primario de cada uno son $Z_{ccI} = 0,3 + j 0,4 \Omega$ y $Z_{ccII} = 0,4 + j 0,3 \Omega$, respectivamente. Se desea alimentar a 100 V una carga de 150 kVA, con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las corrientes y las potencias aparentes y activas suministradas por cada transformador.

Solución

En la Figura 3.1 se muestra el circuito equivalente reducido al primario del acoplamiento en paralelo. La tensión secundaria es de 100 voltios, y al ser la relación de transformación $r_t = 1000/100 = 10$, se tiene una tensión secundaria reducida al primario $U'_2 = r_t U_2 = 1000$. De este modo la corriente que absorbe la carga reducida al primario es:

$$I'_2 = \frac{150\,000}{1000} = 150 \text{ A}$$

que al tomar como referencia la tensión $\underline{U}'_2 = 1000 \angle 0^\circ$, se puede escribir $\underline{I}'_2 = 150 \angle -36,87^\circ$. Esta corriente será igual a la suma fasorial de las corrientes que entrega cada transformador (reducidas al primario), es decir:

$$\underline{I}_I + \underline{I}_{II} = 150 \angle -36,87^\circ$$

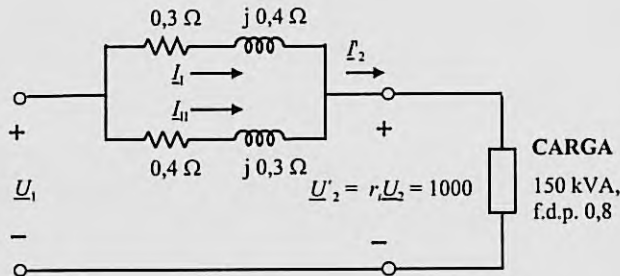


Figura 3.1

Iguando las caídas de tensión en los dos transformadores se puede escribir:

$$(0,3 + j 0,4) \underline{I}_I = (0,4 + j 0,3) \underline{I}_{II}$$

Despejando de estas dos últimas ecuaciones últimas el valor de las corrientes \underline{I}_I e \underline{I}_{II} se obtiene:

$$\underline{I}_I = 150 \angle -36,87^\circ \frac{0,4 + j 0,3}{0,7 + j 0,7} = 150 \angle -36,87^\circ \frac{0,5 \angle 36,87^\circ}{0,7 \sqrt{2} \angle 45^\circ} = 75,76 \angle -45^\circ$$

$$\underline{I}_{II} = 150 \angle -36,87 - 75,76 \angle -45^\circ = (120 - j90) - (53,57 - j53,57) = 66,43 - j36,43 = 75,76 \angle -28,74^\circ$$

que corresponden a unas corrientes medidas en secundario:

$$I_{2I} = r_1 I_1 = 757,6 \text{ A}; \quad I_{2II} = r_1 I_{II} = 757,6 \text{ A}$$

Las potencias complejas entregadas por cada transformador son:

$$\underline{S}_I = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_1' = 1000 \cdot 75,76 \angle 45^\circ = (53,57 + j 53,57) \cdot 10^3 \Rightarrow S_I = 75,76 \text{ kVA}; \quad P_I = 53,57 \text{ kW}; \quad Q_I = 53,57 \text{ kVAR}$$

$$\underline{S}_{II} = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_{II}' = 1000 \cdot 75,76 \angle 28,74^\circ = (66,43 + j 36,43) \cdot 10^3 \Rightarrow S_{II} = 75,76 \text{ kVA}; \quad P_{II} = 66,43 \text{ kW}; \quad Q_{II} = 36,43 \text{ kVAR}$$

Se puede comprobar que se cumple el balance de potencias en el circuito:

$$\underline{S}_I + \underline{S}_{II} = (53,57 + j 53,57) + (66,43 + j 36,43) = 120 + j 80 = \underline{S}_{carga}$$

- 3.11.** Tres transformadores monofásicos de 100 kVA, 1000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Las impedancias de cortocircuito reducidas al primario de cada uno son, respectivamente: $Z_{ccI} = 0,3 + j 0,4 \Omega$; $Z_{ccII} = 0,4 + j 0,3 \Omega$ y $Z_{ccIII} = 0,4 + j 0,4 \Omega$. Se desea alimentar a 100 V una carga de 240 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador.

Solución

La tensión secundaria es de 100 V, y al ser la relación de transformación

$$r_1 = \frac{1000}{100} = 10$$

Se tiene una tensión secundaria reducida al primario $U_2' = r_1 U_2 = 1000$. De este modo, la corriente que absorbe la carga reducida al primario es:

$$I_2' = \frac{240000}{1000 \cdot 0,8} = 300 \text{ A}$$

que al tomar como referencia la tensión $U_2' = 1000 \angle 0^\circ$, se puede escribir $I_2' = -300 \angle -36,87^\circ$. Esta corriente será igual a la suma fasorial de las corrientes que entrega cada transformador (reducidas al primario), es decir:

$$\underline{I}_I + \underline{I}_{II} + \underline{I}_{III} = 300 \angle -36,87^\circ \quad (1)$$

Al tener más de dos transformadores conectados en paralelo es conveniente expresar la ecuación anterior en función de las admitancias de cortocircuito de cada transformador. Es por ello que si se denomina ΔU a la caída de tensión de los transformadores e \underline{Y}_I , \underline{Y}_{II} e \underline{Y}_{III} , la ecuación (1) se puede poner de este modo:

$$\underline{Y}_I \Delta U + \underline{Y}_{II} \Delta U + \underline{Y}_{III} \Delta U = (\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II} + \underline{Y}_{III}) \cdot \Delta U = \underline{Y}_T \cdot \Delta U = \underline{I}_2' = 300 \angle -36,87^\circ \quad (2)$$

En la ecuación anterior, \underline{Y}_T representa la admitancia total de los tres transformadores en paralelo. Por la regla del divisor de corriente estudiado en Teoría de Circuitos, la corriente suministrada por un transformador es igual a:

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_i \Delta U \quad (3)$$

pero teniendo en cuenta la ecuación (2), la ecuación (3) se transforma en:

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_i \Delta U = \underline{Y}_i \frac{\underline{I}_2'}{\underline{Y}_T} \quad (4)$$

En este caso, las admitancias de cada transformador y la admitancia total son:

$$\underline{Y}_I = \frac{1}{Z_I} = \frac{1}{0,3 + j 0,4} = 2 \angle -53,13^\circ \text{ siemens}; \quad \underline{Y}_{II} = \frac{1}{0,4 + j 0,3} = 2 \angle -36,87^\circ \text{ siemens};$$

$$Y_{III} = \frac{1}{0,4 + j 0,4} = 1,7678 \angle -45^\circ \text{ siemens}; Y_T = 2 \angle -53,13^\circ + 2 \angle -36,87^\circ + 1,7678 \angle -45^\circ = 4,05 - j 4,05 = 5,728 \angle -45^\circ$$

y al aplicar la ecuación (4) dan lugar a las siguientes corrientes suministradas por cada transformador (reducidas al primario):

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_T} I_2 = \frac{2 \angle -53,13^\circ}{5,728 \angle -45^\circ} \cdot 300 \angle -36,87^\circ = 104,76 \angle -45^\circ$$

$$I_{II} = \frac{Y_{II}}{Y_T} I_2 = \frac{2 \angle -36,87^\circ}{5,728 \angle -45^\circ} \cdot 300 \angle -36,87^\circ = 104,76 \angle -28,74^\circ;$$

$$I_{III} = \frac{Y_{III}}{Y_T} I_2 = \frac{1,7678 \angle -36,87^\circ}{5,728 \angle -45^\circ} \cdot 300 \angle -36,87^\circ = 92,59 \angle -36,87^\circ$$

En consecuencia, las potencias complejas entregadas por cada transformador son:

$$S_I = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_1^* = 1000 \cdot 104,76 \angle 45^\circ = (74,08 + j 74,08) \cdot 10^3 \Rightarrow S_I = 104,76 \text{ kVA}; P_I = 74,08 \text{ kW}; Q_I = 74,08 \text{ kVAr}$$

$$S_{II} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_{II}^* = 1000 \cdot 104,76 \angle 28,74^\circ = (91,85 + j 50,37) \cdot 10^3 \Rightarrow S_{II} = 104,76 \text{ kVA}; P_{II} = 91,85 \text{ kW}; Q_{II} = 50,37 \text{ kVAr}$$

$$S_{III} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_{III}^* = 1000 \cdot 92,59 \angle 36,87^\circ = (74,07 + j 55,55) \cdot 10^3 \Rightarrow S_{III} = 92,59 \text{ kVA}; P_{III} = 74,07 \text{ kW}; Q_{III} = 55,55 \text{ kVAr}$$

Se puede comprobar que se cumple el balance de potencias en el circuito:

$$S_I + S_{II} + S_{III} = (74,08 + j 74,08) + (91,85 + j 50,37) + (74,07 + j 55,55) = 240 + j 180$$

y la potencia compleja de la carga, teniendo en cuenta que la potencia activa total es de 240 kW y con un f.d.p. de 0,8 inductivo, corresponde a una potencia reactiva $Q_{carga} = 240 \cdot \text{tg } 36,87^\circ = 240 \cdot 0,75 = 180 \text{ kVAr}$. Es decir, la potencia compleja de la carga es: $S_{carga} = 240 + j 180 \text{ kVA}$, que coincide con la potencia compleja total suministrada por los tres transformadores.

3.12. Dos transformadores de 100 kVA, 1000/100V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Los ensayos de cortocircuito de estos transformadores cuando funcionan con corriente asignada con los devanados de B.T. en cortocircuito, dan los siguientes resultados:

Transformador	Tensión aplicada	Potencia entrada
I	30 V	1200 W
II	90 V	1800 W

- Si se desea alimentar a 100 V una carga de 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será el reparto de potencias aparentes y activas en cada transformador?
- ¿Cuál es la mayor potencia con f.d.p. unidad, que pueden llevar los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?

Solución

a) De los datos del ensayo del transformador I se puede obtener la impedancia de cortocircuito de este transformador, de acuerdo con el procedimiento siguiente:

$$I_{IN} = I_{icc} = \frac{100\ 000}{1000} = 100 \text{ A}; P_{cc} = U_{icc} I_{icc} \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = \frac{1200}{30 \cdot 100} = 0,4; \text{sen } \varphi_{cc} = 0,917$$

de donde se deduce:

$$Z_{ccl} = \frac{30}{100} = 0,3 \Omega \Rightarrow R_{ccl} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \Omega; \quad X_{ccl} = 0,3 \cdot 0,917 = 0,275 \Omega$$

De un modo similar para el transformador II se tiene:

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{1800}{90 \cdot 100} = 0,2; \quad \sin \varphi_{cc} = 0,98 \Rightarrow Z_{ccl} = \frac{90}{100} = 0,9 \Omega$$

y por consiguiente:

$$R_{ccl} = 0,18 \Omega; \quad X_{ccl} = 0,882 \Omega$$

Como quiera que la potencia de la carga es de 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total (reducida al primario) que absorbe la carga es igual a:

$$I'_2 = \frac{100\,000}{1000 \cdot 0,8} = 125 \text{ A}$$

y tomando como referencia la tensión secundaria reducida al primario, es decir, $\underline{U}'_2 = 1000 \angle 0^\circ$, la corriente compleja correspondiente es de la forma:

$$\underline{I}'_2 = -125 \angle -36,87^\circ$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones del paralelo:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_{II} = 125 \angle -36,87^\circ$$

$$(0,12 + j0,275) \cdot \underline{I}_1 = (0,18 + j0,882) \cdot \underline{I}_{II}$$

se obtienen las siguientes corrientes:

$$\underline{I}_1 = 94,14 \angle -33,87^\circ; \quad \underline{I}_{II} = 31,38 \angle -45,9^\circ$$

que corresponden a las potencias complejas siguientes:

$$\underline{S}_I = \underline{U}'_2 \cdot \underline{I}_1^* = 94,14 \angle 33,87^\circ \text{ kVA} = 78,16 + j52,46 \Rightarrow S_I = 94,14 \text{ kVA}; \quad P_I = 78,16 \text{ kW}; \quad Q_I = 52,46 \text{ kVAr}$$

$$\underline{S}_{II} = \underline{U}'_2 \cdot \underline{I}_{II}^* = 31,38 \angle 45,9^\circ \text{ kVA} = 21,84 + j22,54 \Rightarrow S_{II} = 31,38 \text{ kVA}; \quad P_{II} = 21,84 \text{ kW}; \quad Q_{II} = 22,54 \text{ kVAr}$$

La potencia compleja total suministrada por los transformadores es:

$$\underline{S}_I + \underline{S}_{II} = (78,16 + j52,46) + (21,84 + j22,54) = 100 + j75$$

que coincide con la potencia compleja de la carga, que tiene 100 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo, que corresponde a:

$$\underline{S}_{carga} = (100 + j100 \cdot \text{tg}36,87^\circ) = 100 + j75$$

cumpliéndose el balance de potencias en el circuito.

b) Del apartado anterior se obtienen las caídas relativas de tensión de cada transformador:

$$\varepsilon_{ccl} = Z_{ccl} \frac{I_{IN}}{U_{IN}} = 0,3 \cdot \frac{100}{1000} = 3\%; \quad \varepsilon_{ccl} = 0,9 \cdot \frac{100}{1000} = 9\%$$

y como quiera que en el acoplamiento en paralelo se debe cumplir la relación:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{\varepsilon_{cclII}}{\varepsilon_{ccl}}$$

Al sustituir valores nos da:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{9\%}{3\%} = 3$$

y como los índices de carga vienen expresados por:

$$C_I = \frac{S_I}{S_{IN}}; C_{II} = \frac{S_{II}}{S_{IIN}}$$

al ser las potencias nominales de ambos transformadores de 100 kVA, las potencias aparentes suministradas por ambos transformadores deben cumplir la relación:

$$\frac{S_I}{S_{II}} = 3$$

es decir, la potencia aparente que suministra el primer transformador es el triple que la potencia aparente que entrega el segundo. Esta relación se cumple para cualquier régimen de carga de los transformadores. De hecho, esta relación se puede corroborar de los resultados del apartado anterior en los que se obtenía: $S_I = 94,14$ kVA; $S_{II} = 31,38$ kVA, cuyo cociente evidentemente es igual tres.

En consecuencia *¿cuál debe ser la mayor potencia con f.d.p. unidad, que pueden llevar los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?* Es evidente que para que no resulte sobrecargado ninguno de los dos transformadores, la potencia aparente que debe suministrar el primer transformador deberá ser su potencia asignada de 100 kVA, y de este modo, la potencia aparente que entregará el segundo transformador será 1/3 de la anterior, es decir, de 33,33 kVA. Sin embargo debe aclararse que entre los dos transformadores no entregan la potencia aparente total de $100 + 33,33 = 133,33$ kVA, ya que las potencias aparentes no se pueden sumar aritméticamente. Para determinar la potencia aparente total que pueden suministrar ambos transformadores es preciso hacer los cálculos en el plano complejo. Las magnitudes de las corrientes que entregan cada uno de los transformadores (reducidas al primario) son:

$$S_I = U_2' I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{100\,000}{1\,000} = 100 \text{ A} \Rightarrow I_{II} = \frac{1}{3} I_1 = 33,33 \text{ A}$$

pero siempre se debe cumplir la relación del paralelo siguiente:

$$\underline{Z}_I \underline{I}_1 = \underline{Z}_{II} \underline{I}_{II} \Rightarrow (0,12 + j0,275) \cdot \underline{I}_1 = (0,18 + j0,882) \cdot \underline{I}_{II}$$

de donde se deduce:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_{II}} = \frac{0,9 \angle 78,46^\circ}{0,3 \angle 66,42^\circ} = 3 \angle 12,04^\circ \approx 3 \angle 12^\circ$$

Es decir, la corriente que entrega el primer transformador es el triple que la que suministra el segundo (lo que ya se había previsto) pero además, se adelanta 12° a la corriente que entrega este último. Por consiguiente, si se considera que la corriente del segundo transformador es de la forma $\underline{I}_{II} = 33,33 \angle \alpha$, la corriente del primero será $\underline{I}_1 = 100 \angle (\alpha + 12^\circ)$ y la corriente total que entregan ambos a la carga, al tener un f.d.p. unidad, será de la forma $I \angle 0^\circ$ y deberá cumplirse la igualdad siguiente:

$$I \angle 0^\circ = \underline{I}_1 + \underline{I}_{II} = 100 \angle (\alpha + 12^\circ) + 33,33 \angle \alpha$$

que al igualar partes reales e imaginarias se obtienen los valores de I y de α siguientes:

$$I = 132,78; \alpha = -9^\circ$$

por lo que la potencia aparente compleja total es:

$$\underline{S}_{\text{total}} = \underline{U}_2' \underline{I}^* = 1000 \angle 0^\circ \cdot 132,78 \angle 0^\circ = 132,78 \text{ kW} + j0 \text{ kVAr}$$

es decir, 132,78 kVA (*y no 133,33 kVA como puede parecer a primera vista!*). Las potencias que entregan cada uno de los transformadores son:

$$\underline{S}_I = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_1^* = 1000 \angle 0^\circ \cdot 100 \angle -3^\circ = 100 \angle -3^\circ \text{ kVA} = 99,86 \text{ kW} - j 5,22 \text{ kVAr}$$

$$\underline{S}_{II} = \underline{U}_2' \cdot \underline{I}_{II}^* = 1000 \angle 0^\circ \cdot 33,33 \angle 9^\circ = 33,33 \angle 9^\circ \text{ kVA} = 32,92 \text{ kW} + j 5,22 \text{ kVAr}$$

por lo que la potencia compleja total que suministran ambos transformadores es: $\underline{S}_{\text{total}} = 132,78 + j0$, que coincide con la absorbida por la carga, cumpliéndose el balance de potencias.

3.13. Un transformador de 40 kVA, 1 000/100 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de cortocircuito: 51 V; 40 A; 400 W (medidas en el lado de A.T). Se desea conectar en paralelo con otro transformador de 20 kVA, 1 000/100 V, que en un ensayo de cortocircuito ha dado: 42 V; 20 A; 245 W, (medidas en el lado de A.T.). Indicar cómo se repartirán una potencia de 60 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

De los resultados del ensayo de cortocircuito del primer transformador resulta:

$$400 = 51 \cdot 40 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,196; \quad \text{sen}\varphi_{cc} = 0,98$$

y por tanto, se obtiene:

$$Z_{ccl} = \frac{51}{40} = 1,275 \Omega \Rightarrow R_{ccl} = 1,275 \cdot 0,196 = 0,25 \Omega; \quad X_{ccl} = 1,275 \cdot 0,98 \approx 1,25 \Omega$$

Para el segundo transformador se tiene:

$$245 = 42 \cdot 20 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,292; \quad \text{sen}\varphi_{cc} = 0,957$$

$$Z_{ccll} = \frac{42}{20} = 2,1 \Omega \Rightarrow R_{ccll} = 2,1 \cdot 0,292 = 0,612 \Omega; \quad X_{ccll} = 2,1 \cdot 0,967 \approx 2 \Omega$$

Al conectar los dos transformadores en paralelo y alimentar a carga de 60 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total reducida al primario vale:

$$S = 60\,000 = r_1 U_2 I_2' = 1\,000 \cdot I_2' \Rightarrow I_2' = 60 \text{ A}$$

que tomando la tensión secundaria reducida al primario como referencia de fases, corresponde a una corriente compleja:

$$I_2' = 60 \angle -36,87^\circ$$

Si se denominan I_I e I_{II} a las corrientes secundarias reducidas al primario de cada uno de los transformadores se cumplirán las siguientes ecuaciones del paralelo:

$$I_I + I_{II} = 60 \angle -36,87^\circ; \quad (0,25 + j1,25) \cdot I_I = (0,612 + j2) \cdot I_{II}$$

de donde se obtiene:

$$I_I = 7,33 \angle -39,03^\circ; \quad I_{II} = 22,74 \angle -33,34^\circ$$

y por consiguiente, las potencias complejas suministradas por ambos transformadores serán:

$$S_I = \underline{U}_2 I_I^* = 37,33 \angle 39,03^\circ \text{ kVA} = 29 + j23,5; \quad S_{II} = \underline{U}_2 I_{II}^* = 22,74 \angle 33,34^\circ \text{ kVA} = 19 + j12,5$$

cuya suma coincide con la potencia compleja absorbida por la carga y que vale:

$$S_{\text{carga}} = 60 \angle 36,87^\circ \text{ kVA} = 48 + j36$$

3.14. Dos transformadores monofásicos funcionan en paralelo y alimentan una carga de impedancia $Z_L = 24 + j10 \Omega$. El transformador I tiene una tensión secundaria en vacío $E_1 = 440 \text{ V}$ y una impedancia de cortocircuito reducida al secundario $Z_1 = 1 + j3 \Omega$; los valores correspondientes para el transformador II son: $E_{II} = 450 \text{ V}$ y $Z_{II} = 1 + j4 \Omega$. Calcular:

- La tensión secundaria en vacío y la corriente que circulará por los secundarios de los transformadores cuando trabajen en vacío.
- La tensión secundaria cuando alimentan la carga mencionada.
- Las corrientes secundarias y sus factores de potencia en el caso anterior.

Solución

Teoría previa

En este problema los transformadores tienen diferente relación de transformación, por lo que las tensiones secundarias de vacío son distintas. Debe señalarse que si esta diferencia es muy grande, debe evitarse en todo momento el acoplamiento en paralelo, ya que da lugar a corrientes elevadas en los devanados, con las consiguientes pérdidas de potencia. En la práctica lo que sucede es que aunque las relaciones de transformación de los transformadores son iguales, las tensiones reales difieren ligeramente. También aparece esta diferencia cuando se emplean transformadores con tomas con diferentes posiciones de regulación. Antes de resolver este problema conviene hacer un análisis teórico breve. En la Figura 3.2a se muestra el esquema del acoplamiento y en la Figura 3.2b se han dibujado los circuitos equivalentes de los transformadores reducidos al secundario y que alimentan la impedancia de carga señalada.

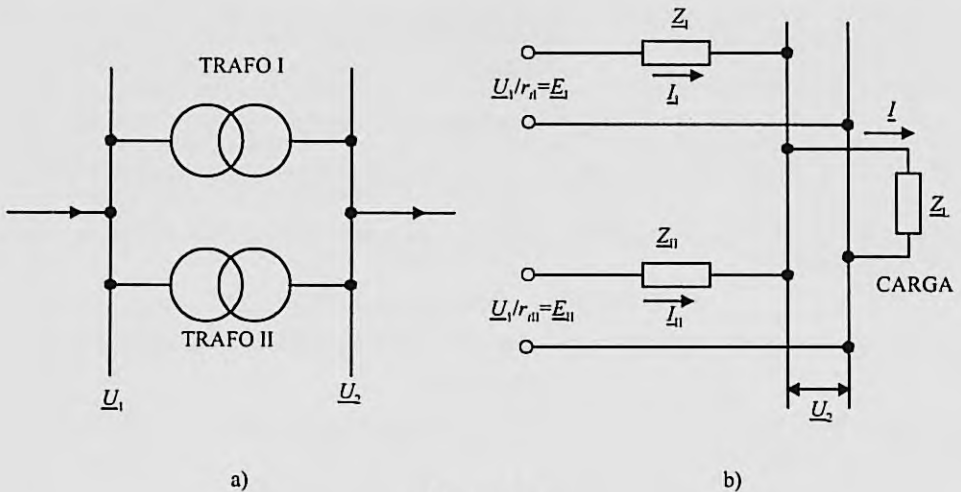


Figura 3.2

Al aplicar el segundo lema de Kirchhoff a los secundarios de los transformadores de la Figura 3.2b se obtiene:

$$\underline{E}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1; \quad \underline{E}_{II} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{II} \cdot \underline{I}_{II} \tag{1}$$

y definiendo admitancias de los transformadores:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Y}_{II} = \frac{1}{\underline{Z}_{II}} \tag{2}$$

Al despejar las corrientes de (1) se obtiene:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1(\underline{E}_1 - \underline{U}_2); \quad \underline{I}_{II} = \underline{Y}_{II}(\underline{E}_{II} - \underline{U}_2) \tag{3}$$

y teniendo en cuenta que la corriente total de la carga es igual a:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_{II} \tag{4}$$

al sustituir (4) en (3) da lugar a:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_{II} = \underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_{II} \underline{E}_{II} - \underline{U}_2 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_{II}) \tag{5}$$

Al despejar la tensión secundaria de la ecuación anterior resulta:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_{II} \underline{E}_{II} - \underline{I}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_{II}} \tag{6}$$

En el caso de que la carga esté definida por una impedancia compleja \underline{Z}_L , es de decir, por una admitancia $\underline{Y}_L = 1/\underline{Z}_L$,

entonces se cumple:

$$I = Y_L U_2 \tag{7}$$

y que al sustituir en (6) nos da para el valor de la tensión en la carga:

$$U_2 = \frac{Y_I E_I + Y_{II} E_{II}}{Y_I + Y_{II} + Y_L} \tag{8}$$

lo que permite, al sustituir en (3), determinar las corrientes de cada transformador:

$$I_I = Y_I \frac{E_I Y_I + (E_I - E_{II}) Y_{II}}{Y_I + Y_{II} + Y_L}; I_{II} = Y_{II} \frac{E_{II} Y_I + (E_{II} - E_I) Y_I}{Y_I + Y_{II} + Y_L} \tag{9}$$

Cuando la carga está desconectada se tiene $I = 0$, o de otro modo, $Y_L = 0$, y los transformadores trabajan en vacío. Existe entonces una tensión secundaria en vacío que se deduce de (8) haciendo $Y_L = 0$, lo que da lugar a:

$$U_{20} = \frac{Y_I E_I + Y_{II} E_{II}}{Y_I + Y_{II}} \tag{10}$$

y entonces aparece una corriente de circulación interna entre los transformadores que se obtiene haciendo $Y_L = 0$ en las ecuaciones (9), lo que da lugar a:

$$I_{I0} = Y_I \frac{(E_I - E_{II}) Y_{II}}{Y_I + Y_{II}}; I_{II0} = Y_{II} \frac{(E_{II} - E_I) Y_I}{Y_I + Y_{II}} \Rightarrow I_{I0} = -I_{II0} = \frac{Y_I Y_{II}}{Y_I + Y_{II}} (E_I - E_{II}) = \frac{E_I - E_{II}}{Z_I + Z_{II}} \tag{11}$$

Aplicando la teoría anterior al problema, podemos escribir:

$$E_I = 440 \angle 0^\circ; E_{II} = 450 \angle 0^\circ; Z_L = 24 + j10 = 26 \angle 22,62^\circ; Z_I = 1 + j3 = 3,16 \angle 71,6^\circ; Z_{II} = 1 + j4 = 4,12 \angle 76^\circ;$$

$$Y_I = 0,316 \angle -71,6^\circ; Y_{II} = 0,243 \angle -76^\circ; Y_L = 0,0385 \angle -22,6^\circ; Y_I + Y_{II} = 0,558 \angle -73,5^\circ; Y_I + Y_{II} + Y_L = 0,583 \angle -70,5^\circ$$

y la suma de las impedancias de los transformadores es:

$$Z_I + Z_{II} = 2 + j7 = 7,28 \angle 74,1^\circ$$

a) *Tensión y corriente de circulación en vacío.*

De acuerdo con (10) y (11) resulta:

$$U_{20} = \frac{Y_I E_I + Y_{II} E_{II}}{Y_I + Y_{II}} = \frac{440 \cdot 0,316 \angle -71,6^\circ + 450 \cdot 0,243 \angle -76^\circ}{0,558 \angle -73,5^\circ} \approx 444,82 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_{I0} = \frac{E_I - E_{II}}{Z_I + Z_{II}} = -I_{II0} = \frac{440 - 450}{7,28 \angle 74,1^\circ} = 1,37 \angle 105,9^\circ \text{ amperios}$$

b) *Tensión secundaria en carga.*

Esta tensión viene expresada por (8):

$$U_2 = \frac{Y_I E_I + Y_{II} E_{II}}{Y_I + Y_{II} + Y_L} = \frac{440 \cdot 0,316 \angle -71,6^\circ + 450 \cdot 0,243 \angle -76^\circ}{0,583 \angle -70,5^\circ} \approx 425,7 \angle -3^\circ \text{ V}$$

Obsérvese, de acuerdo con el resultado anterior, que la tensión de salida está retrasada 3° respecto a las f.e.m. secundarias de vacío. La corriente total que absorbe la carga de acuerdo con (7) es:

$$I = 0,0385 \angle -22,6^\circ \cdot 425,7 \angle -3^\circ \approx 16,35 \angle -25,6^\circ \text{ A}$$

c) *Corrientes suministradas por ambos transformadores.*

De las ecuaciones (3) se obtiene:

$$I_I = Y_I (E_I - U_2) = 0,316 \angle -71,6^\circ \cdot (440 \angle 0^\circ - 425,7 \angle -3^\circ) \approx 8,45 \angle -16^\circ \text{ A}$$

$$I_{II} = Y_{II} (E_{II} - U_2) = 0,243 \angle -76^\circ \cdot (450 \angle 0^\circ - 425,7 \angle -3^\circ) \approx 8,1 \angle -35^\circ \text{ A}$$



Además, los ángulos que forma la tensión secundaria en carga con cada una de las corrientes de los transformadores y los factores de potencia correspondientes son:

$$\varphi_1 = 16^\circ - 3^\circ = 13^\circ \Rightarrow \cos \varphi_1 = \cos 13^\circ \approx 0,974; \varphi_{II} = 35^\circ - 3^\circ = 32^\circ \Rightarrow \cos \varphi_{II} = \cos 32,1^\circ \approx 0,848$$

3.15. Dos transformadores monofásicos trabajan en paralelo y alimentan una carga que absorbe 8 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo. El transformador I tiene una potencia asignada de 6 kVA y con una impedancia de cortocircuito reducida al secundario $\underline{Z}_I = 0,3 + j 1,2 \Omega$ y en vacío produce una tensión secundaria de 404 V. El transformador II tiene una potencia asignada de 4 kVA, una impedancia reducida al secundario $\underline{Z}_{II} = 0,5 + j 1,5 \Omega$ y en vacío genera una tensión de 396 V. Calcular:

- La tensión secundaria en carga.
- Las corrientes secundarias de cada transformador.
- Las potencias activas, reactivas y aparentes que entrega cada transformador a la carga.
- ¿Resulta sobrecargado algún transformador?

Solución

Teoría previa

Este problema tiene algo de dificultad de cálculo debido a que la carga no está definida por una impedancia (como en el caso anterior), sino por una potencia compleja. Resulta conveniente utilizar la expresión (6) del problema anterior para definir la tensión secundaria en carga, es decir:

$$\underline{U}_2 = \frac{Y_I \underline{E}_I + Y_{II} \underline{E}_{II} - I}{Y_I + Y_{II}} \quad (a)$$

Esta ecuación debe completarse con la expresión de la potencia compleja absorbida por la carga que vale:

$$\underline{S} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}^* \Rightarrow \underline{I}^* = \frac{\underline{S}}{\underline{U}_2} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{S}^*}{\underline{U}_2} \quad (b)$$

Veamos cómo se aplica esta teoría al problema propuesto.

a) *Cálculo de la tensión secundaria en carga:*

Los datos son:

$$\underline{E}_I = 404 \angle 0^\circ; \underline{E}_{II} = 396 \angle 0^\circ; \underline{Z}_I = 0,3 + j1,2 = 1,237 \angle 76^\circ; \underline{Z}_{II} = 0,5 + j1,5 = 1,58 \angle 71,6^\circ$$

por lo que se tiene:

$$\underline{Y}_I = \frac{1}{\underline{Z}_I} = 0,808 \angle -76^\circ \text{ siemens}; \underline{Y}_{II} = \frac{1}{\underline{Z}_{II}} = 0,632 \angle -71,6^\circ \text{ siemens}; \underline{Y} = \underline{Y}_I + \underline{Y}_{II} = 1,44 \angle -74^\circ \text{ siemens}$$

Valores que al sustituir en (a) nos da:

$$\underline{U}_2 = \frac{0,808 \angle -76^\circ \cdot 404 \angle 0^\circ + 0,632 \angle -71,6^\circ \cdot 396 \angle 0^\circ - I}{1,44 \angle -74^\circ} \approx 400,3 - 0,694 \angle 74^\circ \cdot I$$

Ahora bien, la carga absorbe una potencia de 8 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, es decir la potencia compleja es $S = 8000 + j 6000$ y teniendo en cuenta la última expresión (b) resulta:

$$\underline{I} = \frac{\underline{S}^*}{\underline{U}_2} = \frac{8000 - j 6000}{\underline{U}_2} = \frac{10000 \angle -36,87^\circ}{\underline{U}_2}$$

y llevando este resultado a la expresión de la tensión secundaria se llega a:

$$\underline{U}_2 = 400,3 - 0,694 \angle 74^\circ \cdot \frac{10000 \angle -36,87^\circ}{\underline{U}_2} = 400,3 - \frac{6944 \angle 37,1^\circ}{\underline{U}_2} \quad (c)$$

La resolución de la ecuación requiere un poco de atención. Si se expresa la tensión compleja secundaria en forma binómica o rectangular, se puede escribir:

$$\underline{U}_2 = a + jb \Rightarrow \underline{U}_2^* = a - jb \Rightarrow \underline{U}_2 \cdot \underline{U}_2^* = a^2 + b^2 \quad (d)$$

y al sustituir en (c) da lugar a:

$$\underline{U}_2 \cdot \underline{U}_2^* = 400,3 \underline{U}_2^* - 6944 \angle 37,1^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = 400,3(a - jb) - 6944 \angle 37,1^\circ$$

e, igualando en la ecuación anterior partes reales e imaginarias, se obtienen las expresiones siguientes:

$$a^2 + b^2 = 400,3a - 5538,4; \quad 400,3b = -4188,7$$

que dan lugar a los siguientes valores: $b = -10,5$; $a = 385,7$ y $a = 15,7$ voltios. Este último resultado es absurdo, por lo que la expresión compleja de la tensión secundaria de acuerdo con la primera expresión (d) es:

$$\underline{U}_2 = 385,7 - j10,5 = 385,8 \angle -1,6^\circ \text{ V}$$

b) *Corrientes secundarias:*

Sustituyendo el valor anterior en las expresiones (3) del problema anterior, las corrientes que suministran ambos transformadores son:

$$\underline{I}_I = 0,808 \angle -76^\circ [404 \angle 0^\circ - 385,8 \angle -1,6^\circ] \approx 17,1 \angle -46^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{II} = 0,632 \angle -71,6^\circ [396 \angle 0^\circ - 385,8 \angle -1,6^\circ] \approx 9,3 \angle -26^\circ \text{ A}$$

c) *Potencias complejas:*

$$\underline{S}_I = 385,8 \angle -1,6^\circ \cdot 17,1 \angle +46^\circ \approx 6596 \angle 44,4^\circ \approx 4713 + j4616$$

$$\underline{S}_{II} = 385,8 \angle -1,6^\circ \cdot 9,3 \angle +26^\circ \approx 3588 \angle 24,4^\circ \approx 3268 + j1482$$

que corresponde a una potencia compleja total:

$$\underline{S}_{\text{total}} = 6596 \angle 44,4^\circ + 3588 \angle 24,4^\circ = 7981 + j6098 \approx 8000 + j6000$$

cuya aproximación se debe a errores de redondeo.

d) De acuerdo con el resultado del apartado anterior, el primer transformador entrega una potencia aparente a la carga de $6596 \text{ VA} \approx 6,6 \text{ kVA}$ y al tener una potencia asignada de 6 kVA resultará sobrecargado un 10%. El segundo transformador entrega una potencia aparente a la carga de 3588 VA , que es inferior a la potencia aparente asignada de 4 kVA .

3.16. Dos transformadores monofásicos funcionan en paralelo y alimentan una carga que absorbe 15 kW , con f.d.p. $0,9$ inductivo. El transformador I tiene los valores asignados siguientes: $S_I = 10 \text{ kVA}$; $990/500 \text{ V}$, $\underline{Z}_I = 0,3 + j0,4 \Omega$ (impedancia reducida al secundario), mientras que los valores asignados del transformador II son: $S_{II} = 20 \text{ kVA}$; $1000/490 \text{ V}$, $\underline{Z}_{II} = 0,2 + j0,3 \Omega$ (impedancia reducida al secundario). Sabiendo que la tensión en bornes de la carga es de 480 V , calcular:

- La tensión necesaria en el primario de los transformadores.
- Las corrientes secundarias de cada transformador.
- Las potencias aparentes, activas y reactivas que suministran cada transformador.

Solución

Teoría previa

Este problema es otra versión de acoplamientos en paralelo de transformadores que completa los dos problemas anteriores. Sabemos que las corrientes suministradas por dos transformadores en paralelo son de la forma:

$$\underline{I}_I = \underline{Y}_I (\underline{E}_I - \underline{U}_2); \underline{I}_{II} = \underline{Y}_{II} (\underline{E}_{II} - \underline{U}_2) \quad (1)$$

pero en este caso, las tensiones de vacío no se expresan directamente, sino que vienen definidas por las relaciones de transformación. Si se denominan estas por r_{I1} y r_{II1} , se puede escribir:

$$\underline{E}_I = \frac{\underline{U}_1}{r_{I1}}; \underline{E}_{II} = \frac{\underline{U}_1}{r_{II1}} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que la corriente total de la carga es igual a:

$$\underline{I} = \underline{I}_I + \underline{I}_{II} \quad (3)$$

al sustituir (1) y (2) en (3) da lugar a:

$$\underline{I} = \underline{I}_I + \underline{I}_{II} = \underline{Y}_I \frac{\underline{U}_1}{r_{I1}} + \underline{Y}_{II} \frac{\underline{U}_1}{r_{II1}} - \underline{U}_2 (\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}) \quad (4)$$

O de un modo equivalente:

$$\underline{I} = \underline{U}_1 \left(\frac{\underline{Y}_I}{r_{I1}} + \frac{\underline{Y}_{II}}{r_{II1}} \right) - \underline{U}_2 (\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}) \quad (5)$$

expresión que permite obtener la tensión primaria necesaria en el acoplamiento:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2 (\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}) + \underline{I}}{\frac{\underline{Y}_I}{r_{I1}} + \frac{\underline{Y}_{II}}{r_{II1}}} \quad (6)$$

a) En este problema se tiene:

$$r_{I1} = \frac{990}{500} = 1,98; \underline{Z}_I = 0,3 + j0,4 = 0,5 \angle 53,13^\circ \Omega; \underline{Y}_I = \frac{1}{\underline{Z}_I} = 2 \angle -53,13^\circ \text{ siemens}$$

$$r_{II1} = \frac{1000}{490} = 2,041; \underline{Z}_{II} = 0,2 + j0,3 = 0,361 \angle 56,31^\circ \Omega; \underline{Y}_{II} = \frac{1}{\underline{Z}_{II}} = 2,774 \angle -56,31^\circ \text{ siemens}$$

Si se toma la tensión secundaria como referencia de fases, se tiene $U_2 = 480 \angle 0^\circ$ y por tanto, la corriente total que suministran los transformadores es:

$$I = \frac{P}{U_2 \cos \varphi} = \frac{15000}{480 \cdot 0,9} = 34,72 \text{ A} \Rightarrow \underline{I} = 34,72 \angle -25,84^\circ \text{ A}$$

y aplicando la ecuación (6) resulta:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2 (\underline{Y}_I + \underline{Y}_{II}) + \underline{I}}{\frac{\underline{Y}_I}{r_{I1}} + \frac{\underline{Y}_{II}}{r_{II1}}} = \frac{480 \angle 0^\circ [2 \angle -53,13^\circ + 2,774 \angle -56,31^\circ] + 34,72 \angle -25,84^\circ}{\frac{2 \angle -53,13^\circ}{1,98} + \frac{2,774 \angle -56,31^\circ}{2,041}} \approx 979,8 \angle 0,4^\circ \text{ V}$$

es decir, se requiere una tensión primaria de 979,8 V.

b) De acuerdo con (2) se tienen unas f.e.m. secundarias en vacío:

$$\underline{E}_I = \frac{\underline{U}_1}{r_{I1}} = \frac{979,8 \angle 0,4^\circ}{1,98} \approx 494,85 \angle 0,4^\circ; \underline{E}_{II} = \frac{\underline{U}_1}{r_{II1}} = \frac{979,8 \angle 0,4^\circ}{2,041} \approx 480,06 \angle 0,4^\circ \text{ V}$$

y de acuerdo con (1), dan lugar a las siguientes corrientes:

$$\underline{I}_I = 2 \angle -53,13^\circ [494,85 \angle 0,4^\circ - 480 \angle 0^\circ] \approx 30,5 \angle -40^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_{II} = 2,774 \angle -56,31^\circ [480,06 \angle 0,4^\circ - 480 \angle 0^\circ] \approx 9,4 \angle +32^\circ \text{ A}$$

Al comprobar el resultado se tiene:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_{11} \approx 30,5 \angle -40^\circ + 9,4 \angle +32^\circ \approx 34,6 \angle -25^\circ \text{ A}$$

que es prácticamente la corriente de carga y los errores se deben a los redondeos de las operaciones.

c) Las potencias complejas que entregan cada transformador a la carga son, respectivamente:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_1^* = 480 \angle 0^\circ \cdot 30,5 \angle 40^\circ = 14640 \angle 40^\circ = 11215 + j9410$$

$$\underline{S}_{11} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_{11}^* = 480 \angle 0^\circ \cdot 9,4 \angle -32^\circ = 4512 \angle -32^\circ \approx 3825 - j2390$$

que corresponde a una potencia total $\underline{S} = 15040 + j7020$ (en realidad, la potencia compleja total debe ser $\underline{S} = 15000 + j7265$, que corresponde a una potencia activa de 15 kW, con f.d.p. 0,9 inductivo y estas diferencias se deben a errores de redondeo). Se advierte al lector que en este tipo de problemas es necesario trabajar con varios decimales para evitar errores numéricos, lo que se debe a la pequeña diferencia entre las f.e.m. y las tensiones.

3.17. Un transformador monofásico de 500 kVA, 15000/3000 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 15000 V; 1,67 A; 4000 W (medidos en el lado de A.T.); cortocircuito: 750 V; 33,33 A; 10000 W (medidos en el lado de A.T.) Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.
- Las caídas relativas de tensión ε_{Rcc} , ε_{Xcc} y ε_{cc} .
- El rendimiento del transformador, cuando funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.
- La potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo para un f.d.p. unidad.
- Si se aplican 15000 V al primario y se conecta una carga en el secundario que absorbe 100 A con f.d.p. 0,8 inductivo ¿cuál será el valor de la tensión secundaria? ¿Y la caída relativa de tensión?
- Contestar a la pregunta anterior en el caso de que la carga absorba los 100 A, con f.d.p. 0,8 capacitivo.
- Si se produce un cortocircuito en el secundario del transformador ¿cuál sería el valor de la corriente primaria en régimen permanente?
- Se acopla en paralelo este transformador con otro de potencia doble, con la misma relación de la transformación 15000/3000 V y la misma caída relativa ε_{cc} , pero su componente resistiva ε_{Rcc} es mitad que la del transformador original. Si se desea alimentar una potencia total de 1000 kVA, con f.d.p. 0,6 inductivo ¿cuáles serán los valores de las potencias activas y aparentes suministradas por cada transformador? ¿Cuáles serán los rendimientos de ambos transformadores en este caso, si el segundo de ellos tiene una potencia de pérdidas en el hierro de 6 kW?

Solución

a) Del ensayo en vacío del transformador, se obtienen las siguientes conclusiones:

$$4000 = 15000 \cdot 1,67 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 \approx 0,16; \quad \sin \varphi_0 = 0,987$$

por lo que la corriente de pérdidas en el hierro y la resistencia correspondiente son:

$$I_{Fe} = 1,67 \cdot 0,16 = 0,267 \text{ A}; \quad R_{Fe} = \frac{15000}{0,267} \approx 56,18 \text{ k}\Omega$$

y la corriente de imanación y la reactancia magnetizante correspondientes son:

$$I_\mu = 1,67 \cdot 0,987 = 1,648 \text{ A}; \quad X_\mu = \frac{15000}{1,648} \approx 9,1 \text{ k}\Omega$$

Además, la relación de transformación vale:

$$r_t = \frac{15000}{3000} = 5$$

Del ensayo de cortocircuito se obtienen las siguientes conclusiones:

$$U_{1cc} = 750 \text{ V}; I_{1cc} = 33,33 \text{ A} \Rightarrow 10\,000 = 750 \cdot 33,33 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,4; \text{ sen}\varphi_{cc} = 0,917$$

y por tanto, resulta:

$$Z_{cc} = \frac{750}{33,33} = 22,5 \Omega \Rightarrow R_{cc} = 22,5 \cdot 0,4 = 9 \Omega; X_{cc} = 22,5 \cdot 0,917 = 20,63 \Omega$$

b) La corriente primaria nominal o asignada al primer transformador es igual a:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{500\,000}{15\,000} = 33,33 \text{ A}$$

por lo que las caídas relativas de tensión son:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{9 \cdot 33,33}{15\,000} = 2\%; \varepsilon_{X_{cc}} = \frac{X_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{20,63 \cdot 33,33}{15\,000} = 4,58\%; \varepsilon_{cc} = \sqrt{2^2 + 4,58^2} \approx 5\%$$

c) El rendimiento del transformador en estas condiciones será:

$$\eta = \frac{500\,000 \cdot 0,8}{500\,000 \cdot 0,8 + 4\,000 + 10\,000} = \frac{400}{400 + 4 + 10} = 96,62\%$$

d) El índice de carga óptimo del transformador es:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{4}{10}} = 0,632$$

Por tanto, la potencia de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta_{max}} = 0,632 \cdot 500 = 316,22 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{316,22 \cdot 1}{316,22 \cdot 1 + 2,4} = 97,52\%$$

e) Al aplicar la aproximación de Kapp se puede escribir:

$$15\,000 = r_1 U_2 + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \text{sen}\varphi$$

donde se cumple: $I_2 = 100 \text{ A}$, es decir

$$I_2' = \frac{100}{5} = 20 \text{ A} ,$$

y al ser el f.d.p. 0,8 inductivo resulta:

$$15\,000 = 5 U_2 + 9 \cdot 20 \cdot 0,8 + 20,63 \cdot 20 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 2\,921,7 \text{ V}$$

que corresponde a una caída relativa de tensión:

$$\varepsilon = \frac{U_1 - r_1 I_2}{U_1} = \frac{15\,000 - 5 \cdot 2\,921,7}{15\,000} = 2,61\%$$

f) Si el f.d.p. es 0,8 capacitivo, se puede desparjar el valor de U_2 a partir de la expresión de Kapp:

$$15\,000 = 5 U_2 + 9 \cdot 20 \cdot 0,8 - 20,63 \cdot 20 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 3\,020,71 \text{ V}$$

que corresponde a una caída relativa de tensión de:

$$\varepsilon = \frac{15\,000 - 5 \cdot 3\,020,71}{15\,000} = -0,69\%$$

g) El valor de la corriente primaria de cortocircuito es:

$$I_{1cc} = \frac{U_{1N}}{Z_{cc}} = \frac{15\,000}{22,5} = 666,66 \text{ A}$$

h) El primer transformador tiene los siguientes parámetros:

$$\varepsilon_{ccl} = 5\% ; \varepsilon_{Rccl} = 2\% ; \varepsilon_{Xccl} = 4,58\%$$

y el segundo tiene los valores siguientes:

$$\varepsilon_{ccll} = 5\% ; \varepsilon_{Rccll} = 1\% ; \varepsilon_{Xccll} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 4,9\%$$

Como la potencia del segundo transformador es $S_{II} = 1000 \text{ kVA}$, la corriente de plena carga primaria es:

$$[I_{1N}]_{II} = \frac{100\,000}{15\,000} = 66,66 \text{ A}$$

lo que conduce a los siguientes parámetros de cortocircuito:

$$\varepsilon_{Rccll} = 0,01 = \frac{R_{ccll} \cdot 66,66}{15\,000} \Rightarrow R_{ccll} = 2,25 \Omega ; \varepsilon_{Xccll} = 0,049 = \frac{X_{ccll} \cdot 66,66}{15\,000} \Rightarrow X_{ccll} = 11,03 \Omega$$

La potencia que deben suministrar ambos transformadores trabajando en paralelo es de 1000 kVA, por lo que la corriente correspondiente reducida a primario es:

$$I = \frac{1\,000\,000}{15\,000} = 66,66 \text{ A}$$

que al tomar la tensión como referencia corresponde a un valor complejo, al ser el f.d.p. 0,6 inductivo:

$$\underline{I} = 66,66 \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

y al funcionar ambos transformadores en paralelo, se cumplirán las ecuaciones siguientes:

$$\underline{I}_I + \underline{I}_{II} = 66,66 \angle -53,13^\circ ; (9 + j20,63) \cdot \underline{I}_I = (2,25 + j11,03) \cdot \underline{I}_{II}$$

cuyos resultados son:

$$\underline{I}_I = 22,33 \angle -45,1^\circ \text{ A} ; \underline{I}_{II} = 44,66 \angle -57,13^\circ \text{ A}$$

De este modo, la potencia compleja suministrada por el primer transformador es:

$$S_I = \underline{U}_I \cdot \underline{I}_I^* = 15\,000 \cdot 22,33 \angle 45,1^\circ = 334,95 \angle 45,1^\circ \text{ kVA}$$

que corresponden a las siguientes potencias:

$$P_I = 236,43 \text{ kW} ; Q_I = 237,26 \text{ kVAR} ; S_I = 334,95 \text{ kVA}$$

y para el segundo transformador se tiene una potencia compleja:

$$S_{II} = 15\,000 \cdot 44,66 \angle 57,13^\circ = 669,9 \angle 57,13^\circ \text{ kVA}$$

que corresponde a las potencias:

$$P_{II} = 363,57 \text{ kW} ; Q_{II} = 562,64 \text{ kVAR} ; S_{II} = 669,9 \text{ kVA}$$

y los rendimientos de los transformadores serán:

$$\eta_I = \frac{236,43}{236,43 + 4 + 9 \cdot 22,33^2} = 96,53\% ; \eta_{II} = \frac{363,57}{363,57 + 6 + 2,25 \cdot 44,66^2} = 97,09\%$$

3.18. Los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de 10 kVA, relación 2000/200 V han dado los siguientes resultados:

- Vacío: medidas realizadas en el lado de B.T. (secundario); potencia consumida en vacío = 300 W; tensión aplicada = 200 V; corriente absorbida = 5 A.
- Cortocircuito: medidas realizadas en el lado de A.T. (primario); potencia absorbida = 500 W; tensión aplicada = 140 V; corriente absorbida = corriente asignada.

Determinar:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado por fase del transformador reducido al primario.
- Si se conecta el primario del transformador a una red monofásica de 2000 V, y el secundario alimenta una carga que consume 45 A, con f.d.p. 0,8 capacitivo, determinar la tensión secundaria que se obtiene a la salida del transformador y el rendimiento de la máquina en estas condiciones.
- La potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad.

Solución

a) El ensayo de vacío está realizado en el secundario, por ello, en primer lugar, se han de pasar los resultados de este ensayo al lado primario, teniendo en cuenta que la relación de transformación es: $r_t = 2000/200 = 10$. De este modo, las medidas en primario serían:

$$P_0 = 300 \text{ W}; U_1 = r_t U_2 = 10 \cdot 200 = 2000 \text{ V}; I_0 = \frac{I'_0}{r_t} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ A}$$

Así, resulta:

$$300 = 2000 \cdot 0,5 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,3; \text{ sen } \varphi_0 = 0,954$$

que corresponde a unas corrientes:

$$I_{Fe} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 \text{ A}; I_{\mu} = 0,5 \cdot 0,954 = 0,477 \text{ A}$$

y por tanto, la rama paralelo del circuito equivalente está formada por los elementos siguientes:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{0,15} = 13,33 \text{ k}\Omega; X_{\mu} = \frac{2000}{0,477} \approx 4,19 \text{ k}\Omega$$

El ensayo de cortocircuito está definido ya en primario, por lo que se pueden utilizar los datos medidos directamente, teniendo en cuenta que la corriente nominal del primario es $I_{1N} = 10000/2000 = 5 \text{ A}$ y así resulta:

$$P_{cc} = 500 = 140 \cdot 5 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,714; \text{ sen } \varphi_{cc} = 0,7$$

y por tanto, se obtiene:

$$Z_{cc} = \frac{140}{5} = 28 \Omega; R_{cc} = 28 \cdot 0,714 = 20 \Omega; X_{cc} = 28 \cdot 0,7 = 19,6 \Omega$$

b) Los datos, en este caso, son los siguientes:

$$U_1 = 2000 \text{ V}; I_2 = 45 \text{ A}; I'_2 = \frac{45}{10} = 4,5 \text{ A}; \cos \varphi = 0,8 \text{ capacitivo}$$

y teniendo en cuenta la aproximación de Kapp, se puede escribir:

$$U_1 = r_t U_2 + R_{cc} I'_2 \cos \varphi + X_{cc} I'_2 \text{sen } \varphi$$

que al sustituir los valores anteriores (teniendo en cuenta que al ser el f.d.p. capacitivo, el seno es negativo) da lugar a:

$$2000 = 10 U_2 + 20 \cdot 4,5 \cdot 0,8 - 19,6 \cdot 4,5 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2 = 198,09 \text{ V} \Rightarrow U'_2 = 1980,9 \text{ V}$$

El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

donde P_2 es la potencia que entrega el secundario y P_1 la potencia que recibe el primario y cuyos valores son:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi = 19809 \cdot 4,5 \cdot 0,8 = 7131,2 \text{ W}$$

$$P_1 = P_2 + P_{Fe} + P_{Cu} = 7131,2 + 300 + 20 \cdot 4,5^2 = 7836,2 \text{ W}$$

lo que conduce a un rendimiento:

$$\eta = \frac{7131,2}{9836,2} = 91\%$$

c) El índice de carga óptimo vale:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{300}{500}} = 0,775$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento es:

$$S_{\eta_{\text{max}}} = 0,775 \cdot 10 = 7,75 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad es:

$$\eta = \frac{7,75}{7,75 + 0,3 \cdot 2} = \frac{7,75}{8,35} = 92,81\%$$

ya que cuando el transformador trabaja con la potencia de máximo rendimiento, las pérdidas en el cobre para esa carga coinciden con las del hierro o de vacío.

3.19. Un transformador monofásico de 200 kVA, relación 2000/200 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito: vacío: 200 V; 100 A; 5000 W (medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 200 V; 100 A; 7000 W (medidos en el lado de A.T.). Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- Si se alimenta el primario con una red de 2000 V y el secundario lleva una corriente de 800 A, con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será la tensión en bornes del secundario y el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- Si el primario está alimentado con una red de 2000 V, se conecta en el secundario una carga constituida por una resistencia de $0,3 \Omega$ en serie, con una reactancia capacitiva de $0,4 \Omega$ (es decir, una impedancia compleja $\underline{Z} = 0,3 - j 0,4 \Omega$), ¿cuál será el valor de la tensión en bornes del secundario? (efecto Ferranti). ¿Cuál será el valor de la corriente primaria?

Nota: téngase en cuenta la rama en paralelo del circuito equivalente del transformador para contestar a esta última pregunta.

Solución

a) La relación de transformación es:

$$r_t = \frac{2000}{200} = 10$$

y pasando las medidas del ensayo de vacío al lado primario se tiene:

$$U_1 = r_t U_2 = 10 \cdot 200 = 2000 \text{ V}; I_0 = \frac{100}{r_t} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}; P_0 = 5000 \text{ W}$$

por lo que resulta:

$$5000 = 2000 \cdot 10 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,25; \sin \varphi_0 = 0,968$$

de donde se deducen las corrientes de la rama paralelo:

$$I_{Fe} = 10 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ A} \quad I_{\mu} = 10 \cdot 0,968 = 9,68 \text{ A}$$

y los parámetros correspondientes:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{2,5} = 800 \Omega; X_{\mu} = \frac{2000}{9,68} = 206,61 \Omega$$

El ensayo en cortocircuito está realizado en el lado de A.T, que es el lado primario y los valores medidos son:

$$U_{I_{corto}} = 200 \text{ V}; I_{I_{corto}} = 100 \text{ A}; P_{corto} = 7000 \text{ W}$$

Se observa que la corriente de cortocircuito es la nominal:

$$I_{IN} = \frac{S_N}{U_{IN}} = \frac{200000}{2000} = 100 \text{ A}$$

por lo que resulta:

$$7000 = 200 \cdot 100 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,35; \sin \varphi_{cc} = 0,937$$

de donde se obtienen las impedancias de la rama serie del circuito equivalente:

$$Z_{cc} = \frac{200}{100} = 2 \Omega; R_{cc} = 2 \cdot 0,35 = 0,7 \Omega; X_{cc} = 2 \cdot 0,937 = 1,873 \Omega$$

b) Los datos de funcionamiento son:

$$I_2 = 800 \text{ A}; \cos \varphi = 0,8 \text{ inductivo} \Rightarrow I_2' = \frac{I_2}{r_1} = \frac{800}{10} = 80 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta la fórmula aproximada de Kapp: $U_1 = U_2' + R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \sin \varphi$ resulta:

$$2000 = U_2' + 0,7 \cdot 80 \cdot 0,8 + 1,873 \cdot 80 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2' = 1865,3 \text{ V} \Rightarrow U_2 = \frac{U_2'}{r_1} = \frac{1865,3}{10} = 186,53 \text{ V}$$

El rendimiento en esta situación será:

$$\eta = \frac{U_2' I_2' \cos \varphi}{U_2' I_2' \cos \varphi + P_{Fe} + P_{cu}} = \frac{1865,3 \cdot 80 \cdot 0,8}{1865,3 \cdot 80 \cdot 0,8 + 5000 + 0,7 \cdot 80^2} = 92,64\%$$

c) La impedancia compleja de la carga transferida al lado primario es:

$$r_1^2 Z_L = 10^2 \cdot (0,3 - j 0,4) = 30 - j 40 = Z_L' = 50 \angle -53,13^\circ \Omega$$

y tomando la tensión del primario como referencia de fases, se obtiene una corriente secundaria reducida al primario de valor:

$$I_2' = \frac{2000 \angle 0^\circ}{(0,7 + j 1,873) + (30 - j 40)} = \frac{2000 \angle 0^\circ}{30,7 - j 38,127} = \frac{2000 \angle 0^\circ}{48,95 \angle -51,16^\circ} \approx 40,86 \angle 51,16^\circ \text{ A}$$

De este modo se tiene:

$$U_2' = r_1^2 Z_L I_2' = 50 \angle -53,13^\circ \cdot 40,86 \angle 51,16^\circ = 2043 \angle -1,97^\circ \Rightarrow U_2' = 2043 = r_1 U_2 = 10 U_2 \Rightarrow U_2 = 204,3 \text{ V}$$

La corriente primaria será:

$$I_1 = I_0 + I_2' = (2,5 - j 9,68) + (25,63 + j 31,83) = 28,13 + j 22,15 = 35,8 \angle 38,22^\circ \Rightarrow I_1 = 35,8 \text{ A}$$

3.20. Un transformador monofásico de 160 kVA, relación 2000/200 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 2000 V; 1 A; 1000 W (medidos en el lado de A. T.); cortocircuito: 8 V; $I_{\text{corto}} = I_{\text{signada}}$; 2560 W (medidos en el lado de B.T.). Calcular:

- El circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (indicando los valores de los parámetros de este circuito que se obtienen de los ensayos).
- Si se aplica la tensión asignada al primario ¿cuál será la tensión secundaria, cuando el transformador suministre una corriente secundaria de 400 A, con f.d.p. 0,8 inductivo ¿cuánto vale el rendimiento del transformador en este caso?
- ¿Cuánto vale la potencia aparente de máximo rendimiento y el rendimiento máximo, con f.d.p. 0,8 capacitivo?
- ¿Cuál será la regulación o caída de tensión relativa del transformador en el caso anterior?

Solución

a) El ensayo de vacío está realizado en el lado de A.T., que es el lado primario y los resultados de las medidas son:

$$U_1 = 2000 \text{ V}; I_0 = 1 \text{ A}; P_0 = 1000 \text{ W}$$

por lo que resulta:

$$1000 = 2000 \cdot 1 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,5; \sin \varphi_0 = 0,866$$

que da lugar a las corrientes:

$$I_{Fe} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ A}; I_{\mu} = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ A}$$

y a las impedancias de la rama paralelo:

$$R_{Fe} = \frac{2000}{0,5} = 4000 \Omega; X_{\mu} = \frac{2000}{0,866} = 2309,5 \Omega$$

El ensayo de cortocircuito está realizado en el lado de B.T., que es el secundario, por lo que teniendo en cuenta que la relación de transformación es $r_t = 2000/200 = 10$, al pasar los resultados del ensayo al lado primario se obtiene:

$$U_{1cc} = r_t U_{2cc} = 8 \cdot 10 = 80; I_{1corto} = I_{1N} = \frac{S_N}{U_{1N}} = \frac{160000}{2000} = 80 \text{ A}; P_{cc} = 2560 \text{ W}$$

lo que da lugar a los siguientes resultados:

$$2560 = 80 \cdot 80 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,4; \sin \varphi_{cc} = 0,9165 \approx 0,917$$

y a las impedancias:

$$Z_{cc} = \frac{80}{80} = 1 \Omega; R_{cc} = Z_{cc} \cos \varphi_{cc} = 0,4 \Omega; X_{cc} = Z_{cc} \sin \varphi_{cc} = 0,917 \Omega$$

b) En este caso, los datos de partida son:

$$U_1 = 2000 \text{ V}; I_2 = 400 \text{ A} \Rightarrow I_2' = \frac{400}{10} = 40; \text{f.d.p. } 0,8 \text{ inductivo}$$

y al sustituir estos datos en la fórmula de Kapp se obtiene:

$$2000 = U_2' + 0,4 \cdot 40 \cdot 0,8 + 0,917 \cdot 40 \cdot 0,6 \Rightarrow U_2' = 1965,2 \text{ V} \Rightarrow U_2 = \frac{U_2'}{r_t} = 196,52 \text{ V}$$

y el rendimiento correspondiente es:

$$\eta = \frac{U_2' I_2' \cos \varphi}{U_2' I_2' \cos \varphi + P_0 + R_{cc} I_2'^2} = \frac{1965,2 \cdot 40 \cdot 0,8}{1965,2 \cdot 40 \cdot 0,8 + 1000 + 0,4 \cdot 40^2} = 97,46\%$$

c) El índice de carga óptimo es:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{cc}}}} = \sqrt{\frac{1000}{2560}} = 0,625$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento será:

$$S_{\eta_{\text{máx}}} = 0,625 \cdot 160 = 100 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. 0,8 capacitivo:

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + 2P_0} = \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + 2 \cdot 1} = \frac{80}{82} = 97,56\%$$

d) La corriente secundaria que cuando el transformador trabaja con máximo rendimiento es:

$$I_2 = \frac{S_{\eta_{\text{máx}}}}{U_{2N}} = \frac{100000}{200} = 500 \text{ A} \Rightarrow I'_2 = 50 \text{ A}$$

por lo que la caída de tensión que se tiene viene expresada por:

$$U_1 - U'_2 = R_{\text{cc}} I'_2 \cos \varphi + X_{\text{cc}} I'_2 \sin \varphi = 0,4 \cdot 50 \cdot 0,8 - 0,917 \cdot 50 \cdot 0,6 = -11,51 \text{ V}$$

y es por ello que la caída de tensión relativa vale:

$$\varepsilon_c = \frac{U_1 - U'_2}{U_1} = \frac{-11,51}{2000} = -0,5755\%$$

3.21. Un transformador trifásico de 2000 kVA, 6600/33000 V tiene un primario conectado en triángulo y un secundario en estrella. La impedancia de cada fase del primario es $0,5 + j 2,6 \Omega$ y la correspondiente del secundario es de $4,3 + j 21,7 \Omega$. Calcular la tensión en bornes del secundario a plena carga, con f.d.p. 0,8 inductivo, cuando el primario se conecta a la tensión asignada de 6600 V.

Solución

a) *Primer método: utilización de las conexiones reales del transformador* (Figura 3.3)

Los problemas de transformadores trifásicos se pueden resolver atendiendo a su estructura física calculando todos los valores por fase, es decir atendiendo a lo que sucede en una columna magnética de la máquina. La relación de transformación es el cociente de las f.e.m. por fase del primario y secundario, lo que en este caso da lugar a:

$$r_i = \frac{E_{1\text{fase}}}{E_{2\text{fase}}} = \frac{U_{1\text{fase}}(\text{vacío})}{U_{2\text{fase}}(\text{vacío})} = \frac{6600}{33000/\sqrt{3}} = 0,3564$$

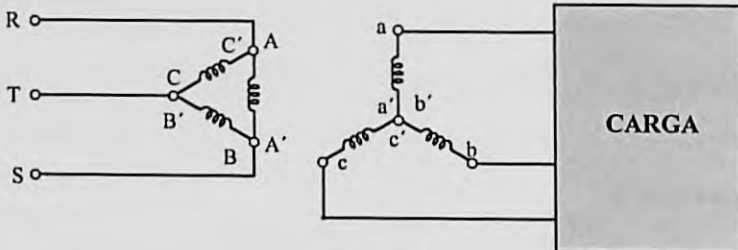


Figura 3.3

De este modo, la impedancia de cortocircuito por fase del transformador es:

$$Z_{cc} = Z_1 + r_1^2 Z_2 = (0,5 + j2,6) + 0,3464^2 \cdot (4,3 + j21,7) = 1,016 + j5,204 \Omega$$

y al aplicar la expresión aproximada de Kapp por fase resulta:

$$U_{1fase} = 6\,600 = U_2' + R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \sin \varphi$$

La corriente de plena carga por fase del secundario del transformador es igual a:

$$I_{2fase} = I_{2línea} = \frac{S_N}{\sqrt{3} U_{2lin}} = \frac{2\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 33\,000} \approx 35 \text{ As}$$

que corresponde a una corriente reducida al primario:

$$I_2' = I_{2fase}' = \frac{I_{2fase}}{r_1} = \frac{35}{0,3464} = 101 \text{ A}$$

que al sustituir en la fórmula de Kapp nos da:

$$U_{1fase} = 6\,600 = 0,4464 \cdot U_{2fase} + 1,016 \cdot 101 \cdot 0,8 + 5,204 \cdot 101 \cdot 0,6$$

dando lugar a una tensión

$$U_{2fase} = 17\,905,73 \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea al estar conectado el secundario en estrella:

$$U_{2línea} = 17\,905,73\sqrt{3} = 31\,013,6 \text{ V} \approx 31\,014 \text{ V}$$

b) Segundo método: utilización de un transformador estrella-estrella equivalente (Figura 3.4)

Se puede resolver también este problema haciendo los cálculos por fase, transformando los devanados reales del transformador a conexiones en estrella equivalente y teniendo en cuenta las reglas de cambio de triángulo a estrella que se utilizan en el estudio de los circuitos trifásicos. En nuestro caso, el primario está conectado en triángulo y la impedancia equivalente es por consiguiente:

$$Z_{1Y} = \frac{Z_{1\Delta}}{3} = \frac{0,5 + j2,6}{3} = 0,167 + j0,867 \Omega$$

mientras que el devanado secundario al estar conectado en estrella, su impedancia es:

$$Z_{2Y} = 4,3 + j21,7 \Omega$$

La relación de transformación de este transformador equivalente estrella-estrella, al tener las mismas conexiones de primario y secundario es el cociente, tanto de las f.e.m. simples de primario y secundario como de las tensiones compuestas y vale:

$$r_1' = \frac{E_{1fase}}{E_{2fase}} = \frac{6\,600/\sqrt{3}}{33\,000/\sqrt{3}} = 0,2$$

Por consiguiente, la impedancia de cortocircuito de este transformador equivalente vale:

$$Z_{cc} = Z_1 + r_1'^2 Z_2 = (0,167 + j0,867) + 0,2^2 (4,3 + j21,7) = 0,34 + j1,735 \Omega$$

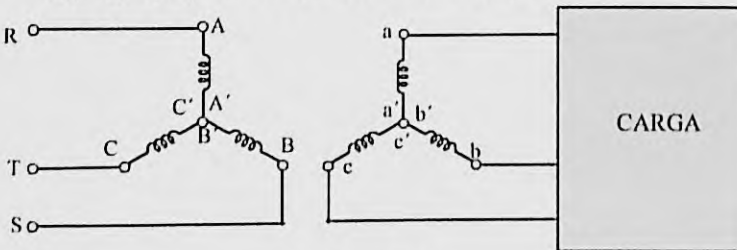


Figura 3.4

y los datos de funcionamiento eran:

$$U_{1\text{fase}} = 6600/\sqrt{3}; I_{2\text{fase}} = 35 \text{ amperios} \Rightarrow I'_2 = I'_{2\text{fase}} = \frac{I_{2\text{fase}}}{r'_i} = \frac{35}{0,2} = 175 \text{ A}$$

Al aplicar la expresión aproximada de Kapp resulta:

$$U_{1\text{fase}} = 6600/\sqrt{3} = 0,2 \cdot U_{2\text{fase}} + 0,34 \cdot 175 \cdot 0,8 + 1,735 \cdot 175 \cdot 0,6$$

que da lugar a:

$$U_{2\text{fase}} = 17903,7 \text{ V} \Rightarrow U_{2\text{línea}} = 17903,7\sqrt{3} = 31010 \text{ V}$$

que salvo errores de redondeo coincide con el procedimiento anterior.

Obsérvese que el primer procedimiento analiza cada columna magnética (fases o bobinas del transformador real) lo que requiere seguir el proceso de cálculo con sumo cuidado, pues las relaciones de tensiones y corrientes dependen de estas conexiones reales. El segundo método que utiliza la conexión estrella-estrella equivalente suele ser motivo de menor confusión por los estudiantes y se acerca más al procedimiento que se sigue en el análisis de los sistemas eléctricos de potencia, cuando se trabaja en valores de las magnitudes eléctricas por unidad. Es por ello que será el procedimiento que a partir de ahora se seguirá en la resolución de problemas de transformadores trifásicos.

3.22. Se han realizado unos ensayos en un transformador trifásico de 100 kVA, 400/6600 V, 50 Hz, conexión estrella-triángulo, dando los siguientes resultados: vacío: 400 V, 1250 W (datos medidos en el lado de B.T.); cortocircuito: 314 V, corriente de plena carga, 1600 W (datos medidos en el lado de A.T.). Calcular:

- El rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.
- El rendimiento a media carga con f.d.p. unidad.
- La potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo con f.d.p. unidad.
- La tensión necesaria en el primario para el caso a) si la tensión secundaria se mantiene en 6600 V.

Solución

a) De los ensayos del transformador se concluye que las pérdidas son:

$$P_0 = 1250 \text{ W}; P_{cc} = 1600 \text{ W}$$

es por ello que el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo vale:

$$\eta = \frac{CS_N \cos \varphi}{CS_N \cos \varphi + P_0 + C^2 P_{cc}} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 0,8}{1 \cdot 100 \cdot 0,8 + 1,25 + 1,6} = 96,56\%$$

b) El rendimiento a media carga con f.d.p. unidad vale:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 + 1,25 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1,6} = \frac{50}{50 + 1,25 + 0,4} = \frac{50}{51,65} = 96,81\%$$

c) El índice de carga óptimo es igual a:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{1250}{1600}} = 0,884$$

por lo que la potencia de máximo rendimiento es: $S_{\eta_{\text{máx}}} = 0,884 \cdot 100 = 88,4 \text{ kVA}$ y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad vale:

$$\eta_{\max} = \frac{0,884 \cdot 100 \cdot 1}{0,884 \cdot 100 \cdot 1 + 2 \cdot 1,25} = \frac{88,4}{90,9} = 97,25\%$$

d) Para realizar este apartado es preciso calcular la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario. Como se ha indicado en el problema anterior, vamos a trabajar por sencillez con un transformador estrella-estrella equivalente. La relación de transformación es entonces la relación de tensiones compuestas:

$$r_i = \frac{400}{6\,600} \approx 0,0606$$

El ensayo de vacío está realizado en el lado de B.T. y con tensión nominal, lo que permite identificar a la potencia de 1 250 W como pérdidas en el hierro. El ensayo de cortocircuito se ha realizado en el lado de A.T., que es el secundario, por lo que requiere pasar los datos al primario y así resulta:

$$U_{2\text{línea}} = 314 \text{ V}; I_{2\text{línea}} = I_{2\text{nom}} = \frac{100\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 8,748 \text{ A}; P_{\text{cc}} = 1\,600 \text{ W}$$

$$U_{1\text{fase}} = U_{1\text{cc}} = 0,0606 \cdot \frac{314}{\sqrt{3}} = 10,99 \text{ V} \quad I_{1\text{cc}} = \frac{8,748}{0,0606} = 144,36 \text{ A}$$

y se obtiene:

$$1\,600 = 3 \cdot 10,99 \cdot 144,36 \cdot \cos\varphi_{\text{cc}} \Rightarrow \cos\varphi_{\text{cc}} = 0,336; \sin\varphi_{\text{cc}} = 0,942$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$Z_{\text{cc}} = \frac{10,99}{144,3} = 0,0762 \Omega; R_{\text{cc}} = 0,0256 \Omega; X_{\text{cc}} = 0,0717 \Omega$$

Para determinar la tensión primaria, de forma que la tensión de línea secundaria sea de 6 600 V, a plena carga y con f.d.p. 0,8 inductivo, se tiene:

$$U_{2\text{fase}}(\text{transformador en estrella equivalente}) = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \Rightarrow U'_2 = r_i U_2 = 0,0606 \cdot \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \approx 231 \text{ V}$$

$$I_{2\text{fase plena carga}} = \frac{100\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 8,75 \text{ A} \quad I'_2 = \frac{8,75}{0,0606} = 144,39 \text{ A}$$

La aproximación de Kapp es:

$$U_{1\text{fase}} = U'_2 + R_{\text{cc}} I'_2 \cos\varphi + X_{\text{cc}} I'_2 \sin\varphi$$

que al sustituir valores nos da:

$$U_{1\text{fase}} = 231 + 0,0256 \cdot 144,39 \cdot 0,8 + 0,0717 \cdot 144,39 \cdot 0,6 = 240,17 \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea: $U_{1\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 240,17 \approx 416 \text{ V}$

3.23. En la Figura 3.5 se muestra el esquema de conexiones y las lecturas de los aparatos de medida para la realización de los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador trifásico Yd de 10 kVA, relación de tensiones compuestas 1 000 V/100 V. Determinar:

- Los parámetros del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario;
- El ángulo horario del transformador (alimentación con sistema de secuencia directa).

Lecturas en vacío: $P_1 = 1\,265,2 \text{ W}; P_2 = -65,2 \text{ W}; U_1(\text{línea}) = 1\,000 \text{ V}; U_2(\text{línea}) = 100 \text{ V}; I_0(\text{línea}) = 0,35 \text{ A}.$

Lecturas en cortocircuito: $P_1 = 360,2 \text{ W}; P_2 = -210,2 \text{ W}; U_{2\text{cc}}(\text{línea}) = 10 \text{ V}; I_{2\text{cc}}(\text{línea}) = 57,7 \text{ A}.$

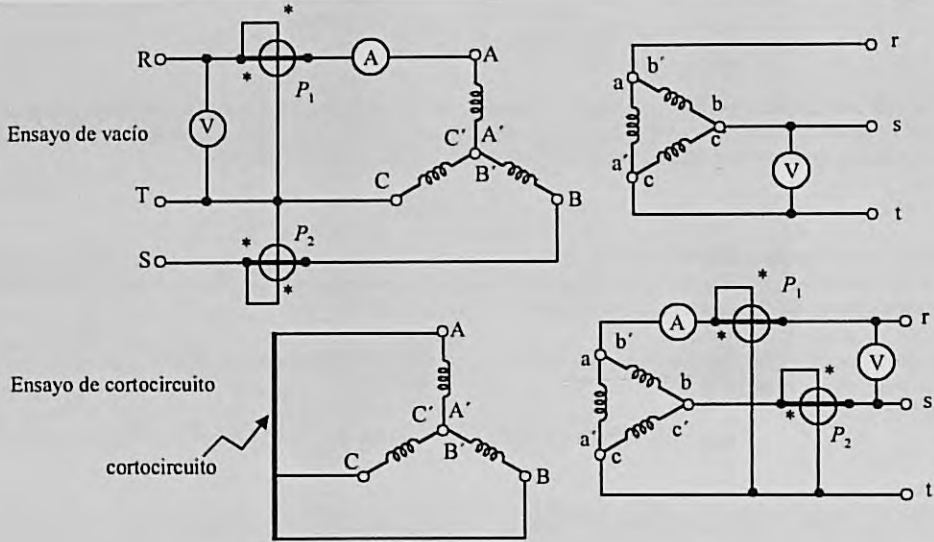


Figura 3.5

Solución

a) Se va a trabajar con un transformador estrella-estrella equivalente, tal como muestra la Figura 3.6. Del ensayo de vacío se obtiene la potencia total trifásica:

$$P_0 = P_1 + P_2 = 256,2 - 65,2 = 200 \text{ W}$$

y de las medidas de las tensiones se calcula la relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente:

$$r_t = \frac{U_{1\text{fase}}}{U_{2\text{fase}}} = \frac{U_{1\text{linea}}}{U_{2\text{linea}}} = \frac{1000}{100} = 10$$

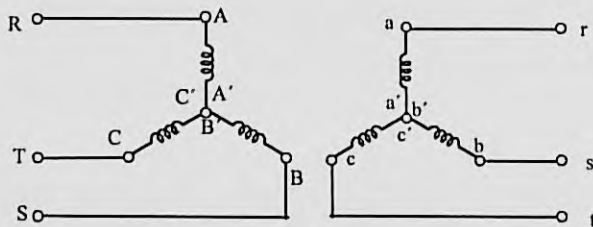


Figura 3.6

Teniendo en cuenta que la corriente de vacío de primario es de 0,35 A, resulta:

$$P_0 = 3U_{1f} \cdot I_{0f} \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{200}{3 \cdot \frac{1000}{\sqrt{3}} \cdot 0,35} = 0,33; \quad \text{sen} \varphi_0 = 0,944$$

de donde se deducen las corrientes de la rama paralelo:

$$I_{F_c} = 0,35 \cdot 0,33 = 0,1155 \text{ A} ; I_{\mu} = 0,35 \cdot 0,944 = 0,3304 \text{ A}$$

y las impedancias de la rama paralelo:

$$R_{F_c} = \frac{1000}{\frac{\sqrt{3}}{0,1155}} \approx 5000 \Omega ; X_{\mu} = \frac{1000}{\frac{\sqrt{3}}{0,3304}} = 1747 \Omega$$

Por otra parte, el ensayo de cortocircuito está realizado en el lado secundario, por lo que habrán de transformarse las medidas al lado primario; de este modo, para el transformador equivalente Yy resulta:

$$P_{\text{corto}} = P_1 + P_2 = 360,2 - 210,2 = 150 \text{ W}$$

$$I_{2\text{corto lin}} = I_{2\text{corto fase}} = 57,7 \text{ A} \Rightarrow I_{1\text{corto fase}} = \frac{I_{2\text{corto fase}}}{r_i} = \frac{57,7}{10} = 5,77 \text{ A}$$

$$U_{2\text{corto lin}} = 10 \text{ V} \Rightarrow U_{2\text{corto fase}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow U_{1\text{corto fase}} = r_i U_{2\text{corto fase}} = 10 \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = 57,74 \text{ V}$$

Así se obtiene:

$$150 = 3 \cdot 57,74 \cdot 5,77 \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,15 ; \sin \varphi_{cc} = 0,989$$

que da lugar a los siguientes parámetros reducidos al primario:

$$Z_{cc} = \frac{57,74}{5,77} = 10 \Omega ; R_{cc} = 10 \cdot 0,15 = 1,5 \Omega ; X_{cc} = 10 \cdot 0,989 = 9,89 \Omega$$

b) En la Figura 3.7 se muestra, a la izquierda, la disposición de las bobinas reales del transformador vistas desde la caja de bornes, en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.5.

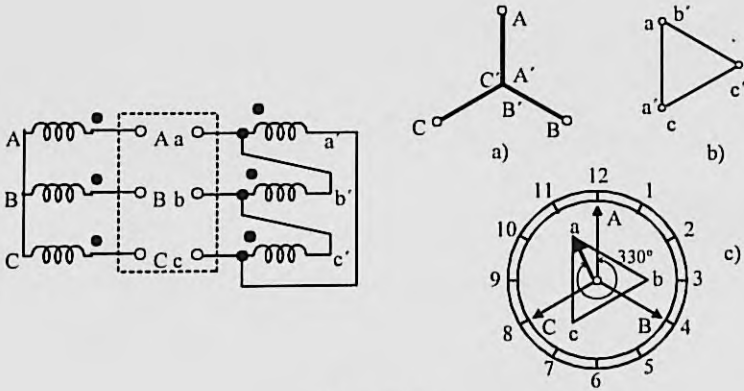


Figura 3.7

En la Figura 3.7a se ha dibujado la estrella de tensiones primaria, en la que se ha tomado la fase A como referencia vertical; en la Figura 3.7b se ha dibujado el triángulo de tensiones secundarias, en las que las tensiones de fase son paralelas (misma fase) a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.7c se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar, de este modo, el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Yd11.

3.24. La Figura 3.8 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo utilizado para un sistema de riego por aspersión. Se dispone de una red de distribución de 15 kV, 50 Hz que por medio de un transformador Dy11, 100 kVA, relación compuesta: 15 kV/400 V, suministra energía eléctrica al grupo motobomba a través de una línea resistiva de 0,2 ohmios por hilo.

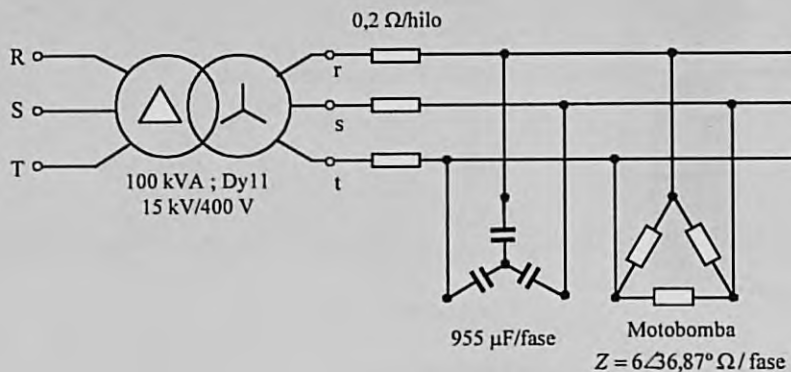


Figura 3.8

El grupo motobomba está representado por una impedancia en triángulo de $6\angle 36,87^\circ$ ohmios por fase. Las características del transformador que se leen en su placa de características son las siguientes:

$$100 \text{ kVA, Dy11; } 15 \text{ kV/400 V; } \varepsilon_{cc} = 10\%; \varepsilon_{xcc} = 8\%$$

Calcular:

- Los parámetros R_{cc} , X_{cc} y Z_{cc} del circuito equivalente del transformador reducido al primario (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente).
- La tensión secundaria de línea en bornes del secundario del transformador y tensión en bornes del grupo motobomba, si la red de distribución en AT tiene una tensión constante de línea de 15 kV.
- El rendimiento del transformador en estas condiciones.
- Si para corregir el f.d.p. del grupo motobomba se conecta una batería de condensadores en estrella de 955 $\mu\text{F/fase}$ (como se indica en la figura), ¿cuál será la nueva tensión de línea en bornes del grupo motobomba?

Solución

En la Figura 3.9 se muestra el esquema estrella-estrella equivalente de la red de la Figura 3.8. En este sistema se tiene:

$$S_N = \sqrt{3} U_{IN} I_{IN} \Rightarrow 100000 = \sqrt{3} \cdot 15000 \cdot I_{IN} \Rightarrow I_{IN} = 3,85 \text{ A}$$

$$\varepsilon_{cc} = 10\% = \frac{Z_{cc} I_{IN}}{U_{1\text{fase}}} \Rightarrow 0,1 = \frac{Z_{cc} \cdot 3,85}{15000/\sqrt{3}} \Rightarrow Z_{cc} \approx 225 \Omega$$

$$\varepsilon_{xcc} = 8\% = \frac{X_{cc} I_{IN}}{U_{1\text{fase}}} \Rightarrow 0,08 = \frac{X_{cc} \cdot 3,85}{15000/\sqrt{3}} \Rightarrow X_{cc} \approx 180 \Omega$$

y de este modo, el valor de la resistencia de cortocircuito reducida al primario de la estrella equivalente será

$$R_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - X_{cc}^2} = \sqrt{225^2 - 180^2} = 135 \Omega$$

Los parámetros anteriores se refieren al transformador estrella-estrella equivalente y son la resistencia, reactancia e impedancia de cortocircuito referida al primario (estrella). En realidad, al estar conectado el primario del transformador en

triángulo, la impedancia de cortocircuito en este lado será tres veces mayor, de acuerdo con el cambio de impedancias de estrella a triángulo, es decir:

$$R_{cc\Delta} = 135 \cdot 3 = 405 \Omega; X_{cc\Delta} = 180 \cdot 3 = 540 \Omega; Z_{cc\Delta} = 225 \cdot 3 = 675 \Omega$$

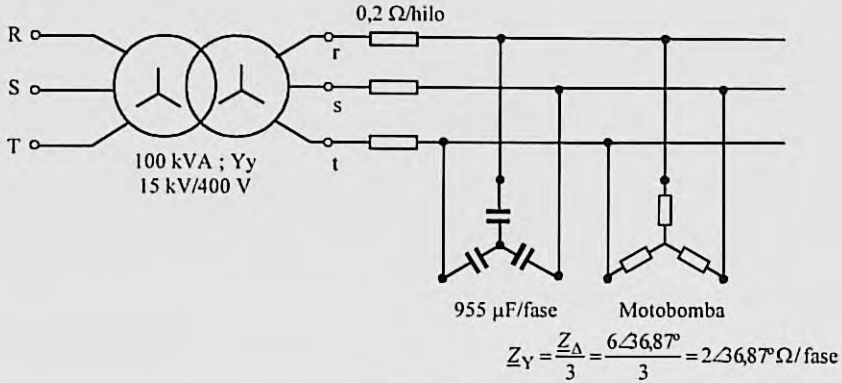


Figura 3.9

b) El circuito equivalente por fase de la Figura 3.9 reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.10. Obsérvese en este esquema que se tienen los siguientes valores:

$$r_1 = \frac{15\,000}{400} = 37,5; Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{6\angle 36,87^\circ}{3} = 2\angle 36,87^\circ = 1,6 + j1,2 \Omega$$

y al pasar la impedancia de carga y la impedancia de la línea al primario (los condensadores no están conectados) resulta:

$$r_1^2 \cdot 2\angle 36,87^\circ = 37,5^2 \cdot 2\angle 36,87^\circ \approx 2\,812,5\angle 36,87^\circ = 2\,250 + j1\,687,5 \Omega; r_1^2 \cdot 0,2 = 37,5^2 \cdot 0,2 \approx 281,25 \Omega$$

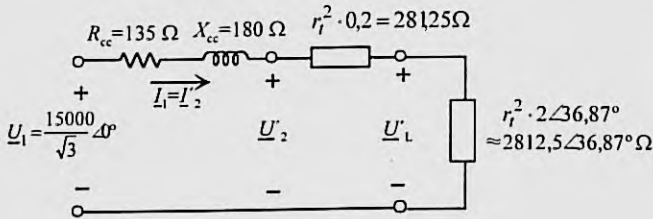


Figura 3.10

Eligiendo la tensión de fase del primario como referencia se obtiene una corriente primaria expresada por:

$$I_1 = \frac{(15\,000 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{(135 + j180) + (281,25) + (2\,250 + j1\,687,5)} = \frac{(15\,000 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{3\,255,2 \angle 35^\circ} = I_1 = 2,66 \angle -35^\circ = I_2$$

y de este modo, la tensión \underline{U}'_2 es igual a:

$$\underline{U}'_2 = (281,25 + 2\,250 + j1\,687,5) \cdot 2,66 \angle -35^\circ = 3\,042,2 \angle 33,7^\circ \cdot 2,66 \angle -345^\circ = 8092,2 \angle -1,3^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de 8092,2 V. La tensión de fase U_2 valdrá, de este modo:

$$U_2' = 8092,2 = r_l U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{8092,2}{37,5} = 215,8 \text{ V} \Rightarrow U_{2(\text{línea})} = \sqrt{3} \cdot 215,8 = 373,8 \text{ V}$$

y la tensión reducida en bornes del grupo motobomba será:

$$U_L' = 2812,5 \angle 36,87^\circ \cdot 2,66 \angle -35^\circ = 7481,25 \angle 1,87^\circ$$

que corresponde a un módulo de 7481,25 voltios. La tensión compuesta será:

$$U_L' = 7481,25 = r_l U_L \Rightarrow U_L = \frac{7481,25}{37,5} = 199,5 \Rightarrow U_{L(\text{línea})} = \sqrt{3} \cdot 199,5 \approx 345,5 \text{ V}$$

c) El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{3U_2' I_2' \cos \phi_2}{3U_2' I_2' \cos \phi_2 + 3R_{cc} I_2'^2} = \frac{3 \cdot 8092,2 \cdot 2,66 \cdot \cos(35^\circ - 1,3^\circ)}{3 \cdot 8092,2 \cdot 2,66 \cdot \cos(35^\circ - 1,3^\circ) + 3 \cdot 135 \cdot 2,66^2} = \frac{53845,2}{56723,8} \approx 94,9\%$$

d) La impedancia por fase de la batería de condensadores vale:

$$Z_C = -j \frac{1}{C_1 \omega} = -j \frac{10^6}{955 \cdot 2\pi \cdot 50} = -j3,33 \Omega$$

que al estar en paralelo con la impedancia del grupo motobomba, da un valor equivalente de:

$$Z_{\text{paralelo}} = \frac{2 \angle 36,87^\circ (-j3,33)}{1,6 + j1,2 - j3,33} = \frac{6,66 \angle -53,13}{2,66 \angle -53,13} = 2,5 \angle 0^\circ \Omega$$

Pasando esta impedancia al lado primario nos da:

$$Z_{\text{paralelo}}' = r_l^2 Z_{\text{paralelo}} = 37,5^2 \cdot 2,5 \angle 0^\circ = 3515,6 \angle 0^\circ \Omega$$

En la Figura 3.11 se muestra el equivalente por fase correspondiente del nuevo circuito reducido al primario. En esta figura, la nueva corriente por fase del primario del transformador será:

$$I_1 = \frac{(15000 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{(135 + j180) + 281,25 + (3515,6)} = \frac{(15000 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{3936,2 \angle 2,6^\circ} = 2,2 \angle -2,6^\circ = I_2'$$

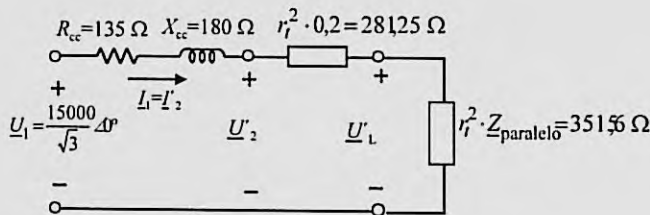


Figura 3.11

y la tensión \underline{U}_L' vale ahora:

$$\underline{U}_L' = 3515,6 \angle 0^\circ \cdot 2,2 \angle -2,6^\circ = 7735,3 \angle -2,6^\circ \text{ V}$$

que es un módulo de 7735,3 V ; de este modo resulta una tensión de línea:

$$\underline{U}_L' = 7735,3 = r_l U_L \Rightarrow U_L = \frac{7735,3}{37,5} = 206,3 \text{ V} \Rightarrow U_{L(\text{línea})} = \sqrt{3} \cdot 206,3 = 357,3 \text{ V}$$

3.25. Se tiene un transformador trifásico de 250 kVA, conexión Yy0, con una relación de tensiones compuestas de 15000/400 V. De los datos del fabricante, se conocen los siguientes parámetros: $\epsilon_{cc} = 10\%$; $\epsilon_{\lambda cc} = 8\%$ y se considera despreciable el efecto de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador. Calcular:

- a) Los parámetros R_{cc} y X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario y la corriente que circularía por el secundario si por una falta se produce un cortocircuito franco en los bornes del secundario (se supone para resolver esta última cuestión que la tensión de alimentación del primario es la asignada de 15000 V).
- b) si la tensión compuesta de línea en el secundario es de 400 V y se conecta al transformador una carga en estrella de $15\angle 60^\circ$ ohmios por fase, ¿cuál será la tensión compuesta que debe aplicarse al primario para que la tensión secundaria siga permaneciendo constante en 400 V de línea? ¿Cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- c) Si se conecta este transformador en paralelo con otro de 350 kVA, conexión Yy0, con la misma relación de tensiones y con las caídas de tensión relativas $\epsilon_{cc} = 10\%$ y $\epsilon_{\lambda cc} = 9\%$, ¿cómo se repartirán una potencia de 400 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, si se supone que la tensión en la carga es de 400 voltios? (es decir, calcular las potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por cada transformador).

Solución

a) De los datos suministrados por el fabricante obtenemos:

$$\epsilon_{R_{cc}} = \sqrt{\epsilon_{cc}^2 - \epsilon_{\lambda cc}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\%; \quad r_i = \frac{15000}{\frac{\sqrt{3}}{400}} = 37,5$$

Como quiera que la corriente de plena carga y la tensión asignada del primario del transformador valen, respectivamente:

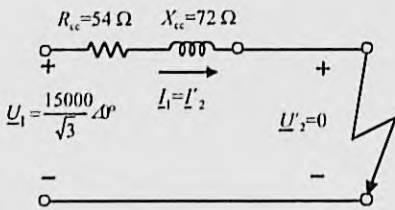
$$I_{1N} = I_{1fase} = I_{línea} = \frac{250000}{\sqrt{3} \cdot 15000} = 9,622 \text{ A}; \quad U_{1N} = U_{1fase} = \frac{15000}{\sqrt{3}} = 8660,25 \text{ V}$$

podemos obtener los valores de la resistencia y reactancia de cortocircuito del transformador reducidos al primario:

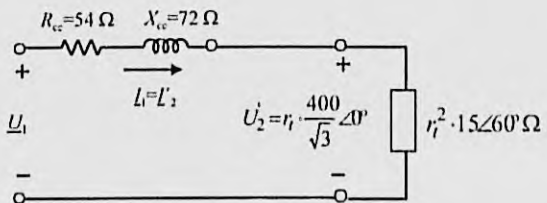
$$\epsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} \Rightarrow 0,06 = \frac{R_{cc} \cdot 9,622}{8660,25} \Rightarrow R_{cc} = 54 \Omega$$

$$\epsilon_{\lambda cc} = 0,08 = \frac{X_{cc} \cdot 9,622}{8660,25} \Rightarrow X_{cc} = 72 \Omega$$

Si se produce un cortocircuito en el secundario la corriente primaria por fase se puede obtener del circuito equivalente de la Figura 3.12a.



a)



b)

Figura 3.12

En este circuito si se toma la tensión primaria como referencia de fases resulta:

$$I_{1\text{fase}} = \frac{15\,000 \angle 0^\circ}{54 + j\,72} = 96,22 \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

que corresponde a un módulo de 96,22 A y a una corriente secundaria de fase:

$$I_{2\text{fase}} = r_1 I_{1\text{fase}} = 37,5 \cdot 96,22 \approx 3\,608,2 \text{ A} = I_{2\text{línea}} = I_{\text{falta secund}}$$

b) En este caso el circuito equivalente por fase reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.12b, en el que se puede calcular la corriente secundaria reducida:

$$\begin{aligned} \dot{I}'_{2\text{fase}} = \dot{I}_2 &= \frac{(r_1 \cdot 400 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{r_1^2 \cdot 15 \angle 60^\circ} = \frac{(400 / \sqrt{3}) \angle 0^\circ}{r_1 \cdot 15 \angle 60^\circ} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{37,5 \cdot 15 \angle 60^\circ} = 0,41 \angle -60^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{I}_2 = r_1 \cdot \dot{I}_2 = 37,5 \cdot 0,41 \angle -60^\circ = 15,4 \angle -60^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

y como quiera que:

$$\dot{U}'_{2\text{fase}} = \dot{U}_2 = r_1 U_{2\text{fase}} = 37,5 \cdot 230,94 \angle 0^\circ \approx 8\,660 \angle 0^\circ \text{ V}$$

al aplicar el segundo lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 3.11b resulta una tensión primaria:

$$\dot{U}_1 = 8\,660 \angle 0^\circ + (54 + j\,72) \cdot 0,41 \angle -60^\circ = 8\,660 + 36,9 \angle -6,87^\circ \approx 8\,696,6 \angle -0,029^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de 8696,6 V y a una tensión compuesta o de línea necesaria en el primario de valor:

$$U_{1\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 8\,696,6 \approx 15\,063 \text{ V}$$

y el rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{3U_2 I_2 \cos \varphi}{3U_1 I_1 \cos \varphi + P_0 + 3R_{cc} I_1^2} = \frac{3 \cdot 230,84 \cdot 15,4 \cdot \cos 60^\circ}{3 \cdot 230,84 \cdot 15,4 \cdot \cos 60^\circ + 3 \cdot 54 \cdot 0,41^2} = 99,5\%$$

c) Los parámetros del segundo transformador son:

$$\varepsilon_{cc} = 10\% ; \varepsilon_{X_{cc}} = 9\% \Rightarrow \varepsilon_{R_{cc}} = \sqrt{10^2 - 9^2} = 4,36\%$$

y como la corriente y tensión asignadas de primario de este transformador son, respectivamente:

$$I_{1N} = I_{1\text{fase}} = I_{1\text{línea}} = \frac{S_N}{\sqrt{3}U_{1N}} = \frac{350\,000}{\sqrt{3} \cdot 15\,000} = 13,47 \text{ A} ; U_{1N} = U_{1\text{fase}} = \frac{15\,000}{\sqrt{3}} \approx 8\,660,25 \text{ V}$$

los valores de la resistencia y reactancia de cortocircuito son:

$$0,0436 = \frac{R_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{R_{cc} \cdot 13,47}{8\,660,25} \Rightarrow R_{cc} = 28,03 \, \Omega ; 0,09 = \frac{X_{cc} I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{X_{cc} \cdot 13,47}{8\,660,25} \Rightarrow X_{cc} = 57,86 \, \Omega$$

Por otro lado, la corriente que deben suministrar ambos transformadores a la carga vale:

$$I_{2\text{lín}} = \frac{400\,000}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,8} = 721,7 \text{ A} = I_{2\text{fase}} \Rightarrow I'_{2\text{fase}} = \frac{721,7}{37,5} = 19,25 \text{ A}$$

Al tomar como referencia de fases la tensión secundaria por fase, la expresión compleja de la corriente de carga reducida al primario vale:

$$\dot{I}'_2 = \dot{I}'_{2\text{fase}} = 19,25 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

En la Figura 3.13 se muestra el circuito equivalente por fase del acoplamiento (reducido al primario), en el que la tensión reducida del secundario vale:

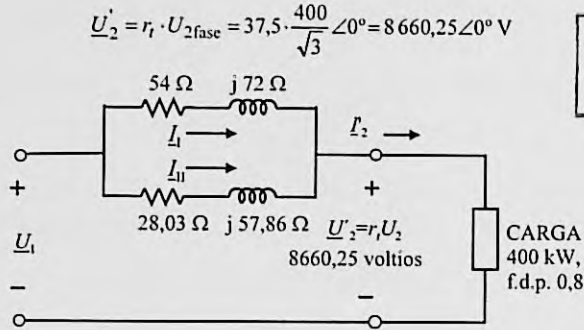


Figura 3.13

De las reglas de un circuito en paralelo se puede escribir:

$$\underline{I}_I + \underline{I}_{II} = 19,25 \angle -36,87^\circ; (54 + j72) \cdot \underline{I}_I = (28,03 + j57,86) \cdot \underline{I}_{II}$$

y al calcular las corrientes complejas suministradas por cada transformador se obtienen los siguientes resultados:

$$\underline{I}_I = 8,05 \angle -30,4^\circ \text{ A}; \underline{I}_{II} = 11,32 \angle -41,45^\circ \text{ A}$$

De acuerdo con los valores anteriores, la potencia compleja suministrada por los transformadores son, respectivamente:

$$\underline{S}_I = 3 \underline{U}'_2 \cdot \underline{I}_I^* = 3 \cdot 8660,25 \angle 0^\circ \cdot 8,05 \angle 30,4^\circ \approx 180 \text{ kW} + j 106 \text{ kVAr}$$

$$\underline{S}_{II} = 3 \underline{U}'_2 \cdot \underline{I}_{II}^* = 3 \cdot 8660,25 \angle 0^\circ \cdot 11,32 \angle 41,44^\circ \approx 220 \text{ kW} + j 194 \text{ kVAr}$$

cuya suma es 400 kW + j300 kVAr, que es la potencia entregada a la carga.

3.26. Un transformador trifásico tiene las siguientes características asignadas: conexión: Yy0, potencia aparente asignada: 100 kVA, relación de tensiones compuestas: 3000 V/400 V. Los resultados de unos ensayos de vacío y cortocircuito han dado los siguientes valores: vacío: 3000 V, $P_0 = 5 \text{ kW}$, medidos en el lado de A.T. (primario); cortocircuito: 300 V, $I_{1cc} =$ corriente asignada; $P_{cc} = 6 \text{ kW}$ (medidos en el primario).

Nota: las potencias anteriores son totales trifásicas y las tensiones son compuestas o de línea.

Si la tensión secundaria de línea se mantiene constante en 400 V, se pide:

- La tensión compuesta necesaria en el primario cuando el transformador alimenta una carga trifásica equilibrada de 50 kW con f.d.p. 0,6 capacitivo.
- La potencia aparente de máximo rendimiento y el rendimiento máximo del transformador para un f.d.p. unidad.
- Se desea ampliar la instalación para alimentar una carga trifásica de 120 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se acopla en paralelo este transformador con otro cuyas características asignadas son las siguientes: conexión Yy0, potencia asignada: 50 kVA, relación: 3000 V/400 V; $\epsilon_{Rcc} = 8\%$ $\epsilon_{Xcc} = 6\%$; $P_0 = 2 \text{ kW}$. Calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador y los rendimientos correspondientes si se supone que la tensión en la carga es de 400 V.

Solución

a) Del ensayo de vacío del transformador se deduce que las pérdidas en el hierro son de 5 kW. Por otro lado, del ensayo de cortocircuito se tienen las siguientes medidas:

$$U_{1cc}(\text{línea}) = 300 \text{ V} \Rightarrow U_{1cc} = \frac{300}{\sqrt{3}} = 173,21 \text{ V}; I_{1cc} = I_{1N} = \frac{100\,000}{\sqrt{3} \cdot 3\,000} = 19,245 \text{ A}; P_{cc} = 6\,000 \text{ W}$$

por lo que se obtiene:

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{6\,000}{3 \cdot 173,21 \cdot 19,245} = 0,6; \text{sen} \varphi_{cc} = 0,8$$

y las impedancias de cortocircuito son:

$$Z_{cc} = \frac{173,21}{19,245} = 9 \Omega; R_{cc} = 9 \cdot 0,6 = 5,4 \Omega; X_{cc} = 9 \cdot 0,8 = 7,2 \Omega$$

Además de los datos asignados por el fabricante, la relación de transformación es:

$$r_t = \frac{3\,000}{400} = 7,5$$

Por tanto, cuando la tensión secundaria de línea se mantiene en un valor compuesto de 400 V y alimenta una carga de 50 kW con f.d.p. 0,8 capacitivo, se tiene:

$$U_{2\text{línea}} = 400 \text{ V} \Rightarrow U_{2\text{fase}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230,94 \text{ V} \Rightarrow U'_{2\text{fase}} = r_t \cdot 230,94 = 1732,1 \text{ V}$$

$$I_{2\text{fase}} = \frac{50\,000}{3 \cdot 230,94 \cdot 0,6} = 120,28 \text{ A} \Rightarrow I'_{2\text{fase}} = \frac{120,28}{7,5} = 16,04 \text{ A}$$

Aplicando el 2.º lema de Kirchhoff al circuito equivalente aproximado reducido al primario se obtiene:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 + \underline{Z}_{cc} I'_{2} = 1732,1 \angle 0^\circ + (5,4 + j 7,2) \cdot 16,04 \angle 53,13^\circ = 1697,3 \angle 4,6^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de fase del primario de 1697,3 voltios y a un valor de línea:

$$U_{1(\text{línea})} = \sqrt{3} \cdot 1697,3 = 2939,9 \text{ V}$$

b) El índice de carga óptimo se calcula de la relación:

$$C_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0,91287$$

por lo que la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador es igual a:

$$S_{\eta_{\text{máx}}} = 0,91287 \cdot 100 \approx 91,29 \text{ kVA}$$

y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad será:

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{0,91287 \cdot 100 \cdot 1}{0,91287 \cdot 100 \cdot 1 + 5 + 5} = 90,13\%$$

c) El segundo transformador tiene 50 kVA y la misma relación de transformación. La corriente asignada por fase de primario y la tensión asignada por fase de primario son, respectivamente:

$$I_{1N} = \frac{50\,000}{\sqrt{3} \cdot 3\,000} = 9,623 \text{ A}; U_{1N} = \frac{3\,000}{\sqrt{3}} = 1\,732,1 \text{ V}$$

A partir de estos valores y de las caídas de tensión relativas de cortocircuito, se obtiene:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = 0,08 = \frac{R_{\text{cell}} \cdot 9,623}{1\,732,1} \Rightarrow R_{\text{cell}} = 14,4 \Omega; \varepsilon_{X_{cc}} = 0,06 = \frac{X_{\text{cell}} \cdot 9,623}{1\,732,1} \Rightarrow X_{\text{cell}} = 10,8 \Omega$$

Por otro lado, ambos transformadores alimentan una carga trifásica equilibrada de 120 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que la corriente secundaria y la secundaria reducida que absorbe la carga son, respectivamente:

$$I_2 = \frac{120\,000}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,8} = 216,51 \text{ A} \Rightarrow I'_2 = \frac{216,51}{7,5} = 28,87 \text{ A}$$

Tomando la tensión secundaria como referencia, la corriente de carga reducida al primario tiene la expresión compleja siguiente:

$$\underline{I}'_2 = 28,87 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

En la Figura 3.14 se muestra el esquema por fase del acoplamiento en el que la tensión secundaria por fase reducida al primario es $\underline{U}'_2 = r_1 U_2 = 1\,732,1 \angle 0^\circ$. De las reglas de un circuito en paralelo se puede escribir:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_{II} = 28,87 \angle -36,87^\circ ; (5,5 + j7,2) \cdot \underline{I}_1 = (14,4 + j10,8) \cdot \underline{I}_{II}$$

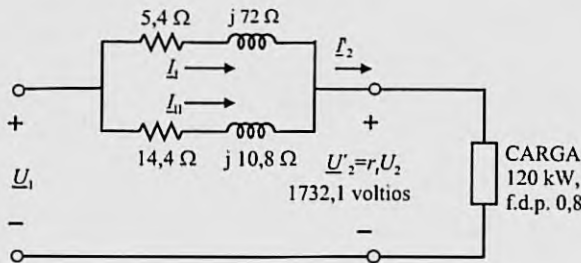


Figura 3.14

De estas ecuaciones se obtienen los valores siguientes de las corrientes:

$$\underline{I}_1 = 19,42 \angle -42,27^\circ \text{ A} ; \underline{I}_{II} = 9,71 \angle -26,01^\circ \text{ A}$$

y por consiguiente, las potencias complejas suministradas por cada transformador son:

$$\underline{S}_I = 3 \underline{U}'_2 \underline{I}'_1 = 3 \cdot 1\,732,1 \angle 0^\circ \cdot 19,42 \angle -42,27^\circ \approx 100\,912 \angle -42,27^\circ = 74\,673 + j67\,876$$

$$\underline{S}_{II} = 3 \underline{U}'_2 \underline{I}'_{II} = 3 \cdot 1\,732,1 \angle 0^\circ \cdot 9,71 \angle -26,01^\circ = 50\,456 \angle -26,01^\circ = 45\,346 + j22\,126$$

De este modo, el primer transformador entrega a la carga las potencias siguientes:

$$S_I = 100,912 \text{ kVA} ; P_I = 74,673 \text{ kW} ; Q_I = 67,876 \text{ kVAR}$$

mientras que el segundo transformador entrega las potencias siguientes:

$$S_{II} = 50,456 \text{ kVA} ; P_{II} = 45,346 \text{ kW} ; Q_{II} = 22,126 \text{ kVAR}$$

El rendimiento del primer transformador será:

$$\eta_I = \frac{P_I}{P_I + P_{fe} + P_{Cu}} = \frac{74\,673}{74\,673 + 5\,000 + 3 \cdot 5,4 \cdot 19,42^2} = 87,1\%$$

y el del segundo:

$$\eta_{II} = \frac{P_{II}}{P_{II} + P_{fe} + P_{Cu}} = \frac{45\,346}{45\,346 + 2\,000 + 3 \cdot 14,4 \cdot 9,71^2} = 88,2\%$$

3.27. Un transformador trifásico de distribución de 800 kVA; conexión Dy11 y tensiones 20000/400 V; 50 Hz, tiene unas pérdidas en vacío de 2 kW y unas pérdidas en cortocircuito de 8 kW (con corriente de plena carga). Calcular el rendimiento diario del transformador si trabaja con el ciclo de carga siguiente:

- 6 horas suministrando una potencia de 400 kW con f.d.p. 0,8 inductivo.
- 4 horas suministrando una potencia de 720 kW con f.d.p. 0,9 inductivo.
- 4 horas suministrando una potencia de 228 kW con f.d.p. 0,95 inductivo.
- 10 horas sin carga (en vacío).

Solución

El rendimiento diario de un transformador es el cociente entre la energía que entrega diariamente por su secundario W_2 y la energía absorbida por el primario W_1 . Si el transformador trabaja con un ciclo de carga de P_1 kW durante t_1 horas, P_2 kW durante t_2 horas, P_3 kW durante t_3 horas, etc., ($t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots = T = 24$ horas), la energía total W_2 entregada por el secundario será de la forma:

$$W_2 = P_1 t_1 + P_2 t_2 + P_3 t_3 + \dots$$

mientras que la energía que absorbe el primario será el valor anterior más las pérdidas internas de la máquina, es decir: las pérdidas en el hierro más las pérdidas en el cobre. Ahora bien, las pérdidas en el hierro son las pérdidas en vacío y son constantes para todos los regímenes de trabajo del transformador, mientras que las pérdidas en el cobre dependen del régimen de carga y son proporcionales al cuadrado de la corriente, que al considerar la tensión de trabajo constante, son directamente proporcionales al cuadrado de la potencia aparente que suministra en cada momento. Si se denomina $P_{Fe} = P_0$ a las pérdidas en el hierro que se disipan durante el tiempo total T ($T = 24$ horas) y P_{Cu1} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_1 durante un tiempo t_1 , P_{Cu2} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_2 durante un tiempo t_2 , P_{Cu3} a las pérdidas en el cobre cuando desarrolla una potencia aparente S_3 durante un tiempo t_3 , etc., la energía de entrada será:

$$W_1 = (P_1 t_1 + P_2 t_2 + P_3 t_3 + \dots) + P_0 T + P_{Cu1} t_1 + P_{Cu2} t_2 + P_{Cu3} t_3 + \dots$$

y el rendimiento diario será, por consiguiente, el cociente:

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{(P_1 t_1 + P_2 t_2 + P_3 t_3 + \dots)}{(P_1 t_1 + P_2 t_2 + P_3 t_3 + \dots) + P_0 T + P_{Cu1} t_1 + P_{Cu2} t_2 + P_{Cu3} t_3 + \dots}$$

En nuestro caso, las pérdidas en el hierro del transformador son $P_{Fe} = P_0 = 2$ kW, mientras que las pérdidas en el cobre P_{Cu} cuando suministra una potencia aparente S_i se pueden calcular en función de las pérdidas en cortocircuito P_{cc} con la potencia asignada del transformador S_N . Si se denomina R_{cc} a la resistencia de cortocircuito del transformador se puede escribir:

$$P_{Cu} = R_{cc} I_i^2 = R_{cc} I_i^2 \left(\frac{I_N}{I_N} \right)^2 = R_{cc} I_N^2 \left(\frac{I_i}{I_N} \right)^2 = P_{cc} \left(\frac{S_i}{S_N} \right)^2 = P_{cc} C_i^2$$

donde se ha denominado C_i al índice de carga del transformador. En nuestro caso, de acuerdo con el ciclo de carga, se tiene:

a) $t_1 = 6$ horas con una potencia de $P_1 = 400$ kW con $\cos \varphi_1 = 0,8$, es decir, la potencia aparente correspondiente es $S_1 = P_1 / \cos \varphi_1 = 400 / 0,8 = 500$ kVA, por lo que el índice de carga es $C_1 = 500 / 800 = 0,625$. Las pérdidas en el hierro son $P_0 = 2$ kW y las pérdidas en el cobre son $P_{Cu1} = 8 \cdot 0,625^2 = 3,125$ kW.

b) $t_2 = 4$ horas con una potencia de $P_2 = 720$ kW con $\cos \varphi_2 = 0,9$, es decir, la potencia aparente correspondiente es $S_2 = P_2 / \cos \varphi_2 = 720 / 0,9 = 800$ kVA, por lo que el índice de carga es $C_2 = 800 / 800 = 1$. Las pérdidas en el hierro son $P_0 = 2$ kW y las pérdidas en el cobre son $P_{Cu2} = 8 \cdot 1^2 = 8$ kW.

c) $t_3 = 4$ horas con una potencia de $P_3 = 228$ kW, con $\cos \varphi_3 = 0,95$, es decir, la potencia aparente correspondiente es $S_3 = P_3 / \cos \varphi_3 = 228 / 0,95 = 240$ kVA, por lo que el índice de carga es $C_3 = 240 / 800 = 0,3$. Las pérdidas en el hierro son $P_0 = 2$ kW y las pérdidas en el cobre son $P_{Cu3} = 8 \cdot 0,3^2 = 0,72$ kW.

d) $t_4 = 10$ horas con una potencia de $P_4 = 0$ kW (funcionamiento sin carga). Las pérdidas en el hierro son $P_0 = 2$ kW y las pérdidas en el cobre son $P_{CuI} = 0$.

Por consiguiente, el rendimiento diario será:

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{400 \cdot 6 + 720 \cdot 4 + 228 \cdot 0,95}{(400 \cdot 6 + 720 \cdot 4 + 228 \cdot 0,95) + 2 \cdot 24 + 3,125 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 0,72 \cdot 4} = \frac{5496,6}{5598,23} = 98,18\%$$

3.28. Un transformador monofásico de 50 kVA; 6000/230 V; 50Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: vacío: 1000W; 230V; 25 A (datos leídos en el lado de B.T.); cortocircuito: 1000 W; 270 V; 8,33 A (datos leídos en el lado A.T.). Calcular:

- a) Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario;
- b) Se disponen de tres transformadores monofásicos idénticos al citado, que se conectan en triángulo en la parte de A.T. (primario) y en estrella la parte de B.T. (secundario); si se alimenta el primario de esta combinación a una red trifásica a 6600 V, determinar la tensión secundaria de línea, si la corriente secundaria de línea es de 200 A con un f.d.p. 0,8 inductivo;
- c) La combinación señalada en el apartado anterior (conexión Dy) se conecta nuevamente a una red trifásica de 6000 V y en el secundario se coloca una carga trifásica equilibrada en triángulo de impedancia: $2,4 + j1,8 \Omega$ /fase, calcular la tensión secundaria de línea y el rendimiento del transformador en estas condiciones.

Solución

a) El ensayo de vacío está realizado en el lado de B.T., que es el secundario; por consiguiente, para utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario, deberán pasarse las medidas a este lado. La relación de transformación es:

$$r_t = \frac{6000}{230} = 26,09$$

y los resultados del ensayo de vacío transferidos al lado primario son:

$$P_0 = 1000 \text{ W}; U_1 = 6000 \text{ V}; I_0 = \frac{25}{r_t} = \frac{25}{26,09} = 0,958 \text{ A}$$

Por tanto, resulta:

$$1000 = 6000 \cdot 0,958 \cdot \cos \varphi_0; \cos \varphi_0 = 0,174; \sin \varphi_0 = 0,985$$

y las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{Fe} = 0,958 \cdot 0,174 = 0,167 \text{ A}; I_{\mu} = 0,958 \cdot 0,985 = 0,944 \text{ A}$$

Las impedancias de la rama paralelo correspondientes son:

$$R_{Fe} = \frac{6000}{0,167} = 35,93 \text{ k}\Omega; X_{\mu} = \frac{6000}{0,944} = 6,36 \text{ k}\Omega$$

El ensayo de cortocircuito está medido en el lado de A.T. que es el primario, y las medidas son:

$$P_{corto} = 1000 \text{ W}; U_{lcorto} = 270 \text{ V}; I_{lcorto} = 8,33 \text{ A} = I_{1N} = \frac{50000}{6000} I_{lcorto} = I_{1cc}$$

de donde se deduce:

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{1000}{270 \cdot 8,33} = 0,445; \sin \varphi_{cc} \approx 0,896$$

y la impedancia de cortocircuito es:

$$Z_{cc} = \frac{270}{8,33} = 32,4 \Omega; R_{cc} = 32,4 \cdot 0,445 = 14,42 \Omega; X_{cc} = 32,4 \cdot 0,896 = 29,03 \Omega$$

b) Vamos a realizar el problema utilizando el esquema real trifásico de la asociación de transformadores resultante que es triángulo-estrella. Así, la relación de transformación de cada transformador monofásico sigue siendo $r_t = 26,09$, y la corriente de línea del secundario que es de 200 A coincidirá con la de fase (por estar conectado los secundarios en estrella) y la corriente secundaria reducida será:

$$I_2' = \frac{200}{26,09} = 7,67 \text{ A}$$

Al aplicar la fórmula aproximada de Kapp resulta:

$$U_{1\text{fase}} = r_t U_{2\text{fase}} + R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \sin \varphi$$

que al sustituir los valores da lugar a:

$$6\,600 = 26,09 \cdot U_{2\text{fase}} + 14,42 \cdot 7,67 \cdot 0,8 + 29,03 \cdot 7,67 \cdot 0,6$$

de donde se deduce que la tensión secundaria de fase es $U_{2\text{fase}} = 221,46 \text{ V}$, que corresponde a un valor de línea:

$$U_{2\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 221,46 = 383,6 \text{ V}$$

c) El circuito eléctrico equivalente por fase, en este caso, es el representado en la Figura 3.15. La carga en triángulo de impedancia $Z_{\Delta} = 2,4 + j1,8 \Omega/\text{fase}$, al transformarla en estrella, da un valor por fase de la impedancia de carga:

$$Z_Y = Z_L = \frac{2,4 + j1,8}{3} \Omega/\text{fase}$$

que al pasar a primario se convierte en:

$$Z_L' = r_t^2 Z_L = \frac{26,09^2}{3} (2,4 + j1,8) = 544,5 + j408,4 \Omega$$

que es el valor mostrado en la Figura 3.15. Al elegir la tensión primaria como referencia se obtiene una corriente primaria:

$$I_2' = \frac{6\,000 \angle 0^\circ}{(14,42 + j29,03) + (544,5 + j408,4)} = \frac{6\,000 \angle 0^\circ}{709,74 \angle 38,05^\circ} = 8,45 \angle -38,05^\circ \text{ A}$$

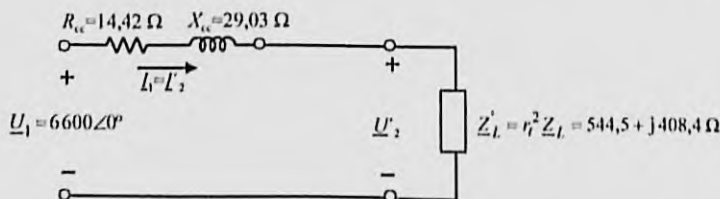


Figura 3.15

Por consiguiente, la tensión secundaria reducida será:

$$\underline{U}_2' = (544,5 + j408,4) \cdot 8,45 \angle -38,05^\circ = 5751,4 \angle -1,18^\circ \text{ V}$$

es decir, el módulo de la tensión secundaria reducida es de 5751,4 V, que corresponde a una tensión secundaria real:

$$U_2 = \frac{5751,4}{r_t} = \frac{5751,4}{26,09} = 220,44 \text{ V}$$

Como el secundario está en estrella, representa una tensión de línea $U_{2\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 220,44 = 381,8 \text{ V}$.

El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{3U_2' I_2' \cos\phi}{3U_2' I_2' \cos\phi + P_0 + P_{cu}} = \frac{3 \cdot 5751,4 \cdot 8,45 \cdot \cos 36,87^\circ}{3 \cdot 5751,4 \cdot 8,45 \cdot \cos 36,87^\circ + 3000 + 3 \cdot 14,42 \cdot 8,45^2} = 95,04\%$$

3.29. La Figura 3.16 muestra un transformador trifásico triángulo-estrella de relación de tensiones compuestas: 10000/400 V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en estrella. Para medir la potencia absorbida por la carga se utilizaron dos vatímetros P_1 y P_2 cuyas lecturas fueron: $P_1 = 1000 \text{ kW}$; $P_2 = 500 \text{ kW}$. Suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria compuesta es de 400 V, calcular:

- La potencia aparente o de plena carga del transformador (kVA).
- Si las impedancias de los devanados primario y secundario son: $Z_1 = 3 + j 5,1 \Omega$; $Z_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} + j 2,4 \cdot 10^{-3} \Omega$, calcular la tensión primaria U_1 necesaria en el primario para alimentar la carga a 400 V de línea.
- El rendimiento del transformador a plena carga si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento del transformador es igual a 0,75.
- ¿Cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST?

Nota: utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

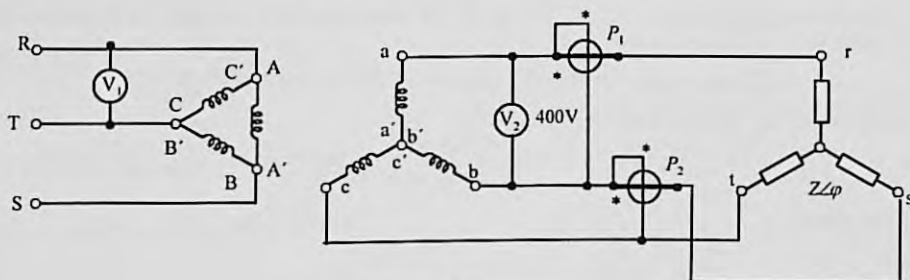


Figura 3.16

Solución

La conexión real del transformador es triángulo-estrella. Vamos a resolver el problema utilizando el *transformador estrella-estrella equivalente*, tal como se muestra en la Figura 3.17.

De acuerdo con las medidas efectuadas, la potencia absorbida por la carga y que según el enunciado constituye la plena carga del transformador es:

$$P_T = P_1 + P_2 = 1000 + 500 = 1500 \text{ kW}$$

y de los datos de los vatímetros se obtiene el f.d.p. de la carga:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \Rightarrow \cos \varphi = \cos 30^\circ = 0,866$$

por consiguiente, la potencia aparente del transformador vale:

$$S_T = \frac{P_T}{\cos\varphi_T} = \frac{1500}{\cos 30^\circ} = 1732,1 \text{ kVA}$$

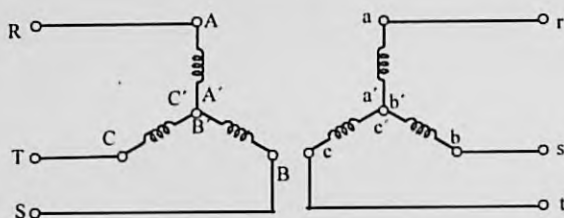


Figura 3.17

b) La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente vale:

$$r_t = \frac{10000}{400} = 25$$

La impedancia equivalente del devanado primario es:

$$\underline{Z}_{1\prime} = \frac{\underline{Z}_{1\Delta}}{3} = \frac{3 + j5,1}{3} \approx 1 + j 1,7 \Omega$$

y la del devanado secundario es $\underline{Z}_{2\prime} = 1,6 \cdot 10^{-3} + j 2,4 \cdot 10^{-3} \Omega$. En consecuencia, la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es igual a:

$$\underline{Z}_{cc} = \underline{Z}_1 + r_t^2 \underline{Z}_2 = (0,967 + j 1,7) + 25^2(1,6 \cdot 10^{-3} + j 2,4 \cdot 10^{-3}) \approx 2 + j 3,2 \Omega$$

Además, la corriente secundaria es:

$$I_2 = \frac{1500000}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot \cos 30^\circ} = 2500 \text{ A}$$

por lo que se tiene:

$$I_2' = \frac{2500}{25} \approx 100 \text{ A}$$

y tomando como referencia la tensión secundaria de fase se puede escribir:

$$U_2(\text{fase}) = \frac{400 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}} = 230,94 \angle 0^\circ \Rightarrow U_2' = r_t U_2 \approx 5773,4 \angle 0^\circ \text{ V} ; \underline{I}_2' = 100 \angle -30^\circ \text{ A}$$

La relación fasorial entre la tensión primaria y secundaria es:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2' + \underline{Z}_{cc} \underline{I}_2' = 5773,4 \angle 0^\circ + (2 + j3,2) \cdot 100 \angle -30^\circ \approx 6109,2 \angle 1,7^\circ \text{ V}$$

es decir, la tensión simple del primario equivalente es de 6109,2 voltios, lo que corresponde a una tensión compuesta o también la tensión entre fases del primario en triángulo del transformador real:

$$U_{1L} = \sqrt{3} \cdot U_1 = \sqrt{3} \cdot 6109,2 \approx 10581,4 \text{ V}$$

Si se llega a aplicar la fórmula aproximada de Kapp, el resultado sería:

$$U_1 = U_2' + R_{cc} I_2' \cos\varphi + X_{cc} I_2' \sin\varphi = 5773,4 + 2 \cdot 100 \cdot 0,866 + 3,2 \cdot 100 \cdot 0,5 = 6106,6 \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$U_{1L} = \sqrt{3} \cdot U_1 = \sqrt{3} \cdot 6106,6 \approx 10577 \text{ V}$$

que salvo errores de redondeo prácticamente coincide con el valor exacto.

c) El índice de carga óptimo del transformador es igual a:

$$C_{\text{opt}} = 0,75 = \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{cc}}}}$$

y como las pérdidas en el cobre a plena carga son:

$$P_{\text{cc}} = P_{\text{cu}}(\text{plena carga}) = 3R_{\text{cc}}I_2^2 = 3 \cdot 2 \cdot 100^2 \approx 60 \text{ kW}$$

el valor de las pérdidas en el hierro o de vacío serán:

$$P_0 = P_{\text{Fe}} = C_{\text{opt}}^2 P_{\text{cc}} = 0,75^2 \cdot 60 = 33,75 \text{ kW}$$

Por tanto, el rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1500}{1500 + 33,75 + 60} = 94,12\%$$

d) En la Figura 3.18a se muestra, a la izquierda, la disposición de las bobinas reales del transformador vistas desde la caja de bornes, en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.16. En la Figura 3.18b se ha dibujado el triángulo de tensiones primarias, en donde se ha colocado el terminal A en las 12 horas. En la Figura 3.18c se ha dibujado la estrella de tensiones secundarias en las que las tensiones de fase son paralelas a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.18d se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Dy11.

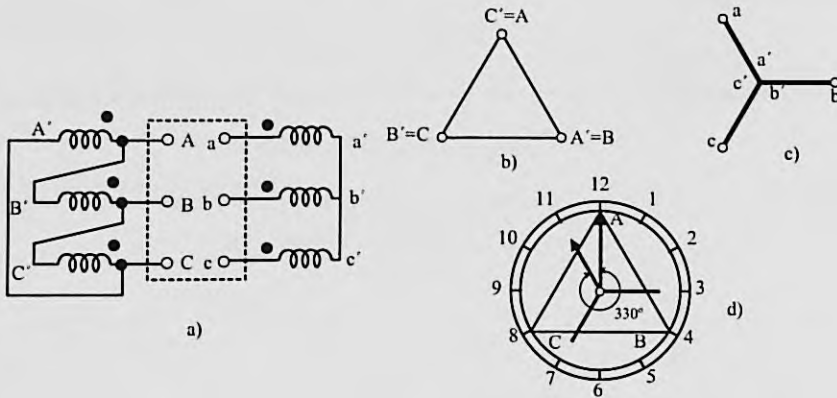


Figura 3.18

3.30. La Figura 3.19 muestra un transformador trifásico estrella-triángulo de relación de tensiones compuestas 15000/400 V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de $0,3\angle+36,87^\circ \Omega/\text{fase}$. Suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria es de 400 V, calcular:

- La potencia aparente o de plena carga del transformador en kVA.
- Si las impedancias de los devanados primario y secundario por fase son respectivamente: $Z_1 = 2+j 4 \Omega$; $Z_2 = 1 \cdot 10^{-3} + j 2 \cdot 10^{-3} \Omega$; determinar la tensión U_1 de línea para alimentar la carga a 400 V.

- c) El rendimiento del transformador, si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento es igual a 0,8.
 d) ¿Cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST?

Nota: utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

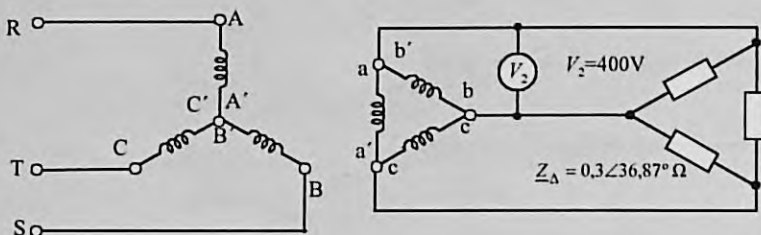


Figura 3.19

Solución

a) La conexión real del transformador es estrella-triángulo. Vamos a resolver el problema utilizando el *transformador estrella-estrella equivalente*. En la Figura 3.20 se muestra el esquema correspondiente. La impedancia por fase de la carga en estrella equivalente es igual a:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{0,3\angle 36,87^\circ}{3} = 0,1\angle 36,87^\circ \Omega$$

De este modo, al tomar la tensión simple de secundario como referencia de fases da lugar a una corriente secundaria:

$$I_2 = \frac{400 / \sqrt{3}}{0,1\angle 36,87^\circ} = 2\,309,4 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la potencia aparente secundaria a plena carga con la que trabaja el transformador es igual a:

$$S = \sqrt{3} U_2 I_2 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 2\,309,4 = 1\,600 \text{ kVA}$$

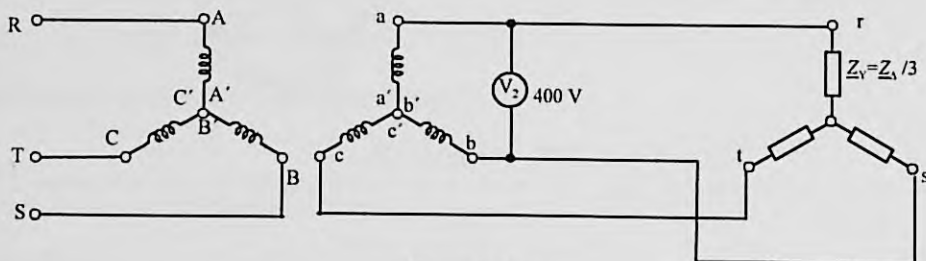


Figura 3.20

b) La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente vale:

$$r_t = \frac{15\,000}{400} = 37,5$$

y las impedancias de los devanados son:

$$\underline{Z}_1 = 2 + j4 \Omega; \underline{Z}_{2,1} = 1 \cdot 10^{-3} + j 2 \cdot 10^{-3} \Omega \Rightarrow \underline{Z}_{2V} = \frac{\underline{Z}_{2,1}}{3} = \frac{1 \cdot 10^{-3} + j 2 \cdot 10^{-3}}{3} = 0,333 \cdot 10^{-3} + j 0,666 \cdot 10^{-3} \Omega$$

por lo que la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario será igual a:

$$\underline{Z}_{cc} = \underline{Z}_1 + r_1^2 \underline{Z}_{2V} = (2 + j4) + 37,5^2 (0,333 \cdot 10^{-3} + j 0,666 \cdot 10^{-3}) = 2,47 + j 4,94 \Omega$$

La relación entre la tensión primaria y secundaria es:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 + \underline{Z}_{cc} \underline{I}'_2$$

y al tomar como referencia de fases la tensión secundaria de fase, las expresiones de \underline{U}'_2 e \underline{I}'_2 son:

$$\underline{U}'_2 = r_1 \underline{U}_2 = 37,5 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \approx 8660 \angle 0^\circ \text{ V}; \underline{I}'_2 = \frac{I_2}{r_1} = \frac{2309,4 \angle -36,87^\circ}{37,5} = 61,58 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

por lo que se obtiene una tensión primaria:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 + \underline{Z}_{cc} \underline{I}'_2 = 8660 \angle 0^\circ + (2,47 + j 4,94) \cdot 61,58 \angle -36,87^\circ \approx 8965,5 \angle 0,97^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión primaria de línea:

$$U_{1\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 8965,5 = 15528,7 \text{ V}$$

c) El índice de carga óptimo viene expresado por:

$$C_{\text{opt}} = 0,8 = \sqrt{\frac{P_{Fe}}{P_{cc}}}$$

Como las pérdidas en el cobre a plena carga son:

$$P_{cc} = P_{Cu} (\text{plena carga}) = 3R_{cc} I_2^2 = 3 \cdot 2,47 \cdot 61,58^2 \approx 28,1 \text{ kW}$$

el valor de las pérdidas en el hierro o de vacío serán:

$$P_0 = P_{Fe} = C_{\text{opt}}^2 P_{cc} = 0,8^2 \cdot 28,1 \approx 18 \text{ kW}$$

Por tanto, el rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 2309,4 \cdot 0,8}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 2309,4 \cdot 0,8 + 18 + 28,1} = 96,52\%$$

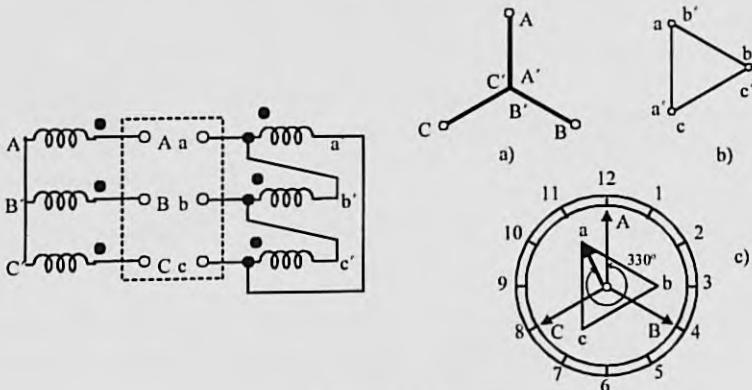


Figura 3.21

d) En la Figura 3.21 se muestra a la izquierda la disposición de las bobinas reales del transformador vistas desde la caja de bornes, en la que se han abatido las bobinas 90°. Las uniones correspondientes se han preparado teniendo en cuenta las conexiones de la Figura 3.19.

En la Figura 3.21a se ha dibujado la estrella de tensiones primaria, en la que se ha tomado la fase A como referencia vertical; en la Figura 3.21b se ha dibujado el triángulo de tensiones secundarias en las que las tensiones de fase son paralelas (misma fase) a las tensiones primarias correspondientes. En la Figura 3.21c se han superpuesto ambos diagramas fasoriales de tensiones encima de un reloj para determinar, de este modo, el índice horario; obsérvese que entre a y A el reloj señala las 11 horas, es decir, el transformador es de la forma Yd11.

3.31 Se dispone de un transformador trifásico de 50 MVA, 400 kV/66 kV (tensiones compuestas), conexión Yy0, que ha sido sometido a un ensayo de cortocircuito, alimentado por el lado de B.T. Las medidas fueron las siguientes: $U_{2cc} = 4,2$ kV de línea; $I_{2cc} = 481,12$ A; P_{cc} (total) = 350 kW. El transformador está conectado a una red de 380 kV de tensión compuesta, 50 Hz, a través de una línea trifásica de 50 km de longitud, de resistencia despreciable y reactancia 0,4 Ω/km. El transformador alimenta por su secundario una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo constituida por una resistencia de 220 Ω en serie, con un condensador de 15 μF. Calcular:

- a) La tensión secundaria de línea U_2 .
- b) La corriente secundaria I_2 .
- c) El rendimiento del transformador en esas condiciones si las pérdidas en el hierro son de 150 kW.

Nota: para realizar el problema se considera despreciable la impedancia en paralelo del circuito equivalente.

Solución

a) En la Figura 3.22 se muestra el esquema eléctrico. La relación de transformación es igual a:

$$r_t = \frac{400\,000}{66\,000} = 6,06$$

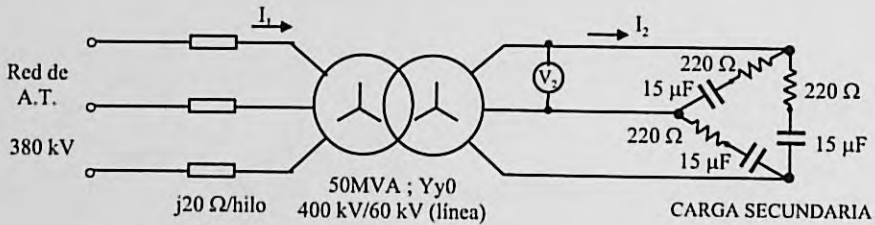


Figura 3.22

Los valores de la tensión simple secundaria de cortocircuito y la corriente de cortocircuito son respectivamente:

$$U_{2cc}(\text{fase}) = \frac{4\,200}{\sqrt{3}} = 2\,424,87 \text{ V}; \quad I_{2cc}(\text{fase}) = 481,12 \text{ A}$$

por lo que resulta:

$$350\,000 = 3 \cdot 2\,424,87 \cdot 481,12 \cdot \cos\varphi_{cc} \Rightarrow \cos\varphi_{cc} = 0,1 ; \sin\varphi_{cc} = 0,995$$

por lo que la impedancia de cortocircuito reducida al secundario y al primario valen, respectivamente:

$$Z_{cc2} = \frac{2\,424,87}{481,12} = 5,04 \Omega \Rightarrow Z_{cc} = r_l^2 Z_{cc2} = 6,06^2 \cdot 5,04 = 185,1 \Omega$$

de donde se deduce:

$$R_{cc} = 185,1 \cdot 0,1 = 18,51 \Omega ; X_{cc} = 185,1 \cdot 0,995 = 184,16 \Omega$$

Por otro lado, la carga en triángulo tiene una impedancia por fase:

$$Z_{\Delta} = R - j \frac{1}{C\omega} = 220 - j \frac{10^6}{15 \cdot 2\pi \cdot 50} = 220 - j 212,2 \Omega$$

que corresponde a una impedancia en estrella equivalente:

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} = \frac{220 - j 212,2}{3} = 73,3 - j 70,73 = 101,89 \angle -44^{\circ} \Omega$$

que al pasar al primario vale:

$$Z'_Y = r_l^2 Z_Y = 6,06^2 \cdot 101,89 \angle -44^{\circ} = 3741,8 \angle -44^{\circ} \Omega$$

En la Figura 3.23 se muestra el circuito equivalente por fase de la instalación reducido al primario del transformador. Al tomar como referencia la tensión simple de primario da lugar a una corriente primaria:

$$I_1 = \frac{\frac{380\,000}{\sqrt{3}} \angle 0^{\circ}}{j 20 + (18,51 + j 184,16) + 3741,8 \angle -44^{\circ}} = 60,66 \angle 41,5^{\circ} \text{ A}$$

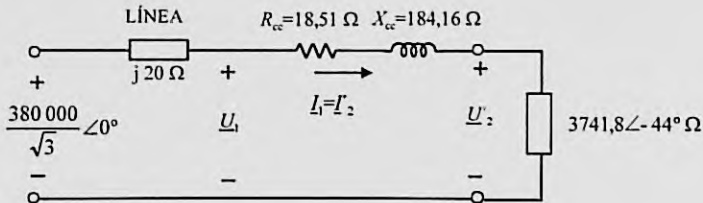


Figura 3.23

y en consecuencia, la tensión simple del secundario reducida al primario será:

$$U'_2 = r_l^2 Z'_L I_1 = 3741,8 \angle -44^{\circ} \cdot 60,66 \angle 41,5^{\circ} \approx 226\,975 \angle -2,5^{\circ} \text{ V}$$

que corresponde a una tensión secundaria:

$$U_{2\text{fase}} = \frac{U'_2}{r_l} = \frac{226\,975}{6,06} = 37\,454,6 \text{ V} \Rightarrow U_{2\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 37\,454,6 = 64\,873 \text{ V}$$

b) El valor de la corriente primaria es de 60,66 A. Al no existir corriente de vacío se cumple:

$$I_1 = I_2' = \frac{I_2}{r_l} \Rightarrow I_2 = 60,66 \cdot 6,06 = 367,6 \text{ A}$$

c) El rendimiento del transformador será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3U_2' I_2' \cos\varphi_2}{3U_2' I_2' \cos\varphi_2 + P_{Fe} + 3R_2' I_2'^2} = \frac{3 \cdot 226975 \cdot 60,66 \cdot \cos 44^\circ}{3 \cdot 226975 \cdot 60,66 \cdot \cos 44^\circ + 150000 + 3 \cdot 18,51 \cdot 60,66^2} = 98,82\%$$

3.32. La Figura 3.24 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica para la alimentación de un grupo de bombeo y su aplicación en regadíos. Se dispone de una red de distribución trifásica alimentada por una pequeña minicentral hidráulica situada en un área cercana a la estación de bombeo. La minicentral consiste en un grupo turbina-alternador que genera una tensión asignada de 3000 V, y que a través de una red de media tensión, de impedancia despreciable, alimenta un transformador reductor de tensión para la alimentación de la estación de bombeo. Las características asignadas del transformador son: $S_N = 100$ kVA; conexión Dy 11; relación de tensiones compuestas: 3000/400 V; caídas relativas de tensión: $\varepsilon_{cc} = 10\%$; $\varepsilon_{\lambda cc} = 8\%$.

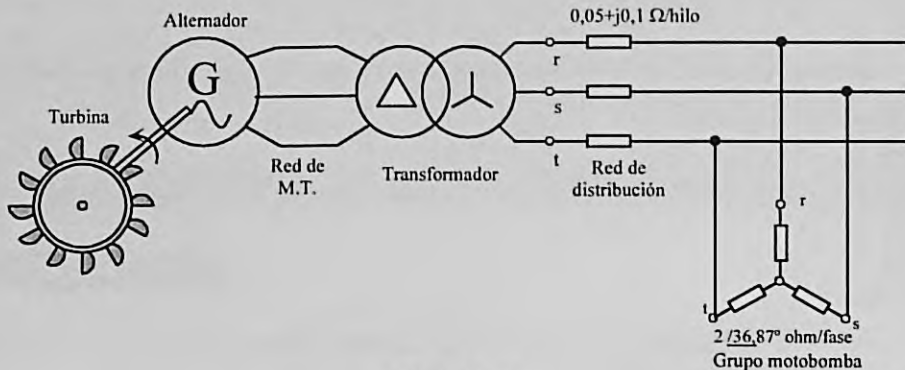


Figura 3.24

La red de distribución que une el transformador con el grupo de bombeo tiene una impedancia $Z = 0,05 + j 0,1 \Omega$ por hilo. La estación de bombeo se puede representar por una carga trifásica equilibrada conectada en estrella de impedancia $2\angle 36,87^\circ \Omega$ por fase. Calcular:

- Los parámetros R_{cc} , X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario.
- La tensión compuesta en el primario del transformador (y que debe generar el alternador) para que la tensión en la carga (grupo de bombeo) sea de 400 V de línea; determinar en esta situación el rendimiento del transformador si las pérdidas en el hierro son de 2 kW.
- Si la tensión en el primario del transformador es de 3000 V (tensión compuesta), ¿cuál será el valor de la tensión de línea que se tendrá en el grupo de bombeo? Determinar, en este caso, la caída relativa de tensión (regulación) del transformador.

Solución

a) En la Figura 3.25 se muestra el esquema eléctrico utilizando un transformador estrella-estrella equivalente. La corriente primaria de plena carga vale:

$$I_{1N} = \frac{100000}{\sqrt{3} \cdot 3000} \approx 19,25 \text{ A}$$

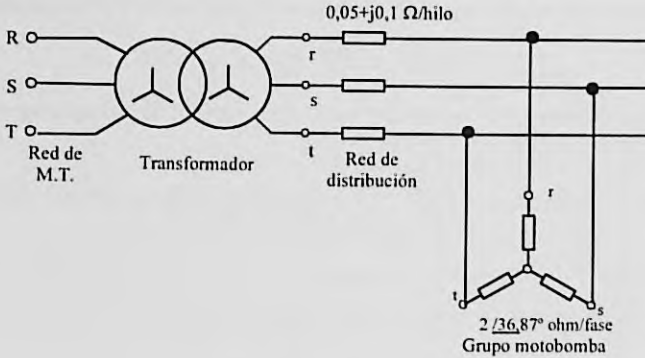


Figura 3.25

Teniendo en cuenta que la tensión primaria de fase es de $3000/\sqrt{3}$, se deducen los valores de la impedancia de cortocircuito y sus componentes respectivas:

$$\varepsilon_{cc} = 0,1 = \frac{Z_{cc} \cdot 19,25}{3000} \Rightarrow Z_{cc} = 9 \Omega; \varepsilon_{X_{cc}} = 0,08 = \frac{X_{cc} \cdot 19,25}{3000} \Rightarrow X_{cc} = 7,2 \Omega$$

$$R_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - X_{cc}^2} = \sqrt{9^2 - 7,2^2} = 5,4 \Omega$$

En consecuencia, la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario es de la forma compleja:

$$\underline{Z}_{ccY} = 5,4 + j7,2 = 9 \angle 53,13^\circ \Omega \Rightarrow \underline{Z}_{cc\Delta} = 3\underline{Z}_{ccY} = 16,2 + j21,6 = 27 \angle 53,13^\circ \Omega$$

b) El circuito equivalente por fase de la instalación reducido al primario es el mostrado en la Figura 3.26. La relación de transformación del transformador estrella-estrella equivalente es igual a:

$$r_i = \frac{3000}{400} = 7,5$$

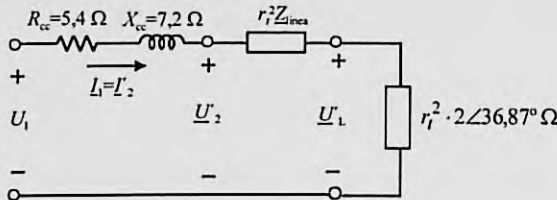


Figura 3.26

por lo que la impedancia de la línea de B.T. y de la carga pasada al lado primario tendrán los valores siguientes:

$$r_i^2 Z_{\text{linea}} = 7,5^2 \cdot (0,05 + j0,1) \approx 2,81 + j5,63 \Omega; r_i^2 Z_{L_1} = 7,5^2 \cdot 2 \angle 36,87^\circ \approx 112,5 \angle 36,87^\circ \Omega$$

Ahora bien, la tensión compuesta en la carga, que es el grupo de bombeo es de 400 voltios, lo que corresponde a:

$$\underline{U}_L = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \Rightarrow \underline{U}'_L = r_i \underline{U}_L = \frac{3000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ$$

y por tanto, de acuerdo con el circuito equivalente de la Figura 3.26, la corriente de la carga reducida al primario, que será la propia corriente primaria del transformador, tendrá un valor:

$$I_1 = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{112,5 \angle 36,87^\circ} \approx 15,4 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Por ello, la tensión necesaria en el primario será:

$$\underline{U}_1 = \frac{3000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + [(5,4 + j 7,2) + 2,81 + j 5,63] \cdot 15,4 \angle -36,87^\circ \approx 1953,53 \angle 2,4^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión de línea en el primario de valor:

$$U_{1\text{línea}} = 1953,53 \cdot \sqrt{3} \approx 3386,6 \text{ V}$$

Por otro lado, de la tensión secundaria por fase en carga reducida al primario del transformador se obtiene del circuito de la Figura 3.27 resultando ser:

$$\underline{U}'_2 = (2,81 + j 5,63 + 112,5 \angle 36,87^\circ) \cdot 15,4 \angle -36,87^\circ = 1819,7 \angle 1,37^\circ \text{ V}$$

De este modo, la potencia activa secundaria del transformador vale:

$$P_2 = 3U'_2 I_2 \cos \varphi_2 = 3 \cdot 1819,7 \cdot 15,4 \cdot \cos(36,87^\circ + 1,37^\circ) = 66029,5 \text{ W}$$

y la potencia en el primario del transformador es igual a:

$$P_1 = P_2 + P_p = 66029,5 + 2000 + 3 \cdot 5,4 \cdot 15,4^2 = 71871,5 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del transformador es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{66029,5}{71871,5} \approx 91,9\%$$

c) El circuito eléctrico equivalente en esta situación es el señalado en la Figura 3.27, en el que se conoce ahora la tensión primaria del transformador. Si se toma como referencia de fases esta tensión, la corriente en el primario del transformador será:

$$I_1 = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(5,4 + j 7,2) + (2,81 + j 5,63) + 112,5 \angle 36,87^\circ} = \frac{\frac{3000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{126,88 \angle 39,3^\circ} = 13,65 \angle -39,3^\circ \text{ A}$$

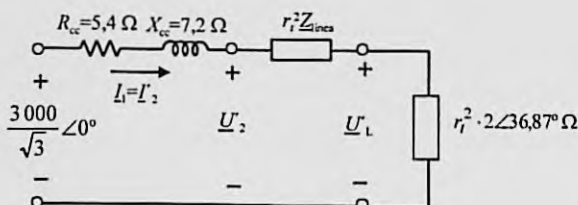


Figura 3.27

Por consiguiente, la tensión reducida de la carga por fase será:

$$\underline{U}'_L = 112,5 \angle 36,87^\circ \cdot 13,65 \angle -39,3^\circ = 1535,6 \angle -2,43^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de tensión de fase en la carga:

$$U_L = \frac{U'_L}{r_t} = \frac{1535,6}{7,5} = 204,75 \text{ V}$$

y a una tensión de línea

$$U_L(\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 204,75 \approx 354,6 \text{ V}$$

De un modo similar, la tensión secundaria reducida al primario del transformador vale:

$$U'_2 = (2,81 + j5,63 + 112,5 \angle 36,87^\circ) \cdot 13,65 \angle -39,3^\circ = 1612,9 \angle -1,1^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de tensión de fase en el secundario:

$$U_2 = \frac{U'_2}{r_t} = \frac{1612,9}{7,5} = 215,1 \text{ V}$$

y a una tensión de línea:

$$U_2(\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 215,1 \approx 372,5 \text{ V}$$

y de este modo, el valor de la caída relativa de tensión del transformador es:

$$\varepsilon = \frac{U_2(\text{vacío}) - U_2(\text{carga})}{U_2(\text{vacío})} = \frac{400 - 372,5}{400} = 6,9\%$$

3.33. En la Figura 3.28a se muestra un autotransformador de relación 3/1. La impedancia de la parte ab del devanado es de $0,2 + j0,3 \Omega$ y la impedancia de la parte común bc es de $0,05 + j0,1 \Omega$.

- Si se desprecia la corriente de vacío ¿cuánto valdrá la corriente de entrada si se aplican 30 V al devanado primario cuando el secundario está cortocircuitado?
- Si la impedancia de carga es $Z_L = 0,6 + j0,8 \Omega$, calcular la tensión necesaria en el primario para que la tensión secundaria en la carga sea $U_2 = 120 \text{ V}$.

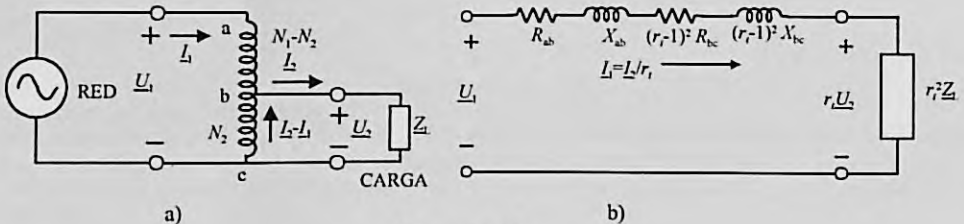


Figura 3.28

Solución

Teoría previa

En el circuito de la Figura 3.28a se muestra un autotransformador genérico. El número de espiras totales de la entrada es N_1 y el de salida N_2 ; la corriente absorbida de la red es I_1 y la corriente que se entrega a la carga es I_2 . En la figura se muestra la distribución de corrientes en los devanados. Se observa que hay $N_1 - N_2$ espiras recorridas por una corriente I_1 y N_2 espiras recorridas por una corriente $I_2 - I_1$ en el sentido señalado en la Figura 3.28a. Si el autotransformador es ideal se cumple la denominada relación de transformación r_t :

$$r_t = \frac{N_{ac}}{N_{bc}} = \frac{E_{ac}}{E_{bc}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{I_{cb}}{I_{ac}} = \frac{I_2 - I_1}{I_1} = r_t - 1 \quad (1)$$

Si se denomina $Z_{ab} = R_{ab} + jX_{ab}$ a la impedancia del devanado situado en el tramo ab por el que solo circula la corriente I_1 ; se denomina $Z_{bc} = R_{bc} + jX_{bc}$ la impedancia del devanado que existe en la zona bc y por el que circula la corriente $I_2 - I_1$ y se

denomina E_{bc} a la f.e.m. inducida en el tramo bc del devanado se cumple en el secundario:

$$E_{bc} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{bc}(I_2 - I_1) \quad (2)$$

Si se denomina E_{ab} a la f.e.m. inducida en el tramo ab del devanado se cumple en el primario:

$$\underline{U}_1 = E_{ac} + \underline{Z}_{ab}I_1 - \underline{Z}_{bc}(I_2 - I_1) \quad (3)$$

y teniendo en cuenta las relaciones (1) y llevándolas a (3), resulta:

$$\underline{U}_1 = r_i E_{bc} + \underline{Z}_{ab}I_1 - \underline{Z}_{bc}(r_i - 1)I_1 \quad (4)$$

Sustituyendo E_{bc} de la relación (2) y llevando a (4) queda:

$$\underline{U}_1 = r_i [\underline{U}_2 + \underline{Z}_{bc}(I_2 - I_1)] + \underline{Z}_{ab}I_1 - \underline{Z}_{bc}(r_i - 1)I_1 = r_i \underline{U}_2 + [(r_i - 1)^2 \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ab}]I_1 \quad (5)$$

Como la tensión secundaria \underline{U}_2 se puede escribir en función de la impedancia de carga por:

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_L I_2 = r_i \underline{Z}_L I_1 \quad (6)$$

Al llevar este valor a (5) resulta:

$$\underline{U}_1 = [r_i^2 \underline{Z}_L + (r_i - 1)^2 \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ab}]I_1 \quad (7)$$

que corresponde al circuito equivalente reducido al primario mostrado en la Figura 3.28b. Obsérvese en este circuito equivalente, que la impedancia de carga se transfiere al primario con la misma ley que en los transformadores clásicos de dos devanados separados es decir, $r_i^2 \underline{Z}_L$; sin embargo la impedancia de la parte común bc del autotransformador se pasa al primario con la relación $(r_i - 1)^2$.

En el caso de que el autotransformador fuera elevador tal como se muestra en la Figura 3.29a, entonces $N_2 > N_1$ y las corrientes se distribuyen como se señala en esta figura, de modo que en el caso ideal se cumple:

$$r_i = \frac{N_{bc}}{N_{ac}} = \frac{E_{bc}}{E_{ac}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad (8)$$

y las ecuaciones de primario y secundario son respectivamente:

$$\underline{U}_1 = E_{bc} + \underline{Z}_{bc}(I_1 - I_2) \quad (9)$$

$$E_{ac} = \underline{U}_2 + \underline{Z}_{ab}I_2 - \underline{Z}_{bc}(I_1 - I_2) \quad (10)$$

y que operando da lugar a:

$$\underline{U}_1 = r_i \underline{U}_2 + [r_i^2 \underline{Z}_{ab} + (1 - r_i)^2 \underline{Z}_{bc}]I_1 \quad (11)$$

que corresponde al circuito equivalente reducido al primario mostrado en la Figura 3.29b.

a) El problema propuesto pertenece al primer caso estudiado, es decir, es un autotransformador reductor (Figura 3.28a) en el que la relación de transformación es igual a:

$$r_i = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = 3$$

Al emplear el circuito equivalente de la Figura 3.28b resulta:

$$R_{ab} + (r_i - 1)^2 R_{bc} = 0,2 + (3 - 1)^2 \cdot 0,05 = 0,4 \Omega ; \quad X_{ab} + (r_i - 1)^2 X_{bc} = 0,3 + (3 - 1)^2 \cdot 0,1 = 0,7 \Omega$$

Al estar en cortocircuito la carga y aplicar una tensión al primario de 30 V, se obtiene una corriente de entrada $I_1 = I_{ab}$ de valor:

$$I_1 = \frac{30 \angle 0^\circ}{0,4 + j0,7} = 37,2 \angle 60,26^\circ \text{ A}$$

b) La impedancia de carga referida al primario vale $r_i^2 \underline{Z}_L = 3^2 \cdot (0,6 + j 0,8) = 5,4 + j 7,2 \Omega$. Al tomar la tensión secundaria como referencia de fases, es decir, $\underline{U}_2 = 120 \angle 0^\circ$, en el circuito de la Figura 3.28b se cumple:

$$r_1 \underline{U}_2 = 360 \angle 0^\circ; \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_2}{r_1} = \frac{r_1 \underline{U}_2}{r_1^2 \underline{Z}_L} = \frac{360 \angle 0^\circ}{5,4 + j7,2} = 40 \angle -53,13^\circ \text{ A}$$

y por tanto, al aplicar (5) resulta:

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{U}_2 + [Z_{ab} + (r_1 - 1)^2 Z_{bc}] \underline{I}_1 = 360 \angle 0^\circ + (0,4 + j 0,7) \cdot 40 \angle -53,13^\circ = 392 \angle 0,6^\circ \text{ V}$$

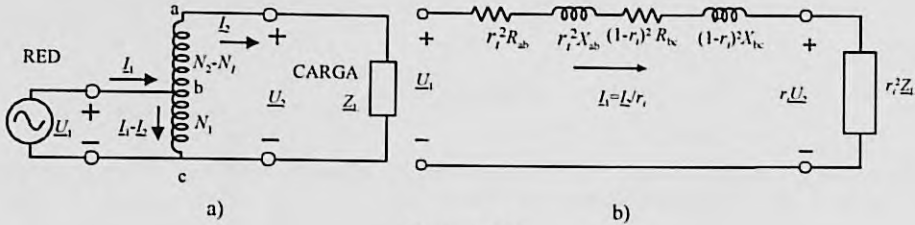


Figura 3.29

3.34. Un transformador monofásico de dos devanados con valores asignados de 12 kVA, 300/100 V, tiene una impedancia de cortocircuito reducida al primario de $0,9 + j 1,2 \Omega$ siendo la corriente de vacío despreciable. Se conectan las bobinas del transformador en serie para formar un autotransformador reductor de tensión de relación 400/100 V;

- Calcular la potencia de plena carga que puede asignarse a este autotransformador.
- Si el autotransformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo y la tensión secundaria es de 100 V, ¿cuál será la tensión necesaria en el primario?
- Repetir el problema si las bobinas del transformador se unen para construir un autotransformador elevador de tensión de relación 300/400 V que funciona a la plena carga correspondiente con una tensión secundaria de 400 V y un f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

a) En la Figura 3.30a se muestra el transformador de dos devanados separados y en la Figura 3.30b se aprecia la unión de las bobinas para conseguir un autotransformador reductor de tensión. Los terminales de las bobinas de primario y secundario se han designado respectivamente por las letras ab y bc para identificar esta figura con la señalada en la Figura 3.28 del problema anterior. Como quiera que las tensiones asignadas en el transformador son de 300 V y 100 V y la potencia asignada es de 12 kVA, las corrientes de plena carga del primario y secundario del transformador convencional (dos devanados separados) es:

$$I_1 = \frac{S}{U_1} = \frac{12000}{300} = 40 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{S}{U_2} = \frac{12000}{100} = 120 \text{ A}$$

Cuando se unen las bobinas para formar el autotransformador mostrado en la Figura 3.30b, la tensión del primario es $U_A = U_1 + U_2 = 300 + 100 = 400 \text{ V}$ y la secundaria $U_B = U_2 = 100 \text{ V}$; además, la distribución de corrientes es la que señala en la figura para no superar los valores asignados del transformador. Es por ello que la potencia aparente que puede asignarse al autotransformador sin que se superen los valores asignados de las corrientes internas, es:

$$S_{\text{autotransf}} = U_A I_1 = U_B (I_1 + I_2) = 400 \cdot 40 = 100 \cdot (120 + 40) = 16 \text{ kVA}$$

b) Antes de calcular las tensiones reales solicitadas, es preciso determinar la impedancia reducida al primario que ve el autotransformador, conociendo la impedancia reducida al primario del transformador de dos devanados. Observando la Figura 3.30a se puede escribir:

$$Z_{\text{cc1}}(\text{transformador}) = Z_{ab} + r_1^2 Z_{bc} = Z_{ab} + 3^2 \cdot Z_{bc} = 0,9 + j1,2 \Omega$$

ya que la relación de transformación del transformador vale $r_1 = N_1/N_2 = 300/100 = 3$.

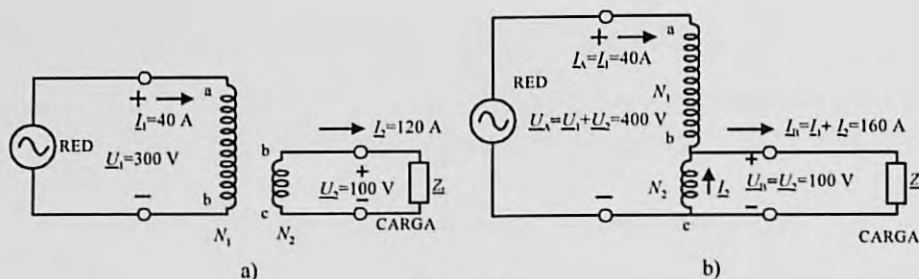


Figura 3.30

Pero al comparar la Figura 3.30b con la Figura 3.28b y teniendo en cuenta la expresión (7) del problema anterior, la impedancia equivalente reducida al primario del autotransformador vale:

$$\underline{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = \underline{Z}_{ab} + (r_{1a} - 1)^2 \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ab} + (4 - 1)^2 \cdot \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ab} + 3^2 \cdot \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{cc1}(\text{transformador}) = 0,9 + j1,2 \Omega$$

ya que la relación de transformación como autotransformador es ahora $r_{1a} = (N_1 + N_2)/N_2 = 400/100 = 4$. De acuerdo con este resultado, la impedancia reducida al primario como autotransformador en este montaje específico coincide con la impedancia reducida al primario del transformador real. Si la tensión secundaria como autotransformador es de 100 voltios y se toma esta como referencia de fases, la corriente de plena carga reducida al primario como autotransformador es de 40 amperios y está retrasada un ángulo de $36,87^\circ$ (que es el arco coseno de 0,8). Si se denomina \underline{U}_1 a la tensión que se requiere en el primario del autotransformador, se puede escribir:

$$\underline{U}_1 = r_{1a} \underline{U}_2 + \underline{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) \cdot \underline{I}_1 = 4 \cdot 100 \angle 0^\circ + (0,9 + j1,2) \cdot 40 \angle -36,87^\circ = 457,6 + j16,8 = 457,91 \angle 2,1^\circ \text{ V}$$

es decir la tensión necesaria en el primario debe ser de 457,91 voltios.

Cuando las bobinas del transformador se unen para formar un autotransformador elevador de tensión de relación 300/400 V, los esquemas correspondientes se muestran en la Figura 3.31. Obsérvese que los terminales de las bobinas de primario y secundario se han designado ahora por las letras *bc* y *ab*, respectivamente, para identificar esta figura con la señalada en la Figura 3.29 del problema anterior. La tensión del primario es ahora $U_A = U_1 = 300 \text{ V}$ y la secundaria será entonces $U_B = U_1 + U_2 = 300 + 100 = 400 \text{ V}$. Además, la distribución de corrientes es la que se señala en la figura para que no se superen los valores asignados al transformador. Es por ello que la potencia aparente que puede asignarse al autotransformador ahora es:

$$S_{\text{autotransf}} = U_A (I_1 + I_2) = U_B I_2 = 300 \cdot (120 + 40) = 400 \cdot 120 = 48 \text{ kVA}$$

Antes de calcular las tensiones reales solicitadas es preciso determinar la impedancia reducida al primario que ve el autotransformador, conociendo la impedancia reducida al primario del transformador de dos devanados. Observando la Figura 3.31a se puede escribir:

$$\underline{Z}_{cc1}(\text{transformador}) = \underline{Z}_{bc} + r_1^2 \underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} + 3^2 \cdot \underline{Z}_{ab} = 0,9 + j1,2 \Omega$$

ya que la relación de transformación del transformador vale $r_1 = N_1/N_2 = 300/100 = 3$. Pero al comparar la Figura 3.31b con la Figura 3.29 y teniendo en cuenta la expresión (11) del problema anterior, la impedancia equivalente reducida al primario del autotransformador vale ahora:

$$\underline{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = r_{1a}^2 \underline{Z}_{ab} + (1 - r_{1a})^2 \underline{Z}_{bc} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \underline{Z}_{ab} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \underline{Z}_{bc} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \underline{Z}_{ab} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \underline{Z}_{bc}$$

es decir:

$$\underline{Z}_{cc1}(\text{autotransformador}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \underline{Z}_{ab} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \underline{Z}_{bc} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 [3^2 \cdot \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc}] = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \underline{Z}_{cc1}(\text{trafos real}) = \frac{0,9 + j1,2}{16} \Omega$$

ya que la relación de transformación como autotransformador es ahora $r_{1a} = N_1/(N_1 + N_2) = 300/400 = 3/4$. De acuerdo con este resultado, la impedancia reducida al primario como autotransformador en este montaje específico es $1/16$ veces la impedancia reducida al primario del transformador real. Si la tensión secundaria como autotransformador es de 400 vol-

tios y se toma esta como referencia de fases, la corriente de plena carga reducida al primario como autotransformador es de 160 amperios retrasado un ángulo de $36,87^\circ$ (que es el arco coseno de 0,8). Si se denomina \underline{U}_1 a la tensión que se requiere en el primario del autotransformador, se puede escribir:

$$\underline{U}_1 = r_{\text{ca}} \underline{I}_2 + Z_{\text{cc1}}(\text{autotransformador}) \cdot \underline{I}_1 = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 400 \angle 0^\circ + \frac{(0,9 + j 1,2)}{16} \cdot 160 \angle -36,87^\circ = 314,4 + j 4,2 \approx 314,43 \angle 0,8^\circ \text{ V}$$

es decir, la tensión necesaria en el primario debe ser de 314,43 V.

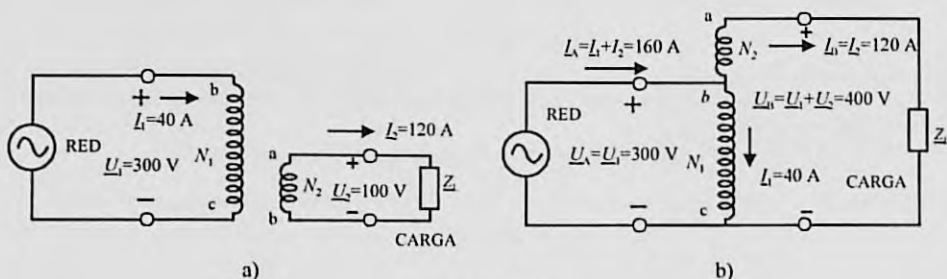


Figura 3.31

3.35. En la Figura 3.32 se muestra un circuito de c.a. monofásico que dispone de un transformador de medida de corriente para medir la intensidad del circuito y que tiene una relación $K_I = 1/100$. La impedancia del secundario del transformador de corriente es de $0,2 + j 0,3 \Omega$ y alimenta un amperímetro de impedancia interna $0,5 + j 0,3 \Omega$.

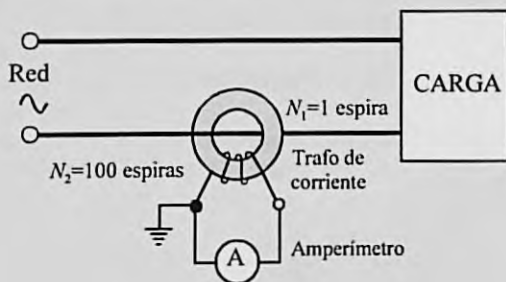


Figura 3.32

Se sabe que el núcleo requiere una f.m.m. de 20 At para vencer las pérdidas en el hierro y de 40 At para la magnetización del núcleo. Si el amperímetro señala una corriente de 4 A, calcular:

- La corriente del primario del transformador de medida;
- El error de relación de corriente ϵ_r .
- El error de fase δ .
- ¿En cuántas espiras se podrá reducir el devanado secundario del transformador de medida para eliminar el error de intensidad?

Solución

a) En la Figura 3.33 se muestra el circuito equivalente del transformador de medida reducido al secundario. En el transformador de corriente se debe cumplir la siguiente igualdad entre las f.m.m.:

$$N_1 I_1 = N_1 I_0 + N_2 I_2 \quad (\text{donde } N_1 = 1 \text{ espira; } N_2 = 100 \text{ espiras})$$

Si se toma la tensión primaria como referencia de fases, la f.m.m. necesaria para vencer las pérdidas en el hierro es de $20 \angle 0^\circ$ At, mientras que para la imanación del núcleo se requiere una f.m.m. de $40 \angle -90^\circ$, es decir, la f.m.m. de vacío del transformador de corriente vale:

$$\underline{F}_{m0} = N_1 I_0 = 20 - j40 \text{ At}$$

La f.m.m. secundaria tiene una magnitud $N_2 I_2 = 100 \cdot 4 = 400$ At, pero hay que determinar su desfase respecto a la tensión primaria tomada como origen de fases. Para ello se observa en el circuito equivalente de la Figura 3.33 que la impedancia total del secundario vale:

$$\underline{Z}_{21} = (0,2 + j0,3) + (0,5 + j0,3) = 0,7 + j0,6 = 0,922 \angle 40,60^\circ \Omega$$

y por tanto la forma fasorial de la f.m.m. secundaria irá retrasada $40,6^\circ$ de la tensión primaria, es decir, se tiene:

$$\underline{F}_{m2} = 4000 \angle -40,60^\circ \text{ At}$$

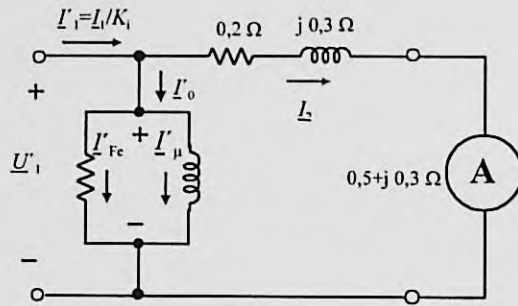


Figura 3.33

En consecuencia, al aplicar la igualdad de f.m.m. se cumple:

$$N_1 I_1 = (20 - j40) + 400 \angle -40,6^\circ = 441,56 \angle -42,85^\circ$$

y de este modo, el error de relación será:

$$\epsilon_r = \frac{441,56 - 400}{400} \cdot 100 = 10,39\%$$

b) El error de fase es la diferencia de fases entre la corriente medida y la que realmente circula por el primario y que es la diferencia:

$$\delta = 42,85^\circ - 40,60^\circ = 2,25^\circ = 2^\circ 15'$$

c) Si la f.m.m. real en el primario debiera ser 400 At (es decir igual que la del secundario) se debería cumplir:

$$(20 - j40) + 4 N_2 \angle -40,6^\circ = (20 - j40) + N_2 (3,037 - j2,603) = 400 \angle \alpha$$

es decir:

$$\sqrt{(20 + 3,037 N_2)^2 + (40 + 2,603 N_2)^2} = 400$$

de donde se obtiene $N_2 = 89,6$ espiras ≈ 90 espiras, es decir habrá que eliminar 10 espiras del devanado secundario.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

3.36. Un transformador monofásico de 10 kVA, 200/100 V; alimentado por la tensión asignada de 200 V, absorbe en vacío una corriente de 2,5 A, siendo las pérdidas en esta situación de 300 W. Se conecta una carga en el secundario que absorbe una potencia de 9 kVA, con f.d.p. 0,8 inductivo, siendo la tensión secundaria de 90 voltios. En estas condiciones el primario señala una potencia absorbida de 7,80 kW y una potencia reactiva de 6,2 kVAR. Calcular:

- Las caídas relativas de tensión del transformador ϵ_{Rcc} y ϵ_{Vcc} .
- La tensión primaria del transformador.

Nota: se puede aplicar la aproximación de Kapp. Supóngase que la corriente de vacío y las pérdidas de vacío son constantes.

Resp. a) $\epsilon_{Rcc} = 3\%$; $\epsilon_{Vcc} = 4\%$; b) 189,6 V

3.37. Se dispone de un transformador monofásico de 20 kVA, 400/200 V, $\epsilon_{cc} = 10\%$. Al alimentar el primario con una tensión de 371,2 V y conectando en el secundario una carga que absorbe 100 A, con f.d.p. unidad, se registra en el secundario una tensión de 180 V. Calcular la tensión necesaria en el primario para que la tensión secundaria sea de 150 V cuando el transformador alimenta una carga de 12 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo.

Resp. 332 V

3.38. Un transformador monofásico de 50 kVA dispone de un primario con 1200 espiras e impedancia $0,2 + j + 1 \Omega$; el secundario tiene 600 espiras y una impedancia de $0,04 + j 0,3 \Omega$. Las pérdidas en el hierro son despreciables y la reactancia magnetizante reducida al primario es de 200 Ω . Si se alimenta el primario con una tensión de 1000 V, calcular utilizando el circuito equivalente exacto del transformador:

- La tensión secundaria en vacío.
- La tensión secundaria cuando este devanado alimenta una carga que absorbe una corriente de 100 amperios con f.d.p. 0,8 inductivo.
- ¿Cuál es la reducción en % en la inducción magnética del transformador entre el funcionamiento en vacío y con la carga considerada en el apartado anterior?

Resp. a) 497,5 V; b) 456 V; c) 4%.

3.39. Se dispone de un transformador monofásico de 50 kVA, relación 1000/100 V, cuyos parámetros son:

$$\epsilon_{Rcc} = 6\%; \epsilon_{Vcc} = 8\%; P_{Fe} = 1000 \text{ W}$$

Si el transformador consume en vacío (con tensión nominal aplicada al primario) una corriente de 5 A, calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- ¿Cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,8 inductivo y sabiendo que en estas condiciones se trabaja con un índice de carga para el cual se tiene máximo rendimiento, siendo la tensión secundaria la nominal de 100 V? ¿Cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- Si el transformador alimenta una impedancia inductiva de $1 \angle 36,87^\circ \Omega$, con el primario alimentado por su tensión nominal de 1000 V ¿cuál será la tensión que aparecerá en bornes del secundario? ¿Cuál será la caída relativa de tensión o regulación del transformador en estas condiciones?

- d) Si se conecta en paralelo este transformador con otro de 100 kVA, relación 1000/100 V y con parámetros $\varepsilon_{Rcc} = 7\%$; $\varepsilon_{Xcc} = 7\%$, ¿cómo se repartirán una potencia de 100 kW con f.d.p. 0,707 inductivo, si se supone que la tensión secundaria es la nominal de 100 V? (es decir, calcular las potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por cada transformador).

Resp. a) $R_{cc} = 1,2 \Omega$; $X_{cc} = 1,6 \Omega$; $R_{Fe} = 1000 \Omega$; $X_m = 204,1 \Omega$;
 b) 1055,4 V; 92%; c) 98,1 V; 1,9%; d) 29,9 kW; 36,2 kVAR;
 46,9 kVA; 70,1 kW; 63,8 kVAR; 94,8 kVA.

- 3.40. Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1000/100 V, cuyos parámetros son:

$$\varepsilon_{Rcc} = 3\%; \varepsilon_{Xcc} = 4\%; P_{Fe} = \text{desconocida.}$$

El transformador anterior se conecta tal como se muestra en la Figura 3.34, alimentando a una carga en el secundario de valor: $Z \angle 30^\circ \Omega$, dando lugar a las siguientes lecturas de los aparatos de medida:

$$P_1 = 70\,150 \text{ W}; V_1 = 1\,000 \text{ V}; I_1 = 85 \text{ A}; \underline{I}_2 = 800 \text{ A}$$

Calcular:

- La lectura que señalará el voltímetro V_2 y rendimiento del transformado.
- Las pérdidas en el hierro del transformador y corriente de vacío.
- Si el transformador trabaja con un índice de carga óptimo y alimentando una carga resistiva ¿cuál será el rendimiento máximo del transformador en estas condiciones?

Nota: se puede utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador y la aproximación de Kapp.

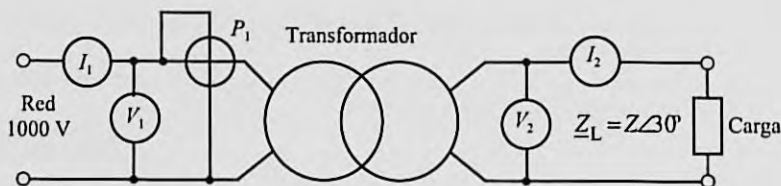


Figura 3.34

Resp. a) 96,31 V; 95,1%;
 b) 1504,5 W; 7,09 A; c) 95,92%

- 3.41. En la Figura 3.35 se muestra un transformador monofásico que alimenta una carga $Z_L = Z \angle \varphi$ y que dispone de diversos aparatos de medida eléctricos. En la placa de características del transformador figuran los siguientes datos: $S_N = 10 \text{ kVA}$; 1000/100 V; $\varepsilon_{cc} = 12,42\%$; $P_{cc} = 555 \text{ W}$; $P_0 = 400 \text{ W}$; $I_0 = 20\%$ (de la corriente nominal primaria).

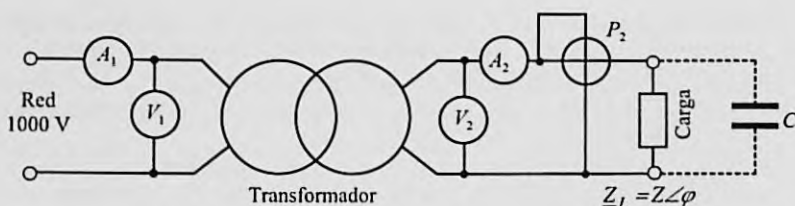


Figura 3.35

Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- Las lecturas que señalarán los amperímetros A_1 y A_2 (se puede aplicar la aproximación de Kapp), si el transformador alimenta la impedancia inductiva $Z_L = Z \angle \varphi$ y se han registrado las siguientes lecturas de los aparatos de medida: $V_1 = 1000$ V; $V_2 = 90$ V; $P_2 = 6480$ W.
- El valor de la impedancia $Z \angle \varphi$ y el rendimiento del transformador.
- Se desea elevar la tensión secundaria U_2 a su valor nominal de 100 V. Para ello se conecta una batería de condensadores en paralelo con la carga. ¿Cuál debe ser el valor de la capacidad necesaria si la tensión primaria es siempre de 1000 V? (se obtiene una solución lo suficientemente correcta aplicando la aproximación de Kapp).

Resp. a) $R_{Fe} = 2500 \Omega$; $X_{li} = 510 \Omega$; $R_{cc} = 5,55 \Omega$; $X_{cc} = 11,11 \Omega$;
 b) $A_1 = 10,58$ A; $A_2 = 90$ A; c) $0,8 + j 0,6 \Omega$; 85,14%; d) 3 183 μ F

3.42. Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1000/100 V, que ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

- Vacio: 100 V; 50 A; 2000 W (medidos en el lado de B.T.).
- Cortocircuito: 100 V; 100 A; 5000 W (medidos en el lado de A.T.).

Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (lado de A.T.).
- ¿Cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,9 inductivo sabiendo que en estas condiciones la máquina trabaja con un índice de carga para el cual el rendimiento es máximo? (la tensión secundaria se considera que es igual a 100 V). ¿Cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- Al conectar al transformador una impedancia inductiva $Z \angle 53,13^\circ \Omega$, con el transformador alimentado por su tensión nominal primaria (1000 V), se observa que la tensión secundaria es de 95,27 V. ¿Cuál es la magnitud Z de la impedancia?
- Con el fin de limitar la corriente de cortocircuito franco en el secundario (falta de cortocircuito) a un valor de 5000 A, siendo la tensión de la red de 1000 V, se intercalan entre la misma y el primario del transformador una reactancia inductiva $X_L \Omega$, ¿cuál es el valor de esta reactancia para que se cumpla la especificación mencionada?

Resp. a) $R_{Fe} = 500 \Omega$; $X_{li} = 218,1 \Omega$; $R_{cc} = 0,5 \Omega$; $X_{cc} = 0,866 \Omega$;
 b) 1052,3 V; 93,43%; c) $Z = 0,2 \Omega$; d) 1,07 Ω

3.43. Dos transformadores monofásicos de 10 kVA, relación 1000/100 V, se conectan en paralelo para alimentar una carga inductiva de impedancia $80 + j 60 \Omega$. La impedancia de cortocircuito del primer transformador reducida al secundario es de $5 + j 20 \Omega$ y la correspondiente del segundo vale $5 + j 10 \Omega$.

- Si la tensión secundaria en carga es de 100 V, ¿cuáles serán los valores de las corrientes suministradas por cada transformador?
- Si el segundo transformador tiene un cambiador de tomas en el secundario, calcular la reducción en tanto por ciento en la posición del cambiador de tomas para conseguir que las corrientes suministradas por ambos transformadores sean iguales.

Nota: supóngase que el cambio en el cambiador de tomas no modifica sensiblemente la impedancia de cortocircuito del transformador sobre el que actúa.

Resp. a) $I_1 \approx 0,354 \angle -45^\circ \text{ A}$; $I_{II} \approx 0,652 \angle -32,5^\circ \text{ A}$; b) 5,1% de reducción

3.44. Un transformador monofásico de 5 kVA tiene una impedancia reducida al secundario de $0,3 + j 1,5 \Omega$ y se conecta en paralelo con un transformador de 4 kVA y de impedancia reducida al secundario de $0,6 + j 1,6 \Omega$. Ambos transformadores alimentan una carga de 6 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las potencias aparentes, activas y reactivas que suministra cada transformador:

- Cuando la tensión secundaria en carga sea de 400 V;
- Cuando la tensión en vacío del primer transformador es de 405 V y la del segundo es de 415 V.

Resp. a) $S_1 \approx 3972 \angle 41,2^\circ \approx 2990 \text{ W} + j 2615 \text{ VAR}$; $S_{II} \approx 3560 \angle 32^\circ \approx 3010 \text{ W} + j 1885 \text{ VAR}$;
b) $S_1 \approx 3050 \angle 28^\circ \approx 2693 \text{ W} + j 1432 \text{ VAR}$; $S_{II} \approx 4570 \angle 40^\circ \approx 3500 \text{ W} + j 2938 \text{ VAR}$

3.45. Dos transformadores trifásicos de 350 kVA, Yy0, relación 20000/400 V, se conectan en paralelo para alimentar una carga que consume 1000 A, con f.d.p. 0,8 inductivo. Las caídas relativas de tensión del primer transformador son: $e_{Rcc} = 3\%$; $e_{Xcc} = 6\%$ y las correspondientes del segundo son: $e_{Rcc} = 2\%$; $e_{Xcc} = 4\%$. Calcular las potencias aparentes, activas y reactivas que suministra cada transformador:

- Cuando la tensión secundaria de carga sea de 400 V de línea.
- Cuando se modifica el cambiador de tomas del primer transformador para que suministre en vacío una tensión secundaria de línea de 410 V.
- ¿Cuál será en el caso anterior la tensión de línea de la carga?

Resp. a) $S_1 \approx 278 \text{ kVA} \angle 36,87^\circ \approx 222,3 \text{ kW} + j 166,7 \text{ kVAR}$; $S_{II} \approx 415 \text{ kVA} \angle 36,87^\circ \approx 331,7 \text{ kW} + j 248,9 \text{ kVAR}$;
b) $S_1 \approx 345 \text{ kVA} \angle 42^\circ \approx 257 \text{ kW} + j 232 \text{ kVAR}$; $S_{II} \approx 347 \angle 32^\circ \approx 294 \text{ kW} + j 184 \text{ kVAR}$; c) 384,1 V.

3.46. Un transformador monofásico de 50 kVA tiene una impedancia de cortocircuito reducida al secundario es $0,05 + j 0,2 \Omega$ y se conecta en paralelo con transformador de 25 kVA cuya impedancia reducida al secundario es de $0,15 + j 0,6 \Omega$. La tensión terminal en vacío del transformador de 50 kVA es de 510 V y la del transformador de 25 kVA es de 500 V. Calcular:

- La corriente que circula por los devanados secundarios con los transformadores conectados en vacío.
- Las corrientes secundarias que suministran cada transformador a una carga que absorbe 70 kW con f.d.p. unidad.
- La tensión terminal en la carga en el caso anterior.

Resp. a) 12,13 A; b) 104 A; y 33,6 A; c) 501,8 V

3.47. Se dispone de un transformador monofásico de 10 kVA, relación 500/100 V, que ha sido sometido a unos ensayos de vacío y cortocircuito, dando lugar a los siguientes resultados:

- Vacío (medidas realizadas en el lado de baja tensión): potencia absorbida: 200 W, tensión aplicada: 100 V, corriente absorbida: 8 A.
- Cortocircuito (medidas realizadas en el lado de alta tensión): potencia absorbida: 400 W, tensión aplicada: 25 V, corriente absorbida: 20 A.

Calcular

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario;
- Si el transformador alimenta a una carga con f.d.p. 0,8 capacitivo, con una potencia para la cual se consigue el máximo rendimiento del transformador (índice de carga óptimo) y si la tensión secundaria es la nominal de 100V ¿cuál será el valor de la tensión primaria necesaria U_1 y el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- El transformador alimenta ahora una carga de impedancia $2 + j 4 \Omega$ (ver Figura 3.36) a través de una línea de resistencia $0,5 \Omega$ /hilo; calcular las lecturas de los aparatos de medida: A_1 , V_2 y V_3 . La tensión primaria aplicada es la nominal de 500 V.
- Se desea ampliar la instalación para alimentar una carga de 20 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se acopla este transformador en paralelo con otro de 20 kVA, 500/100 V y parámetros: $\epsilon_{Rcc} = 3\%$; $\epsilon_{Xcc} = 4\%$; calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador, si la tensión secundaria se supone la nominal de 100 V? ¿Qué tensión primaria se requerirá para alimentar el conjunto?

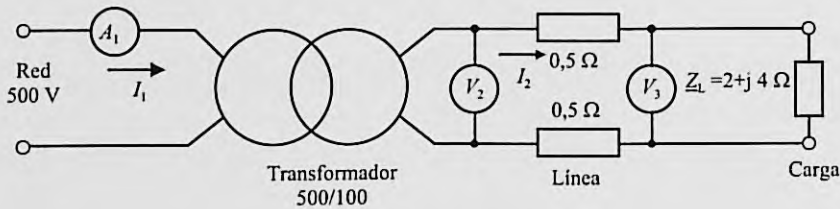


Figura 3.36

Resp. a) $R_{Fe} = 1250 \Omega$; $X_{ll} = 322,8 \Omega$; $R_{cc} = 1 \Omega$; $X_{cc} = 0,75 \Omega$; b) 505,2 V; 93,4%;
 c) $A_1 = 5,47A$; $V_2 = 99,1 V$; $V_3 = 88,6 V$; d) $S_{I1} \approx 8409 \angle 26^\circ \approx 7557 W + j 3687 VAR$;
 $S_{II} \approx 16817 \angle 42^\circ \approx 12493 W + j 11311 VAR$.

3.48. La Figura 3.37 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo para el suministro de agua a una pequeña finca. Se dispone de una red de distribución de 10000V, 50 Hz, que por medio de un transformador monofásico de 20 kVA, relación 10000/250 V suministra energía eléctrica a un grupo motobomba a través de una línea resistiva de $0,1 \Omega$ por hilo. El motor eléctrico del grupo motobomba se ha representado por una impedancia de $4 + j 3 \Omega$. Las características del transformador las ha suministrado el fabricante por medio de los ensayos del mismo, y son las siguientes:

- Vacío: 250 V; 10 A; 1000 W (medidos en el lado de B.T.).
- Cortocircuito: 800 V; 2 A; 800 W (medidos en el lado de A.T.).

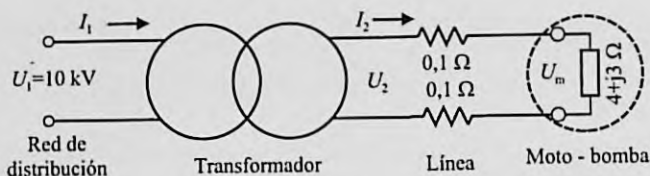


Figura 3.37

Calcular

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.
- La tensión secundaria del transformador y la tensión en bornes del grupo motobomba, si la red de distribución tiene una tensión constante de 10 kV.
- La corriente primaria absorbida por el transformador y el rendimiento del mismo en las condiciones anteriores.
- Si para corregir el f.d.p. del motor eléctrico del grupo motobomba se conecta en paralelo con el mismo una batería de condensadores de 382 μ F, ¿cuáles serán las nuevas tensiones en el secundario del transformador y en bornes del motor?

Resp. a) $R_{Fe} = 100 \text{ k}\Omega$; $X_m = 43,7 \text{ k}\Omega$; $R_{cc} = 200 \text{ }\Omega$; $X_{cc} = 346,4 \text{ }\Omega$;
 b) $U_2 = 239,5 \text{ V}$; $U_m = 232 \text{ V}$; c) 1,38 A; 87,7%; d) $U_2 = 245,1 \text{ V}$; $U_m = 237,5 \text{ V}$

3.49. El rendimiento para un f.d.p. unidad de un transformador monofásico de 100 kVA; 1000/200 V, 50 Hz es del 95,7%, tanto para la plena carga como para la media carga. Se sabe además que la caída de tensión relativa a plena carga con f.d.p. 0,8 capacitivo es nula. Calcular:

- Las pérdidas en vacío P_0 y las pérdidas en cortocircuito P_{cc} del transformador; así como las caídas de tensiones relativas ϵ_{Rcc} y ϵ_{Xcc} .
- El transformador alimenta un grupo motobomba que en régimen permanente absorbe una potencia de 40 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. ¿Cuál es la tensión primaria necesaria en el transformador y el rendimiento correspondiente si la tensión secundaria del transformador es la nominal: $U_2 = 200 \text{ V}$?
- La corriente secundaria suministrada por el transformador, su f.d.p. y también la tensión necesaria en el primario para mantener la tensión secundaria en 200 V, si el motor asincrono del grupo motobomba del apartado anterior tiene conectado en paralelo un condensador de 3000 μ F.

Nota:

- La red es de 50 Hz y la potencia eléctrica absorbida por el grupo motobomba sigue siendo de 40 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo.
- Se puede aplicar la fórmula aproximada de Kapp.

Resp. a) $P_0 \approx 1,5 \text{ kW}$; $P_{cc} \approx 3 \text{ kW}$; $\epsilon_{Rcc} = 3\%$; $\epsilon_{Xcc} = 4\%$;
 b) 1024 V; 94,5%; c) $I_2 = 203,7 \text{ A}$; 0,982 capacitivo; $U_1 = 1008,9 \text{ V}$.

3.50. Se dispone de tres transformadores de 400 kVA, 24 kV/400 V, conexión Dy11 con los siguientes parámetros: transformador I: $P_{ccl} = 5,8 \text{ kW}$; $\epsilon_{ccl} = 4\%$; transformador II: $P_{ccl} = 6 \text{ kW}$; $\epsilon_{ccl} = 4,5\%$; transformador III: $P_{ccl} = 5 \text{ kW}$; $\epsilon_{ccl} = 3,8\%$. Se acoplan en paralelo los tres transformadores. ¿Cuáles serán las potencias complejas que suministrarán cada uno cuando alimentan una carga trifásica de 1000 kVA, con f.d.p. 0,8 inductivo?

Resp. $S_{I1} \approx 340 \text{ kVA} \angle 38,13^\circ$; $S_{II} \approx 302,6 \angle 36,5^\circ$; $S_{III} \approx 357,4 \angle 36^\circ$

- 3.51. Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones estrella/estrella/triángulo tiene una relación de tensiones compuestas en vacío de 6600/660/220 V y absorbe en vacío una potencia de 10 kW con f.d.p. 0,2 inductivo. Calcular la potencia aparente del primario y su f.d.p. cuando el secundario alimenta una carga trifásica equilibrada de 800 A, con f.d.p. 0,8 inductivo y el terciario absorbe una corriente trifásica equilibrada de 300 A, con f.d.p. unidad.

Resp. 1 044 kVA, f.d.p. 0,82 inductivo

- 3.52. Un transformador trifásico con devanado terciario y conexiones estrella/estrella/triángulo tiene una relación de tensiones compuestas en vacío de 10000/1000/500 V y absorbe en vacío una corriente magnetizante de 5 A. El devanado secundario tiene una carga equilibrada de 500 kVA, con f.d.p. 0,8 inductivo y el devanado terciario tiene una carga equilibrada de 180 kW. Prescindiendo de las pérdidas, calcular las corrientes en las fases de los devanados primario y terciario, si el f.d.p. del primario es de 0,775 inductivo.

Resp. 43,2 A; 133,33 A

- 3.53. Se dispone de un transformador monofásico de 100 kVA, relación 1 000/100 V que ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

- Vacío: 100 V; 50 A; 3000 W (medidos en el lado de B.T.).
- Cortocircuito: 100 V; 100 A; 6000 W (medidos en el lado de A.T.).

Calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (lado de A.T.).
- ¿Cuál será la tensión que deberá aplicarse al primario cuando el transformador alimenta una carga con f.d.p. 0,8 inductivo, sabiendo que en estas condiciones la máquina trabaja con un índice de carga para el cual el rendimiento es máximo? (la tensión secundaria se considera que es igual a 100 V). ¿Cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?
- El transformador anterior se acopla en paralelo con otro de 200 kVA, 1000/100V y con parámetros ε_{RccII} y $\varepsilon_{\lambda cII}$ ilegibles en su placa de características. Se observa que cuando ambos transformadores alimentan una carga conjunta de 200 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, siendo la tensión secundaria la nominal de 100V, el nuevo transformador suministra a la carga una potencia activa de 155 kW y una potencia reactiva inductiva de 85 kVAR. Calcular los ε_{RccII} y $\varepsilon_{\lambda cII}$ del segundo transformador.

Resp. a) $R_{Fe} = 333,33 \Omega$; $X_{\mu} = 250 \text{ k}\Omega$; $R_{cc} = 0,6 \Omega$; $X_{cc} = 0,8 \Omega$;
 b) 1 068 V; 90%; c) $\varepsilon_{Rcc} = 8\%$; $\varepsilon_{\lambda c} = 4\%$.

- 3.54. Un transformador monofásico de 50 kVA, 1 000/200 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos:

- Vacío: 2000 W; 200 V; 25 A, medidos en el lado de baja tensión.
- Cortocircuito: 2 500 W; 100 V, 50 A, medidos en el lado de alta tensión.

Calcular

- Parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario;
- Se conecta una carga en el secundario que absorbe 20 kW con f.d.p. 0,8 inductivo; si la tensión secundaria es la nominal de 200 V, calcular la tensión primaria necesaria en el transformador y el rendimiento del transformador en estas condiciones;

- c) Se disponen de tres transformadores iguales al citado, que se conectan en estrella en la parte de A.T. (primario) y en estrella en la parte de baja tensión (secundario); si se alimenta el primario de esta combinación a una red trifásica de $1000\sqrt{3}$ V de línea, y se coloca en el secundario una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de impedancia $1,8 + j 2,4 \Omega/\text{fase}$, calcular la tensión secundaria de línea y el rendimiento del transformador en estas condiciones.

Resp. a) $R_{Fe} = 500 \Omega$; $X_{\mu} = 43,7 \text{ k}\Omega$; $R_{cc} = 1 \Omega$; $X_{cc} = 1,73 \Omega$; b) 1 046 V; 87,7%; c) U_2 (línea) = 185 V; 85,9%.

- 3.55. Un transformador tiene un rendimiento máximo del 98% cuando trabaja dando 15 kVA con f.d.p. unidad. Durante el día está cargado del modo siguiente:

- 12 horas suministrando una potencia activa de 2 kW con f.d.p. 0,5 inductivo.
- 6 horas suministrando una potencia aparente de 15 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo.
- 6 horas suministrando una potencia activa de 18 kW con f.d.p. 0,9 inductivo.

Calcular el rendimiento del transformador en un día completo.

Resp. 97%

- 3.56. En el circuito de la Figura 3.38 se muestra el esquema unifilar de una red de distribución trifásica alimentada por un transformador Yd11, de relación 10 kV/4000 V, en el que se consideran despreciables la corriente de magnetización y de pérdidas en el hierro. Al realizar un ensayo de cortocircuito del transformador (cortocircuitando el secundario), se aplicó al primario una tensión de línea de $800\sqrt{3}$ V, resultando una corriente primaria de 2000 A, con f.d.p. 0,60.

La impedancia por hilo de la línea trifásica desde D hasta E es $0,1 + j 0,2 \Omega$ y la de E hasta F es de $0,3 + j 0,4 \Omega$. En el nudo E hay una carga conectada en estrella que absorbe 1000 A, con f.d.p. 0,6 inductivo y en el nudo F existe una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de impedancia $5\sqrt{3} \angle 36,87^\circ \Omega/\text{fase}$. Calcular:

- La tensión que debe tener el primario del transformador para que en el nudo F la tensión compuesta sea de 2500 V;
- Si manteniendo la tensión primaria constante en el valor calculado en el apartado anterior, se desconecta la carga conectada en el nudo E ¿cuál será el valor que alcanzará la tensión en el nudo F?

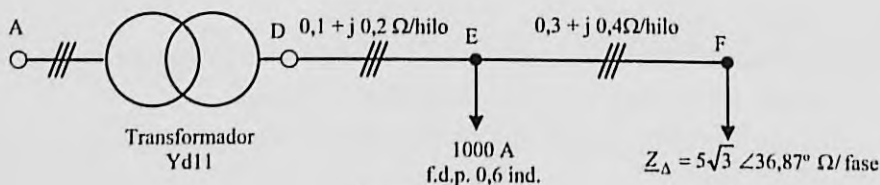


Figura 3.38

Resp. a) U_1 (línea) = 9730 V; b) U_F (línea) = 3089 V

3.57. En la Figura 3.39 se muestra el esquema unifilar de un sistema eléctrico de potencia, que está formado por un generador trifásico de 750 kVA, 3 kV, 50 Hz, que alimenta dos cargas a través de una red de transporte y que tiene dos transformadores triángulo-estrella en cada extremo con los parámetros señalados en la figura (se desprecia la corriente de vacío de los transformadores). La carga 1 es trifásica y equilibrada y consume 150 kW, con f.d.p. 0,8 inductivo y la carga 2 es una batería de condensadores puestos en triángulo de 100 kVAR. Inicialmente el interruptor S está abierto. Calcular

- La tensión que debe producir el generador de principio de línea para que en la carga 1 la tensión compuesta sea de 3 kV.
- La potencia activa y reactiva que debe suministrar el generador.
- El rendimiento de la instalación, definido como cociente entre la potencia activa al final de la línea (en la carga) y la potencia activa al principio de línea (generador).
- Repetir los apartados anteriores cuando se cierra el interruptor S y se incluye la batería de condensadores en la instalación.

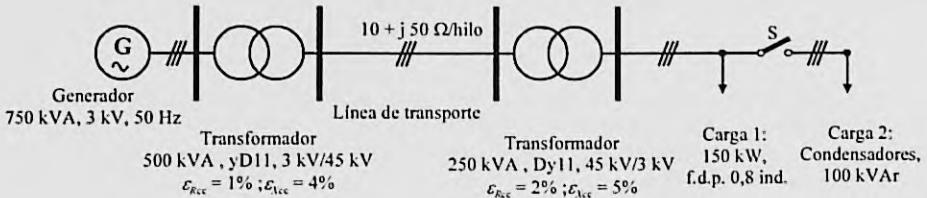


Figura 3.39

Resp. a) 3 151,7 V; b) 153,7 kW; 123,2 kVAR; c) 97,6%; d) 3 061,6 V; 152,4 kW; 19,4 kVAR; 98,4%.

3.58. Un transformador monofásico con valores asignados de 10 kVA, 400/100 V tiene una impedancia de cortocircuito referida al primario de $0,6 + j 0,8 \Omega$. Las pérdidas en el hierro de 250 W y puede prescindirse de la corriente de magnetización. Se conectan las bobinas del transformador en serie para construir un autotransformador elevador de tensión de relación 400/500 V. Calcular:

- La potencia de plena carga que puede asignarse a este autotransformador;
- Si el autotransformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo y la tensión secundaria es de 500 V, ¿cuál será la tensión necesaria en el primario?
- Calcular el rendimiento en el caso anterior.
- Repetir el problema si las bobinas se unen del modo adecuado para construir un autotransformador reductor de tensión de relación 500/100 v funcionando a la plena carga correspondiente con $u_2 = 100 \text{ V}$ y f.d.p. 0,8 inductivo.

Resp. a) 50 kVA; b) 404,8 V; c) 98,46%; d) 12,5 kVA; 524,05 V; 94,12%

3.59. Se han realizado unos ensayos en un autotransformador monofásico de 25 kVA, 440/220 V, 50 Hz, dando los siguientes resultados:

- Vacío: 264 W; 440 V; 1,5 A (medidos en el primario).
- Cortocircuito: 568 W; 20 V; 56,8 A (medidos en el primario).

Se pide:

- Si el secundario alimenta a 220 V una carga que consume 100 A, con f.d.p. 0,8 inductivo, calcular la tensión primaria necesaria en el autotransformador.
- Determinar el rendimiento del autotransformador en el caso anterior.

Resp. a) 456,2 V; b) 96%

3.60. Un transformador de corriente de relación 500/5 tiene una impedancia del devanado secundario $Z_2 = 0,02 + j 0,03 \Omega$. La corriente de imanación y la componente de pérdidas en el hierro en función de la f.e.m. inducida en secundario E_2 se pueden expresar respectivamente por las ecuaciones siguientes:

$$I_\mu = \frac{16E_2}{6 + E_2}; I_{Fe} = \frac{10E_2}{2,3 + E_2}$$

El devanado primario tiene una sola espira y el devanado secundario tiene 100 espiras y se carga con un montaje en serie de un amperímetro de impedancia $0,08 + j 0,09 \Omega$, la bobina de intensidad de un vatímetro de impedancia $0,10 + j 0,07 \Omega$ y un relé de máxima corriente de impedancia $0,14 + j 0,08 \Omega$. La corriente que circula por estos aparatos de medida y protección es de 4 A.

- Calcular el error de corriente y de fase del transformador de intensidad cuando todos los instrumentos están en el circuito.
- Responder a la pregunta anterior si solamente está el vatímetro en el circuito.
- Calcular, en los casos anteriores, la potencia aparente del transformador de corriente.

Resp. a) $\varepsilon_i = -1,36\%$; $\delta = -0,17^\circ = -10'12''$;
b) $\varepsilon_i = -0,62\%$; $\delta = -6'36$; c) 6,4 VA; 1,95 VA

Máquinas asíncronas

Contenido

- 4.1. Principio de funcionamiento del motor asíncrono
- 4.2. Circuito equivalente del motor asíncrono
- 4.3. Ensayo de vacío o de rotor libre del motor asíncrono
- 4.4. Ensayo de rotor bloqueado del motor asíncrono
- 4.5. Balance de potencias de la máquina asíncrona
- 4.6. Par de rotación de la máquina asíncrona
- 4.7. Arranque de los motores asíncronos
- 4.8. Dinámica del motor asíncrono
- 4.9. Motor asíncrono monofásico
- Ejercicios resueltos
- Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

4.1. Principio de funcionamiento del motor asíncrono

a) Velocidad de sincronismo del campo magnético giratorio

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \quad [\text{r/min}] \quad (4.1)$$

n_1 : velocidad de sincronismo;
 f_1 : frecuencia del estátor;
 p : pares de polos.

b) Deslizamiento del motor

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (4.2)$$

n_1 : velocidad de sincronismo (r/min);
 n : velocidad del rotor (r/min).

c) Frecuencia del rotor

$$f_2 = s f_1 \quad (4.3)$$

f_2 : frecuencia de las corrientes del rotor;
 f_1 : frecuencia de las corrientes del estátor.

d) F.e.m. por fase del estátor y del rotor (a rotor parado)

$$E_1 = 4,44 k_{w1} f_1 N_1 \Phi_m; \quad E_2 = 4,44 k_{w2} f_1 N_2 \Phi_m \quad (4.4)$$

E_1 : valor eficaz de la f.e.m. por fase del estátor,
 N_1 : número de espiras por fase;
 Φ_m : flujo máximo;
 $k_{w1} = k_{d1} k_{p1}$: coeficiente del devanado del estátor;
 k_{d1} : coeficiente de distribución;
 k_{p1} : coeficiente de paso;
 E_2 : valor eficaz de la f.e.m. por fase del rotor,
 N_2 : número de espiras por fase;
 $k_{w2} = k_{d2} k_{p2}$: coeficiente del devanado del rotor.

e) F.e.m. por fase del rotor (con rotor móvil)

$$E_{2s} = 4,44k_{w2}f_2N_2\phi_m \quad (4.5)$$

f) Relación entre las f.e.m. por fase del rotor en reposo y en movimiento

$$E_{2s} = sE_2 \quad (4.6)$$

E_{2s} : f.e.m. por fase del rotor en movimiento;

E_2 : f.e.m. por fase del rotor parado.

g) Velocidad de sincronismo del campo magnético del rotor respecto a sí mismo

$$n_2 = \frac{60 f_2}{p} \quad (4.7)$$

f_2 : frecuencia del rotor en movimiento;

n_2 : velocidad del campo magnético del rotor en r/min.

h) Ecuaciones de tensión en el estátor y en el rotor

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 + R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1; \quad \underline{E}_{2s} = R_2 \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 \quad (4.8)$$

\underline{U}_1 : tensión aplicada al estátor por fase;

\underline{E}_1 : f.e.m. inducida en el estátor por fase;

\underline{I}_1 : corriente que circula en el estátor por fase;

R_1 : resistencia por fase del estátor;

X_1 : reactancia por fase del estátor;

\underline{E}_{2s} : f.e.m. inducida en el rotor por fase (rotor móvil);

\underline{I}_2 : corriente que circula por el rotor por fase;

R_2 : resistencia por fase del rotor;

X_2 : reactancia por fase del rotor (rotor móvil).

4.2. Circuito equivalente del motor asíncrono

a) Corriente del rotor (rotor móvil)

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_{2s}}{R_2 + jX_2} \quad (4.9)$$

\underline{E}_{2s} : f.e.m. inducida en el rotor por fase (rotor móvil);

\underline{I}_2 : corriente que circula por el rotor por fase;

R_2 : resistencia por fase del rotor;

X_2 : reactancia por fase del rotor (rotor móvil);

b) Corriente del rotor (rotor móvil)

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + jX_2 + R_2\left(\frac{1}{s} - 1\right)} \quad (4.10)$$

c) Resistencia de carga del rotor

$$R_c = R_2\left(\frac{1}{s} - 1\right) \quad (4.11)$$

d) Relación de transformación de tensiones

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_{w1}N_1}{k_{w2}N_2} = r_{tu} \quad (4.12)$$

- E_1 : f.e.m. inducida en el estátor por fase;
 E_2 : f.e.m. inducida en el rotor por fase (a rotor parado);
 k_{w1} : coeficiente de devanado del estátor;
 k_{w2} : coeficiente de devanado del rotor;
 N_1 : número de espiras por fase del estátor;
 N_2 : número de espiras por fase del rotor.

e) F.e.m. del rotor en reposo reducida al estátor

$$E'_2 = r_{tu}E_2 \quad (4.13)$$

- E'_2 : f.e.m. del rotor en reposo por fase reducida al estátor;
 E_2 : f.e.m. del rotor en reposo por fase;
 r_{tu} : relación de transformación de tensiones.

f) Relación de transformación de corrientes

$$r_{ti} = \frac{m_1k_{w1}N_1}{m_2k_{w1}N_2} = \frac{m_1}{m_2}r_{tu} \quad (4.14)$$

- m_1 : número de fases del estátor (generalmente $m_1 = 3$);
 m_2 : número de fases del rotor.

g) Corriente del rotor reducida al estátor

$$I'_2 = \frac{I_2}{r_{ti}} \quad (4.15)$$

- I'_2 : corriente del rotor reducida al estátor;
 I_2 : corriente del rotor.

h) Impedancias del rotor reducidas al estátor

$$R_2' = r_{ra} r_{rl} R_2; X_2' = r_{ra} r_{rl} X_2; R_c' = r_{ra} r_{rl} R_c \quad (4.16)$$

R_2' :	resistencia del rotor por fase reducida al estátor;
R_2 :	resistencia del rotor por fase;
X_2' :	reactancia del rotor en reposo por fase reducida al estátor;
X_2 :	reactancia del rotor en reposo por fase; relación
r_{ra} :	relación de transformación de tensiones;
r_{rl} :	relación de transformación de corrientes.

i) Relación fasorial entre las corrientes del estátor y del rotor

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_2' = \underline{I}_0 + \frac{\underline{I}_2}{r_{rl}} \quad (4.17)$$

\underline{I}_0 : corriente de vacío.

j) Ecuaciones fasoriales de tensiones del estátor y del rotor

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 + R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1; \underline{E}_2 = R_2 \underline{I}_2 + R_c \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 \quad (4.18)$$

4.3 Ensayo de vacío o de rotor libre del motor asíncrono

a) Potencia en vacío absorbida por el motor

$$P_0 = P_{fe} + P_{fw} + P_{cu1} \quad (4.19)$$

P_0 :	potencia absorbida en vacío;
P_{fe} :	pérdidas en el hierro;
P_{fw} :	pérdidas mecánicas (rozamiento + ventilación);
P_{cu1} :	pérdidas en el cobre del estátor en vacío.

b) Relación de potencias en vacío

$$P_{fe} + P_{fw} = P_0 - P_{cu1} = P_0 - m_1 R_1 I_0^2 \quad (4.20)$$

m_1 : número de fases del estátor (generalmente $m_1 = 3$).

c) F.d.p. en vacío

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_{fe}}{m_1 U_{1N} I_0} \quad (4.21)$$

d) Componentes de la corriente de vacío

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 ; \quad I_{\mu} = I_0 \sin \varphi_0 \quad (4.22)$$

e) Componentes de la rama paralelo del circuito equivalente reducido al estátor

$$R_{Fe} = \frac{U_{IN}}{I_{Fe}} ; \quad X_{\mu} = \frac{U_{IN}}{I_{\mu}} \quad (4.23)$$

4.4. Ensayo de rotor bloqueado del motor asíncrono

a) Potencia absorbida por el motor con el rotor bloqueado

$$P_{cc} = m_1 U_{1cc} I_{1N} \cos \varphi_{cc} \quad (4.24)$$

P_{cc} : potencia absorbida en cortocircuito con corriente nominal asignada;

U_{1cc} tensión aplicada por fase al estátor;

I_{1N} : corriente de cortocircuito igual a la nominal;

$\cos \varphi_{cc}$: f.d.p. en cortocircuito.

b) Factor de potencia del motor con el rotor bloqueado

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{m_1 U_{1cc} I_{1N}} \quad (4.25)$$

c) Impedancia de la rama serie del motor asíncrono

$$R_{cc} = R_1 + R_2' = \frac{U_{1cc}}{I_{1N}} \cos \varphi_{cc} ; \quad X_{cc} = X_1 + X_2' = \frac{U_{1cc}}{I_{1N}} \sin \varphi_{cc} \quad (4.26)$$

4.5. Balance de potencias de la máquina asíncrona

a) Potencia eléctrica de entrada al estátor

$$P_1 = m_1 U_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (4.27)$$

P_1 : potencia de entrada al estátor (potencia eléctrica absorbida de la red);

m_1 : número de fases del estátor;

U_1 : tensión del estátor por fase;

I_1 : corriente del estátor por fase;

$\cos \varphi_1$: f.d.p. del motor (f.d.p. del estátor).

b) Pérdidas en el cobre del estátor

$$P_{\text{Cu1}} = m_1 R_1 I_1^2 \quad (4.28)$$

- P_{Cu1} : pérdidas en el cobre del estátor;
 R_1 : resistencia por fase del estátor;
 I_1 : corriente del estátor por fase;
 m_1 : número de fases del estátor.

c) Pérdidas en el estátor

$$P_{\text{pl}} = P_{\text{Cu1}} + P_{\text{Fe1}} \quad (4.29)$$

- P_{pl} : pérdidas en el estátor;
 P_{Cu1} : pérdidas en el cobre del estátor;
 P_{Fe1} : pérdidas en el hierro del estátor.

d) Pérdidas en el hierro del estátor

$$P_{\text{Fe}} = P_{\text{Fe1}} = m_1 E_1 I_{\text{Fe}} \approx m_1 U_1 I_{\text{Fe}} \quad (4.30)$$

- P_{Fe1} : pérdidas en el hierro del estátor (son las únicas pérdidas en el hierro del motor);
 m_1 : número de fases del estátor;
 E_1 : f.e.m. del estátor por fase;
 I_{Fe} : corriente de pérdidas en el hierro;
 U_1 : tensión del estátor por fase.

e) Potencia que atraviesa el entrehierro

$$P_{\text{e}} = P_1 + P_{\text{pl}} = P_1 - P_{\text{Cu1}} - P_{\text{Fe1}} \quad (4.31)$$

- P_{e} : potencia en el entrehierro;
 P_1 : potencia de entrada al estátor;
 P_{pl} : pérdidas en el estátor;
 P_{Cu1} : pérdidas en el cobre del estátor;
 P_{Fe1} : pérdidas en el hierro del estátor.

f) Pérdidas en el cobre del rotor

$$P_{\text{Cu2}} = m_2 R_2 I_2^2 = m_1 R_2' I_2'^2 \quad (4.32)$$

- P_{Cu2} : pérdidas en el cobre del rotor;
 R_2 : resistencia por fase del rotor;
 I_2 : corriente del rotor por fase;
 m_2 : número de fases del rotor;
 m_1 : número de fases del estátor;
 R_2' : resistencia por fase del rotor reducida al estátor;
 I_2' : corriente del rotor por fase reducida al estátor.

g) Potencia mecánica interna del motor

$$P_{mi} = P_g - P_{Cu2} \quad (4.33)$$

- P_{mi} : potencia mecánica interna;
 P_g : potencia de entrehierro;
 P_{Cu2} : pérdidas en el cobre del rotor.

h) Expresión de la potencia mecánica interna del motor

$$P_{mi} = m_1 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_2'^2 \quad (4.34)$$

- P_{mi} : potencia mecánica interna del motor;
 m_1 : número de fases del estátor;
 R_2' : resistencia por fase del rotor reducida al estátor;
 I_2' : corriente del rotor por fase reducida al estátor;
 s : deslizamiento del motor.

i) Potencia mecánica útil del motor:

$$P_{mec} = P_{mi} - P_{fw} \quad (4.35)$$

- P_{mec} : potencia mecánica útil;
 P_{mi} : potencia mecánica interna;
 P_{fw} : pérdidas mecánicas del motor.

j) Rendimiento del motor

$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_1} = \frac{P_{mec}}{P_{mec} + P_{fw} + P_{Cu2} + P_{fe} + P_{Cu1}} \quad (4.36)$$

k) Relación entre la potencia de pérdidas en el cobre del rotor y la potencia mecánica útil

$$\frac{P_{Cu2}}{P_{mi}} = \frac{s}{1-s} \quad (4.37)$$

- P_{Cu2} : pérdidas en el cobre del rotor;
 P_{mi} : potencia mecánica interna;
 s : deslizamiento del motor.

l) Relación entre la potencia de entrehierro, la potencia de pérdidas en el cobre del rotor y la potencia mecánica útil

$$P_g = P_{mi} + P_{Cu2} = m_1 \frac{R_2'}{s} I_2'^2 = \frac{P_{Cu2}}{s} = \frac{P_{mi}}{1-s} \quad (4.38)$$

- P_g : potencia en el entrehierro;
 P_{Cu2} : pérdidas en el cobre del rotor;
 P_{mi} : potencia mecánica interna;
 s : deslizamiento del motor.

4.6. Par de rotación de la máquina asíncrona

a) Expresión del par motor útil

$$T = \frac{P_{mec}}{\Omega} = \frac{P_{mec}}{2\pi \frac{n}{60}} \quad (4.39)$$

- T : par motor en $N \cdot m$;
 P_{mec} : potencia útil del motor;
 Ω : velocidad angular mecánica en rad/s;
 n : velocidad del rotor en r/min.

b) Expresión del par motor (sin pérdidas mecánicas)

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n}{60}} \quad (4.40)$$

- T : par motor en $N \cdot m$;
 P_{mi} : potencia mecánica interna del motor;
 n : velocidad del rotor en r/min.

c) Expresión del par motor (sin pérdidas mecánicas)

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n_1}{60} (1-s)} \quad (4.41)$$

- T : par motor en $N \cdot m$;
 P_{mi} : potencia mecánica interna del motor;
 n_1 : velocidad de sincronismo en r/min;
 s : deslizamiento del motor.

d) Expresión del par motor en función de la potencia de entrehierro

$$T = \frac{P_g}{2\pi \frac{n_1}{60}} \quad (4.42)$$

- T : par motor en $N \cdot m$;
 P_g : potencia de entrehierro;
 n_1 : velocidad de sincronismo en r/min.

e) Expresión del par motor en función de los parámetros de la máquina

$$T = \frac{m_1 \frac{R_2'}{s} U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} \quad (4.43)$$

- T : par motor en N · m;
 m_1 : número de fases del estátor;
 R_2' : resistencia por fase del rotor reducida al estátor;
 I_2' : corriente del rotor por fase reducida al estátor.
 U_1 : tensión del estátor por fase;
 n_1 : velocidad de sincronismo en r/min;
 s : deslizamiento del motor.

f) Deslizamiento del motor para el par máximo

$$s_m = \pm \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad (4.44)$$

- s_m : deslizamiento del motor para el par máximo;
 R_2' : resistencia por fase del rotor reducida al estátor;
 X_{cc} : reactancia de cortocircuito del motor.

Nota: el signo más se utiliza para funcionamiento como motor y el signo menos para el funcionamiento como generador.

g) Expresión del par máximo del motor

$$T_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} \left[\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} \right]} \quad (4.45)$$

h) Relación entre los deslizamientos para el par máximo con diversas resistencias en el circuito del rotor

$$\frac{s_m}{s_m'} = \frac{R_{T2}'}{R_2'} \quad (4.46)$$

- s_m : deslizamiento del motor para el par máximo;
 R_2' : resistencia por fase del rotor reducida al estátor;
 s_m' : deslizamiento del motor para el par máximo;
 R_{T2}' : resistencia total por fase del rotor reducida al estátor.

j) Fórmula de Kloss

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2(1 + as_m)}{\frac{s}{s_m} + 2 + \frac{s_m}{s}} \quad (4.47)$$

- s_m : deslizamiento del motor para
 T_{\max} : $a = R_1/R_2' R_2'$;
 s : deslizamiento del motor para el par genérico T .



j) Relación de deslizamientos para el mismo par y diversas resistencias en el circuito del rotor

$$\frac{s'}{s} = \frac{R_{12}'}{R_2'} \quad (4.48)$$

Significado geométrico: a igualdad de pares en las curvas características artificiales y en la natural de un motor asíncrono, el deslizamiento en la característica artificial respecto a la natural, coincide con el cociente de resistencias totales en el rotor correspondientes a cada curva.

k) Expresión de la curva del par de un motor asíncrono para bajos deslizamientos

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2s}{s_m} \quad (4.49)$$

l) Expresión de la curva del par de un motor asíncrono para grandes deslizamientos

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2s_m}{s} \quad (4.50)$$

4.7. Arranque de los motores asíncronos

a) Relación del par de arranque con autotransformador y el par de arranque en directo

$$T_{a,\text{aut}} = x^2 T_a \quad (4.51)$$

- $T_{a,\text{aut}}$: par de arranque con autotransformador;
 T_a : par de arranque directo (con tensión nominal);
 x : relación de tensiones entre la tensión por fase del secundario del autotransformador y la tensión por fase de red aplicada al primario del mismo.

b) Corriente de arranque en directo

$$I_{cc} = \frac{U_{\text{red}}}{Z_{cc}}; \quad Z_{cc} = \sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} \quad (4.52)$$

- $U_{1\text{red}}$: tensión por fase de la red;
 I_{cc} : corriente de arranque en directo;
 Z_{cc} : impedancia de cortocircuito del motor.

c) Corriente de arranque con tensión reducida

$$I_{a,\text{motor}} = \frac{xU_{1\text{red}}}{Z_{cc}} = xI_{cc} \quad (4.53)$$

d) Relación del par de arranque con la conmutación estrella-triángulo y el par de arranque en directo

$$T_{aY} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 T_a = \frac{1}{3} T_a \quad (4.54)$$

e) Relación de la corriente de arranque con la conmutación estrella-triángulo y la corriente de arranque en directo

$$I_{aY} = \frac{1}{3} I_{cc} \quad (4.55)$$

f) Resistencia reducida al estátor, necesaria para obtener el par máximo en el arranque (motores con rotor devanado)

$$R'_{\text{adic}} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R_2' \quad (4.56)$$

4.8. Dinámica del motor asíncrono

a) Par de aceleración

$$T - T_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \quad (4.57)$$

- T : par motor;
 T_r : par resistente;
 J : momento de inercia del rotor;
 Ω : velocidad angular en rad/s.

b) Par de aceleración en función del deslizamiento

$$T - T_r = -J\Omega_1 \frac{ds}{dt} \quad (4.58)$$

- T : par motor;
 T_r : par resistente;
 J : momento de inercia del rotor;
 Ω_1 : velocidad angular del campo magnético giratorio en rad/s;
 s : deslizamiento.

c) Tiempo de arranque

$$t_\Lambda = -\frac{J\Omega_1}{2T_{\max}} \left[\frac{s_1^2 - s_2^2}{2s_m} + s_m \ln \frac{s_1}{s_2} \right] \quad (4.59)$$

d) Pérdidas de energía en el arranque y en el frenado de un motor asíncrono

$$\Delta W_a = \frac{J\Omega_1^2}{2} + \frac{J\Omega_1^2}{2} \frac{R_1}{R_2}; \quad \Delta W_f = 3 \frac{J\Omega_1^2}{2} \left[1 + \frac{R_1}{R_2} \right] \quad (4.60)$$

- ΔW_a : pérdida de energía en el arranque;
 ΔW_f : pérdida de energía en el frenado.

4.9. Motor asíncrono monofásico

a) Deslizamiento del campo giratorio directo

$$s_d = s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \quad (4.61)$$

- s_d : deslizamiento del campo giratorio directo;
 n : velocidad de giro del motor (en r/min);
 n_1 : velocidad de sincronismo del campo giratorio (en r/min).

b) Deslizamiento del campo giratorio inverso

$$s_i = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \quad (4.62)$$

- s_i : deslizamiento del campo giratorio inverso;
 n : velocidad de giro del motor (en r/min);
 n_1 : velocidad de sincronismo del campo giratorio (en r/min);
 s : deslizamiento directo.

c) Resistencia de carga del circuito equivalente para el campo directo e inverso, respectivamente

$$R'_{cd} = \frac{R'_2}{2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{R'_2}{2} \frac{1-s}{s}; \quad R'_{ci} = \frac{R'_2}{2} \left(\frac{1}{2-s} - 1 \right) = -\frac{R'_2}{2} \frac{1-s}{2-s} \quad (4.63)$$

- R'_{cd} : resistencia de carga del campo directo;
 R'_2 : resistencia del rotor reducida al estátor;
 R'_{ci} : resistencia de carga del campo inverso;
 s : deslizamiento.

d) Potencia mecánica interna del motor asíncrono monofásico

$$P_m = (P_m)_d + (P_m)_i = \frac{R'_2}{2} (1-s) \left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s} \right] \quad (4.64)$$

- P_m : potencia mecánica interna;
 I'_{2d} : corriente del rotor reducida al estátor del campo directo;
 I'_{2i} : corriente del rotor reducida al estátor del campo inverso;
 s : deslizamiento.

e) Par del motor asíncrono monofásico

$$T = \frac{P_m}{\Omega_1(1-s)} = \frac{1}{\Omega_1} \cdot \frac{R'_2}{2} \left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s} \right] \quad (4.65)$$

- P_m : potencia mecánica interna;
 Ω_1 : velocidad de sincronismo en rad/s;
 I'_{2d} : corriente del rotor reducida al estátor del campo directo;
 I'_{2i} : corriente del rotor reducida al estátor del campo inverso;
 s : deslizamiento.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1.** La potencia absorbida por un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, es de 4,5 kW cuando gira a 1 440 r/min. Las pérdidas totales en el estátor son de 250 W y las de rozamiento y ventilación son de 300 W. Calcular:
- El deslizamiento.
 - Las pérdidas en el cobre del rotor.
 - La potencia útil en el árbol del motor.
 - El rendimiento.

Solución

- a) La velocidad de sincronismo del campo giratorio del motor vale:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

y teniendo en cuenta que el rotor gira a 1 435 r/min, el deslizamiento es igual a:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1\,500 - 1\,440}{1\,500} = 4\%$$

- b) La potencia que atraviesa el entrehierro es:

$$P_g = P_1 - P_{p1} = 4\,500 - 250 = 4\,250 \text{ W}$$

y por lo tanto, las pérdidas en el cobre del rotor son:

$$P_{Cu2} = s P_g = 0,04 \cdot 4\,250 = 170 \text{ W}$$

- c) En consecuencia, la potencia mecánica útil en el eje o árbol del motor es:

$$P_{mec} = P_g - P_{pw} - P_{Cu2} = 4\,500 - 250 - 170 = 4\,080 \text{ W}$$

- d) El rendimiento del motor es el cociente entre la potencia mecánica útil y la potencia eléctrica absorbida de la red, es decir:

$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_1} = \frac{4\,080}{4\,500} = 90,67\%$$

- 4.2.** Un motor de inducción trifásico, de 8 polos, 7,5 kW, 400V, gira a 720 r/min a plena carga. Si el rendimiento y el f.d.p. a esta carga son del 83% y 0,75, respectivamente, calcular:

- La velocidad de sincronismo del campo giratorio.
- El deslizamiento a plena carga.
- La corriente de línea.
- El par en el árbol de la máquina.

Nota: la frecuencia del estátor es $f_1 = 50 \text{ Hz}$.

Solución

a) La velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{4} = 750 \text{ r/min}$$

b) Al girar el motor a 720 r/min, el deslizamiento vale:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{750 - 720}{750} = 4\%$$

c) La potencia mecánica útil es de 7,5 kW y como el rendimiento del motor es del 83%, se tiene una potencia eléctrica absorbida de la red:

$$P_1 = \frac{P_{mec}}{\eta} = \frac{7500}{0,83} = 9036,1 \text{ W}$$

La potencia anterior es igual a:

$$P_1 = 9036,1 \text{ W} = \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot I_1 \cdot 0,75$$

de donde se deduce una corriente de línea:

$$I_1 = 17,4 \text{ A}$$

d) El par mecánico es igual a:

$$T = \frac{P_{mec}}{\Omega} = \frac{7500}{2\pi \frac{720}{60}} = 99,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.3. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, conectado en estrella se alimenta por una red de 400 V, 50 Hz. La impedancia del estátor es igual a $0,1 + j 0,4 \Omega/\text{fase}$ y la del rotor en reposo reducida al estátor vale $0,1 + j 0,3 \Omega/\text{fase}$. Calcular:

- La intensidad absorbida en el arranque.
- La corriente a plena carga, si el deslizamiento es del 4%.
- La potencia y el par nominal.
- El rendimiento en el caso anterior, si las pérdidas en el hierro son iguales a 1500 W.

Nota: se desprecian las pérdidas mecánicas y en hierro del motor.

Solución

a) La velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

y velocidad del rotor de la máquina es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \Rightarrow n = n_1(1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0,04) = 1440 \text{ r/min}$$

En la Figura 4.1 se muestra el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estator o primario en el que se ha despreciado la rama paralelo. En el arranque, el deslizamiento es $s = 1$, por lo que la resistencia de carga $R'_c = 0$ y la corriente de arranque vale:

$$I_a = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(0,1 + j 0,4) + (0,1 + j 0,3)} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{0,2 + j 0,7} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{0,728 \angle 74,05^\circ} = 317,2 \angle -74,05^\circ \text{ A}$$

donde se ha tenido en cuenta que el estator está conectado en estrella. La magnitud de la corriente de arranque es igual a 317,2 A.

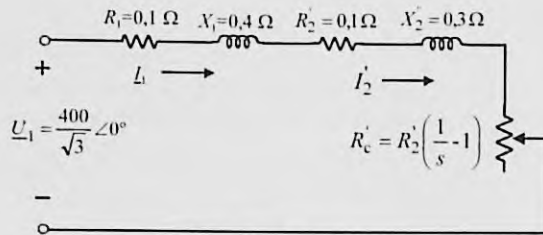


Figura 4.1

b) La corriente de plena carga, se obtiene del circuito de la Figura 4.1, tomando el deslizamiento de plena carga, que a su vez es igual al 4%; de este modo, se obtiene:

$$I_2 = I_1 = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{(0,1 + j 0,4) + (0,1 + j 0,3) + 0,1 \left(\frac{1}{0,04} - 1 \right)} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{2,6 + j 0,7} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{2,693 \angle 15,07^\circ} = 85,8 \angle -15,07^\circ \text{ A}$$

es decir el motor absorbe a plena carga una corriente de 85,8 A, con un f.d.p. igual al $\cos 15,07^\circ = 0,966$.

c) La potencia mecánica interna del motor, que al despreciar las pérdidas mecánicas, coincide con la potencia mecánica útil, es igual a la potencia disipada en la resistencia de carga de la máquina, es decir:

$$P_{\text{mec}} = 3R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_1^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 85,8^2 = 52,95 \text{ kW}$$

y por consiguiente, el par de plena carga o par asignado es:

$$T = \frac{P_{\text{mec}}}{\Omega} = \frac{52\,950}{2\pi \frac{1\,440}{60}} = 351,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) Al ser despreciables tanto las pérdidas en el hierro P_{Fe} como las mecánicas P_{m} , la potencia eléctrica absorbida de la red es:

$$P_1 = P_{\text{mec}} + P_{\text{Cu}2} + P_{\text{Cu}1} = 52\,950 + 3 \cdot 0,1 \cdot 85,8^2 + 3 \cdot 0,1 \cdot 85,8^2 = 57\,367 \text{ W}$$

y por tanto, el rendimiento del motor a plena carga vale:

$$\eta = \frac{P_{\text{mec}}}{P_1} = \frac{52\,950}{57\,367} = 92,3\%$$

4.4. Un motor trifásico de 4 polos, conectado en triángulo, se alimenta por una red de 230 V, 50 Hz. La impedancia del rotor en reposo es igual a $0,2 + j 1,6 \Omega$, siendo la impedancia del estator despreciable. La relación de transformación es igual a 2 ($r_{1u} = r_{1v} = 2$). Calcular:

- La intensidad absorbida de la red y su f.d.p. para un deslizamiento del 5%.
- La potencia y par en el eje en el caso anterior.
- La velocidad a la cual se obtiene el par máximo y par máximo correspondiente.
- El rendimiento del motor cuando trabaja con par máximo.

Nota: se desprecian las pérdidas mecánicas y en el hierro.

Solución

a) La impedancia del rotor en reposo es la impedancia propia del rotor a la frecuencia asignada de 50 Hz. Como quiera que la relación de transformación es igual a 2, la impedancia del rotor reducida al estátor es:

$$\underline{Z}_2 = 0,2 + j 1,6 \Omega \Rightarrow \underline{Z}'_2 = r_r^2 \underline{Z}_2 = 2^2 \cdot \underline{Z}_2 = 0,8 + j 6,4 \Omega$$

y la impedancia de carga cuando el deslizamiento es el 5% tiene un valor:

$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 0,8 \cdot \left(\frac{1}{0,05} - 1 \right) = 15,2 \Omega$$

En la Figura 4.2 se muestra el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estátor.

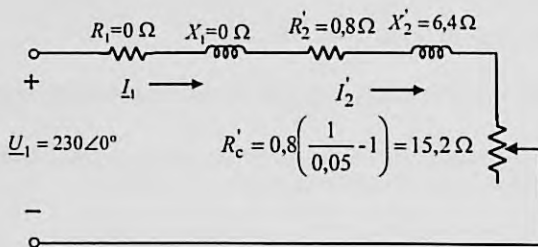


Figura 4.2

Tomando la tensión simple aplicada al motor como referencia de fases, se obtiene una corriente absorbida por fase:

$$I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{(0,8 + j 6,4) + 15,2} = \frac{230 \angle 0^\circ}{16 + j 6,4} \Rightarrow I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{17,23 \angle 21,8^\circ} = 13,35 \angle -21,8^\circ \text{ A}$$

es decir, la corriente de fase es 13,35 amperios, con un f.d.p. igual al $\cos 21,8^\circ = 0,929$. El módulo de la corriente de línea, al estar conectado el estátor en triángulo, es

$$I_1(\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 13,35 = 23,12 \text{ A}$$

b) La potencia mecánica útil del motor, al despreciar las pérdidas mecánicas es igual a la potencia disipada en la resistencia de carga cuyo valor es:

$$P_{\text{mec}} = P_{\text{ml}} = 3 \cdot 15,2 \cdot 13,35^2 = 8\,127 \text{ W}$$

Como quiera que la velocidad de sincronismo del motor y la velocidad del rotor son, respectivamente:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min} \Rightarrow n = n_1 (1 - s) = 1\,500 \cdot (1 - 0,05) = 1\,425 \text{ r/min}$$

el valor del par desarrollado por el motor en estas condiciones es:

$$T = \frac{8127}{2\pi \frac{1425}{60}} \approx 54,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) El deslizamiento para el cual se produce el par máximo viene definido por:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{lc}^2}} = \frac{0,8}{6,4} = 0,125$$

y por consiguiente, la velocidad correspondiente es:

$$n = 1500(1 - 0,125) = 1312,5 \text{ r.p.m.}$$

Para este deslizamiento, la corriente que absorbe el motor por fase es:

$$I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{0,8 + j6,4 + 0,8 \left(\frac{1}{0,125} - 1 \right)} = \frac{230 \angle 0^\circ}{6,4 \sqrt{2} \angle 45^\circ} = 25,41 \angle -45^\circ \text{ A}$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{\text{mec}} = 3 \cdot 5,6 \cdot 25,41^2 = 10848 \text{ W}$$

lo que da lugar a un par máximo:

$$T_{\text{max}} = \frac{10848}{2\pi \frac{1312,5}{60}} = 78,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) En la situación del apartado anterior, la potencia eléctrica absorbida de la red es igual a la potencia mecánica más las pérdidas en el cobre del rotor (ya que el estátor tiene una resistencia despreciable), es decir:

$$P_1 = 10848 + 3 \cdot 0,8 \cdot 25,41^2 = 12397,6 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento correspondiente es igual a:

$$\eta = \frac{P_{\text{mec}}}{P_1} = \frac{10848}{12397,6} = 87,5\%$$

4.5. Un motor asíncrono trifásico de jaula de ardilla de 7,5 kW, 230/400V, 50 Hz, 4 polos tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R_2' = 0,5 \Omega$; $X_1 = X_2' = 3 \Omega$; $P_{fe} = P_{fw} = 0$.

- Si la red es de 230 V, 50 Hz. ¿cómo se conectará el estátor del motor? Dibujar la placa de bornes con la disposición de los terminales, indicando sus letras de identificación.
- Conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado anterior, ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada?, ¿qué corriente absorberá el motor de la red en el arranque?
- ¿Cuál será la velocidad del motor a plena carga, es decir cuando desarrolla 7,5 kW?
- Determinar el par de plena carga y la capacidad de sobrecarga del motor.

Solución

a) El motor de 230/400 V se debe conectar en triángulo a una red de 230 V. En la Figura 4.3 se muestra la placa de bornes con las letras de identificación de terminales.

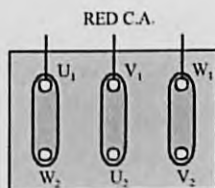


Figura 4.3

b) En la Figura 4.4 se muestra el circuito equivalente por fase del motor cuya velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

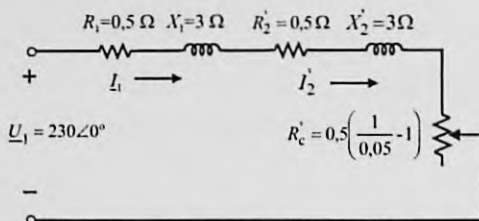


Figura 4.4

La expresión del par en función de los parámetros del motor es:

$$T = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

y por consiguiente, el par de arranque se obtiene de la ecuación anterior haciendo $s = 1$, resultando:

$$T_a = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 230^2}{2\pi \frac{1500}{60} [1^2 + 6^2]} = 13,65 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La magnitud de la corriente de arranque se deduce del circuito de la Figura 4.4, tomando $s = 1$, lo que da lugar a un valor por fase:

$$I_a = \frac{230}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = 37,81 \text{ A}$$

que corresponde a una corriente de línea:

$$I_a (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 37,81 = 65,5 \text{ A}$$

c) La potencia mecánica del motor a plena carga es, según el enunciado, de 7,5 kW y al no haber pérdidas mecánicas del motor, coincide con la potencia disipada en la resistencia de carga, por lo que se puede escribir:

$$P_{mi} = 7500 \text{ W} = 3 R_c' I_1^2 = 3 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \cdot \frac{230^2}{\left(0,5 + \frac{0,5}{s} \right)^2 + 6^2}$$

que simplificando y ordenando, da lugar a la ecuación de segundo grado en s siguiente:

$$46,83s^2 - 10,08s + 0,25 = 0$$

de donde se deducen los siguientes deslizamientos: $s_1 = 0,1866$; $s_2 = 0,0286$. Ambos resultados son soluciones matemáticas de la ecuación anterior; sin embargo, si calculamos el deslizamiento para el par máximo del motor se obtiene:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + 6^2}} = 0,083$$

lo que significa que los deslizamientos s_1 y s_2 calculados en la curva par-velocidad del motor están situados a cada lado del pico de la curva (valor del par máximo), como se señala en la Figura 4.5. De este modo, el punto B corresponde a un funcionamiento en la zona inestable y el punto A, a un comportamiento estable. Por consiguiente, la solución física correcta es:

$$s_2 = 0,0286 \Rightarrow n = n_1(1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0,02866) = 1457,1 \text{ r/min}$$

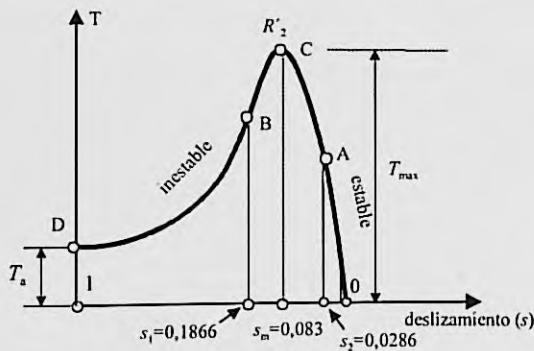


Figura 4.5

d) El par de plena carga correspondiente a la solución anterior (es decir para el punto A) es, por tanto:

$$T_N = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{7500}{2\pi \frac{1457,1}{60}} = 49,15 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y el valor del par máximo, para el deslizamiento $s_m = 0,083$ vale:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 230^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,083 \left[\left(0,5 + \frac{0,5}{0,083} \right)^2 + 6^2 \right]} = 77,47 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De este modo el factor de sobrecarga del motor es:

$$C = \frac{T_{\text{máx}}}{T_N} = \frac{77,47}{49,15} = 1,576$$

4.6. Un motor asíncrono trifásico, con los datos asignados por el fabricante siguientes: 9 kW, 4 polos, 230/400 V, 50 Hz, conectado en estrella para una red de 400 V de línea, tiene una resistencia en corriente continua entre dos terminales del estátor de 1Ω . Se ha realizado un ensayo de vacío (rotor libre) a tensión variable dando lugar a la siguiente tabla de valores:

U (línea) en voltios	420	400	380	350	300	250
I_0 en amperios	4,3	4	3,8	3,4	3	2,5
P_0 total en vatios	470	445	420	384	330	285

A continuación, se ha bloqueado el rotor y se ha procedido a aplicar una tensión trifásica regulable y creciente desde cero voltios hasta obtener aproximadamente la corriente asignada al mismo. En ese instante se han efectuado las siguientes lecturas de los aparatos de medida: tensión de línea aplicada = 107 V; corriente = 15 A; potencia total trifásica = 670 W.

- Determinar las pérdidas mecánicas del motor (rozamiento y ventilación) y las pérdidas en el hierro a la tensión asignada de 400 V.
- Calcular el circuito equivalente por fase exacto del motor reducido al primario (estátor) si se considera que la reactancia de cortocircuito se reparte por igual entre los devanados del estátor y del rotor (es decir, $X_1 = X_2$).

Nota: tómesese la resistencia en c.c. como la resistencia efectiva de los devanados.

Solución

a) En la Figura 4.6 se muestra la medida de la resistencia del motor, que se realiza en la práctica aplicando una fuente de c.c. a dos terminales cualesquiera del motor y midiendo, tanto la tensión aplicada como la corriente dentro de un rango de tensiones. La ley de Ohm nos da la resistencia entre terminales, que en el caso de este problema ha sido de 1Ω . Esta resistencia es doble que la de una bobina del estátor del motor (ya que hay dos bobinas en serie), por lo que el valor de la resistencia por fase del estátor es $R_1 = \frac{1}{2}R_{total} = 0,5 \Omega$.

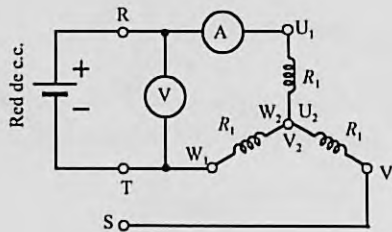


Figura 4.6

A continuación, es importante completar la tabla del ensayo de vacío. Téngase en cuenta que la potencia total absorbida por el motor en vacío es la suma de las pérdidas en el cobre del estátor (que dependen de la corriente que circula por los devanados del estátor), las pérdidas en el hierro (que dependen del flujo magnético en el entrehierro y por tanto, de la tensión aplicada) y las pérdidas mecánicas que dependen de la velocidad. Es por ello que en la Tabla 4.1 se recogen las medidas del ensayo de vacío y se completa la tabla calculando las pérdidas en el cobre del estátor para cada punto ensayado, y la diferencia entre las pérdidas en vacío y las pérdidas en el cobre del estátor. Para que el lector comprenda como se han confeccionado las dos últimas filas de la Tabla nº1, se va a explicar a continuación cómo se ha realizado con la columna correspondiente a la tensión aplicada de 400 voltios. Para esta tensión la corriente del estátor es de 4 A; por tanto las pérdidas correspondientes en el cobre son:

$$P_{Cul} = 3R_1 I_1^2 = 3 \cdot 0,5 \cdot 4^2 \approx 24 \text{ W}$$

y por ello, la diferencia entre la potencia absorbida en vacío y las pérdidas anteriores son:

$$P_0 - P_{Cul} = 445 - 24 = 421 \text{ W} = P_{Fe} + P_{fw}$$

La diferencia anterior es también la suma de las pérdidas mecánicas y en el hierro y de este modo se ha preparado la Tabla 4.1, para las distintas tensiones de ensayo aplicadas al motor.

Tabla 4.1

U (línea) en V	420	400	380	350	300	250
I_0 en A	4,2	4	3,8	3,4	3	2,5
P_0 total en W	470	445	420	384	330	285
P_{Cu1} total en E	26,5	24	21,7	17,3	13,5	9,4
$P_0 - P_{Cu1} = P_{Fe} + P_{fw}$ (W)	443,5	421	398,3	366,7	316,5	275,6

A continuación, se debe dibujar en un gráfico las pérdidas de la última fila de la Tabla 4.1 en función de la tensión aplicada al motor. Esto da como resultado el gráfico de la Figura 4.7a. En esta figura se han representado con pequeños círculos los puntos ensayados. La ordenada en cada punto indica el valor de la suma de las pérdidas en el hierro más las pérdidas mecánicas del motor. Si se supone que en este pequeño rango de tensiones no se han observado cambios en la velocidad de giro del motor, entonces las pérdidas mecánicas han sido constantes en este rango de funcionamiento. Por otro lado, las pérdidas en el hierro dependen prácticamente de la inducción magnética al cuadrado (en definitiva, del cuadrado de la tensión aplicada), y es por este motivo que la curva de la Figura 4.7a tiene forma parabólica. Si se extrapola esta parábola de la Figura 4.7a hasta llegar al eje vertical, se obtiene el punto A, cuya ordenada representa la pérdida mecánica del motor (ya que en ausencia de tensión las pérdidas en el hierro son nulas) y que en este caso son del orden de 180 W.

El lector puede comprender que no es fácil realizar esta extrapolación, ya que es muy imprecisa. Es por ello que en la práctica resulta más útil representar las pérdidas en el hierro más las pérdidas mecánicas en función del cuadrado de la tensión aplicada, tal como se ha hecho en la Figura 4.7b, puesto que entonces la curva parabólica se transforma en una recta que facilita enormemente la extrapolación para determinar el punto A con mayor exactitud y cuya ordenada determina la pérdida mecánica del motor que corresponde aquí a 180 W. A continuación y utilizando mejor la Figura 4.7b, se observa que si el motor funciona a la tensión asignada de 400 V de línea, las pérdidas totales (hierro y mecánicas) son de 421 W (ver Tabla 4.1), por lo que las pérdidas en el hierro con esta tensión son de $421 - 180 = 241$ W, como se indica claramente en la Figura 4.7b.

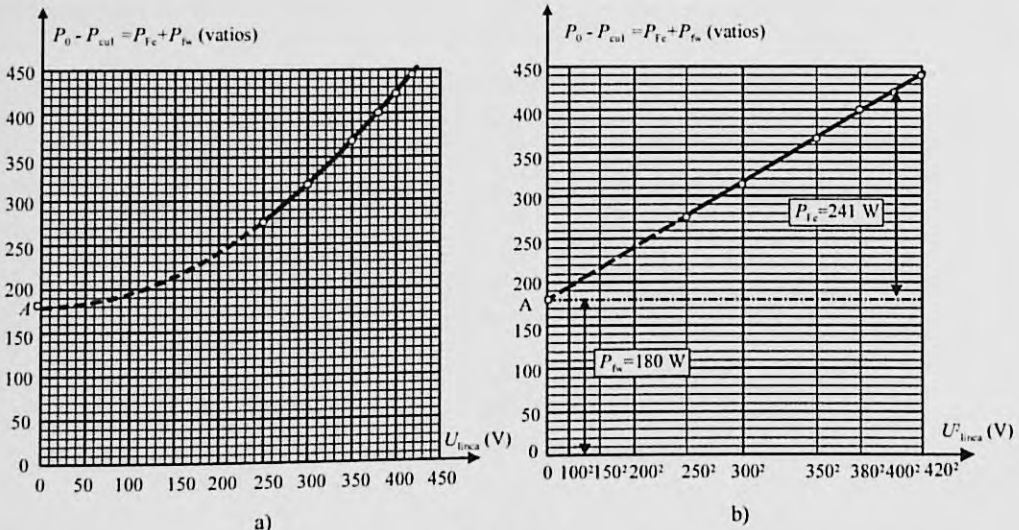


Figura 4.7

En definitiva, en vacío se han calculado las siguientes magnitudes:

$$R_1 = 0,5 \Omega; P_{Fe} \text{ (a } 400 \text{ V)} = 241 \text{ W}; P_{fw} = 180 \text{ W}; I_0 = 4 \text{ A}$$

b) De los resultados anteriores se pueden determinar los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente por fase del motor reducido al estator. En la Figura 4.8a se muestra el esquema eléctrico correspondiente. En este circuito se cumple:

$$P_{Fe} = 3U_1(\text{fase})I_1(\text{fase}) \cos \varphi_0$$

que al sustituir valores nos da:

$$P_{Fe} = 241 = 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{241}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 4} = 0,087 \Rightarrow \text{sen } \varphi_0 = 0,996$$

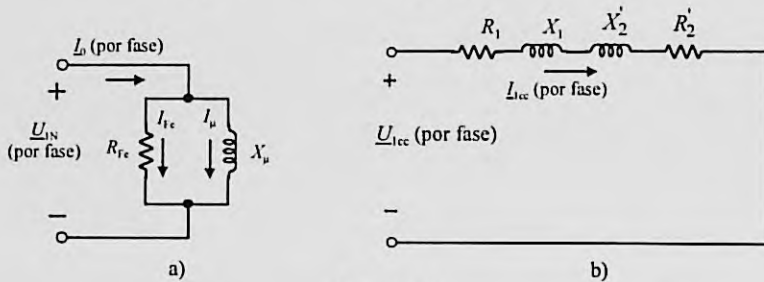


Figura 4.8

Por consiguiente, de la Figura 4.8a se tiene:

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 = 4 \cdot 0,087 \approx 0,35 \text{ A} ; I_{\mu} = I_0 \text{ sen } \varphi_0 = 4 \cdot 0,996 = 3,98 \text{ A}$$

de donde se deduce:

$$R_{Fe} = \frac{400/\sqrt{3}}{0,35} \approx 660 \Omega ; X_{\mu} = \frac{400/\sqrt{3}}{3,98} \approx 58 \Omega$$

Por otra parte, del ensayo de cortocircuito se obtiene el esquema eléctrico de la Figura 4.8b (se ha despreciado la rama paralelo del circuito equivalente) y de acuerdo con los datos del enunciado se puede escribir:

$$P_{cc} = \sqrt{3}U_{1cc}(\text{línea})I_{1cc}(\text{línea})\cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = \frac{670}{\sqrt{3} \cdot 107 \cdot 15} = 0,241 \Rightarrow \text{sen } \varphi_{cc} = 0,971$$

de donde se obtiene:

$$Z_{cc} = \frac{107/\sqrt{3}}{15} = 4,12 \Omega \Rightarrow R_{cc} = Z_{cc} \cos \varphi_{cc} = 4,12 \cdot 0,241 \approx 1 \Omega ; X_{cc} = Z_{cc} \text{ sen } \varphi_{cc} = 4,12 \cdot 0,971 \approx 4 \Omega$$

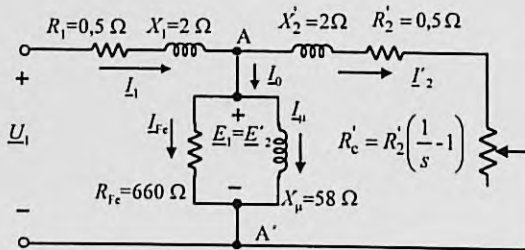


Figura 4.9

Como quiera que $R_1 = 0,5 \Omega$, y la reactancia $X_1 = X_2'$, se tendrá finalmente:

$$R_{cc} = 1 \Omega = R_1 + R_2' = 0,5 + R_2' \quad \Rightarrow \quad R_2' = 0,5 \Omega$$

$$X_{cc} = 4 \Omega = X_1 + X_2' \quad \Rightarrow \quad X_1 = X_2' = \frac{4}{2} = 2 \Omega$$

En la Figura 4.9 se muestra el circuito equivalente exacto del motor de acuerdo con los resultados anteriores.

4.7. Utilizando los resultados del circuito equivalente exacto del Problema 4.6, determinar:

- La corriente que absorbe el motor de la red de 400 voltios (motor conectado en estrella) y su f.d.p. cuando funciona a plena carga con un deslizamiento del 4%.
- La potencia mecánica desarrollada por el motor en el caso anterior.
- El par de plena carga correspondiente.
- El rendimiento a plena carga.

Solución

a) En la Figura 4.10 se ha repetido el circuito de la Figura 4.9, pero determinando la resistencia de carga para un deslizamiento del 4%. Si se denomina Z_p la impedancia de la rama de vacío del motor, su valor es:

$$Z_p = \frac{660 \cdot j58}{660 + j58} = 5,04 + j57,56 = 57,78 \angle 85^\circ \Omega$$

La impedancia que se observa entre los terminales AA' hacia la derecha es la asociación en paralelo de la impedancia de la rama de vacío anterior y de la impedancia total del circuito del rotor: $12,5 + j2 \Omega$, cuya resultante algunos autores denominan *impedancia de campo* Z_f y su valor es:

$$\frac{1}{Z_f} = \frac{1}{12,5 + j2} + \frac{1}{57,78 \angle 85^\circ} \Rightarrow Z_f \approx 11,78 \angle 20,5^\circ \approx 11,04 + j4,12 \Omega$$

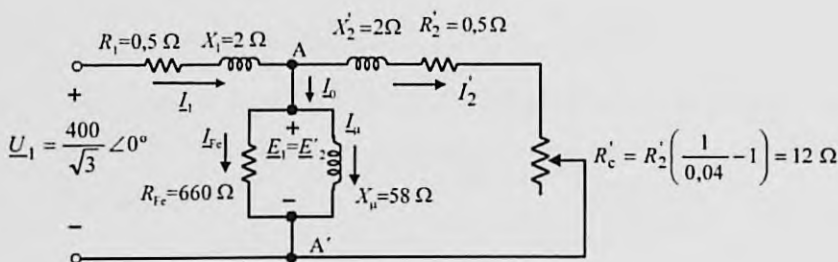


Figura 4.10

La impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, dando lugar a una impedancia total del motor:

$$Z_{total} \approx 0,5 + j2 + 11,04 + j4,12 \approx 11,54 + j6,12 = 13,06 \angle 27,9^\circ \Omega$$

De este modo la corriente absorbida por el motor cuando se alimenta a la tensión asignada de 400 voltios es, según el circuito de la Figura 4.10:

$$I_1 = \frac{400 \angle 0^\circ}{13,06 \angle 27,9^\circ} \approx 17,7 \angle -27,9^\circ \text{ A}$$

es decir, el motor absorbe a plena carga una corriente de 17,7 A, con un f.d.p. igual al $\cos 27,9^\circ = 0,884$, lo que corresponde a una potencia eléctrica absorbida de la red:

$$P_1 = \sqrt{3} U_1 (l\acute{ı}nea) I_1 (l\acute{ı}nea) \cos \varphi_1 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 17,7 \cdot 0,884 \approx 10\,840 \text{ W}$$

b) Si se conoce la corriente absorbida por el motor de la red I_1 , se puede calcular la corriente del rotor reducida al estator, teniendo en cuenta que la impedancia Z_p de la rama de vacio del motor está en paralelo con la impedancia total del circuito del rotor. Es por ello que aplicando la regla del divisor de corriente resulta:

$$I_2' = I_1 \frac{Z_p}{Z_p + 12,5 + j2} = 17,7 \angle -27,9^\circ \cdot \frac{57,79 \angle 85,1^\circ}{62,08 \angle 73,7^\circ} \approx 16,47 \angle -16,5^\circ \text{ A}$$

La potencia mecánica interna desarrollada por el motor es, de este modo:

$$P_{mi} = 3 R_c' I_2'^2 = 3 \cdot 12 \cdot 16,47^2 \approx 9765 \text{ W}$$

y como las pérdidas mecánicas son de 180 W, se corresponden con una potencia mecánica útil:

$$P_{mcc} = 9\,765 - 180 = 9\,585 \text{ W}$$

Se pueden obtener los mismos resultados de la potencia mecánica interna y por ende, de la potencia mecánica útil (salvo errores de redondeo) de una forma más simple, sin tener que calcular la corriente del rotor. Téngase en cuenta para ello que la potencia que atraviesa el entrehierro P_g tiene un valor:

$$P_g = P_1 - 3 R_1 I_1^2 - P_{Fe} = 10\,840 - 3 \cdot 0,5 \cdot 17,7^2 - 241 \approx 10\,129 \text{ W}$$

A partir de la potencia anterior se pueden calcular las pérdidas en el cobre del rotor sin necesidad de determinar la corriente en el mismo, ya que se cumple:

$$P_{Cu2} = s P_g = 0,04 \cdot 10\,129 \approx 405 \text{ W}$$

y por consiguiente la potencia mecánica interna será:

$$P_{mi} = P_g - P_{Cu2} = 10\,129 - 405 = 9\,724 \approx 9\,765 \text{ W (aproximación por errores de redondeo)}$$

c) Como el motor tiene 4 polos y la frecuencia es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

y teniendo en cuenta que el deslizamiento es del 4%, la velocidad de giro del motor es:

$$n = n_1 (1 - s) = 1\,500 \cdot (1 - 0,04) = 1\,440 \text{ r/min}$$

el par motor vale:

$$T = \frac{P_{mcc}}{\Omega} = \frac{9\,585}{2\pi \frac{1\,440}{60}} \approx 63,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) El rendimiento del motor es el cociente:

$$\eta = \frac{P_{mcc}}{P_1} = \frac{9\,585}{10\,840} \approx 88,4\%$$

4.8. Un motor asíncrono trifásico conectado en estrella de 3000 V, 24 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros: $R_1 = 0 \Omega$; $X_1 = 0 \Omega$; $R_2' = 0,016 \Omega$; $X_2' = 0,265 \Omega$. Se obtiene el par de plena carga a la velocidad de 247 r/min. Calcular:

- La velocidad para el par máximo.
- La capacidad de sobrecarga del motor definida por el cociente T_{\max}/T_N .

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{12} = 250 \text{ r/min}$$

Como quiera que la velocidad del motor a plena carga es de 247 r/min, el deslizamiento a plena carga o nominal s_N tiene un valor:

$$s_N = \frac{250 - 247}{250} = 0,012$$

Además, el deslizamiento para el que se obtiene el par máximo se obtiene de la siguiente expresión:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2'}{X_2'} = \frac{0,016}{0,265} = 0,0604$$

por lo que el valor de la velocidad del motor para el par máximo es:

$$n = n_1(1 - s_m) = 250 \cdot (1 - 0,0604) = 234,9 \text{ r/min}$$

b) Para determinar la capacidad de sobrecarga del motor es necesario escribir la expresión del par motor en función del deslizamiento:

$$T = \frac{3R_2'U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{K}{s \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2 \right]}$$

donde, por simplicidad, se ha llamado constante K a la siguiente expresión:

$$K = \frac{3R_2'U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}}$$

El cociente entre el par máximo y el par nominal o de plena carga define la capacidad de sobrecarga del motor y vale:

$$C = \frac{T_{\max}}{T_N} = \frac{s_N \left[\left(\frac{R_2'}{s_N} \right)^2 + X_2'^2 \right]}{s_m \left[\left(\frac{R_2'}{s_m} \right)^2 + X_2'^2 \right]} = \frac{0,012 \left[\left(\frac{0,016}{0,012} \right)^2 + 0,265^2 \right]}{0,0604 \left[\left(\frac{0,016}{0,0604} \right)^2 + 0,265^2 \right]} = \frac{0,022176}{8,48 \cdot 10^{-3}} = 2,615$$

4.9. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 18,5 kW, 400 V, 50 Hz, tiene un par de arranque de 322 N · m y un par de plena carga igual a 124 N · m. Determinar:

- El par de arranque cuando la tensión del estátor se reduce a 230 V.
- La tensión que debe aplicarse al estátor para obtener un par de arranque igual al par de plena carga.

Solución

a) La expresión general del par motor en función de los parámetros de la máquina es:

$$T = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

que en el caso del arranque ($s = 1$) se transforma en:

$$T_a = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} \left[(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

En definitiva, la expresión anterior indica que si no se modifica la impedancia del motor, el par de arranque es proporcional al cuadrado de la tensión aplicada. Por ello, si el par de arranque a 400 V vale 322 N·m, el par de arranque del motor con una tensión aplicada de 230 V se obtendrá de la relación siguiente:

$$\frac{322}{T_a'} = \left(\frac{400}{230} \right)^2 \Rightarrow T_a' = 106,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) En el caso de que el par de arranque tenga que ser igual al de plena carga, que vale 124 N·m, la tensión necesaria se obtiene de la relación:

$$\frac{124}{322} = \frac{U_1'^2}{400^2} \Rightarrow U_1' = 400 \sqrt{\frac{124}{322}} = 248,2 \text{ V}$$

4.10. Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 400 V, 4 polos, 50 Hz, tiene tanto los devanados del estátor como los del rotor conectados en estrella, y los valores de los parámetros de la rama serie son: $R_1 = R_2' = 1 \Omega$; y de $X_{cc} = 4 \Omega$. Calcular:

- El par de plena carga si el deslizamiento es el 4%.
- La resistencia que debe añadirse a cada fase del rotor, para obtener el par nominal, a la mitad de la velocidad de plena carga con los anillos cortocircuitados. La relación de transformación es $r_m = r_H = 2$, y las pérdidas mecánicas son despreciables.

Solución

a) Si el estátor se conecta en estrella a una red de 400 voltios de línea, la tensión de fase correspondiente es:

$$U_1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

Como quiera que además la frecuencia de alimentación es de 50 Hz y la máquina tiene 4 polos, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

De este modo, el par de plena carga del motor para un deslizamiento del 4% vale:

$$T = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 \cdot 1 \cdot (400/\sqrt{3})^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,04 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{0,04} \right)^2 + 4^2 \right]} \approx 36,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) La velocidad del motor a plena carga es:

$$n = n_1 (1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0,04) = 1440 \text{ r/min}$$

por lo que la velocidad mitad de la plena carga es $n' = 1440/2 = 720 \text{ r/min}$. El deslizamiento correspondiente es:

$$s' = \frac{1500 - 720}{1500} = 0,52$$

Si se denomina $R'_{T2} = R'_2 + R'_{ad2}$ a la resistencia total del circuito del rotor (reducida al estator), para obtener el par asignado (nominal) a la mitad de la velocidad de plena carga se deberá cumplir:

$$T = 36,8 = \frac{R'_{T2} \cdot 400^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,52 \cdot \left[\left(1 + \frac{R'_{T2}}{0,52} \right)^2 + 4^2 \right]}$$

de donde se deduce la siguiente ecuación de segundo grado:

$$3,7R'^2_{T2} - 49,38 R'_{T2} + 17 = 0$$

cuyos resultados son:

$$R'_{T2} = 13 \Omega \quad ; \quad R'_{T2} = 0,3536 \Omega$$

que corresponden a las siguientes resistencias adicionales reducidas al estator:

$$R'_2 + R'_{a2} \Rightarrow R'_{a2} = 13 - 1 = 12 \Omega \quad ; \quad R'_{a2} = 0,3536 - 1 = -0,6464 \Omega \text{ (no tiene sentido físico)}$$

por consiguiente la resistencia adicional real medida en el circuito del rotor será:

$$R_{a2} = 12 = r_r^2 R'_{a2} = 4R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 3 \Omega$$

4.11. Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 15 kW, 400 V, 50 Hz, 6 polos tiene los siguientes parámetros (con los anillos deslizantes cortocircuitados): $R_1 = R'_2 = 0,8 \Omega$; $X_1 = X'_2 = 2 \Omega$. Los devanados del estator y del rotor están conectados en estrella y $r_{iu} = r_{ii} = 2$. Calcular:

- El par de arranque;
- El par máximo y velocidad correspondiente;
- La resistencia que debe conectarse en serie, por fase, en el rotor para obtener en el arranque los 2/3 del par máximo.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r/min}$$

y el valor del par de arranque se obtiene de la expresión general del par para un deslizamiento igual a la unidad, es decir:

$$T = \frac{3R'_2 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 \cdot 0,8 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} \cdot 1 \cdot \left[\left(0,8 + \frac{0,8}{1} \right)^2 + 4^2 \right]} = 65,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) El deslizamiento para el par máximo se obtiene de la expresión:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,8^2 + 4^2}} = 0,196$$

por lo que la velocidad para el par máximo vale:

$$n = 1000 \cdot (1 - 0,196) = 804 \text{ r/min}$$

El valor del par máximo se obtiene de la expresión general del par en la que debe tomarse el deslizamiento igual a 0,196, lo que da lugar a:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 0,8 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} \cdot 0,196 \cdot \left[\left(0,8 + \frac{0,8}{0,196}\right)^2 + 4^2\right]} = 156,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) Para obtener un par en el arranque igual a 2/3 del par máximo, será necesario incluir una resistencia adicional en el reóstato de arranque. Si se denomina $R'_{T2} = R'_2 + R'_{a2}$ a la resistencia total del circuito del rotor (reducida al estátor), se deberá cumplir:

$$T_a = \frac{2}{3} \cdot 156,6 = 104,4 = \frac{R'_{T2} \cdot 400^2}{2\pi \frac{1000}{60} \cdot 1 \cdot \left[\left(0,8 + \frac{R'_{T2}}{1}\right)^2 + 4^2\right]}$$

expresión que da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$R_{T2}^2 - 13,038R'_{T2} + 16,64 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$R'_{T2} = 11,6 \Omega ; R'_{T2} = 1,434 \Omega$$

de donde se deducen las siguientes resistencias adicionales posibles:

$$11,6 = 0,8 + R'_{a2} \Rightarrow R'_{a2} = 10,8 = r_2^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 2,7 \Omega$$

$$1,434 = 0,8 + R'_{a2} \Rightarrow R'_{a2} = 0,634 = 4 \cdot R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,158 \Omega$$

Es fácil darse cuenta que la solución físicamente aceptable es la segunda. Para comprenderlo se ha preparado la Figura 4.11, que muestra tres curvas par-velocidad. La situada más a la derecha es la curva propia del motor que no tiene ninguna resistencia adicional en el rotor; en ella se observa que el par máximo vale 156,6 N·m y el par de arranque, representado por el punto A tiene un valor de 65,9 N·m; además, el par máximo se produce para un deslizamiento de 0,196.

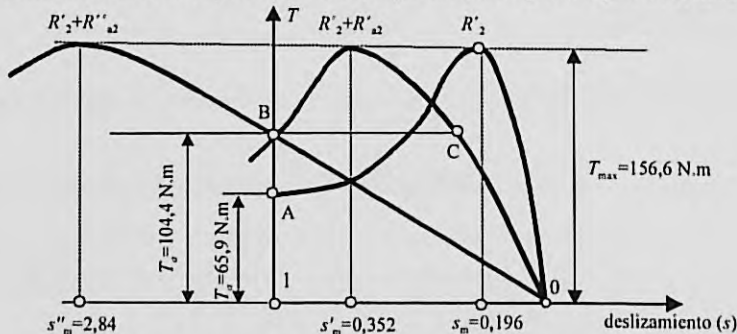


Figura 4.11

La curva central muestra la característica par-velocidad del motor con una resistencia total del rotor $R'_{T2} = 1,434 \Omega$ que tiene un par de arranque para $s = 1$ definido por el punto B y que vale 2/3 del par máximo, es decir $104,4 \text{ N} \cdot \text{m}$. Esta curva tendrá un valor máximo para un deslizamiento:

$$s_m = \frac{R'_{T2}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,434}{\sqrt{0,8^2 + 4^2}} = 0,352$$

Mientras que la curva situada más a la izquierda, tiene la característica par-velocidad del motor con una resistencia total del rotor $R'_{T2} = 11,6 \Omega$ que tiene un par para $s = 1$ definido por el punto B y que vale 2/3 del par máximo, es decir $104,4 \text{ N} \cdot \text{m}$. Esta curva tendrá un máximo para un deslizamiento:

$$s_m = \frac{R'_{T2}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,434}{\sqrt{0,8^2 + 4^2}} = 2,84$$

que se sitúa en la zona de comportamiento del motor como freno. Es por ello que esta situación no es aceptable físicamente, ya que aunque arrancase el motor con un par resistente de $104,4 \text{ N} \cdot \text{m}$, la máquina no se movería, mientras que para la curva central el motor arrancaría y continuaría girando hasta llegar al punto C.

4.12. Un motor asincrono trifásico de 6 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de $0,2 \Omega$ y un par máximo de $162 \text{ N} \cdot \text{m}$ a 875 r/min . Calcular:

- El par cuando el deslizamiento es el 4%.
- La resistencia adicional que debe añadirse en el circuito del rotor para obtener los 2/3 del par máximo en el arranque.

Nota: prescindir de la impedancia del estator.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r/min}$$

y por tanto, el deslizamiento para el par máximo vale:

$$s_m = \frac{1000 - 875}{1000} = 0,125$$

El deslizamiento anterior, en función de las resistencias y reactancias del motor es igual a:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R'_2}{X'_2} = \frac{r'_2 R_2}{r_1^2 X_2} = \frac{R_2}{X_2} = \frac{0,2}{X_2} = 0,125$$

Resulta una reactancia del rotor: $X_2 = 1,6 \Omega$. Además, el par motor viene expresado por:

$$T = \frac{3 R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 r_1^2 R_2 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s r_1^4 \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2^2 \right]}$$

que se puede poner de la forma siguiente:

$$T = \frac{K R_2}{s \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2^2 \right]} \quad \text{donde } K = \frac{3 r_1^2 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} r_1^4}$$

y por tanto, los pares máximo y de plena carga (este último para un deslizamiento del 4%) se pueden escribir del siguiente modo:

$$T_{\max} = 162 = \frac{K \cdot 0,2}{0,125 \left[\left(\frac{0,2}{0,125} \right)^2 + 1,6^2 \right]}; \quad T_N = \frac{K \cdot 0,2}{0,04 \left[\left(\frac{0,2}{0,04} \right)^2 + 1,6^2 \right]}$$

Al dividir ambas ecuaciones entre sí resulta la fórmula de Kloss:

$$\frac{T_N}{T_{\max}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \Rightarrow \frac{T_N}{162} = \frac{2}{\frac{0,04}{0,1225} + \frac{0,125}{0,04}} \Rightarrow T_N = 94,05 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) Si se denomina R_{T2} a la resistencia total del circuito del rotor (propia + adicional) y teniendo en cuenta que el par de arranque en esta situación debe ser 2/3 del par máximo, resulta:

$$\frac{2}{3} \cdot 162 = \frac{KR_{T2}}{1 \cdot \left[\left(\frac{R_{T2}}{1} \right)^2 + 1,6^2 \right]} = 108 = \frac{KR_{T2}}{R_{T2}^2 + 2,56}$$

expresión que al desarrollar da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$R_{T2}^2 - 4,8R_{T2} + 2,56 = 0$$

cuyos resultados son:

$$R_{T2} = 4,19 \Omega \quad ; \quad R_{T2} = 0,611 \Omega$$

y como la resistencia del rotor es de 0,2 ohmios, las resistencias adicionales posibles son:

$$R_{a2} = 3,99 \Omega \quad ; \quad R_{a2} = 0,411 \Omega$$

De forma análoga al problema anterior, la solución físicamente aceptable es la segunda, es decir: $R_{a2} = 0,411 \Omega$.

4.13. Un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, conectado en estrella, de 3,5 kW, 230 V, seis polos, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: Ensayo de vacío o de rotor libre: tensión compuesta aplicada: 230 V; corriente de línea del estátor: 3,16 A; potencia absorbida en el ensayo: 590 W. Se sabe también que las pérdidas mecánicas (rozamiento + ventilación) a velocidades cercanas a la asignada son de 312 W, (se pueden despreciar en este ensayo las pérdidas en el cobre del estátor). El lector puede comprobar que representa una potencia de 7,2 W que se puede considerar despreciable). Ensayo de cortocircuito o de rotor bloqueado: tensión compuesta aplicada: 34,3 V; corriente de línea: 14,5 A; potencia absorbida: 710 W. A la temperatura de funcionamiento, la resistencia entre dos terminales cualesquiera del estátor es de 0,48 ohmios. Si se conecta el motor a una red trifásica de 230 V de línea y se considera aceptable utilizar el circuito equivalente aproximado del motor, calcular:

- Los parámetros del circuito equivalente aproximado del motor reducido al primario (estátor).
- Si el motor gira a 960 r/min determinar:
 - La potencia mecánica útil en el eje suministrada por el motor.
 - La corriente de línea absorbida por el motor de la red y f.d.p. correspondiente.
 - La potencia eléctrica absorbida por el motor de la red.
 - El rendimiento del motor.
 - El par mecánico útil en el eje.

Solución

a) Del ensayo de vacío se obtienen los siguientes resultados:

$$P_{F_c} = 590 - 312 = 278 = \sqrt{3} \cdot 230 \cdot 3,16 \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,221 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 0,975$$

por lo que las componentes de la corriente de vacío son:

$$I_{F_c} = 3,16 \cdot 0,221 = 0,70 \text{ A} ; I_{\mu} = 3,16 \cdot 0,975 = 3,08 \text{ A}$$

y los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente valen:

$$R_{F_c} = \frac{230}{0,70} = 190 \Omega ; X_{\mu} = \frac{230}{3,08} = 43,1 \Omega$$

Del ensayo de cortocircuito se obtiene:

$$710 = \sqrt{3} \cdot 34,3 \cdot 14,5 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,824 \Rightarrow \sin \varphi_{cc} = 0,566$$

por lo que la impedancia de cortocircuito del motor vale:

$$Z_{cc} = \frac{34,3}{14,5} = 1,366 \Omega$$

y en consecuencia la resistencia y reactancia de cortocircuito son, respectivamente:

$$R_{cc} = 1,366 \cdot 0,824 = 1,126 \Omega ; X_{cc} = 1,366 \cdot 0,566 = 0,773 \Omega$$

Como quiera además que la resistencia entre dos terminales del estator es de $0,48 \Omega$ (dos devanados en serie), la resistencia por fase del estator y la reducida del rotor son, respectivamente:

$$R_1 = \frac{0,48}{2} = 0,24 \Omega ; R_{cc} = 1,126 = R_1 + R_2' = 0,24 + R_2' \Rightarrow R_2' = 0,886 \Omega$$

en consecuencia, el circuito equivalente aproximado del motor reducido al estator es el que mostrado en la Figura 4.12.

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r/min}$$

y al girar a 960 r/min , el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{1000 - 960}{1000} = 4\%$$

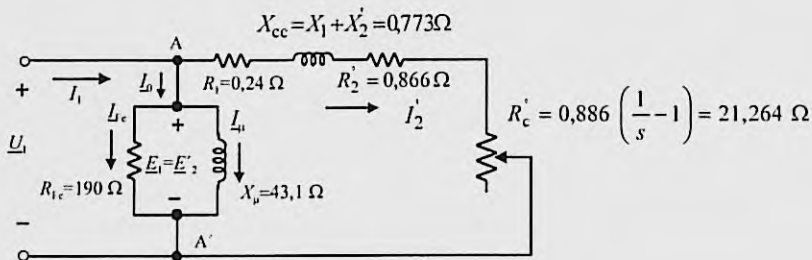


Figura 4.12

b1) La corriente reducida del rotor, tomando la tensión primaria del circuito equivalente de la Figura 4.12 como referencia, tiene un valor:

$$\underline{I}'_2 = \frac{\frac{230}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{0,24 + j0,886 + j0,773 + 21,264} = \frac{132,8 \angle 0^\circ}{22,39 + j0,773} = \frac{132,8 \angle 0^\circ}{22,4 \angle 1,98^\circ} = 5,93 \angle -1,98^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la potencia mecánica interna del motor, que es la potencia disipada en la resistencia de carga, vale:

$$P_{mi} = 3 \cdot 21,264 \cdot 5,93^2 = 2\,281,5 \text{ W}$$

Como quiera que las pérdidas mecánicas son de 312 vatios, la potencia mecánica útil es igual a:

$$P_{mec} = P_{mi} - P_{fw} = 2\,281,5 - 312 = 1\,969,5 \text{ W}$$

b2) La corriente que el motor absorbe de la red vale:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}'_2 = (0,70 - j3,08) + 5,93 \angle 1,98^\circ = 7,4 \angle 26,3^\circ \text{ A}$$

que corresponde a una magnitud de 7,4 A, con un f.d.p. igual a $\cos 26,3^\circ = 0,896$.

b3) La potencia eléctrica que absorbe el motor de la red es, de este modo:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 230 \cdot 7,4 \cdot 0,896 = 2\,642,3 \text{ W}$$

b4) El rendimiento del motor es:

$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_1} = \frac{1\,969,5}{2\,642,3} = 74,5\%$$

b5) El par mecánico útil en el eje es:

$$T = \frac{P_{mec}}{\Omega} = \frac{1\,969,5}{2\pi \frac{960}{60}} = 19,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.14. Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de $0,25 \Omega$, siendo la impedancia del estátor despreciable. El par máximo se obtiene para una velocidad de 1 200 r/min. Si la capacidad de sobrecarga es igual a 2,1. Calcular:

- La velocidad a plena carga o asignada.
- La relación par de arranque al par asignado o nominal.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

y como quiera que la velocidad del motor para el par máximo es de 1 200 r/min, el deslizamiento correspondiente vale:

$$s_m = \frac{1\,500 - 1\,200}{1\,500} = 0,2$$

que sustituyendo en la expresión analítica del deslizamiento al cual se produce el par máximo resulta:

$$0,2 = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2'}{X_2'} = \frac{R_2}{X_2} = \frac{0,25}{X_2}$$

de donde se deduce:

$$X_2 = \frac{0,25}{0,2} = 1,25 \Omega$$

La expresión del par motor es de la forma:

$$T = \frac{3R_2'U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3U_1^2 r_t^2 R_2}{2\pi \frac{n_1}{60} r_t^4 s \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2 \right]}$$

que denominando K a:

$$K = \frac{3U_1^2 r_t^2}{2\pi \frac{n_1}{60} r_t^4}$$

permite escribir el par de la forma siguiente:

$$T = \frac{KR_2}{s \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2 \right]} \quad (\text{a})$$

que para $s_m = 0,2$ da lugar al par máximo y para un valor específico s se obtiene el par de plena carga, es decir:

$$T_{\text{máx}} = \frac{K \cdot 0,25}{0,2 \cdot \left[\left(\frac{0,25}{0,2} \right)^2 + 1,25^2 \right]} ; T_N = \frac{K \cdot 0,25}{s \left[\left(\frac{0,25}{s} \right)^2 + 1,25^2 \right]}$$

Como quiera que la capacidad de sobrecarga del motor (que es el cociente de los pares anteriores) es igual a 2,1 resulta la fórmula de Kloss:

$$\frac{T_N}{T_{\text{máx}}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \Rightarrow \frac{1}{2,1} = \frac{2}{\frac{s}{0,2} + \frac{0,2}{s}}$$

Esta expresión da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$s^2 - 0,84s + 0,04 = 0$$

que al resolver se obtienen los siguientes valores del deslizamiento a plena carga posibles:

$$s_1 = 0,789 ; s_2 = 0,0507$$

El primer deslizamiento se sitúa en la zona inestable del motor, por lo que no es válido. El segundo deslizamiento es cercano a la velocidad de sincronismo y por tanto es el correcto. La velocidad correspondiente del motor es:

$$n = 1500 \cdot (1 - 0,0507) = 1424 \text{ r/min}$$

b) El par de arranque se obtiene de la expresión general (a) para $s = 1$, lo que da lugar a:

$$T_a = \frac{K \cdot 0,25}{1 \cdot (0,25^2 + 1,25^2)}$$

y por consiguiente, el cociente de arranque a nominal será:

$$\frac{T_a}{T_N} = \frac{0,0507 \left[\left(\frac{0,25}{0,0507} \right)^2 + 1,25^2 \right]}{0,25^2 + 1,25^2} = 0,8073$$

4.15. El circuito equivalente de un motor de inducción trifásico de 4 polos, conectado en estrella, presenta los siguientes valores: $R_1 = R_2' = 0,85 \Omega$; $X_{cc} = 5 \Omega$. Si la red tiene una tensión de 400 V, 50 Hz. Calcular:

- La corriente de arranque y la de plena carga, si el deslizamiento en este último régimen es del 4%.
- El par de arranque y el de plena carga.
- La velocidad del motor cuando consume una corriente mitad de la de arranque y el par electromagnético desarrollado por la máquina en ese instante. Prescindase de la rama paralelo del circuito equivalente.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

En la Figura 4.13 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor. Si se toma la tensión de la red como referencia de fase, la corriente absorbida por el motor de la red en el arranque, (para $s = 1$) es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{1,7 + j5} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{5,281 \angle 71,22^\circ} = 43,73 \angle -71,22^\circ \text{ A}$$

que corresponde a una magnitud de 41,54 A.

Cuando el motor funciona a plena carga con un deslizamiento del 4%, la resistencia de carga tiene un valor:

$$R_c' = 0,85 \left(\frac{1}{0,04} - 1 \right) = 20,4 \Omega$$

por lo que la corriente absorbida de la red vale:

$$I_1 = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{22,1 + j5} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{22,66 \angle 12,75^\circ} = 10,19 \angle -12,75^\circ \text{ A}$$

es decir, la corriente de plena carga vale 10,19 A.

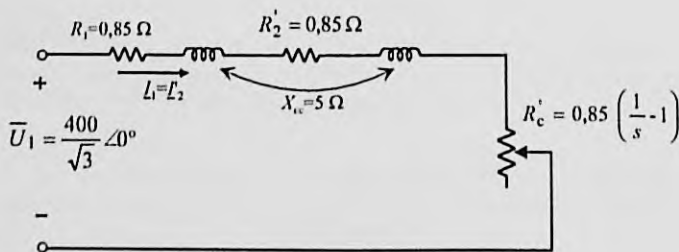


Figura 4.13

b) El par se puede escribir del modo siguiente:

$$T = \frac{P_g}{\Omega_1} = \frac{P_{cu2}}{s\Omega_1} = \frac{3R_2' I_1^2}{s\Omega_1}$$

por lo que el par de arranque se obtiene de la expresión anterior haciendo $s = 1$, resultando:

$$T_a = \frac{3 \cdot 0,85 \cdot 43,73^2}{1 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 31,04 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y el par de plena carga, es decir (con $s = 0,04$) vale:

$$T_{pc} = T_N = \frac{3 \cdot 0,85 \cdot 10,19^2}{0,04 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 42,14 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) Si la corriente que consume el motor es la mitad que la de arranque, al escribir la ecuación que define su magnitud en función de los parámetros del circuito equivalente del motor se tiene:

$$I_1 = \frac{43,73}{2} = \frac{219,39}{\sqrt{\left(0,85 + \frac{0,85}{s}\right)^2 + s^2}}$$

lo que da lugar a la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\left(0,85 + \frac{0,85}{s}\right)^2 + 25} = 10,56$$

cuya solución es $s \approx 0,10$, por lo que la velocidad correspondiente será:

$$n = 1500 \cdot (1 - 0,1) = 1350 \text{ r/min}$$

y el par correspondiente es:

$$T = \frac{3 \cdot 0,85 \cdot 21,87^2}{0,1 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 77,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.16. La Figura 4.14 muestra el circuito equivalente exacto reducido al primario de un motor trifásico de 4 polos, 50 Hz, en el que pueden despreciarse tanto las pérdidas en el hierro como las pérdidas mecánicas. El motor está conectado en estrella a una red de 400 V de línea. Calcular:

- La velocidad del motor para obtener el par máximo.
- El valor del par máximo y de la potencia mecánica desarrollada por el motor en esta situación.
- La velocidad del motor para que funcione con potencia mecánica máxima.
- En el caso anterior, el valor de la potencia mecánica desarrollada y el par correspondiente en el árbol del motor.

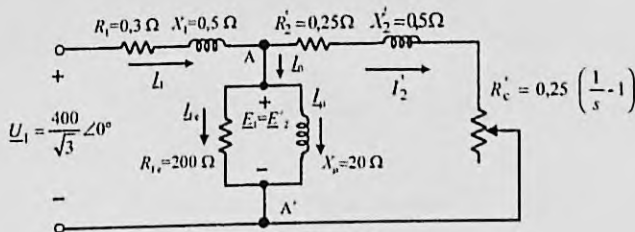


Figura 4.14

Solución

Teoría previa

En este problema se trabaja con el circuito equivalente exacto del motor asíncrono, por lo que es preciso transformar el circuito equivalente para simplificarlo de una forma conveniente y demostrar a continuación las relaciones que se solicitan en el motor real. En primer lugar, una forma de trabajar con el circuito de la Figura 4.14 es transformar la parte de la red situada a la izquierda de los nudos A y A' aplicando el teorema de Thévenin, y sustituyendo esta zona del circuito por un generador de Thévenin en serie, con una impedancia de Thévenin. El circuito correspondiente es el mostrado en la Figura 4.15, en la que la tensión del generador de Thévenin se obtiene, de acuerdo con la teoría de circuitos, como la tensión que aparece entre los nudos A y A' al abrir la parte derecha del circuito de la Figura 4.14, lo que lugar a la siguiente expresión:

$$\underline{E}_{Th} = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_p}{R_1 + jX_1 + \underline{Z}_p} \quad (1)$$

En la que se ha denominado \underline{Z}_p a la impedancia equivalente del paralelo entre R_{fe} y X_μ .

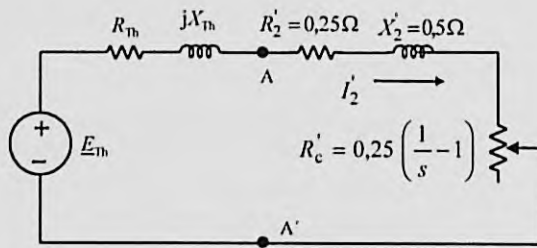


Figura 4.15

Por otro lado, la impedancia de Thévenin es la impedancia que se observa entre los terminales A y A' al cortocircuitar el generador (red), lo que da lugar a una conexión en paralelo de la rama del primario $R_1 + jX_1$ y la rama de vacío del motor, por lo que se cumple:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{Th}} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{\underline{Z}_p} \Rightarrow \underline{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (2)$$

Para determinar en esta situación el valor del deslizamiento para el cual se obtiene un par máximo, es evidente que el par motor (se supone una máquina sin pérdidas mecánicas) se puede expresar de la forma siguiente:

$$T = \frac{P_g}{\Omega_1} = \frac{P_{cu2}}{s\Omega_1} = \frac{3R'_2 I_2'^2}{s\Omega_1} \quad (3)$$

donde ω_s es la velocidad de sincronismo del motor. Pero del circuito de la Figura 4.15 se obtiene la corriente reducida del rotor:

$$I_2' = \frac{E_{Th}}{\sqrt{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}} \quad (4)$$

por lo que al sustituir (4) en (3) nos da:

$$T = \frac{3R_2'}{s\Omega_1} \frac{E_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X_2')^2} \quad (5)$$

El par anterior será máximo cuando $dT/ds = 0$, lo cual se cumple, como puede comprobar fácilmente el lector, cuando el deslizamiento es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \quad (6)$$

Otro aspecto que incluye este problema (y que también se puede aplicar a los motores en los que se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente) es determinar el deslizamiento para el cuál se obtiene la máxima potencia mecánica. Para ello es conveniente preparar una introducción teórica utilizando la red de la Figura 4.16. Este circuito, que forma una sola malla, está formado por un generador de tensión E , con una impedancia en serie $Z_a = R_a + jX_a$, que está cargado por una resistencia R_L . Se trata de determinar cuál debe ser el valor de esta resistencia de carga R_L para que sea máxima la potencia activa disipada en la misma.

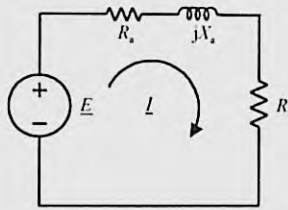


Figura 4. 16

Es evidente que la magnitud de la corriente que circula en la red de la Figura 4.16 vale:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_a + R_L)^2 + X_a^2}} \quad (7)$$

y la potencia disipada en la carga es:

$$P_L = R_L I^2 = R_L \frac{E^2}{(R_a + R_L)^2 + X_a^2} \quad (8)$$

que será máxima cuando $dP_L/dR_L = 0$, lo cual puede verificar el lector que se cumple cuando:

$$R_a^2 + X_a^2 = R_L^2 \Rightarrow R_L = \sqrt{R_a^2 + X_a^2} = Z_a \quad (9)$$

es decir, la potencia máxima se produce cuando la resistencia de carga coincide con la impedancia en serie del generador.

Si se extiende este resultado al circuito equivalente del motor de la Figura 4.15, en el que la resistencia de carga es la resistencia variable del motor y en el que la impedancia Z_a es toda la impedancia en serie que tiene el generador de Thévenin hasta la resistencia de carga, se tendrá la potencia máxima en el motor cuando se cumpla la siguiente igualdad:

$$R_c' = R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2} \quad (10)$$

es decir el deslizamiento para potencia mecánica máxima será:

$$s = \frac{R_2'}{R_2' + \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} \quad (11)$$

que al comparar con la expresión (6) indica que el deslizamiento para el que se obtiene la potencia mecánica máxima es menor que el correspondiente al funcionamiento con par máximo, lo que significa que *la velocidad de un motor asincrónico para potencia mecánica máxima es algo superior a la velocidad con par máximo*. A continuación vamos a aplicar estos resultados al problema propuesto.

a) De acuerdo con el circuito de la Figura 4.14, la impedancia Z_p de la rama de vacío del motor vale:

$$Z_p = \frac{200 \cdot (j20)}{200 + j20} = 19,9 \angle 84,3^\circ = 1,98 + j19,8 \Omega$$

En consecuencia, la f.e.m. del generador de Thévenin es según la expresión (1) igual a:

$$\underline{E}_{Th} = U_1 \frac{Z_p}{R_1 + jX_1 + Z_p} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \frac{19,9 \angle 84,3^\circ}{0,3 + j0,5 + 19,9 \angle 84,3^\circ} \approx 225 \angle 0,7^\circ \text{ V}$$

Por otro lado, la impedancia de Thévenin, es de acuerdo con (2):

$$\frac{1}{Z_{Th}} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{0,3 + j0,5} + \frac{1}{19,9 \angle 84,3^\circ} = 1,76 \angle -59,73^\circ \text{ siemens}$$

que corresponde a una impedancia de Thévenin:

$$Z_{Th} = \frac{1}{1,76 \angle -59,73^\circ} = 0,568 \angle 59,73^\circ \Omega = 0,286 + j0,491 \Omega = R_{Th} + jX_{Th}$$

y en consecuencia, el deslizamiento para el par máximo es según (6):

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}} = \frac{0,25}{\sqrt{0,286^2 + (0,491 + 0,5)^2}} = 0,2423$$

que corresponde a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s_m) = 1500 \cdot (1 - 0,2423) \approx 1136,4 \text{ r/min}$$

b) La corriente reducida del rotor que absorbe el motor cuando gira con el deslizamiento anterior del par máximo es según (4):

$$I'_2 = \frac{E_{Th}}{\sqrt{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}} = \frac{225}{\sqrt{\left(0,286 + \frac{0,25}{0,2423}\right)^2 + (0,491 + 0,5)^2}} = 136,46 \text{ A}$$

por lo que el valor del par máximo desarrollado por el motor es, según (3):

$$T_{max} = \frac{3R'_2 I_2'^2}{s_m \Omega_1} = \frac{3 \cdot 0,25 \cdot 136,46^2}{0,2423 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} \approx 366,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y la potencia mecánica desarrollada por el motor en esta situación vale:

$$P_{mi} = 3R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_2'^2 = 3 \cdot 0,25 \cdot \left(\frac{1}{0,2423} - 1\right) \cdot 136,46^2 \approx 43,7 \text{ kW}$$

que se puede obtener también de este modo:

$$P_{mi} = T_{max} \Omega = 366,9 \cdot 2\pi \frac{1136,4}{60} \approx 43,7 \text{ kW}$$

c) El deslizamiento del motor para potencia mecánica máxima viene definido por (11):

$$s = \frac{R_2'}{R_2 + \sqrt{(R_{Th} + R_2')^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{0,25}{0,25 + \sqrt{(0,286 + 0,25)^2 + (0,491 + 0,5)^2}} = 0,1816$$

que corresponde a una velocidad del motor:

$$n = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,1816) = 1227,6 \text{ r/min}$$

d) El valor de la corriente reducida del rotor para el deslizamiento anterior vale:

$$I_2' = \frac{E_{Th}}{\sqrt{\left(R_{Th} + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X_2')^2}} = \frac{225}{\sqrt{\left(0,286 + \frac{0,25}{0,1816}\right)^2 + (0,491 + 0,5)^2}} = 116,2 \text{ A}$$

que corresponde a una potencia máxima desarrollada:

$$P_{mi} = 3 \cdot R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) \cdot I_2'^2 = 3 \cdot 0,25 \cdot \left(\frac{1}{0,1816} - 1\right) \cdot 116,2^2 \approx 45,64 \text{ kW}$$

y el par correspondiente es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{45640}{2\pi \frac{1227,6}{60}} \approx 355 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.17. Se tiene una estación de bombeo de agua, que lleva una bomba centrífuga que tiene incorporado un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla de 11 kW, 230/400 V, 50 Hz, 6 polos y que tiene los siguientes parámetros: $R_1 = R_2 = 0,8 \Omega$; $X_1 = X_2 = 2 \Omega$; $P_{Fe} = P_{Fw} = 0$, (se puede prescindir de la rama paralelo del circuito equivalente).

- Si la red es de 400 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor? Dibuje el cuadro de bornes e indique el nombre correcto de los terminales.
- Conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado a), ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada? Si el par resistente por la bomba en el arranque es de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$ ¿arrancará el motor?
- Si en régimen permanente, el par resistente es igual a $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ¿cuál será la velocidad a la cual girará el motor? (de las dos soluciones obtenidas, tómese la más lógica).
- ¿Qué corriente absorberá el motor en el caso anterior? ¿Cuánto valdrá la potencia desarrollada por el motor en el eje?
- Si el motor se alimenta por medio de un transformador ideal de relación $15 \text{ kV}/400 \text{ V} \pm 5\%$, conexión Dy11, a través de una línea trifásica de impedancia $0,1 + j 0,5 \Omega/\text{fase}$ ¿arrancará el motor? (recuérdese que el par resistente en el arranque es de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$). En caso negativo ¿qué procedimiento sería el más adecuado para que pueda arrancar el motor?

Nota: la línea está en el lado de B.T. del transformador y se conecta a la toma de 400 V del mismo.

Solución

a) El motor se conectará en estrella. En la Figura 4.17 se muestra la placa de bornes con las letras de identificación de terminales.

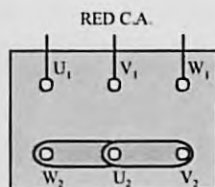


Figura 4.17

b) En la Figura 4.18 se muestra el circuito equivalente por fase del motor donde se desprecia la rama paralelo. El motor gira a una velocidad de sincronismo:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

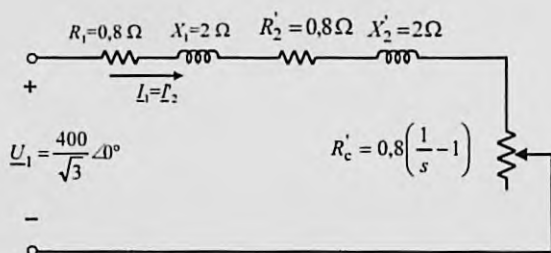


Figura 4.18

La expresión del par en función de los parámetros del motor es:

$$T = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]}$$

que para $s = 1$ nos da el par de arranque:

$$T_a = \frac{0,8 \cdot 400^2}{2\pi \frac{1000}{60} [1,6^2 + 4^2]} = 65,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y como quiera que el par resistente de la bomba en el arranque es de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$, el motor arrancará, al ser superior el par de arranque del motor al par resistente.

c) Si el par resistente en régimen permanente es de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, el deslizamiento correspondiente se obtiene de la ecuación del par siguiente:

$$100 = \frac{3 \cdot 0,8 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} s \left[\left(0,8 + \frac{0,8}{s}\right)^2 + 4^2 \right]}$$

lo que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado en s :

$$16,64s^2 - 10,94s + 0,64 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,593 ; s = 0,065$$

En la Figura 4.19 se muestran las curvas del par motor y del par resistente. La primera de las soluciones anteriores corresponde al punto A (zona inestable del motor) y la segunda solución corresponde al punto B (zona estable). El punto de funcionamiento real es, por consiguiente, el punto B, que corresponde a un deslizamiento de 0,065, que supone una velocidad de giro del rotor:

$$n = n_1(1 - s) = 1000 \cdot (1 - 0,065) = 935 \text{ r/min}$$

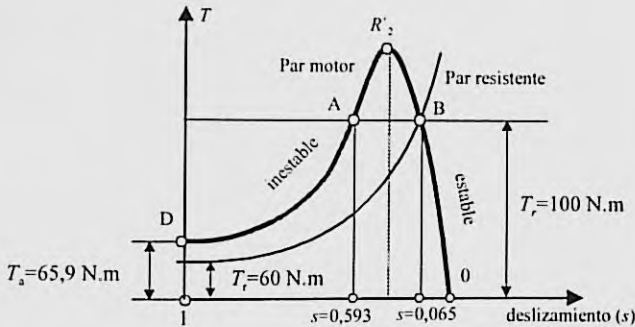


Figura 4.19

d) En el caso anterior, la corriente absorbida por el motor de la red es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(0,8 + \frac{0,8}{0,065}\right)^2 + 4^2}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{13,7} = 16,85 \text{ A}$$

y la potencia mecánica interna desarrollada por el motor vale:

$$P_{mi} = 3R_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_1^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot \left(\frac{1}{0,065} - 1\right) \cdot 16,85^2 \approx 9802 \text{ W}$$

e) En la Figura 4.20a se muestra el esquema unifilar de la instalación. En la Figura 4.20b se ha dibujado el circuito equivalente del motor desde el secundario del transformador. En el circuito equivalente de la Figura 4.20b se puede obtener el nuevo par de arranque del motor:

$$T_a = \frac{0,8 \cdot 400^2}{2\pi \frac{1000}{60} [1,7^2 + 4,5^2]} = 52,82 \text{ N} \cdot \text{m} < 60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

es decir el motor no arrancará, puesto que el par motor en el arranque es inferior al resistente. Sin embargo, se puede arrancar el motor actuando sobre las tomas de regulación del transformador de alimentación, ya que si se elige la toma de +5%, la tensión en el secundario sería de $400 + 5\% \cdot 400 = 420 \text{ V}$, y con esta tensión el par de arranque del motor será:

$$T_a = \frac{0,8 \cdot 420^2}{2\pi \frac{1000}{60} [1,7^2 + 4,5^2]} = 63,9 \text{ N} \cdot \text{m} > 60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que al ser superior al par resistente hará que arranque el motor. En muchos casos prácticos es suficiente con esta solución. En otras situaciones se pueden conectar condensadores en bornes del motor para mejorar el f.d.p. de la instalación y al reducir las corrientes en la línea disminuyen las caídas de tensión; de este modo, se eleva la tensión que llega al motor. Otra solución más cara es poner otra línea en paralelo para reducir la impedancia del cable de alimentación y disminuir así la caída de tensión de la línea.

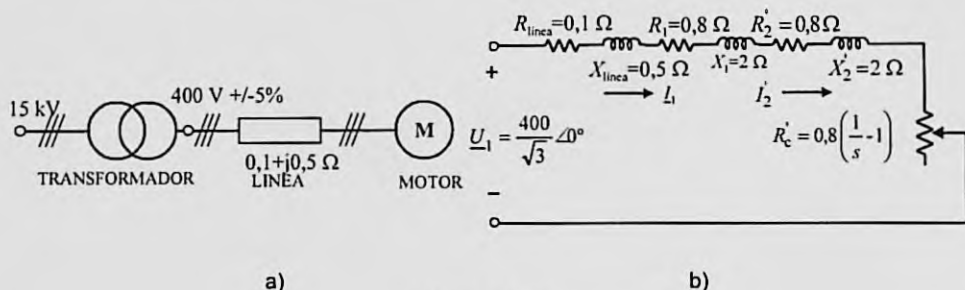


Figura 4.20

4.18 Un motor asíncrono trifásico 400/690V, de 4 polos y rotor devanado, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente por fase: $R_1 = 0,1 \Omega$; $X_1 = 0,5 \Omega$; $R_2' = 0,2 \Omega$; $X_2' = 1 \Omega$; $r_{lu} = r_{ll} = r_l = 2$. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y también las pérdidas mecánicas. El estator está conectado en triángulo y el rotor, en estrella y el motor se conecta a una red trifásica de 400 V, 50 Hz. Calcular:

- Si la potencia mecánica desarrollada a plena carga por el motor es de 95 kW ¿cuál será la velocidad del rotor?
- La corriente que absorbe el motor de línea de alimentación y su f.d.p. cuando desarrolla la plena carga.
- La resistencia que debe añadirse al rotor por fase, para que la corriente de arranque no sea superior a dos veces la de plena carga.
- Si el motor está girando a plena carga (a la velocidad calculada en el apartado a) se conmutan entre sí dos fases de la alimentación ¿cuál será el par de frenado desarrollado en ese instante? (se supone para la resolución de este apartado, que no existe resistencia adicional en el rotor).

Solución

a) En la Figura 4.21 se muestra el circuito equivalente por fase del motor. Como quiera que la potencia mecánica desarrollada por el motor es de 95 kW y que esta potencia corresponde a la disipada en la resistencia de carga, si se denomina s al deslizamiento correspondiente se puede escribir:

$$P_{mi} = 3R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_1^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \left[\frac{400^2}{\left(0,1 + \frac{0,2}{s} \right)^2 + 1,5^2} \right] = 95\,000$$

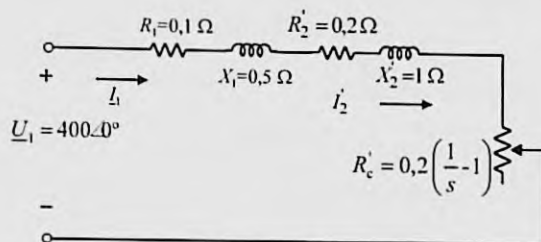
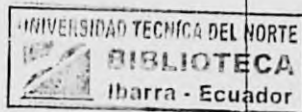


Figura 4.21

La ecuación anterior da lugar a:

$$1,01 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 0,01 + \frac{0,04}{s^2} + \frac{0,04}{s} + 2,25 = \frac{1,01}{s} - 1,01$$

que corresponde a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3,27s^2 - 0,97s + 0,04 = 0$$

cuyos resultados son:

$$s = 0,247 \text{ (inestable)} ; \quad s = 0,0495 \approx 0,05 \text{ (estable)}$$

El deslizamiento menor es la solución correcta, por lo que la velocidad de giro del motor cuando desarrolla la potencia mecánica de 95 kW es:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min} \Rightarrow n = n_1(1 - s) = 1\,500 \cdot (1 - 0,05) \approx 1\,425 \text{ r/min}$$

b) Con el circuito de la Figura 4.21, tomando la tensión de la red como referencia de fases, la corriente absorbida por el motor tiene un valor:

$$I_1 = \frac{400 \angle 0^\circ}{\left(0,1 + \frac{0,2}{0,05} \right) + j1,5} = \frac{400 \angle 0^\circ}{4,1 + j1,5} = \frac{400 \angle 0^\circ}{4,366 \angle 20,1} = 91,62 \angle -20,1^\circ \text{ A}$$

Es decir, la corriente de fase del motor es 91,62 A. Al estar conectado el estátor en triángulo corresponde a una corriente de línea y a un f.d.p.:

$$I_{lc} = \sqrt{3} \cdot 91,62 = 158,7 \text{ A} ; \quad \cos \varphi = \cos 20,1^\circ = 0,939$$

c) Si se denomina R_{a2}' a la resistencia que se añade por fase (reducida al primario) y la corriente del motor no debe superar dos veces la corriente de plena carga calculada en el apartado anterior, se tiene:

$$I_a = 2 \cdot 91,62 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 0,2 + R_{a2}')^2 + 1,5^2}}$$

es decir:

$$\sqrt{(0,3 + R'_{a2})^2 + 2,25} = 2,183 \Omega \Rightarrow 0,3 + R'_{a2} = 1,586 \Omega \Rightarrow R'_{a2} = 1,286 \Omega$$

y por consiguiente, la resistencia adicional real es:

$$R'_{a2} = 1,286 = r_r^2 R_{a2} = 4 \cdot R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,321 \Omega$$

d) En el momento de la conmutación, el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - (-1425)}{1500} = 1,95$$

El par de frenado que ejerce el motor vale, entonces:

$$T = \frac{3R'_2 U_f^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot 400^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 1,95 \cdot \left[\left(0,1 + \frac{0,2}{1,95} \right)^2 + 1,5^2 \right]} = 136,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.19. Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 50 Hz, está conectado en estrella a una red de 400 V. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $R_1 = R'_2 = 0,5 \Omega$; $X_1 = X'_2 = 2 \Omega$; $P_{fw} = 0$; $I_0 = 0$ (despréciase la rama paralelo del circuito equivalente del motor). El par resistente de la carga se supone que sigue una ley lineal de la forma:

$$T_r = 40 + 0,06 n \quad (T_r: \text{par en N} \cdot \text{m}; n: \text{velocidad en r/min})$$

Calcular:

- El par de arranque y corriente de arranque del motor.
- Si la tensión de la red se reduce un 10% ¿podrá arrancar el motor? Justificar la respuesta.
- con la tensión asignada de 400 V aplicada al motor ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente señalado.
- ¿Qué potencia desarrolla el motor en el eje en el caso anterior?

Nota: para realizar el apartado c) es preciso resolver una ecuación de tercer grado en función del deslizamiento s .

Solución

a) En la Figura 4.22 se muestra el circuito equivalente por fase del motor cuya velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r/min}$$

La corriente de arranque se deduce del circuito de la Figura 4.22, tomando el deslizamiento unidad, resultando ser:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(0,5 + \frac{0,5}{1} \right)^2 + 4^2}} = 56 \text{ A}$$

El par de arranque correspondiente es:

$$T_u = \frac{P_R}{\Omega_1} = \frac{3R'_2 I_1^2}{s \Omega_1} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 56^2}{1 \cdot 2\pi \frac{1000}{60}} = 44,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

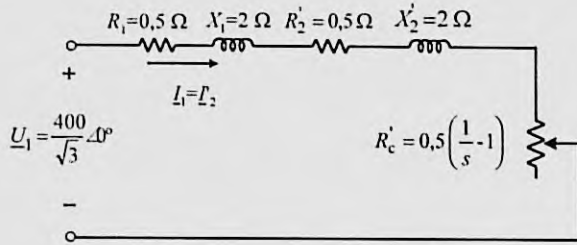


Figura 4.22

b) Si la tensión se reduce un 10%, es decir es el 90% de la tensión anterior de 400 V, al ser el par proporcional al cuadrado de la tensión aplicada, resulta un par de arranque:

$$T'_a = 44,9 \cdot 0,9^2 = 36,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y teniendo en cuenta que el par resistente en el arranque (es decir para $n = 0$) es de 40 N · m, el motor no podrá arrancar.

c) Si se vuelve a aplicar la tensión de 400 voltios al motor, al alcanzar el estado de equilibrio permanente, el par motor producido debe ser igual al par resistente y se cumple la igualdad:

$$T = \frac{3R'_2 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = 40 + 0,06n = 35 + 0,06 \cdot 1000 \cdot (1-s)$$

Téngase en cuenta para entender la ecuación anterior que la velocidad de giro real del motor es $n = n_1(1-s)$. Operando la expresión anterior se llega a la siguiente ecuación de tercer grado:

$$s^3 - 1,636s^2 + 0,748s - 0,0256 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,0372 \quad ; \quad s = 0,7994 \pm j0,2225$$

es decir, la única solución válida es la primera:

$$n = 1000 \cdot (1 - 0,0372) = 962,8 \text{ r/min}$$

d) Para el deslizamiento anterior se tiene una corriente:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(0,5 + \frac{0,5}{0,0372} \right)^2 + 4^2}} = 15,9 \text{ A}$$

y por consiguiente, la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{\text{m}} = 3R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_1^2 = 3 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{0,0372} - 1 \right) \cdot 15,9^2 = 9815 \text{ W}$$

4.20. Se dispone de un motor asincrónico trifásico de rotor devanado (con anillos), de 10 kW, 230/400V, 4 polos, 50 Hz. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{11} = I_0 = 0$; $P_{\text{m}} = 0$ (pérdidas mecánicas); $R_1 = R'_2$; $X_1 + X'_2 = 1,5 \Omega$, $r_{\text{m}} = r_{\text{H}} = r_l = 2$; se sabe además que el motor da el par máximo (con los anillos cortocircuitados) a una velocidad de 1200 r/min. La tensión de alimentación de la red trifásica es de 230 V, 50 Hz.

- ¿Cómo se deberá conectar el motor?
- Calcular la resistencia R_1 por fase del estátor.
- Si el motor está conectado correctamente como se indica en el apartado a), calcular la intensidad de línea que absorbe el motor en el momento del arranque con los anillos deslizantes cortocircuitados y el par de arranque correspondiente;
- Si el motor desarrolla una potencia mecánica en el eje de 10 kW (plena carga o asignada) ¿cuál será la velocidad de rotación correspondiente? (los anillos están cortocircuitados).
- Determinar en el caso anterior la corriente de línea que absorbe el motor y el f.d.p. con el que trabaja la máquina.
- Si el rotor se conecta en estrella ¿cuál será la resistencia adicional que debe añadirse al rotor por fase en el arranque para que la intensidad de arranque sea, como máximo, tres veces la asignada determinada en el apartado e)? ¿Qué par de arranque tendrá la máquina entonces?

Solución

a) El motor se debe conectar en triángulo a una red de 230 V.

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

y por consiguiente, el deslizamiento para el par máximo vale:

$$s_m = \frac{n_1 - n}{n_2} = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0,2$$

Teniendo en cuenta que la expresión del deslizamiento para el par máximo en función de los parámetros del motor es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + 1,5^2}} = 0,2$$

ya que la resistencia del estátor del motor coincide con la reducida del rotor. De la expresión anterior se obtiene la ecuación:

$$R_1^2 = 0,04(R_1^2 + 2,25) \Rightarrow 0,96R_1^2 = 0,09 \Rightarrow R_1 = 0,306 \Omega$$

c) En la Figura 4.23 se muestra el circuito equivalente por fase del motor, que al tomar la tensión de la red como referencia de fase da lugar a una corriente de arranque ($s = 1$):

$$I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{(0,306 + 0,306) + j 1,5} = \frac{230 \angle 0^\circ}{0,612 + j 1,5} = \frac{230 \angle 0^\circ}{1,62 \angle 67,8^\circ} = 142 \angle -67,8^\circ \text{ A}$$

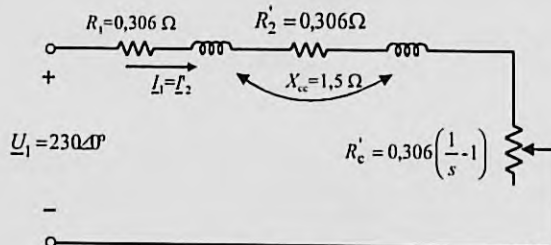


Figura 4.23

Es decir, la corriente por fase del motor es de 142 A, y como está conectado en triángulo, supone una corriente de línea:

$$I_{L, \text{ línea}} = \sqrt{3} \cdot 142 = 246 \text{ A}$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{3R_2' I_1^2}{\Omega_1} = \frac{3 \cdot 0,306 \cdot 142^2}{2\pi \frac{1500}{60}} = 117,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) Cuando el motor desarrolla una potencia mecánica de 10 kW, si el deslizamiento es s , la potencia anterior será la disipada en la resistencia de carga y se cumplirá por tanto:

$$P_{mi} = 10000 = 3 \cdot 0,306 \cdot \left(\frac{1}{s} - 1\right) \left[\frac{230^2}{\left(0,306 + \frac{0,306}{s}\right)^2 + 1,5^2} \right]$$

que operando conduce a la ecuación de segundo grado:

$$7,2s^2 - 4,67s + 0,0936 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,628 \text{ (inestable)}; s = 0,0205 \text{ (estable)}$$

La segunda solución es la correcta y la velocidad del motor es:

$$n = n_1 (1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0,0205) = 1469,3 \text{ r/min}$$

e) En el caso anterior la corriente por fase que absorbe el estátor es:

$$I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{\left(0,306 + \frac{0,306}{0,0205}\right) + j1,5} = \frac{230 \angle 0^\circ}{15,23 + j1,5} = \frac{230 \angle 0^\circ}{15,31 \angle 5,62^\circ} = 15,03 \angle -5,62^\circ \text{ A}$$

que representa una corriente de línea $I_{LL} = \sqrt{3} \cdot 15,03 = 26 \text{ A}$ y un f.d.p. $\cos \varphi = \cos 5,62^\circ = 0,995$.

f) La corriente de arranque se limita a tres veces la de plena carga calculada en el apartado anterior y para ello será necesario incluir una resistencia adicional en el reóstato de arranque, de modo que se debe cumplir:

$$I_a = 3 \cdot 15,03 = 45,09 = \frac{230}{\sqrt{\left(0,306 + \frac{0,306 + R_{a2}'}{1}\right)^2 + 1,5^2}}$$

de donde se deduce una resistencia adicional reducida al estátor $R_{a2}' = 4,26 \Omega$, que representa un valor real:

$$R_{a2}' = r_t^2 R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = \frac{4,26}{4} = 1,07 \Omega$$

y el par de arranque del motor será, en estas condiciones:

$$T_a = \frac{3 \cdot (0,306 + 4,26) \cdot 45,09^2}{2\pi \frac{1500}{60}} = 177,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.21. Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 230/400 V; 4 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente aproximado: $R_1 = R_2' = 0,2 \Omega$; $X_{cc} = 0,3 \Omega$. Se consideran despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Si se conecta el motor a una red trifásica de 400 V de tensión compuesta, 50 Hz:

- ¿Cómo se conectará el motor?
- Determinar la potencia mecánica útil y el par mecánico desarrollado para la velocidad asignada de 1425 r/min.
- Calcular, en las condiciones nominales del apartado anterior, la corriente absorbida por el motor de la línea, el f.d.p. con el que trabaja y el rendimiento.
- Con el motor girando con el par nominal, ¿hasta qué porcentaje se podrá reducir la tensión de alimentación sin que se pare el motor?
- ¿Cuál debe ser la tensión mínima para que para arrancar el motor si mueve un par resistente igual al nominal?

Solución

a) El motor debe conectarse en estrella a una red de 400 voltios.

b) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

y por consiguiente, el deslizamiento de la máquina cuando gira a 1425 r/min será:

$$s = \frac{1500 - 1425}{1500} = 0,05$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada es:

$$P_{mi} = 3 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{1}{0,05} - 1 \right) \cdot \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{\left[\left(0,2 + \frac{0,2}{0,05} \right)^2 + 0,3^2 \right]} = 34\,291 \text{ W} \approx 34,29 \text{ kW}$$

y en consecuencia, el par en el eje es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{34\,291}{2\pi \frac{1425}{60}} = 229,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) Para el deslizamiento anterior la corriente del estátor es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,2 + \frac{0,2}{0,05} \right) + j0,3} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{4,2 + j0,3} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{4,21 \angle 4,09^\circ} = 54,8 \angle -4,09^\circ \text{ A}$$

y como el motor está conectado en estrella, la corriente en la línea es la misma, es decir, de 54,8 A, siendo el f.d.p. igual a $\cos 4,09^\circ = 0,997$. En consecuencia, la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 54,8 \cdot 0,997 = 37\,882 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor en estas condiciones vale:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{34\,291}{37\,882} = 90,5\%$$

d) En la Figura 4.24 se muestra en trazo grueso la curva par-velocidad del motor a la tensión asignada de 400 voltios. Cuando el motor mueve el par de 229,8 N · m está funcionando en el punto de trabajo A. Si en esta situación se va reduciendo la tensión de alimentación, la curva de par se irá reduciendo en proporción cuadrática, ya que el par depende del cuadrado de la tensión aplicada. La situación límite se tendrá cuando la tensión aplicada dé lugar a una curva en el que su máximo coincida con el par resistente de 229,8 N · m, puesto que una reducción posterior de la tensión llevará al motor a un colapso y se parará porque no existirá un punto de equilibrio de la máquina. Esta situación se ha representado por la curva par-velocidad de trazo fino correspondiente a una tensión aplicada de línea U_{1a} . El punto de funcionamiento del motor será el B y en él se cumple:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,2^2 + 0,3^2}} = 0,5547$$

Igualando el par máximo producido con esta tensión al par resistente de 229,8 N · m resulta:

$$T_{max} = 229,8 = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{U_{1a}}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1\,500}{60} \cdot 0,5547 \cdot \left[\left(0,2 + \frac{0,2}{0,5547}\right)^2 + 0,3^2 \right]}$$

que operando de lugar a una tensión $U_{1a} = 201,1$ V. El tanto por ciento de reducción de la tensión de red posible es:

$$\varepsilon = \frac{400 - 201,1}{400} = 49,71\%$$

e) Debe señalarse que el par de arranque que produce el motor con la tensión de 400 voltios está definido por la distancia CE en la Figura 4.24. Si se reduce la tensión de alimentación el motor podrá arrancar siempre que el par de arranque a esa tensión sea superior al resistente. La situación límite será cuando el par de arranque coincida con el par resistente de 229,8 N · m. En la Figura 4.24 se ha mostrado la curva par-velocidad correspondiente, que es la mostrada por trazo discontinuo y que corresponde a una tensión de línea U_{1b} . Al igualar el par de arranque para esta tensión al par resistente de 229,8 N · m, se tiene:

$$T_a = 229,8 = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot \left(\frac{U_{1b}}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1\,500}{60} \cdot 1 \cdot [(0,2 + 0,2)^2 + 0,3^2]}$$

de donde se deduce una tensión $U_{1b} = 212,4$ V.

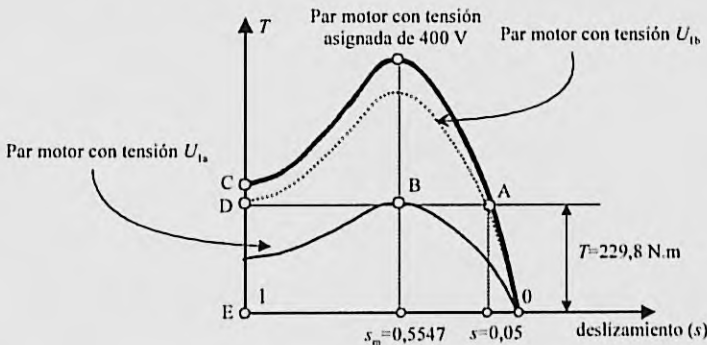


Figura 4.24

4.22. Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 230/400 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 230 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea de plena carga es de 90 A y se observa que si se realiza el arranque cortocircuitando los anillos, la corriente de arranque es 6,6 veces la asignada o de plena carga, desarrollando un par en esas condiciones, que es 2,2 veces el nominal. La resistencia por fase del estator R_1 es igual a la reducida del rotor R_2' . Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Se pide:

- Realizar la conexión del motor.
- La velocidad del motor a plena carga y valores de los parámetros del circuito equivalente: R_1 , R_2' y X_{cc} .
- La potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga, par producido y rendimiento correspondiente.
- El par máximo desarrollado por el motor con los anillos cortocircuitados y la corriente absorbida de la red con su factor de potencia en esas condiciones.
- ¿Qué resistencia habrá que añadir en el rotor por fase para limitar la corriente de arranque a un valor de 300 A de línea? ¿Qué par de arranque producirá el motor en esta situación?

Nota: $r_m = r_{ll} = 2$.

Solución

a) El motor se debe conectar en triángulo a una red de 230 V.

b) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

La expresión del par en función de la corriente que absorbe el motor es:

$$T = \frac{3R_2' I_1^2}{s\Omega_1}$$

Como quiera que cuando funciona a plena carga la corriente de línea es de 90 amperios (es decir, $90/\sqrt{3}$ por fase), el par correspondiente, si en estas condiciones el deslizamiento es s , vale:

$$T_N = \frac{3R_2' I_1^2}{s\Omega_1} = \frac{3R_2' \left(\frac{90}{\sqrt{3}}\right)^2}{s\Omega_1} \quad (1)$$

Además, la corriente de arranque es 6,6 veces la de plena carga, por lo que se puede escribir:

$$T_a = \frac{3R_2' I_1^2}{s\Omega_1} = \frac{3R_2' \left(\frac{6,6 \cdot 90}{\sqrt{3}}\right)^2}{\Omega_1} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que el par de arranque es 2,2 veces el de plena carga, de las expresiones (1) y (2), al dividir las entre sí, resulta:

$$\frac{T_a}{T_N} = 2,2 = \frac{\frac{3R_2' \left(\frac{6,6 \cdot 90}{\sqrt{3}}\right)^2}{\Omega_1}}{\frac{3R_2' \left(\frac{90}{\sqrt{3}}\right)^2}{s\Omega_1}} = 6,6^2 \cdot s \Rightarrow 2,2 = 6,6^2 \cdot s \Rightarrow s = \frac{2,2}{6,6^2} = 0,0505$$

y por tanto la velocidad del motor a plena carga es:

$$n = 1500 \cdot (1 - 0,0505) = 1424,24 \text{ r/min}$$

Para determinar ahora los parámetros solicitados del motor, es necesario tener en cuenta que la corriente absorbida por fase vale:

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}}$$

por lo que las expresiones correspondientes a la situación de plena carga y de arranque son, respectivamente:

$$\frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{230}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_1}{0,0505}\right)^2 + X_{cc}^2}} ; 6,6 \cdot \frac{90}{\sqrt{3}} = \frac{230}{\sqrt{(R_1 + R_1)^2 + X_{cc}^2}}$$

donde se ha tenido en cuenta que $R_1 = R_2'$. De estas dos ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:

$$R_2' = R_1 = 0,21 \Omega ; X_{cc} = 0,52 \Omega$$

c) La potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga se obtiene fácilmente de la expresión:

$$P_{mi} = 3R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_1^2$$

y teniendo en cuenta que a plena carga $s = 0,0505$ e $I_1 = 90/\sqrt{3}$, se tiene un valor:

$$P_{mi} = 3 \cdot 0,21 \cdot \left(\frac{1}{0,0505} - 1\right) \cdot \left(\frac{90}{\sqrt{3}}\right)^2 \approx 31982 \text{ W}$$

y el par correspondiente es:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{31982}{2\pi \frac{1424,24}{60}} = 214,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como quiera que la impedancia del motor a plena carga es de la forma:

$$\underline{Z} = \left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right) + jX_{cc} = \left(0,21 + \frac{0,21}{0,0505}\right) + j0,52 = 4,4 \angle 6,8^\circ \Omega$$

el factor de potencia del motor será el $\cos 6,8^\circ = 0,993$ y la potencia eléctrica absorbida por el motor de la red será:

$$P_1 = \sqrt{3}U_1 I_1 \cos \phi = \sqrt{3} \cdot 230 \cdot 90 \cdot 0,993 = 35602 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{31982}{35602} = 89,8\%$$

d) El deslizamiento para el par máximo vale:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,21}{\sqrt{0,21^2 + 0,52^2}} = 0,374$$

y la corriente del estátor por fase en estas condiciones es igual a:

$$I_1 = \frac{230 \angle 0^\circ}{\left(0,21 + \frac{0,21}{0,374}\right) + j 0,52} = \frac{230 \angle 0^\circ}{0,771 + j 0,52} = \frac{230 \angle 0^\circ}{0,93 \angle 34^\circ} = 247,3 \angle -34^\circ \text{ A}$$

que corresponde a una corriente de línea de $I_{\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 247,3 = 428,3 \text{ A}$ y a un f.d.p. $\cos 34^\circ = 0,829$. En esta situación, el valor del par máximo es:

$$T_{\text{máx}} = \frac{P_g}{s\Omega_1} = \frac{3R_2' I_1^2}{s\Omega_1} = \frac{3 \cdot 0,21 \cdot 247,34^2}{0,374 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 656,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) Si se limita la corriente de arranque de línea a 300 amperios, es preciso incluir una resistencia adicional en el réostato de valor reducido R_{a2}' e imponiendo el valor de esta corriente en el motor resulta:

$$\frac{300}{\sqrt{3}} = \frac{230}{\sqrt{\left(0,21 + \frac{0,21 + R_{a2}'}{1}\right)^2 + 0,52^2}}$$

de donde se obtiene:

$$R_{a2}' = 0,8 = 2^2 \cdot R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,2 \Omega$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{P_g}{\Omega_1} = \frac{3(R_2' + R_{a2}') I_1^2}{\Omega_1} = \frac{3 \cdot (0,21 + 0,8) \cdot \left(\frac{300}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 \cdot 2\pi \frac{1500}{60}} = 578,7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.23. Un motor asíncrono con rotor en jaula de ardilla de 230/400 V, 50 Hz, 6 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente aproximado: $R_1 = 0,5 \Omega$; $R_2' = 1,5 \Omega$; $X_1 = X_2' = 2 \Omega$. Las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente se consideran despreciables. El motor se conecta correctamente para trabajar en una red de 400 V de línea.

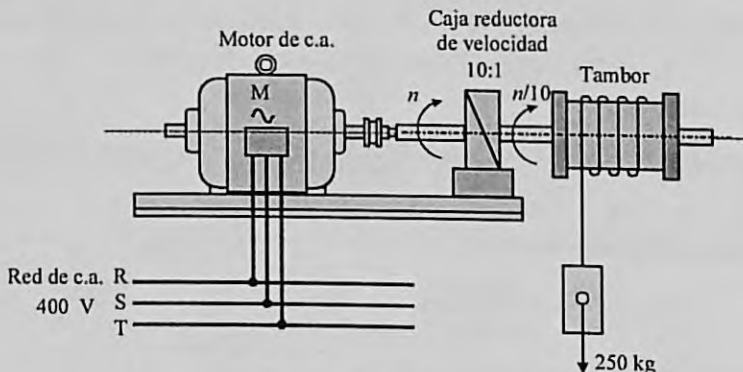


Figura 4.25

- a) Si el motor lleva acoplado una caja de engranajes o *convertidor de par* (ver Figura 4.25), con una desmultiplicación de relación 10:1 (es decir la velocidad se reduce 10 veces, o de otro modo, el par aumenta 10 veces) y mueve un tambor de 50 cm de diámetro sobre el que va arrollando un cable que levanta un peso de 250 kg ¿cuál será el valor de la velocidad lineal con la que sube el peso de 250 kg? (supóngase que la caja de engranajes no ofrece par resistente alguno, sino que únicamente adapta el par del tambor al par en el eje del motor).
- b) ¿Cuál es el rendimiento del motor en el caso anterior?

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1\,000 \text{ r/min}$$

El par resistente que ofrece la carga en el tambor se calcula del siguiente modo:

$$T_{\text{resistente tambor}} = Fr = 250 \cdot 0,25 = 62,5 \text{ kg} \cdot \text{m} = 62,5 \cdot 9,8 = 612,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que en el eje del motor supone una reducción de diez veces debido a la caja de velocidad:

$$T_r(\text{eje motor}) = \frac{612,5}{10} = 61,25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Aplicando la expresión del par del motor e igualándola al valor anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$T_{\text{motor}} = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} s \left[\left(0,5 + \frac{1,5}{s}\right)^2 + 4^2 \right]} = 61,25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que da lugar a la siguiente ecuación de segundo grado del deslizamiento del motor:

$$16,25s^2 - 35,92s + 2,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,0645 \text{ (motor)} ; s = 2,15 \text{ (freno)}$$

Por consiguiente, la velocidad de giro del motor asíncrono es:

$$n = n_1(1 - s) = 1\,000 \cdot (1 - 0,0645) = 935,5 \text{ r/min (eje motor)}$$

que supone una velocidad diez veces menor a la salida de la caja de engranajes, es decir, la velocidad del tambor es de 93,55 r/min y se corresponde con una velocidad angular de valor:

$$\Omega = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{93,55}{60} = 9,8 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente la velocidad tangencial o velocidad de traslación de la carga es:

$$v = \Omega r = 9,8 \cdot 0,25 = 2,45 \text{ m/s}$$

b) Para el caso anterior (cuando el motor gira con un deslizamiento de 0,0645), la corriente que absorbe el motor de la red es:

$$I_1 = I_2' = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(0,5 + \frac{1,5}{0,0645}\right)^2 + 4^2}} = 9,6 \text{ A}$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada por el motor es:

$$P_{mi} = 3R_c' I_2'^2 = 3 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{0,0725} - 1 \right) \cdot 9,6^2 = 6015 \text{ W}$$

y la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = P_{mi} + P_{cvt} + P_{cuz} = 6015 + 3 \cdot 0,5 \cdot 9,6^2 + 3 \cdot 1,5 \cdot 9,6^2 = 6568 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{6015}{6568} = 91,6\%$$

4.24. Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 20 kW, 230/400 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 400 V, 50 Hz. Se consideran despreciables la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$), las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío (no considerar la rama paralelo del circuito equivalente). Se sabe que cuando el motor tiene cortocircuitados los anillos (es decir, la resistencia del reóstato de arranque es nula), las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son ocho veces las que tiene con par nominal (plena carga) con un deslizamiento del 3%. Calcular:

- La velocidad del motor para el par máximo.
- La corriente que absorbe el motor de la red cuando trabaja a plena carga, el par de plena carga y el rendimiento del motor en estas condiciones.
- La resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que la corriente de arranque sea, como mucho, igual a dos veces la asignada o nominal. Se sabe que $r_{ru} = r_{ri} = r_1 = 2$.
- Si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque, ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al nominal? ¿Qué corriente absorberá el motor de la red en estas condiciones?

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

El deslizamiento del motor para el par máximo (teniendo en cuenta que se desprecia la impedancia del estátor) viene expresado por:

$$s_m = \frac{R_2'}{X_2'} \quad (1)$$

y la corriente absorbida por el motor es:

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}}$$

Ahora bien, el motor a plena carga produce una potencia mecánica de 20 kW. Si se denomina $s = 0,03$ al deslizamiento correspondiente, se puede escribir:

$$P_{mi} = 20\,000 = 3R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \frac{U_1^2}{\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2} = 3R_2' \left(\frac{1}{0,03} - 1 \right) \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + X_2'^2} \quad (2)$$

Como quiera que las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son ocho veces las pérdidas en el cobre a plena carga se cumple:

$$3R_2' \frac{U_1^2}{\left(\frac{R_2'}{s_m} \right)^2 + X_2'^2} = 8 \cdot \left[3R_2' \frac{U_1^2}{\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2} \right] = 8 \cdot \left[3R_2' \frac{U_1^2}{\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + X_2'^2} \right]$$

ecuación que, teniendo en cuenta (1) y simplificando, se transforma en:

$$\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + X_2'^2 = 8 \cdot \left[\left(\frac{R_2'}{s_m} \right)^2 + X_2'^2 \right] = 16X_2'^2 \Rightarrow \left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 = 15X_2'^2 \Rightarrow \frac{R_2'}{X_2'} = 0,03 \cdot \sqrt{15} = 0,1162 \quad (3)$$

lo que indica que el deslizamiento para el par máximo es $s_m = 0,1162$, por lo que la velocidad correspondiente es:

$$n = n_1(1 - s_m) = 1\,500 \cdot (1 - 0,1162) = 1\,325,72 \text{ r/min}$$

b) Al llevar el resultado (3) a (2) se obtiene:

$$20\,000 = 3R_2' \left(\frac{1}{0,03} - 1 \right) \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + \left(\frac{R_2'}{0,1162} \right)^2} \Rightarrow 20\,000 = 3R_2' \left(\frac{1}{0,03} - 1 \right) \frac{400^2}{1185,2 \cdot R_2'} \quad (4)$$

De la última ecuación (4) y teniendo en cuenta (3) resulta:

$$R_2' = \frac{400^2 \cdot \left(\frac{1}{0,03} - 1 \right)}{1185,2 \cdot 20\,000} = 0,218 \, \Omega \Rightarrow X_2' = \frac{R_2'}{0,1162} = \frac{0,218}{0,1162} = 1,88 \, \Omega$$

Determinada de este modo la impedancia del motor, la corriente que absorbe a plena carga vale:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\frac{0,218}{0,03} + j1,784} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{7,27 + j1,88} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{7,51 \angle 14,5^\circ} = 30,77 \angle -14,5^\circ \text{ A}$$

y la potencia eléctrica absorbida de la red a plena carga es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 30,77 \cdot \cos 14,5^\circ \approx 20\,639 \text{ W}$$

por lo que el rendimiento del motor cuando funciona a plena carga es:

$$\eta = \frac{20\,000}{20\,639} = 96,9\%$$

Como el motor se mueve a plena carga a la velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1\,500 \cdot (1 - 0,03) = 1\,455 \text{ r/min}$$

el par de plena carga será:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{20\,000}{2\pi \frac{1455}{60}} = 131,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) Si se añade una resistencia adicional en el réostato de arranque que limite la corriente a un valor doble que la correspondiente a plena carga, se deberá cumplir:

$$I_a = 2 \cdot 30,77 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,218 + R'_{a2})^2 + 1,88^2}}$$

de donde se deduce:

$$R'_{a2} = 3,03 = 2^2 \cdot R_{a2} \Rightarrow R_{a2} = 0,7587 \Omega$$

d) La resistencia del rotor con la resistencia adicional conectada vale:

$$R'_2 + R'_{a2} = 0,218 + 3,03 = 3,248 \Omega$$

Al girar el motor con el par resistente de plena carga se cumple:

$$131,3 = \frac{3 \cdot 3,248 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1500}{60} s \left[\left(\frac{3,248}{s}\right)^2 + 1,88^2 \right]}$$

expresión que da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3,53s^2 - 25,2s + 10,55 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 6,69 \text{ (freno)} \quad ; \quad s = 0,447 \text{ (motor)}$$

por lo que el motor girará a una velocidad:

$$n = 1500 \cdot (1 - 0,447) \approx 830 \text{ r/min}$$

y la corriente que absorberá el motor de la red en esas condiciones será:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{3,248}{0,447}\right)^2 + 1,88^2}} = 30,77 \text{ A}$$

4.25. Un motor de inducción trifásico de rotor devanado de 37 kW, 230/400 V, 4 polos, 50 Hz, desarrolla su potencia de salida asignada a 1455 r/min cuando trabaja a la tensión y frecuencia asignadas, estando cortocircuitados sus anillos rozantes. El par máximo que puede desarrollar a la tensión y frecuencia citadas es del 200% del de plena carga. La resistencia del devanado del rotor por fase es de 0,1 ohmios. La impedancia del estátor es despreciable ($R_1 = X_1 = 0$). Se suponen nulas las pérdidas mecánicas y se puede omitir en los cálculos la rama paralelo del circuito equivalente. Las relaciones de transformación cumplen la igualdad $r_m = r_{ii} = r_r$. El rotor está conectado en estrella. La red de alimentación es de 400 V, 50 Hz, estando el estátor conectado en estrella.

- a) Calcular la relación de transformación r_t (tómese la más alta de las dos que se obtienen) y reactancia del rotor a 50 Hz.

- Calcular la velocidad del motor para el par máximo.
- Determinar la resistencia que debe añadirse en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque.
- Si ahora se alimenta el motor a la frecuencia de 60 Hz, ajustando la tensión aplicada de forma que el flujo en el entrehierro tenga el mismo valor que a 50 Hz, calcular la tensión que debe aplicarse a 60 Hz.
- Calcular en el caso anterior, la velocidad a la que el motor desarrolla un par de valor igual al de plena carga a 50 Hz, con los anillos en cortocircuito.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{1\,500 - 1\,455}{1\,500} = 3\%$$

El par de plena carga asignado (nominal) vale:

$$T_N = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{37\,000}{2\pi \frac{1\,455}{60}} = 242,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al prescindir de la impedancia del estátor, el par máximo se produce para un deslizamiento que viene definido por el cociente:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2'}{X_2'} = \frac{R_2}{X_2} \quad (\text{a})$$

y teniendo en cuenta que el par máximo es el doble que el de plena carga, se puede poner:

$$T_m = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{1500}{60} s_m \left[\left(\frac{R_2'}{s_m} \right)^2 + X_2'^2 \right]} = 2 \cdot \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,03 \left[\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + X_2'^2 \right]}$$

que simplificando y teniendo en cuenta (a) resulta:

$$2s_m \left[\left(\frac{R_2'}{s_m} \right)^2 + X_2'^2 \right] = 0,03 \left[\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + X_2'^2 \right] \Rightarrow 4s_m = 0,03 \left[\left(\frac{R_2'}{0,03} \right)^2 + 1 \right]$$

que en definitiva, es la ecuación de segundo grado siguiente:

$$33,33s_m^2 - 4s_m + 0,03 = 0$$

cuyos resultados son:

$$s_m = 0,112 \quad ; \quad s_m = 0,00804$$

Evidentemente, el resultado válido es el primero, ya que el segundo supone un deslizamiento inferior al de plena carga que es igual a 0,03. Al sustituir este valor en (a) y teniendo en cuenta que la resistencia del rotor es de $0,1 \, \Omega$, resulta:

$$0,112 = \frac{0,1}{X_2} \Rightarrow X_2 = 0,893 \, \Omega$$

y como la potencia mecánica del motor es de 37 kW se puede escribir:

$$P_{mi} = 3 \cdot r_i^2 \cdot 0,1 \cdot \left(\frac{1}{0,03} - 1 \right) \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{\left[\left(\frac{r_i^2 \cdot 0,1}{0,03} \right)^2 + (r_i^2 \cdot 0,893)^2 \right]} = 37\,000 \Rightarrow \frac{39\,202,5}{r_i^2} = 37\,000$$

que da lugar a una relación de transformación:

$$r_i = 1,08$$

b) De acuerdo con los resultados del apartado anterior, la velocidad del motor para el par máximo es:

$$n = n_1(1-s) = 1500 \cdot (1-0,112) = 1332 \text{ r/min}$$

c) Para obtener el par máximo en el arranque es preciso incluir una resistencia en el reóstato de arranque que cumpla la siguiente igualdad:

$$s = 1 = \frac{R_2' + R_{a2}'}{\sqrt{R_1'^2 + X_{cc}^2}} = \frac{R_2 + R_{a2}}{X_2} = \frac{0,1 + R_{a2}}{0,893}$$

lo que da lugar a:

$$R_{a2} = 0,793 \Omega$$

d) La relación entre la tensión aplicada y el flujo magnético de un motor viene expresada por la ecuación:

$$U_1 \approx E_1 = 4,44 k_{w1} f_1 N_1 \Phi$$

donde k_{w1} expresa el factor de devanado del estator. Es por ello que si se alimenta el motor a una frecuencia de 60 Hz, para que exista el mismo flujo magnético se deberá cumplir la proporcionalidad:

$$\frac{400}{U_1} = \frac{50}{60}$$

de donde se deduce una tensión de línea $U_1 = 480 \text{ V}$.

e) Al ser ahora la alimentación de 480 V de línea y de 60 Hz, las reactancias en reposo del motor se modifican, puesto que son proporcionales a la frecuencia de la alimentación (ya que $X = L\omega_1 = L2\pi f$). Así se tiene que los parámetros del motor a 60 Hz son:

$$R_2 = 0,1 \Omega; X_2(\text{a } 50 \text{ Hz}) = 0,893 \Omega \Rightarrow X_2(\text{a } 60 \text{ Hz}) = \frac{60}{50} \cdot 0,893 = 1,0716 \Omega$$

También hay que tener en cuenta que la nueva frecuencia de alimentación modifica la velocidad de sincronismo del motor que ahora valdrá:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1800 \text{ r/min}$$

y teniendo en cuenta que el par de carga no varía, se puede escribir:

$$T = \frac{3 R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(\frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_2'^2 \right]} = \frac{3 \cdot (1,08^2 \cdot 0,1) \cdot \left(\frac{480}{\sqrt{3}} \right)^2}{2\pi \frac{1800}{60} \cdot s \left[\left(\frac{1,08^2 \cdot 0,1}{0,03} \right)^2 + (1,08^2 \cdot 1,0716)^2 \right]} = 242,8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que da lugar a la siguiente ecuación:

$$1,562s^2 - 0,587s + 0,0136 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,351 \text{ (inestable)} ; s = 0,0248 \text{ (zona estable)}$$

Tomando el deslizamiento correspondiente a la zona estable del motor, la velocidad a la que se moverá el rotor será:

$$n = n_1(1 - s) = 1800 \cdot (1 - 0,0248) = 1755,4 \text{ r/min}$$

4.26. Se tiene un motor asíncrono trifásico con un rotor en jaula de ardilla, que tiene los siguientes datos en su placa de características: 11 kW; 230/400 V; 50 Hz; 20 A; 1449 r/min; $\cos \varphi = 0,90$. Se conecta a una red de 400 V, 50 Hz. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y no es necesario considerar la rama paralelo del circuito equivalente. Calcular:

- Los parámetros R_1 , R_2' y X_{cc} del motor.
- El par de arranque y el par de plena carga del motor. ¿Qué tipo de par resistente debe tener el motor para que pueda arrancar?
- El rendimiento del motor con par máximo.
- La velocidad que deberá darse al motor por medio de un motor primario externo para que la máquina asíncrona funcione como generador entregando su potencia asignada a la red.

Nota: tomar la velocidad más pequeña de las dos posibles.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es igual a:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{1500 - 1440}{1500} = 4\%$$

Teniendo en cuenta que la potencia mecánica es de 11 kW y la corriente es de 20 A, se puede poner:

$$P_{mi} = 11000 = 3R_2' \left(\frac{1}{0,04} - 1 \right) \cdot 20^2$$

De la ecuación anterior se obtiene: $R_2' = 0,382 \Omega$. Como el motor se debe conectar en estrella a una red de 400 V de línea, la corriente absorbida por la máquina de la red es:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2' = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(R_1 + \frac{0,382}{0,04} \right) + jX_{cc}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(R_1 + 9,55) + jX_{cc}}$$

Pero de la expresión anterior se conoce que el módulo es de 20 A y que el f.d.p. del motor es 0,9, por lo que se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$I_1 = 20 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(R_1 + 9,55)^2 + X_{cc}^2}} ; \cos \varphi = 0,9 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0,484 = \frac{X_{cc}}{R_1 + 9,55}$$

que son dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son:

$$R_1 = 0,844 \Omega ; X_{cc} = 5,03 \Omega$$

b) El par de plena carga se obtiene de la placa de características del motor que asigna el fabricante y es igual a:

$$T_N = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{11000}{2\pi \frac{1440}{60}} = 72,95 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Mientras que para determinar el par de arranque es preciso utilizar los parámetros internos del circuito equivalente del motor calculados en el apartado anterior y de este modo se puede escribir:

$$T_a = \frac{3 \cdot 0,382 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 1 \cdot \left[(0,844 + 0,382)^2 + 5,03^2\right]} = 14,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se observa con estos resultados que el par de arranque es inferior al de plena carga. Si se consideran esencialmente dos tipos de pares resistentes como son: par constante (grúas, montacargas, etc.) y pares cuadráticos (ventiladores, bombas centrífugas, etc.), el tipo de par resistente que puede tener el motor debe ser del tipo *cuadrático*, ya que en este caso, el par resistente en el arranque sería inferior al par motor y de este modo la máquina puede arrancar.

c) El deslizamiento del motor para el par máximo es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,382}{\sqrt{0,844^2 + 5,03^2}} = 0,075$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada por el motor cuando trabaja con par máximo es:

$$P_{mi}(T_{m\acute{a}x}) = 3 \cdot 0,382 \cdot \left(\frac{1}{0,075} - 1\right) \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left[\left(0,844 + \frac{0,382}{0,075}\right)^2 + 5,03^2\right]} \approx 12449 \text{ kW}$$

La corriente que absorbe el motor de la red para las condiciones anteriores es:

$$\underline{I}_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,844 + \frac{0,382}{0,075}\right) + j5,03} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{5,937 + j5,03} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{7,782 \angle 40,3^\circ} = 29,68 \angle -40,3^\circ \text{ A}$$

por lo que la potencia eléctrica que absorbe el motor de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 29,68 \cdot \cos 40,3^\circ = 15683 \text{ kW}$$

De este modo, el rendimiento vale:

$$\eta = \frac{12449}{15683} = 79,4\%$$

d) El circuito equivalente del motor es el mostrado en la Figura 4.26. La potencia que *entrega la máquina asincrónica a la red* es de 11 kW, o de otro modo el circuito de la Figura 4.26 *absorbe de la red* una potencia de -11 kW. Si se plantea esta condición a la red de la Figura 4.26 resulta:

$$-11000 = 3 \cdot \left(0,844 + \frac{0,382}{s}\right) \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left[\left(0,844 + \frac{0,382}{s}\right)^2 + 5,03^2\right]}$$

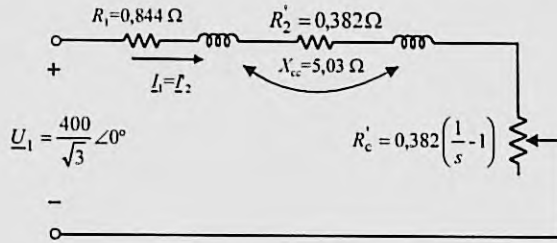


Figura 4.26

Simplificando la ecuación anterior se llega a:

$$38,29s^2 + 6,2s + 0,146 = 0$$

que da lugar a los siguientes deslizamientos:

$$s = -0,0286 ; s = -0,133$$

Para analizar cuál de los dos deslizamientos es el válido, hay que tener en cuenta que el deslizamiento para el par máximo como generador sería igual y contrario al de motor, es decir de acuerdo con el apartado c), sería $s_m = -0,075$, por lo que la segunda solución anterior cae en la zona inestable del funcionamiento como generador y solamente es válida físicamente la primera. Por consiguiente, el generador debe moverse a la velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1500 \cdot (1 + 0,0286) = 1542,9 \text{ r/min}$$

Puede comprobarse en el circuito de la Figura 4.26 que la *corriente absorbida de la red* en esta situación es:

$$I_1 = \frac{U_1}{\left[R_1 + R_2' + R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \right] + j X_{cc}}$$

y que al sustituir valores, se observa que la resistencia de carga es negativa y que vale $R_c' = -13,74 \Omega$. De este modo, al sustituir valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(0,844 + 0,382 - 13,74) + j 5,03} \approx \frac{230,94 \angle 0^\circ}{13,49 \angle 158,1^\circ} = 17,12 \angle -158,1^\circ \text{ A}$$

es decir, la máquina, al funcionar como generador, *entrega* a la red una corriente de 17,12 A y está *adelantada* respecto a la tensión un ángulo de $180^\circ - 158,1^\circ = 21,9^\circ$. Se comprueba que la potencia que este generador entrega a la red vale:

$$P_{1g} = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 17,12 \cdot \cos 21,9^\circ \approx +11000 \text{ W}$$

O, de otro modo, que el motor absorbe de la red una potencia:

$$P_{1m} = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 17,12 \cdot \cos 158,1^\circ \approx -11000 \text{ W}$$

Podemos comprobar que la potencia mecánica interna producida por el motor es:

$$P_{mi} = 3(-13,74) \cdot 17,12^2 \approx -12081,4 \text{ W}$$

que en definitiva significa que el generador asíncrono absorbe una potencia mecánica de 12081,4 W, por lo que el rendimiento de la máquina como generador es:

$$\eta = \frac{P_{1g}}{P_{mi}} = \frac{11000}{12081,4} = 91,05\%$$

4.27. Un motor asíncrono trifásico de rotor en jaula de ardilla, tiene una placa de características en la que se leen únicamente los datos siguientes: 400/690 V; 50 Hz; 585 r/min. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{Fe} = I_{Cu} = 0$; $P_{Fe} = 0$ (pérdidas mecánicas); $R_1 = 0,5 \Omega$; $R_2 = 0,7 \Omega$; $X_1 = X_2 = 3 \Omega$. Si se conecta el motor a una red de 400 V trifásica, 50 Hz, indicar:

- La forma de conexión del estátor del motor.
- Si el motor está conectado correctamente, de acuerdo con el apartado anterior, calcular: si el motor gira a plena carga a 585 r/min, el valor de la corriente absorbida por el motor en la línea, factor de potencia del motor en estas condiciones y la potencia absorbida por el motor de la red.
- La potencia desarrollada por el motor en las condiciones del apartado anterior, el par mecánico en el eje y el rendimiento del motor;
- Si la máquina giran como motor a 585 r/min, se intercambian súbitamente dos fases de la red de alimentación ¿cuál será en esos momentos el par de frenado desarrollado por la máquina?
- Si la máquina se hace girar a 615 r/min movida por un motor diésel acoplado a su eje, en el mismo sentido que funcionaba como motor y sin cambiar la secuencia de fases, calcular la potencia mecánica absorbida y la potencia eléctrica que la máquina entrega a la red (funcionamiento como generador asíncrono).

Solución

a) Como la tensión de la red es de 400 V, que es la inferior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 400/690V, este se conectará en triángulo.

b) Como quiera que no se conoce el número de polos del motor, la velocidad de sincronismo debe tomarse la más cercana por exceso de la velocidad de giro real de la máquina, lo que se justifica en base a que los motores asíncronos tienen un deslizamiento muy pequeño y cercano a cero. Al ser la frecuencia de la red 50 Hz, aplicando la expresión clásica siguiente:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p}$$

Es inmediato comprobar que si el número de polos es 4, la velocidad de sincronismo es de 1500 r/min; si es de 6 polos, la velocidad correspondiente es de 1000 r/min; si es de 8 polos, la velocidad es de 750 r/min; si es de 10 polos, la velocidad es de 600 r/min, si es de 12 polos, entonces la velocidad es de 500 r/min. Como quiera que la velocidad de giro del motor es de 585 r/min, se observa que la de sincronismo más cercana es de 600 r/min, que corresponde a 10 polos. De este modo se tiene:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{5} = 600 \text{ r/min}$$

y el deslizamiento a plena carga vale:

$$s = \frac{600 - 585}{600} = 2,5\%$$

El circuito equivalente del motor es el mostrado en la Figura 4.27. Al tomar la tensión de la red como referencia de fase, la corriente que absorbe un devanado del estátor es:

$$I_1 = \frac{400 \angle 0^\circ}{\left(0,5 + \frac{0,7}{0,025}\right) + j 6} = \frac{400 \angle 0^\circ}{28,5 + j 6} = \frac{400 \angle 0^\circ}{29,125 \angle 11,89^\circ} \approx 13,73 \angle -11,89^\circ \text{ A}$$

es decir, la corriente de fase es de 13,73 amperios, que corresponde a una corriente de línea $I_{línea} = \sqrt{3} \cdot 13,73 \approx 23,8 \text{ A}$ y el f.d.p. es el $\cos 11,89^\circ = 0,979$. Por consiguiente, la potencia eléctrica que absorbe de la red es:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 23,8 \cdot 0,979 = 16\,130 \text{ W}$$

c) La potencia mecánica que desarrolla el motor es:

$$P_{mi} = 3 \cdot 0,7 \cdot \left(\frac{1}{0,025} - 1 \right) \cdot 13,73^2 = 15\,439,2 \text{ W}$$

Por tanto, el par vale:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{15\,439,2}{2\pi \frac{585}{60}} = 252 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y el rendimiento del motor en estas condiciones es:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{15\,439,2}{16\,130} = 95,72\%$$

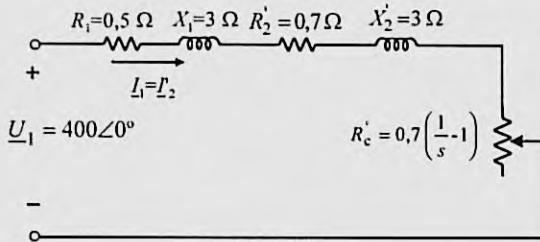


Figura 4.27

d) Si se intercambian de repente dos fases de la red, el campo magnético giratorio del estátor se moverá a 600 r/min, mientras que el motor en ese instante girará a una velocidad de 585 r/min en sentido contrario al campo. Es por ello que el deslizamiento del motor en ese momento vale:

$$s = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{600 - (-585)}{600} = 1,975$$

y el par de frenado que producirá en el eje es:

$$T = \frac{3 \cdot 0,7 \cdot 400^2}{2\pi \frac{600}{60} \cdot 1,975 \cdot \left[\left(0,5 + \frac{0,7}{1,975} \right)^2 + 6^2 \right]} = 73,72 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e) Si ahora se hace mover el rotor en sentido positivo a una velocidad por encima del síncronismo, el deslizamiento se hace negativo y tiene un valor:

$$s = \frac{600 - 615}{600} = -0,025$$

Es por ello que la resistencia de carga de la Figura 4.27 toma un valor negativo:

$$R'_c = 0,7 \cdot \left(\frac{1}{0,025} - 1 \right) = -28,7 \Omega$$

El valor de la corriente absorbida por fase, de acuerdo con el circuito anterior, es:

$$I_1 = \frac{400 \angle 0^\circ}{(0,5 + 0,7 - 28,7) + j 6} = 14,2 \angle -167,7^\circ \text{ A}$$

y la potencia mecánica interna que desarrolla como motor es:

$$P_{mi} = 3 \cdot (-28,7) \cdot 14,2^2 = -17\,387 \text{ W}$$

lo que significa que recibe potencia mecánica por el eje. La potencia eléctrica que absorbe de la red es:

$$P_1 = 3U_{1\text{fase}} I_{1\text{fase}} \cos \varphi = 3 \cdot 400 \cdot 14,2 \cdot \cos 167,7^\circ = -16\,649 \text{ W}$$

Es decir, la máquina entrega a la red una potencia eléctrica de 16649 W.

4.28. Los parámetros del circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, utilizado en una bomba centrífuga para suministro de agua a una fábrica, son los siguientes: $R_1 = R_2' = 0,5 \Omega$; $X_1 = X_2' = 0,75 \Omega$; (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas). La placa de características del motor señala los siguientes datos: 230/400 V; 7,5 kW; 975 r/min. El motor se alimenta por medio de una línea de cobre de 10 mm² de sección de una red de 400 V de línea y 50 Hz situada a 3 km de distancia (la resistividad del cobre es de 0,01730 $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$).

- ¿Cómo deberá conectarse el motor?
- Si el par resistente de la bomba es igual a 60 N·m y se supone constante en un amplio margen de velocidad, calcular la velocidad de giro del motor (tómese la más elevada de las dos posibles).
- En las condiciones del apartado anterior calcular la corriente absorbida por el motor de la red y la tensión de línea en los bornes del motor.
- Se observa que durante el funcionamiento expresado en los apartados b) y c) el motor absorbe una corriente superior a la esperada, mientras que la cantidad de agua suministrada (caudal) era menor a la prevista. Para corregir este defecto se decide plantear una solución práctica para compensar la caída de tensión en la línea de 3 km; para ello se decide alimentar el motor al principio de la línea por medio de un transformador ideal, de modo que la tensión de alimentación sea ahora de 450 V. Si el par de la bomba sigue siendo de 60 N·m, determinar la nueva velocidad del motor, la corriente absorbida y la tensión de línea que llegará al motor.

Nota: se desprecia la reactancia de la línea.

Solución

a) Como la tensión de la red es de 400 V, que es la superior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 230/400V, este se conectará en estrella.

b) Como quiera que no se conoce el número de polos del motor, la velocidad de sincronismo debe tomarse la más cercana por exceso de la velocidad de giro real de la máquina, lo que se justifica en base a que los motores asíncronos tienen un deslizamiento muy pequeño y cercano a cero. Al ser la frecuencia de la red 50 Hz y si se aplica la expresión clásica siguiente:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p}$$

es inmediato comprobar que si el número de polos es 4 la velocidad de sincronismo es de 1500 r/min; si es de 6 polos la velocidad correspondiente es de 1000 r/min; si es de 8 polos la velocidad es de 750 r/min; etc... Como quiera que la velocidad asignada del motor es de 975 r/min, se observa que la de sincronismo más cercana es de 1000 r/min que corresponde a 6 polos. De este modo se tiene:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1\,000 \text{ r/min}$$

En la Figura 4.28 se muestra el circuito equivalente de la instalación (motor-línea). El valor de la resistencia de cada fase de la línea vale:

$$R = \rho \frac{L}{S} = 0,0173 \cdot \frac{3\,000}{10} = 5,19 \Omega$$

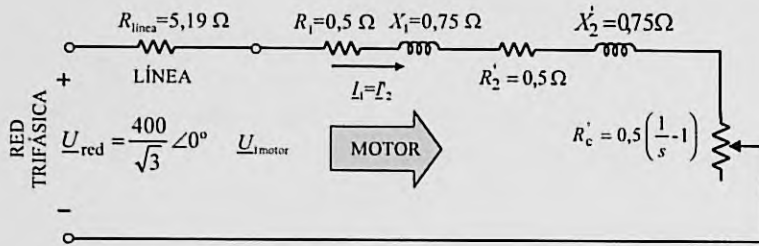


Figura 4.28

Si el par resistente que ofrece la bomba es de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$ se cumplirá:

$$T = 60 = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} \cdot s \left[\left(5,19 + 0,5 + \frac{0,5}{s}\right)^2 + 1,5^2 \right]}$$

expresión en la que s es el deslizamiento con el que trabaja el motor de la bomba. Simplificando se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$$34,63s^2 - 7,04s + 0,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,1574 \text{ (inestable)} ; s = 0,0459 \text{ (estable)}$$

y por tanto el motor se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1000 \cdot (1 - 0,0459) \approx 954,1 \text{ r/min}$$

c) La corriente absorbida por el motor en el caso anterior, tomando la tensión simple de la red como referencia de fases y utilizando la Figura 4.28, nos da:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(5,69 + \frac{0,5}{0,0459}\right) + j1,5} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{16,58 + j1,5} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{16,65 \angle 5,32^\circ} = 13,87 \angle -5,17^\circ \text{ A}$$

y la tensión simple en bornes del motor es:

$$\underline{U}_1 = \left[\left(0,5 + \frac{0,5}{0,0459}\right) + j1,5 \right] \cdot 13,87 \angle -5,17^\circ = (11,39 + j1,5) \cdot 13,87 \angle -5,17^\circ = 159,4 \angle -2,33^\circ \text{ voltios}$$

La tensión compuesta en el motor es:

$$U_{1\text{lin}} = \sqrt{3} \cdot 159,4 = 276,1 \text{ V}$$

d) Si la tensión compuesta de la red es ahora de 450 voltios y el par resistente de la bomba sigue siendo de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$, se cumplirá:

$$T = 60 = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{450}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi \frac{1000}{60} \cdot s \left[\left(5,69 + \frac{0,5}{s}\right)^2 + 1,5^2 \right]}$$

que al simplificar se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$34,63s^2 - 10,42s + 0,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 0,275 \text{ (inestable)}; s = 0,0263 \text{ (estable)}$$

y es por ello que el grupo motobomba girará a una velocidad:

$$n = 1\,000 \cdot (1 - 0,0263) = 973,7 \text{ r/min}$$

y la corriente absorbida por fase del motor será:

$$I_1 = \frac{\frac{450}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(5,69 + \frac{0,5}{0,0263}\right) + j1,5} = \frac{259,81 \angle 0^\circ}{24,7 + j1,5} \approx 10,5 \angle -3,48^\circ \text{ A}$$

siendo la tensión simple en bornes del motor:

$$\underline{U}_1 = \left[\left(0,5 + \frac{0,5}{0,0263}\right) + j1,5 \right] \cdot 10,5 \angle -4,4^\circ = 19,57 \angle 4,4^\circ \cdot 10,5 \angle -3,48^\circ = 205,5 \angle 0,9^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión compuesta:

$$U_{1lin} = \sqrt{3} \cdot 205,5 = 355,9 \text{ V}$$

4.29. Se dispone de un motor asíncrono trifásico en rotor de la jaula de ardilla de 4 polos, 230/400 V, 50 Hz, que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 2 \Omega$; $X_1 = 5 \Omega$; $R_2' = 1,5 \Omega$; $X_2' = 6 \Omega$. Se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralela del circuito equivalente. El motor mueve una carga cuyo par resistente es constante y vale $10 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- Si la red es de 230 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor?
- ¿A qué velocidad girará el motor con el par resistente de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$? ¿Cuál será el rendimiento del motor en estas condiciones?
- Si el motor funciona en régimen permanente en las condiciones del apartado anterior y se va reduciendo progresivamente la tensión de alimentación ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la alimentación antes de que se pare el motor?
- Si se pretende arrancar el motor con el par resistente de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$ ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la red para que pueda arrancar la máquina?

Solución

a) Como la tensión de la red es de 230 V, que es la inferior de las dos tensiones que figuran en la placa de características del motor de 230/400V, este se conectará en triángulo.

b) Como el motor tiene 4 polos y la frecuencia de la red es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo será:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

Teniendo en cuenta que el par resistente es de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$, al plantear la igualdad entre el par motor (Figura 4.29) y el par resistente resulta:

$$10 = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 230^2}{2\pi \frac{1500}{60} s \left[\left(2 + \frac{1,5}{s}\right)^2 + 11^2 \right]}$$

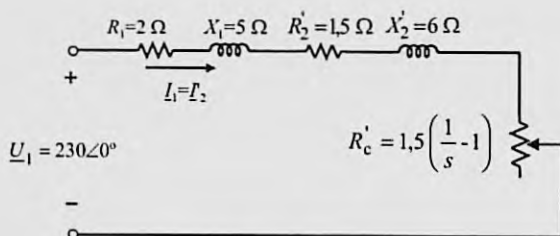


Figura 4.29

De la expresión anterior se llega a la ecuación de segundo grado:

$$125s^2 - 145,55s + 2,25 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s = 1,119 \text{ (freno)} \quad ; \quad s = 0,0157 \text{ (motor)}$$

y por consiguiente, la máquina se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1500 \cdot (1 - 0,0157) = 1476,5 \text{ r/min}$$

En la Figura 4.29 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor. Tomando la tensión de una fase como referencia, la corriente absorbida por una fase del motor de la red es:

$$I_1 = \frac{230\angle 0^\circ}{\left(2 + \frac{1,5}{0,0157}\right) + j11} = \frac{230\angle 0^\circ}{98,16\angle 6,43^\circ} = 2,34\angle -6,43^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la potencia mecánica interna del motor, que es la potencia disipada en la resistencia de carga, vale:

$$P_{mi} = 3 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1}{0,0157} - 1\right) \cdot 2,34^2 \approx 1549 \text{ W}$$

y la potencia eléctrica que el motor absorbe de la red es:

$$P_1 = 3U_{\text{fase}}I_{\text{fase}}\cos\varphi = 3 \cdot 230 \cdot 2,34 \cdot \cos 6,43^\circ \approx 1604 \text{ W}$$

Por tanto, el rendimiento del motor vale:

$$\eta = \frac{1549}{1604} = 96,6\%$$

c) En la Figura 4.30 se muestra, en trazo grueso, la curva par-velocidad del motor a la tensión asignada de 230 voltios. Cuando el motor mueve el par de 10 N · m está funcionando en el punto de trabajo A. Si en esta situación se va reduciendo la tensión de alimentación, la curva de par se irá reduciendo en proporción cuadrática, ya que el par depende del cuadrado de la tensión aplicada. La situación límite se tendrá cuando la tensión aplicada dé lugar a una curva en la que su máximo coincida con el par resistente de 10 N.m, puesto que una reducción posterior de la tensión llevará al motor a un colapso y se parará porque no existirá un punto de equilibrio de la máquina. Esta situación se ha representado en la curva par-velocidad de trazo fino correspondiente a una tensión aplicada de línea U_{1a} . El punto de funcionamiento del motor será el B y en él se cumple:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1'^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1,5}{\sqrt{2^2 + 11^2}} = 0,134$$

Igualando el par máximo producido con esta tensión al par resistente de 10 N.m resulta:

$$T = 10 = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot U_1^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 0,134 \left[\left(2 + \frac{1,5}{0,134} \right)^2 + 11^2 \right]} = 7,245 \cdot 10^{-4} \cdot U_1^2$$

de donde se obtiene: $U_{1a} = 117,48 \text{ V}$.

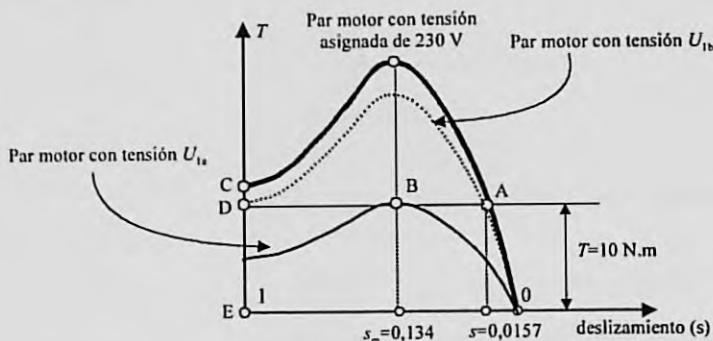


Figura 4.30

d) Debe señalarse que el par de arranque que produce el motor con la tensión de 400 voltios está definido por la distancia CE en la Figura 4.30. Si se reduce la tensión de alimentación, el motor podrá arrancar siempre que el par de arranque a esa tensión sea superior al resistente. La situación límite será cuando el par de arranque coincida con el par resistente de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$. En la Figura 4.30 se ha mostrado la curva par-velocidad correspondiente, que es la mostrada por trazo discontinuo y que corresponde a una tensión de línea U_{1b} . Al igualar el par de arranque para esta tensión al par resistente de $10 \text{ N} \cdot \text{m}$ se tiene:

$$T_a = 10 = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot U_{1b}^2}{2\pi \frac{1500}{60} \cdot 1 \cdot \left[\left(2 + \frac{1,5}{1} \right)^2 + 11^2 \right]}$$

de donde se deduce una tensión $U_{1b} = 215,7 \text{ V}$.

4.30. La Figura 4.31 muestra el esquema de una red de alimentación a dos grúas idénticas de un puerto, representadas por un único motor (el de elevación de carga). Los motores empleados son asíncronos trifásicos, con rotor en jaula de ardilla de 230/400 V, 6 polos, 50 Hz conectados en estrella, cuyos parámetros del circuito equivalente (despreciando las pérdidas mecánicas y la rama paralelo) son: $R_1 = R_2' = 0,2 \Omega$, $X_1 = X_2' = 0,6 \Omega$. Se indican también en la figura las impedancias de las redes de distribución de las grúas. La alimentación se hace al principio de la línea por medio de una red trifásica de 400 V, 50 Hz.

- Inicialmente arranca la grúa n.º 1. ¿Qué par de arranque dará el motor? Si mueve una carga cuyo par resistente es de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, ¿cuál será la velocidad final a la que girará el motor? ¿Qué tensión de línea tendrá en bornes el motor?
- Estimando que el motor de la grúa n.º 1 gira a velocidad constante, (en el valor calculado en el apartado anterior, se arranca el motor de la grúa n.º 2, moviendo un par de $80 \text{ N} \cdot \text{m}$). En el momento del arranque, ¿cuáles serán las tensiones en bornes de ambos motores? ¿Arranca el motor de esta grúa?
- Una vez que ha arrancado la grúa n.º 2 (debe demostrarlo en el apartado anterior), ¿cuál será la velocidad final de régimen permanente que tomará el motor n.º 2, suponiendo que el par resistente sigue siendo de $80 \text{ N} \cdot \text{m}$ y que la grúa n.º 1 sigue girando a la velocidad calculada en el apartado a)? ¿Cuál será la tensión compuesta en bornes del motor n.º 2?

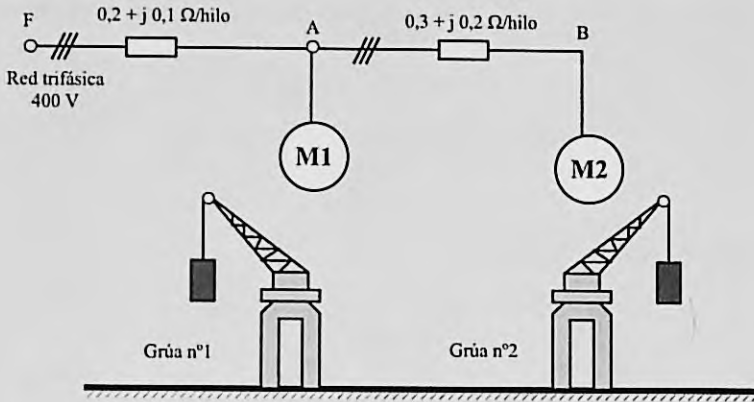


Figura 4.31

Solución

a) Si inicialmente solo funciona la grúa n.º 1, el circuito equivalente correspondiente es el que se muestra en la Figura 4.32. Como los motores de las grúas tienen 6 polos y la frecuencia de la red es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo de ambos motores será:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1000 \text{ r/min}$$

Al arrancar la primera grúa, la correspondiente corriente de arranque se obtiene de la Figura 4.32 haciendo el deslizamiento igual a la unidad, lo que da lugar a:

$$I_a = \frac{U_1}{\sqrt{(R_{\text{línea}} + R_1 + R_2')^2 + (X_{\text{línea}} + X_1 + X_2')^2}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(0,2 + 0,4)^2 + (0,1 + 1,2)^2}} = 161,3 \text{ A}$$

y el par de arranque correspondiente es:

$$T_a = \frac{3R_2'}{2\pi \frac{n_1}{60}} I_a^2 = \frac{3 \cdot 0,2}{2\pi \frac{1000}{60}} \cdot 161,3^2 = 149,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

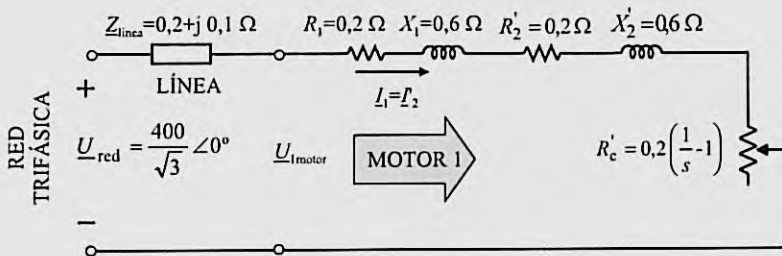


Figura 4.32

Si una vez que arranca el motor el par resistente de la carga que mueve la grúa es de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, el motor irá elevando gradualmente su velocidad hasta encontrar un deslizamiento para el cual se iguale el par producido por el motor al par resistente. Este equilibrio de pares se define por la igualdad siguiente:

$$T = 100 = \frac{3 \cdot 0,2}{2\pi \frac{1000}{60}} \cdot \frac{1}{s} \frac{\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left[0,2 + 0,2 + \frac{0,2}{s}\right]^2 + 1,3^2}$$

dando lugar a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\frac{0,04}{s^2} - \frac{2,9}{s} + 1,85 = 0 \Rightarrow 1,85s^2 - 2,9s + 0,04 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = 1,55 \text{ (freno)} ; s_2 = 0,0139 \text{ (motor)}$$

Por tanto, el motor de la grúa n.º 1 se moverá a una velocidad:

$$n = n_1(1 - s) = 1000 \cdot (1 - 0,0139) = 986,1 \text{ r/min}$$

En las condiciones anteriores, la corriente que absorberá el motor de la grúa n.º 1 de la red será:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{\left(R_{\text{línea}} + R_1 + \frac{R'_2}{s}\right) + j(X_{\text{línea}} + X_1 + X'_2)} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,2 + 0,2 + \frac{0,2}{0,0139}\right) + j(0,1 + 0,6 + 0,6)}$$

es decir:

$$\underline{I} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{14,79 + j1,3} = 15,56 \angle -5^\circ \text{ A}$$

y, por tanto, la tensión simple en bornes del motor de la grúa n.º 1 es:

$$\underline{U}_1 = \left[\left(0,2 + \frac{0,2}{0,0139}\right) + j1,2 \right] \cdot 15,56 \angle -5^\circ \approx 227,8 \angle -0,3^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una magnitud de la tensión compuesta en bornes del motor 1 de $U_{\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 227,8 = 394,5 \text{ V}$

b) En la Figura 4. 33 se muestra el circuito equivalente de la instalación, en el que se han sustituido los motores por sus impedancias equivalentes. El motor de la grúa n.º 2, al iniciar su arranque ($s = 1$), tiene una impedancia en ese momento que vale:

$$\underline{Z}_{\text{motor 2 (arranque)}} = \left(0,2 + \frac{0,2}{1}\right) + j1,2 = 0,4 + j1,2 = 1,265 \angle 71,57^\circ \Omega$$

y el motor 1, si se supone que gira a la misma velocidad calculada en el apartado anterior, tiene una impedancia equivalente:

$$\underline{Z}_{\text{motor 1}} = \left(0,2 + \frac{0,2}{0,0139}\right) + j1,2 = 14,59 + j1,2 = 14,64 \angle 4,7^\circ \Omega$$

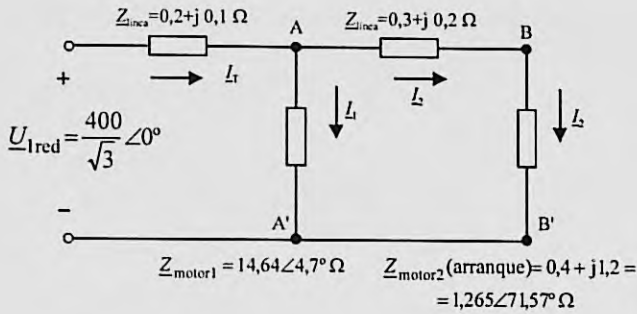


Figura 4.33

La impedancia total de la rama derecha de la Figura 4.33 vale:

$$Z_{\text{total rama 2}} = (0,3 + j0,2) + (0,4 + j1,2) = 0,7 + j1,4 = 1,565 \angle 63,43^\circ \Omega$$

La impedancia anterior está en paralelo con la impedancia equivalente del motor 1, dando una resultante:

$$Z_p = \frac{14,64 \angle 4,7^\circ \cdot 1,565 \angle 63,43^\circ}{14,64 \angle 4,7^\circ + 1,565 \angle 63,43^\circ} = \frac{22,91 \angle 68,13^\circ}{15,54 \angle 10,38^\circ} = 1,47 \angle 57,75^\circ \Omega$$

Por consiguiente la corriente total de la red de la Figura 4.33 será:

$$I_T = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{(0,2 + j0,1) + 1,47 \angle 57,75^\circ} = \frac{230,94 \angle 0^\circ}{1,66 \angle 53,8^\circ} = 139,1 \angle -53,8^\circ \text{ A}$$

y las corrientes de cada rama, al aplicar la regla del divisor de corriente son, respectivamente:

$$I_1 = 139,1 \angle -53,8^\circ \cdot \frac{1,565 \angle 63,43^\circ}{15,54 \angle 10,38^\circ} = 14 \angle -0,8^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 139,1 \angle -53,8^\circ \cdot \frac{14,64 \angle 4,7^\circ}{15,54 \angle 10,38^\circ} = 131 \angle -59,5^\circ \text{ A}$$

Conocidas las corriente anteriores, se pueden obtener las tensiones en bornes de cada motor. Así se tiene para el motor n.º 2:

$$U_{m2} = 1,265 \angle 71,57^\circ \cdot 131 \angle -59,5^\circ = 165,7 \angle 12,1^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$U_{\text{línea}}(\text{motor 2}) = \sqrt{3} \cdot 165,7 = 287 \text{ V}$$

y para el motor n.º 1:

$$U_{m1} = 14,64 \angle 4,7^\circ \cdot 14 \angle -0,8^\circ \approx 205 \angle 3,9^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$U_{\text{línea}}(\text{motor 1}) = \sqrt{3} \cdot 205 = 355,1 \text{ V}$$

El par de arranque que produce el motor n.º 2 tiene un valor:

$$T_{a2} = \frac{3R_2'}{2\pi \frac{n_1}{60}} I_2^2 = \frac{3 \cdot 0,2}{2\pi \frac{1000}{60}} \cdot 131^2 = 98,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que, al ser superior al par resistente de $80 \text{ N} \cdot \text{m}$, indica que el motor de la grúa n.º 2 podrá arrancar.

c) En la Figura 4.34 se muestra el circuito equivalente de esta situación en el que la impedancia del motor n.º 2 se expresa en función del deslizamiento s que tenga en ese momento es:

$$\underline{Z}_{\text{motor 2}} = \left(0,2 + \frac{0,2}{s}\right) + j1,2 \Omega$$

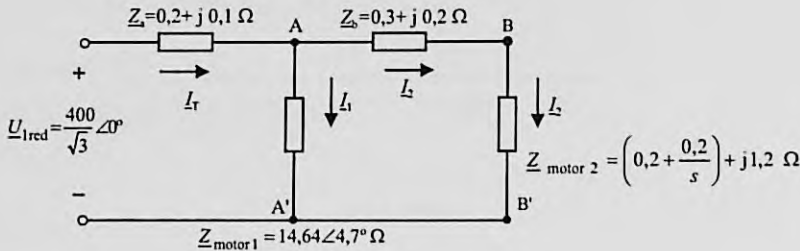


Figura 4.34

Denominando Z_1 y Z_2 a las impedancias totales de las dos ramas de la Figura 4.34, se tiene:

$$Z_1 = Z_{\text{motor 1}} = 14,59 + j1,2 = 14,64 \angle 4,7^\circ \Omega ; Z_2 = Z_b + Z_{\text{motor 2}} = \left(0,5 + \frac{0,2}{s}\right) + j1,4 \Omega$$

por lo que la corriente total que absorben ambos motores de la red y la correspondiente al motor n.º 2 son, respectivamente:

$$I_T = \frac{U_{\text{red}}}{Z_a + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}} ; I_2 = I_T \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_{\text{red}} Z_1}{Z_a(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}$$

siendo los valores parciales:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= \left(15,09 + \frac{0,2}{s}\right) + j2,6 ; Z_a(Z_1 + Z_2) = \left(2,76 + \frac{0,04}{s}\right) + j\left(2,03 + \frac{0,02}{s}\right) \\ Z_1 Z_2 &= \left(5,62 + \frac{2,92}{s}\right) + j\left(21,03 + \frac{0,24}{s}\right) ; Z_a(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2 = \left(8,38 + \frac{2,96}{s}\right) + j\left(23,06 + \frac{0,26}{s}\right) \end{aligned}$$

por lo que resulta un módulo de la corriente en el motor n.º 2:

$$I_2 = U_{\text{red}} \frac{|Z_1|}{|Z_a(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2|} = \frac{400}{\sqrt{3}} \frac{14,64}{\sqrt{\left(8,38 + \frac{2,96}{s}\right)^2 + \left(23,06 + \frac{0,26}{s}\right)^2}}$$

que incluyendo el valor anterior en la ecuación del par del motor n.º 2, se llega a:

$$T = 80 = \frac{3 \cdot 0,2}{2\pi s \frac{1000}{60}} \frac{\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 14,64^2}{\left(8,38 + \frac{2,96}{s}\right)^2 + \left(23,06 + \frac{0,26}{s}\right)^2}$$

que da lugar a la ecuación:

$$\frac{8,83}{s^2} - \frac{757,1}{s} + 602 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$s_1 = 1,25 \text{ (freno)} \quad s_2 = 0,0117 \text{ (motor)}$$

Por tanto, el motor n.º 2 se moverá a la velocidad:

$$n = 1000 \cdot (1 - 0,0117) = 988,3 \text{ r/min}$$

y la corriente del motor n.º 2 tendrá un valor complejo:

$$I_2 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \cdot 14,64 \angle 4,7^\circ}{\left(8,38 + \frac{2,96}{0,0117}\right) + j\left(23,06 + \frac{0,26}{0,0117}\right)} = 12,75 \angle -5,13^\circ \text{ A}$$

por lo que la tensión en bornes del motor n.º 2 será:

$$U_{\text{motor}2} = \left[\left(0,2 + \frac{0,2}{0,0117}\right) + j1,2 \right] \cdot 12,75 \angle -5,13^\circ = 221 \angle -1,2^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una tensión de línea

$$U_{\text{línea}2} = 221\sqrt{3} = 382,8 \text{ V}$$

4.31. Un motor asíncrono trifásico de doble jaula de ardilla de 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor $R_1 = 1 \Omega$; $X_1 = 3 \Omega$. La jaula interna tiene una impedancia reducida al estátor de valor: $0,6 + j5 \Omega$, mientras que la impedancia de la jaula externa es $3 + j1 \Omega$. El estátor se conecta en estrella a una red de 400 V, 50 Hz. Si se desprecia la corriente de vacío, calcular:

- El par de arranque.
- El par de plena carga para un deslizamiento del 4%.

Solución

a) En la Figura 4.35 se muestra el circuito equivalente del motor. Los valores de la impedancias de cada jaula del rotor en el momento del arranque, es decir, para un deslizamiento unidad, son:

$$\underline{Z}'_2 = \frac{R'_2}{s} + jX'_2 = 0,6 + j5 \Omega ; \underline{Z}'_3 = \frac{R'_3}{s} + jX'_3 = 3 + j1 \Omega$$

Las impedancias anteriores están en paralelo y dan una resultante:

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}'_2 \underline{Z}'_3}{\underline{Z}'_2 + \underline{Z}'_3} = \frac{(0,6 + j5) \cdot (3 + j1)}{3,6 + j6} = \frac{5,036 \angle 83,16^\circ \cdot 3,16 \angle 18,43^\circ}{7 \angle 59,04^\circ} = 2,273 \angle 42,55^\circ = 1,674 + j1,537 \Omega$$

y la impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, lo que da lugar a una impedancia total del motor:

$$\underline{Z}_{\text{total}} = (1 + j3) + (1,674 + j1,537) = 2,674 + j4,537 = 5,266 \angle 59,5^\circ \Omega$$

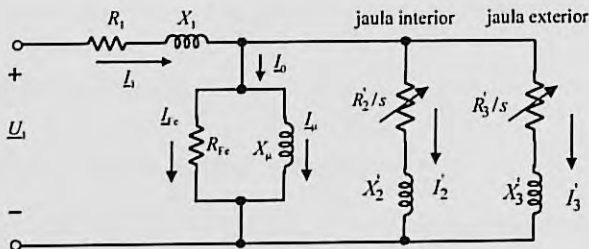


Figura 4.35

La corriente primaria absorbida por el motor, si se toma como referencia la tensión de alimentación, es:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{\text{total}}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{5,266 \angle 59,5^\circ} = 41,66 \angle -59,5^\circ \text{ A}$$

A partir de la corriente anterior y de la parte resistiva de la impedancia del rotor se puede determinar la potencia de entrehierro que pasa del estátor al rotor, cuyo valor es, para $s = 1$:

$$P_g = 3 \cdot \frac{R_{12}'}{s} \cdot I_1^2 = 3 \cdot 1,674 \cdot 41,66^2 \approx 8716 \text{ W}$$

Se puede comprobar cómo está repartida la potencia anterior entre las dos jaulas del rotor. Para ello es preciso calcular las corrientes que circulan por cada jaula del rotor (reducidas al estátor):

$$I_2' = I_1 \frac{Z_3'}{Z_2' + Z_3'} = 41,66 \angle -59,5^\circ \frac{3,16 \angle 18,43^\circ}{7 \angle 59,04^\circ} = 18,81 \angle -100,11^\circ \text{ A}$$

$$I_3' = I_1 \frac{Z_2'}{Z_2' + Z_3'} = 41,66 \angle -59,5^\circ \frac{5,036 \angle 83,16^\circ}{7 \angle 59,04^\circ} = 29,97 \angle -35,38^\circ \text{ A}$$

Por tanto, las potencias de entrehierro de cada jaula son:

$$P_2 = 3 \frac{R_2'}{s} I_2'^2 = 3 \cdot 0,6 \cdot 18,81^2 = 636,9 \text{ W}; \quad P_3 = 3 \frac{R_3'}{s} I_3'^2 = 3 \cdot 3 \cdot 29,97^2 = 8083,8 \text{ W}$$

lo que corresponde a una potencia total de 8720,7 W. (prácticamente el mismo valor obtenido anteriormente, salvo errores de redondeo). Para calcular el par del motor se requiere calcular la velocidad de sincronismo que vale:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

y por consiguiente, el par de arranque es:

$$T_a = \frac{P_g}{\Omega_1} = \frac{8720,7}{2\pi \frac{1500}{60}} = 55,52 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) Los valores de las impedancias de cada jaula del rotor para un deslizamiento del 4%, son:

$$Z_2' = \frac{R_2'}{s} + jX_2' = \frac{0,6}{0,04} + j5 = 15 + j5 \Omega; \quad Z_3' = \frac{R_3'}{s} + jX_3' = \frac{3}{0,04} + j1 = 75 + j1 \Omega$$

Las impedancias anteriores están en paralelo y dan una impedancia resultante:

$$Z_p = \frac{Z_2' Z_3'}{Z_2' + Z_3'} = \frac{(15 + j5) \cdot (75 + j1)}{90 + j6} = \frac{15,81 \angle 18,43^\circ \cdot 75,007 \angle 0,76^\circ}{90,2 \angle 3,81^\circ} = 13,15 \angle 15,38^\circ = 12,68 + j3,49 \Omega$$

La impedancia anterior está en serie con la impedancia del estátor, lo que da lugar a una impedancia total del motor:

$$Z_{\text{total}} = 1 + j3 + 12,68 + j3,49 = 13,68 + j6,49^\circ = 15,14 \angle 25,38^\circ \Omega$$

y por tanto la corriente primaria absorbida por el motor, si se toma como referencia la tensión de alimentación, es:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{\text{total}}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{15,14 \angle 25,38^\circ} = 15,25 \angle -25,38^\circ \text{ A}$$

Las corrientes que circulan por cada jaula del rotor (reducidas al estátor) son:

$$I_2' = I_1 \frac{Z_3'}{Z_2 + Z_3} = 15,25 \angle -25,38^\circ \frac{75,007^\circ \angle 0,76^\circ}{90,2 \angle 3,81^\circ} = 12,68 \angle -28,43^\circ \text{ A}$$

$$I_3' = I_1 \frac{Z_2'}{Z_2 + Z_3} = 15,25 \angle -25,38^\circ \frac{15,81 \angle 18,43^\circ}{90,2 \angle 3,81^\circ} = 2,67 \angle -10,76^\circ \text{ A}$$

Por tanto, las potencias de entrehierro de cada jaula son:

$$P_2 = 3 \frac{R_3'}{s} I_2'^2 = 3 \cdot 15 \cdot 12,68^2 = 7235,2 \text{ W}; \quad P_3 = 3 \frac{R_3'}{s} I_3'^2 = 3 \cdot 75 \cdot 2,67^2 = 1604 \text{ W}$$

lo que corresponde a una potencia total de $P_a = 8839,2 \text{ W}$. Como quiera que la velocidad de sincronismo del motor vale 1500 r/min, el valor del par de plena carga será:

$$T_{pc} = \frac{P_g}{\Omega_1} = \frac{8839,2}{2\pi \frac{1500}{60}} = 56,27 \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.32 Un motor asíncrono monofásico de 230 V, 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor $Z_1 = 1,8 + j2,5 \Omega$ y una impedancia del rotor reducida al estátor $Z_2' = 3,5 + j2,5 \Omega$. La reactancia magnetizante es $X_\mu = 50 \Omega$. Se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Calcular para un deslizamiento del 5%:

- La potencia mecánica útil.
- El rendimiento.

Solución

a) En la Figura 4.36 se muestra el circuito equivalente del motor monofásico, en el que los valores de las resistencias totales del rotor (propia + carga) para cada campo para un deslizamiento del 5% son:

$$\frac{R_2'}{2s} = \frac{3,5}{2 \cdot 0,05} = 35 \Omega; \quad \frac{R_2'}{2(2-s)} = \frac{3,5}{2 \cdot (2-0,05)} = 0,897 \Omega$$

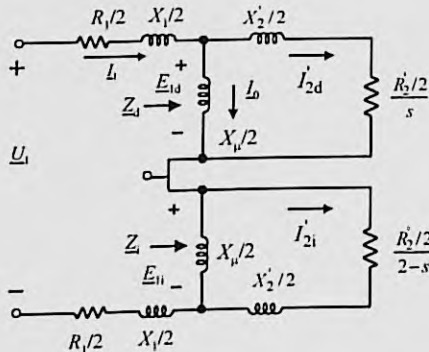


Figura 4.36

De este modo, las impedancias Z_d y Z_i son, respectivamente (el símbolo // significa conexión en paralelo):

$$Z_d = j \frac{X_\mu}{2} // \left(\frac{R_2'}{2s} + j \frac{X_2'}{2} \right) = \frac{j25 \cdot (35 + j1,25)}{35 + j26,25} = 20 \angle 55,2^\circ \Omega$$

$$Z_i = j \frac{X_\mu}{2} // \left(\frac{R_2'}{2(2-s)} + j \frac{X_2'}{2} \right) = \frac{j25 \cdot (0,897 + j1,25)}{0,897 + j26,25} = 1,47 \angle 56,3^\circ \Omega$$

Si se toma la tensión como referencia, la corriente absorbida por el motor será:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + jX_1 + Z_d + Z_i} = \frac{230 \angle 0^\circ}{1,8 + j2,5 + 20 \angle 55,2^\circ + 1,47 \angle 56,3^\circ} = 9,37 \angle -55,14^\circ \text{ A}$$

Por tanto, el motor absorbe una corriente de 9,37 A con un f.d.p. de $\cos 55,14^\circ = 0,572$. Las corrientes del rotor se obtienen por la regla del divisor de corriente, lo que da lugar a los siguientes resultados:

$$I_{2d}' = 9,37 \angle -55,14^\circ \frac{j25}{35 + j26,25} = 5,35 \angle -2^\circ \text{ A}$$

$$I_{2i}' = 9,37 \angle -55,14^\circ \frac{j25}{0,897 + j26,25} = 8,92 \angle -53,2^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, se obtiene una potencia mecánica interna total:

$$P_{mi} = \frac{R_2'}{2} (1-s) \cdot \left[\frac{I_{2d}'^2}{s} - \frac{I_{2i}'^2}{2-s} \right] = \frac{3}{2} (1-0,05) \cdot \left[\frac{5,35^2}{0,05} - \frac{8,92^2}{2-0,05} \right] = 815,7 - 58,1 = 757,6 \text{ W}$$

b) La potencia eléctrica absorbida por el motor de la red será: $P_1 = 230 \cdot 9,37 \cdot 0,572 = 1232,7 \text{ W}$, lo que da lugar a un rendimiento:

$$\eta = \frac{757,6}{1232,7} = 61,5\%$$

que es claramente inferior al que poseen los motores trifásicos. En la práctica el rendimiento de los motores monofásicos oscila entre el 60% y el 80%.

4.33. Un grupo motobomba está formado por un motor asincrónico acoplado mecánicamente a una bomba centrífuga. La instalación mostrada en la Figura 4.37 representa un grupo de bombeo empleado en regadíos. La admisión de agua se realiza a través de un canal de entrada y se realiza el bombeo hasta un embalse superior, a partir del cual se realiza la distribución por tuberías para que los agricultores efectúen el regadío por gravedad. La placa de características del motor trifásico en jaula de ardilla del grupo motobomba señala los siguientes valores asignados por el fabricante: 250 kW; 400/690 V; 50 Hz; $\eta = 95,5\%$; $\cos \varphi = 0,89$; 1485 r/min. La red eléctrica de alimentación es trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Si se supone que el motor funciona a plena carga y que la altura total del bombeo (*) es de 50 metros. Se pide:

- Determinar el caudal en m^3/hora que se bombea, si se supone que en el punto de trabajo correspondiente, la bomba centrífuga tiene un rendimiento del 70%.
- La estación de bombeo dispone de 4 grupos motobomba idénticos al señalado en la figura y, debido a unas obras en el canal de entrada, no se han efectuado medidas del consumo de agua en el último mes. La comunidad de regantes propietaria de la estación de bombeo estima que puede ser una cantidad cercana a los 300 000 m^3 . El ingeniero de la confederación hidrográfica a la que pertenece el canal, desconfía de esta cifra y para confirmarla opta por dirigirse a la compañía eléctrica suministradora de la zona, para que le indiquen el consumo de energía eléctrica de la estación de bombeo en ese periodo de tiempo, que resulta ser de 80 000 kWh. Determinar, a partir de este dato, el valor aproximado del caudal real bombeado en esos meses, para comprobar la cantidad señalada por la comunidad de regantes.

(*) Nota:

- 1) En realidad la altura total H es la suma de la altura de aspiración de la bomba, más la altura de impulsión, más una altura adicional que representa las pérdidas de rozamiento en la tubería, que se denomina *pérdida de carga*.
- 2) Se supone que los grupos motobomba trabajan siempre a plena carga y en el mismo punto de trabajo de las bombas centrífugas.

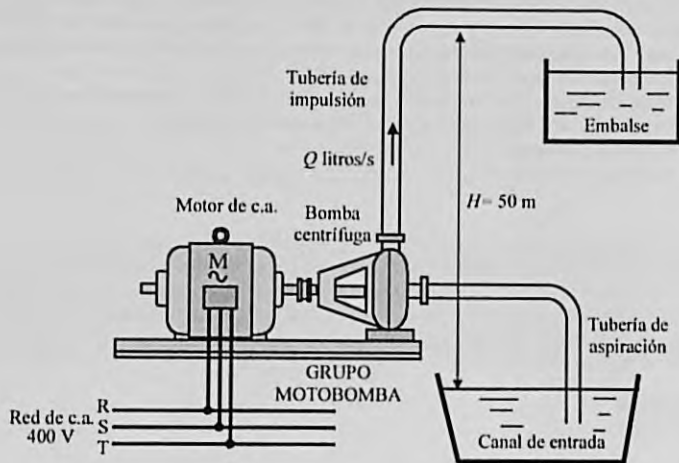


Figura 4.37

Solución

a) A plena carga la potencia mecánica útil del motor eléctrico es de 250 kW. Esta potencia se transfiere a la bomba centrífuga, que en el punto de funcionamiento tiene un rendimiento del 70%, lo que significa que la potencia efectiva disponible para bombear el agua es de $250 \cdot 0,7 = 175$ kW. Por otra parte, para bombear un caudal de agua Q (en litros por segundo), a una altura de H metros se requiere una potencia en W:

$$P_{\text{bombeo}} = QH 9,81$$

Téngase en cuenta, para comprender la ecuación anterior, que 1 litro de agua pesa 1 kg, por lo que para bombear Q kg/s de agua, a una altura H se requieren QH kg·m/s y como $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 9,81 \text{ W}$, la potencia en vatios es $9,81 QH$. Si la altura H es de 50 m, el caudal que bombea el grupo motobomba, si funciona a plena carga es:

$$Q = \frac{P_{\text{bombeo}}}{9,81H} = \frac{175\,000}{9,81 \cdot 50} \approx 357 \text{ litros/s}$$

lo que corresponde a:

$$Q = 357 \text{ litros/s} = 357 \cdot 60 \cdot 60 = 1\,285\,200 \text{ litros/hora} = 1\,285 \text{ m}^3/\text{hora}$$

b) Para bombear el caudal anterior, el motor eléctrico ha absorbido de la red eléctrica una potencia:

$$P_1 = \frac{P_{\text{mec}}}{\eta} = \frac{250}{0,955} \approx 262 \text{ kW}$$

lo que representa una energía activa en una hora de 262 kWh. Es decir, el bombeo de $1\,285 \text{ m}^3$ requiere un consumo aproximado de electricidad del orden de 262 kWh. Es por ello que si el consumo de energía eléctrica ha sido de 80 000 kWh, el tiempo total de funcionamiento de las cuatro motobombas ha debido ser del orden de:

$$t = \frac{80\,000}{262} \approx 305 \text{ h}$$

lo que corresponde a un consumo total de agua en ese periodo de tiempo de:

$$305 \text{ horas} \cdot 1\,285 \text{ m}^3/\text{hora} = 391\,925 \text{ m}^3$$

que es una cantidad superior a la de $300\,000 \text{ m}^3$ estimados por la comunidad de regantes. En realidad, la cantidad de agua consumida es inferior a los $391\,925$ metros cúbicos calculados, ya que existen servicios auxiliares en la estación de bombeo que consumen electricidad: alumbrado interior y del camino de acceso, maquinaria auxiliar de reparación, polipastos, equipos de soldadura, etc. Si se estima que estos servicios tienen un consumo eléctrico de un 5% del total, el caudal bombeado sería un 5% inferior al calculado, es decir, sería del orden de $95\% \cdot 391\,925 = 372\,329 \text{ m}^3$ que es casi un 24% superior al estimado por la comunidad de regantes. En la práctica resulta difícil predecir el resultado con gran exactitud debido a los cambios en los rendimientos tanto del motor eléctrico como de la bomba centrífuga en regímenes de funcionamiento variables, lo cual aquí no se ha tenido en cuenta.

4.34. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor despreciable. Se sabe que el par máximo es de $500 \text{ N} \cdot \text{m}$ y se produce para una velocidad de $1\,200 \text{ r/min}$. Si el motor mueve un par resistente constante de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ y el momento de inercia del rotor más la carga mecánica es de $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, calcular el tiempo que requiere el motor para pasar de la posición de paro hasta alcanzar una velocidad de $1\,425 \text{ r/min}$.

Solución

Teoría previa

Si se denomina T al par motor que ejerce la máquina y T_r al par resistente, el par que tiende a acelerar el rotor es $T - T_r$ y si se denomina J al momento de inercia total y Ω a la velocidad angular del rotor, se cumple la ecuación dinámica siguiente:

$$T - T_r = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (\text{a})$$

Pero si se denomina Ω_1 a la velocidad angular de sincronismo y s al deslizamiento, se cumple:

$$\Omega = \Omega_1(1 - s) \quad (\text{b})$$

que al sustituir en (a) nos da:

$$T - T_r = -J\Omega_1 \frac{ds}{dt} \quad (\text{c})$$

y por consiguiente, el tiempo necesario para que el rotor pase de un deslizamiento s_1 hasta otro s_2 es:

$$t = -J\Omega_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{T - T_r} \quad (\text{d})$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que la impedancia del estátor es despreciable, se cumple la fórmula de Kloss que relaciona el par motor genérico T para un deslizamiento s en función del par máximo T_{\max} para el deslizamiento de par máximo s_m y que es:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2}{\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s}} \Rightarrow T = \frac{2s s_m T_{\max}}{s^2 + s_m^2} \quad (\text{e})$$

y que al sustituir en (d) nos da:

$$t = -J\Omega_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\frac{2s \cdot s_m T_{\max}}{s^2 + s_m^2} - T_r} \quad (\text{f})$$



En este problema la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min}$$

que corresponde a una velocidad angular en rad/s:

$$\Omega_1 = 2\pi \frac{n_1}{60} = 2\pi \frac{1500}{60} = 157,08 \text{ rad/s}$$

Por otra parte, la velocidad para el par máximo es de 1200 r/min, que corresponde a un deslizamiento:

$$s_m = \frac{1500 - 1200}{1500} = 0,2$$

Además, el par máximo es de 500 N · m, el par resistente es de 100 N · m y el momento de inercia es de 10 kg · m². Por otro lado el deslizamiento inicial (arranque) es $s_1 = 1$ y como la velocidad final que se señala es de 1425 r/min, que corresponde a un deslizamiento:

$$s_2 = \frac{1500 - 1425}{1500} = 0,05$$

al sustituir todos los valores anteriores en la expresión (f) resulta:

$$t = -1570,8 \int_1^{0,05} \frac{ds}{\frac{200s}{s^2 + 0,2^2} - 100} = +15,708 \int_1^{0,05} \frac{(s^2 + 0,2^2)}{s^2 - 2s + 0,2^2} ds$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$I = \int_1^{0,05} \frac{(s^2 + 0,2^2)}{s^2 - 2s + 0,2^2} ds = \int_1^{0,05} \left[1 + \frac{2s}{s^2 - 2s + 0,2^2} \right] ds = \int_1^{0,05} \left[1 + \frac{2,02}{s - 1,98} - \frac{0,02}{s - 0,02} \right] ds$$

e integrando se obtiene el siguiente resultado:

$$I = \int_1^{0,05} \left[1 + \frac{2,02}{s - 1,98} - \frac{0,02}{s - 0,02} \right] ds = [s + 2,02 \cdot \ln(s - 1,98) - 0,02 \cdot \ln(s - 0,02)] \Big|_1^{0,05} \approx 0,49$$

por lo que finalmente, el tiempo de arranque del motor entre 0 y 1475 r/min es $t = 15,708 \cdot 0,49 = 7,7 \text{ s}$.

4.35. Se dispone de un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla conectado en triángulo de 400/690 V, 8 polos, 50 Hz.

En un ensayo a rotor bloqueado ha dado los siguientes resultados: U_1 (línea) = 100 V; I_1 (línea) = 60 A, P_{ce} (total) = 3,75 kW. Se sabe además que las pérdidas en el hierro son de 2 kW y que las pérdidas mecánicas son despreciables. La resistencia medida entre dos terminales del estator conectado en triángulo fue de 0,347 Ω. Si el motor se conecta inicialmente a una red de trifásica de 400 V de línea, calcular:

- El par de arranque del motor.
- Potencia mecánica útil cuando funciona con par máximo.
- El motor se alimenta a continuación por medio de una línea trifásica de impedancia $0,1 + j 0,2 \Omega/\text{hilo}$, que procede del secundario de un transformador de 25 kVA, 15000/400 V, conexión Yd11, 50 Hz, que tiene una impedancia total reducida al secundario de $0,6 + j 0,9 \Omega/\text{fase}$. Determinar la tensión que debe aplicarse al primario del transformador para que la tensión en el motor sea la asignada de 400 V cuando funciona con un deslizamiento del 5%.
- Se desea que el motor funcione dando el máximo rendimiento, para ello, como el transformador es de una potencia insuficiente, se necesita acoplarlo en paralelo con otro transformador de 50 kVA, 15000/400 V, conexión Yd11, 50 Hz y que tiene una impedancia total reducida al secundario de $0,3 + j 0,6 \Omega/\text{fase}$. Si la tensión en bornes del motor permanece constante en 400 voltios, calcular la potencia activa que dará este nuevo transformador y la tensión que deberá aplicarse a los primarios de los transformadores.
- El rendimiento total de la instalación, si se desprecian las pérdidas en el hierro de los transformadores.

Solución

En la Figura 4.38 se muestra el esquema unifilar de la instalación que se requiere para resolver el problema a partir del apartado c) (ya que las dos primeras preguntas se refieren al motor conectado directamente a una red trifásica de 400 V de línea). Como quiera que el motor asíncrono está conectado en triángulo, al medir entre dos terminales externos la resistencia del estátor, tal como se señala en la parte derecha de la Figura 4.38, si se denomina $R_{1\Delta}$ a la resistencia de cada bobina conectada en triángulo y R_{medida} a la resistencia medida entre dos terminales (que consiste en dos bobinas en serie y su resultante en paralelo con la tercera bobina), se puede escribir:

$$R_{medida} = \frac{2}{3} R_{1\Delta} \Rightarrow R_{1\Delta} = \frac{3}{2} R_{medida} = \frac{3}{2} 0,347 = 0,52 \Omega$$

y la resistencia por fase del estátor equivalente en estrella será:

$$R_{1Y} = \frac{R_{1\Delta}}{3} = \frac{0,52}{3} = 0,173 \Omega$$

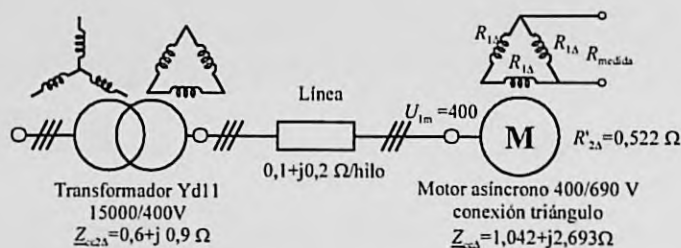


Figura 4.38

Por otro lado, del ensayo de cortocircuito del motor se obtiene:

$$3750 = \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 60 \cdot \cos \varphi_{cc} \Rightarrow \cos \varphi_{cc} = 0,361 ; \sin \varphi_{cc} = 0,933$$

y la impedancia de cortocircuito por fase del motor conectado en triángulo y sus elementos componentes son:

$$Z_{cc\Delta} = \frac{100}{60/\sqrt{3}} = 2,887 \Omega \Rightarrow R_{cc\Delta} = 2,887 \cdot 0,361 = 1,042 \Omega ; X_{cc\Delta} = 2,887 \cdot 0,933 = 2,693 \Omega$$

Como quiera que la resistencia de una fase del motor conectado en triángulo es de 0,52 Ω, el valor de la resistencia reducida del rotor es:

$$R'_{2\Delta} = 10,042 - 0,52 = 0,522 \Omega$$

Una vez determinados los parámetros del motor asíncrono, es conveniente preparar toda la instalación modificando todas las conexiones de las máquinas en un sistema en estrella equivalente. En la Figura 4.39 se muestra el circuito unifilar resultante. La impedancia de cortocircuito del motor equivalente conectado en estrella vale:

$$Z_{ccY} = \frac{1,042 + j2,693}{3} = 0,347 + j0,898 \Omega$$

y por consiguiente, la resistencia R'_{2Y} será igual a:

$$R'_{2Y} = R_{ccY} - R_{1Y} = 0,347 - 0,173 = 0,174 \Omega$$

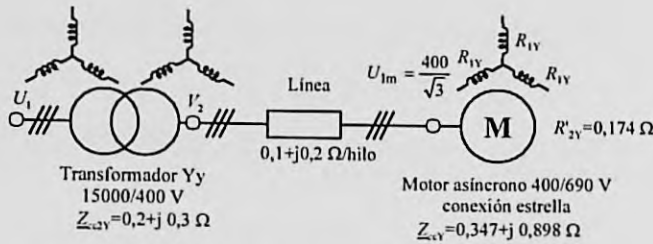


Figura 4.39

Por otro lado, la impedancia del transformador referida al secundario, que está conectado en triángulo, será $Z_{cc2\Delta} = 0,6 + j 0,9 \Omega$. Por tanto, la impedancia referida al secundario de un transformador equivalente con el secundario en estrella, es:

$$Z_{cc2Y} = \frac{0,6 + j 0,9}{3} = 0,2 + j 0,3 \Omega \quad (a)$$

y la tensión simple, o de fase, que tiene en los terminales el motor equivalente en estrella es:

$$U_{1N} = \frac{400}{\sqrt{3}} \text{ V}$$

a) El par de arranque del motor viene expresado por:

$$T = \frac{3R_2' U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{cc}^2 \right]} = \frac{3 \cdot 0,174 \cdot \left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{2\pi \frac{750}{60} \cdot 1 \cdot \left[\left(0,173 + \frac{0,174}{1} \right)^2 + 0,898^2 \right]} = 382,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) El deslizamiento para el par máximo vale:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0,174}{\sqrt{0,173^2 + 0,898^2}} = 0,190$$

por lo que la corriente que absorbe el motor en las condiciones de par máximo es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,173 + \frac{0,174}{0,190} \right) + j 0,898} = 163,6 \angle -39,5^\circ \text{ A}$$

y, en consecuencia, la potencia mecánica interna o potencia mecánica útil (ya que no hay pérdidas mecánicas) que desarrolla el motor es:

$$P_{mi} = 3R_2' \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_2^2 = 3 \cdot 0,174 \cdot \left(\frac{1}{0,190} - 1 \right) \cdot 163,6^2 \approx 59,6 \text{ kW}$$

c) Si se toma la tensión simple en el motor como referencia de fases y el deslizamiento es igual al 5%, la corriente absorbida por el motor es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\left(0,173 + \frac{0,174}{0,05}\right) + j0,898} = 61,4 \angle -13,8^\circ \text{ A}$$

Si se tiene en cuenta el esquema unifilar de la Figura 4.39, la tensión simple que deberá tener el secundario del transformador para que llegue la tensión de 400 voltios al motor será:

$$\underline{U}_2 = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,1 + j0,2) \cdot 61,4 \angle -13,8^\circ \approx 240 \angle 2,5^\circ \text{ V}$$

El transformador estrella-estrella equivalente tiene una relación de transformación:

$$r_t = \frac{15\,000}{400} = 37,5$$

y, teniendo en cuenta el valor de la impedancia reducida al secundario del transformador estrella-estrella equivalente señalado en (a) y trasladando al primario las magnitudes anteriores, se tiene:

$$r_t \underline{U}_2 = 37,5 \cdot 240 \angle 2,5^\circ = 9\,000 \angle 2,5^\circ \text{ V}; \quad \frac{I_2}{r_t} = \frac{61,4 \angle -13,8^\circ}{37,5} \approx 1,64 \angle -13,8^\circ \text{ A}$$

$$\underline{Z}_{cc1Y} = r_t^2 \underline{Z}_{cc2Y} = 37,5^2 \cdot (0,2 + j0,3) = 281,2 + j421,9 \Omega$$

por lo que, entonces, la tensión primaria necesaria en el transformador será:

$$\underline{U}_1 = r_t \underline{U}_2 + \underline{Z}_{cc1Y} \frac{I_2}{r_t} = 9\,000 \angle 2,5^\circ + (281,2 + j421,9) \cdot 1,64 \angle -13,8^\circ = 9\,651,8 \angle 5,7^\circ \text{ V}$$

es decir, la tensión fase-neutro en el primario del transformador debe ser de 9651,8 voltios, que corresponde a un valor compuesto o de línea:

$$U_{1\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 9\,651,8 \approx 16\,717,4 \text{ V}$$

d) Cuando una máquina eléctrica funciona con máximo rendimiento se cumple la igualdad entre las pérdidas fijas y variables. Teniendo en cuenta que el motor tiene unas pérdidas mecánicas despreciables, la única potencia perdida fija es la del hierro, que según el enunciado del problema es de 2 kW, cantidad que al igualar con las pérdidas en el cobre (variables) da lugar a:

$$2\,000 = 3 \cdot (R_1 + R_2') \cdot I_{1m}^2 = 3 \cdot 0,347 \cdot I_{1m}^2 \Rightarrow I_{1m} = 43,8 \text{ A}$$

El valor anterior corresponde a la magnitud de la corriente en el estátor del motor. En la Figura 4.40 se muestra el circuito equivalente del motor reducido al estátor.

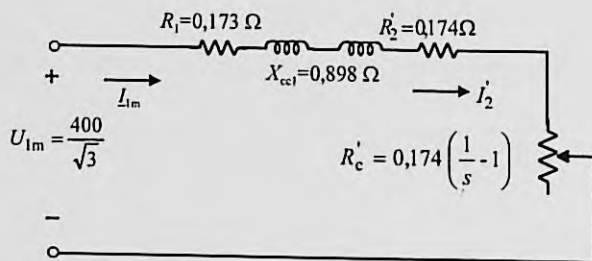


Figura 4.40

De acuerdo con el resultado anterior, el módulo de la impedancia del motor es:

$$Z_{1m} = \frac{400/\sqrt{3}}{43,8} = 5,27 \Omega$$

y como quiera que la impedancia compleja del motor es de la forma:

$$Z_{1m} = \left(0,173 + \frac{0,174}{s} \right) + j0,898$$

al igualar el módulo de la impedancia anterior a la magnitud calculada antes, resulta un deslizamiento del motor para máximo rendimiento: $s = 0,0347$. Llevando este valor a la expresión anterior de la impedancia compleja se tiene:

$$\underline{Z}_{1m} = \left(0,173 + \frac{0,174}{0,0347} \right) + j0,898 = 5,27 \angle 9,8^\circ \Omega$$

En definitiva, la potencia eléctrica activa que el motor absorbe de la red en las condiciones de máximo rendimiento es:

$$P_{1m} = 3U_{1m}I_{1m} \cos \varphi_{1m} = 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot 43,8 \cdot \cos 9,8^\circ \approx 29902 \text{ W} \quad (\text{b})$$

De acuerdo con el enunciado, para alimentar ahora el motor se conecta un nuevo transformador en paralelo con el existente, según el esquema unifilar de la Figura 4.41. La impedancia reducida al secundario (conectado en triángulo) de este transformador II es de $0,3 + j0,6$ ohmios que corresponde a un equivalente en estrella:

$$\underline{Z}_{cc2Y} = \frac{0,3 + j0,6}{3} = 0,1 + j0,2 \Omega$$

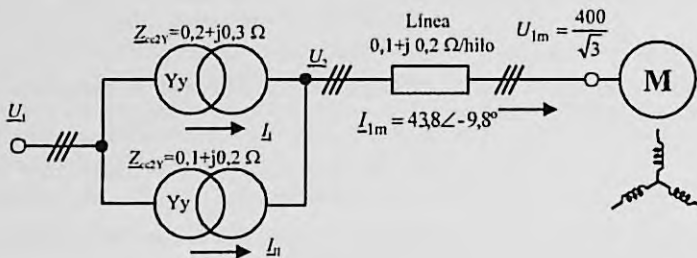


Figura 4.41

La nueva tensión secundaria de los transformadores se obtiene sumando a la tensión del motor la caída de tensión en la línea con la nueva corriente que aquel lleva y así se obtiene:

$$\underline{U}_2 = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,1 + j0,2) \cdot 43,8 \angle -9,8^\circ = 236,9 \angle 1,8^\circ \text{ V}$$

A continuación, es necesario ver cómo se reparte la corriente de la línea (en definitiva del motor) entre los dos transformadores. Si se denominan I_1 e I_{11} a las corrientes que entregan los secundarios de cada transformador (ver Figura 4.41), se cumplirán las ecuaciones siguientes de paralelo:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_{11} = 43,8 \angle -9,8^\circ ; (0,2 + j0,3)\underline{I}_1 = (0,1 + j0,2)\underline{I}_{11}$$

de donde se deducen las corrientes secundarias de ambos transformadores:

$$\underline{I}_1 \approx 16,8 \angle -5,4^\circ \text{ A} ; \underline{I}_{11} \approx 27,1 \angle -12,9^\circ \text{ A}$$

Por tanto, las potencias complejas que suministrarán cada transformador serán:

$$\underline{S}_1 = 3\underline{U}_2\underline{I}_1^* \approx 3 \cdot 236,9 \angle 1,8^\circ \cdot 16,8 \angle +5,4^\circ = 11,9 \angle 7,2^\circ \text{ kVA} = 11,8 + j1,5$$

$$\underline{S}_{11} = 3\underline{U}_2\underline{I}_{11}^* \approx 3 \cdot 236,9 \angle 1,8^\circ \cdot 27,1 \angle +12,9^\circ \approx 19,3 \angle 14,7^\circ \text{ kVA} = 18,6 + j4,9$$

es decir, el segundo transformador suministra una potencia activa de 18,6 kW. Para obtener la tensión que se requiere en los primarios de los transformadores, se puede utilizar, por ejemplo, los resultados del primer transformador y al reducir las magnitudes correspondientes al primario resulta:

$$r_1 \underline{U}_2 = 37,5 \cdot 236,9 \angle 1,8^\circ = 8883,8 \angle 1,8^\circ \text{ V}; \quad \frac{\underline{I}_1}{r_1} = \frac{16,8 \angle -5,4^\circ}{37,5} \approx 0,448 \angle -5,4^\circ \text{ A}$$

$$\underline{Z}_{cc1Y} = r_1^2 \underline{Z}_{cc2Y} = 37,5^2 \cdot (0,2 + j0,3) = 281,2 + j421,9 \Omega$$

por lo que entonces la tensión primaria necesaria en los transformadores será:

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{U}_2 + \underline{Z}_{cc1Y} \frac{\underline{I}_1}{r_1} = 8883,8 \angle 1,8^\circ + (281,2 + j421,9) \cdot 0,448 \angle -5,4^\circ = 9028,7 \angle 1,1^\circ \text{ V}$$

es decir la tensión fase-neutro en el primario de los transformadores debe ser de 9028,7 voltios, que corresponde a un valor compuesto o de línea:

$$U_{1\text{línea}} = \sqrt{3} \cdot 9028,7 \approx 15638 \text{ V}$$

e) El rendimiento de la instalación se obtiene mediante el cociente entre la potencia mecánica del motor y la potencia eléctrica a la entrada (primario) de los transformadores, es decir:

$$\eta = \frac{P_{\text{motor}}}{P_{\text{primario}}}$$

La potencia mecánica útil que entrega el motor en su eje, teniendo en cuenta que trabaja con un deslizamiento de 0,037 y absorbiendo una corriente de 43,8 amperios, es:

$$P_{\text{motor}} = 3R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) I_2^2 = 3 \cdot 0,174 \cdot \left(\frac{1}{0,037} - 1 \right) \cdot 43,8^2 \approx 27,9 \text{ kW}$$

Para calcular la potencia eléctrica que absorbe la instalación en la entrada de alta tensión (primarios de los transformadores) es necesario recordar que se tiene:

$$\underline{U}_1 = 9028,7 \angle 1,1^\circ \text{ V}; \quad \underline{I}_1 = \frac{43,8 \angle -9,8^\circ}{37,5} = 1,168 \angle -9,8^\circ \text{ A}$$

por lo que la potencia compleja de entrada a la instalación será:

$$\underline{S}_{\text{primario}} = 3\underline{U}_1\underline{I}_1^* = 3 \cdot 9028,7 \angle 1,1^\circ \cdot 1,168 \angle +9,8^\circ = 31,64 \angle 10,9^\circ \text{ kVA} = 31,07 + j5,98$$

lo que significa que la potencia activa de entrada es de 31,07 kW, y de este modo el rendimiento de la instalación será:

$$\eta = \frac{P_{\text{motor}}}{P_{\text{primario}}} = \frac{27,9}{31,07} \approx 89,8\%$$

El lector puede comprobar, como ejercicio adicional, la potencia eléctrica al principio de la instalación mediante la suma de la potencia mecánica del motor y de todas las pérdidas intermedias, a saber: hierro del motor, efecto Joule en los devanados del motor, efecto Joule de la línea; también, de los arrollamientos de ambos transformadores.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 4.36. Un motor trifásico de jaula de ardilla tiene una impedancia del estátor despreciable. La capacidad de sobrecarga, $T_{m\acute{a}x} / T_N$ vale 2,5 y el cociente par de arranque a par de plena carga es igual a 1,5. Calcular el deslizamiento a plena carga y el deslizamiento para el que se obtiene el par máximo.

Resp.: 6,96%; 33,33%

- 4.37. Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una capacidad de sobrecarga de 2,5 y desarrolla su par máximo a 900 r/min. Calcular:
- El deslizamiento a plena carga;
 - La tensión mínima que debe aplicarse a la máquina, expresada en tanto por ciento de la asignada, para obtener el par de plena carga en el arranque.

Nota: despreciar la impedancia del estátor.

Resp.: a) 8,34%; 76,15%

- 4.38. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla tiene los siguientes parámetros por fase del circuito equivalente: $R_1 = R_2' = 0,2 \Omega$; $X_1 = X_2' = 0,6 \Omega$. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y se consideran nulas las pérdidas mecánicas. Si se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz, determinar:

- El par de arranque del motor y calcular la velocidad a la que girará finalmente la máquina si arrastra una carga cuyo par resistente es constante y de valor $150 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- En el caso anterior, la corriente absorbida de la red y su factor de potencia, la potencia mecánica desarrollada por el motor, y también el rendimiento de la máquina.
- Con el motor trabajando en las condiciones del apartado a) se produce una reducción brusca de tensión en la red de alimentación, comprobándose que en ese instante la velocidad del motor cae a 950 r/min:
 - ¿Cuál es el valor de la tensión compuesta que llega al motor?
 - En la situación anterior, ¿hasta qué valor puede bajar la tensión de la red antes de que se pare el motor?

Resp.: a) $191 \text{ N} \cdot \text{m}$; $979,2 \text{ r/min}$; b) $23,35 \text{ A}$; $0,993$; 15400 W ; $95,9\%$;
c1) $273,7 \text{ V}$; c2) 211 V

- 4.39. Se dispone de un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: impedancia del estátor: $Z_1 = 0,3 + j0,8 \Omega/\text{fase}$; $Z_2 = 0,5 + j1 \Omega/\text{fase}$, se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y en el hierro (es decir se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente). Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Calcular:

- El par de arranque, velocidad para el par máximo y el valor del par máximo, dibujando a continuación la curva par-velocidad del motor en la que se señalen con detalle estos puntos de funcionamiento.
- La potencia mecánica desarrollada por el motor, el par en el eje correspondiente y el rendimiento, si la máquina gira con un deslizamiento del 4%.
- Si el motor mueve una grúa que presenta un par resistente constante de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$ ¿a qué velocidad girará el motor en estas condiciones?
- En la situación del apartado anterior, es decir cuando el motor mueve un par constante de $150 \text{ N} \cdot \text{m}$, ¿cuál será la tensión mínima de línea que deberá aplicarse al motor para que este pueda arrancar?

Resp.: a) $197 \text{ N} \cdot \text{m}$; 726 r/min ; $T_{m\acute{a}x} = 359,5 \text{ N} \cdot \text{m}$;
b) 11496 W ; $114,4 \text{ N} \cdot \text{m}$; $93,75\%$; c) 946 r/min ; d) 349 V

- 4.40. Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado de 6 polos, 50 Hz, tiene una impedancia del estátor despreciable. Los devanados del estátor y del rotor están conectados en estrella y la impedancia del rotor en reposo es $Z_2 = 0,2 + j 0,8 \Omega/\text{fase}$. Al conectar el estátor a una red trifásica y estar abierto el circuito del rotor, se ha medido entre dos anillos del mismo una tensión de 100 V. Calcular:
- La corriente de arranque del rotor con los anillos deslizantes cortocircuitados;
 - La f.e.m. inducida por fase en el rotor y la frecuencia correspondiente, si el motor gira a plena carga a 960 r/min.
 - La corriente en el rotor y el par desarrollado en el caso anterior si los anillos están cortocircuitados.
 - Si con el par resistente calculado en el caso anterior se ha incluido en el rotor una resistencia en el réostato de arranque para hacer que el par del motor sea máximo en el arranque, ¿a qué velocidad se moverá el motor?

Resp.: a) 70 A; b) 2,31 V; 2 Hz; c) 11,4 A; 18,6 N · m; d) $R_{a2} = 0,6 \Omega$; 840 r/min

- 4.41. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, con rotor en jaula de ardilla, se conecta correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea a plena carga es de 60 A y se observa que en el arranque la corriente absorbida es 5 veces la de plena carga, desarrollando un par que es 1,2 veces el nominal o de plena carga. La resistencia por fase del estátor es igual a la reducida del rotor. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y en el hierro (es decir, se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente). Se pide:
- La velocidad del rotor a plena carga y los valores de los parámetros R_1, R'_2 y $X_{cc} = X_1 + X'_2$ del motor;
 - La potencia mecánica, el par y el rendimiento del motor a plena carga.
 - Con el motor girando en condiciones nominales, se produce de repente una caída de tensión en la red de un 15%. ¿Cuál será la nueva velocidad que adquirirá el motor y la corriente absorbida de la red, si el par resistente es constante?
 - Si el motor se hace funcionar como generador asíncrono a una velocidad de 1040 r/min; determinar la potencia activa suministrada a la red, si $U_{red} = 400$ V.

Resp.: a) 952 r/min; $R_1 = R'_2 = 0,174 \Omega$; $X_{cc} = 0,687 \Omega$;
b) 37270 W; 373,9 N · m; 90,84%; c) 928 r/min; 73,24 A; d) 37,31 kW

- 4.42. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 230/400 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla tiene los siguientes parámetros: $R_1 = R'_2 = 0,2 \Omega$; $X_1 = X'_2 = 0,6 \Omega$. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y se consideran nulas las pérdidas mecánicas. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Determinar
- El par de arranque del motor y calcular la velocidad a la que girará finalmente la máquina si arrastra una carga cuyo par resistente es constante y de valor 100 N · m.
 - En el caso anterior, la corriente absorbida de la red y su factor de potencia, la potencia mecánica desarrollada por el motor y también, el rendimiento de la máquina.
 - Con el motor trabajando en las condiciones del apartado a) se produce una reducción brusca de tensión en la red de alimentación, comprobándose que en ese instante la velocidad del motor cae a 1425 r/min. ¿cuál es el valor de la tensión compuesta que llega al motor?
 - Se quiere utilizar este motor como generador asíncrono trabajando a una velocidad de régimen de 1530 r/min en un aerogenerador de un grupo eólico, ¿cuál será la potencia mecánica desarrollada por la máquina y la potencia eléctrica que entregará a la red?

Nota: la red eléctrica de conexión tiene una tensión compuesta de 400 V.

Resp.: a) 127,3 N · m; 1470 r/min; b) 22,49 a; 0,993; 14,9 kW;
96,1%; c) 273,7 V; d) 16,74 kW; 16,08 kW

4.43. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, con rotor devanado o con anillos, se conecta correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea a plena carga es de 50 A y se observa que si se realiza el arranque directamente cortocircuitando los anillos, la corriente de arranque es 5 veces la nominal o de plena carga, desarrollando un par en esas condiciones que es 1,5 veces el nominal. La resistencia por fase del estátor es igual a la reducida del rotor. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y en el hierro (es decir se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente). Se pide:

- Calcular velocidad del rotor a plena carga y valores de los parámetros R_1 , R_2' y $X_{cc} = X_1 + X_2'$ del motor.
- Hallar la potencia mecánica, el par y el rendimiento del motor a plena carga (es decir, sin añadir resistencia adicional en los anillos del rotor).
- Determinar el par máximo desarrollado por el motor con los anillos cortocircuitados y la corriente absorbida de la red y su f.d.p. en estas condiciones.
- ¿Qué resistencia debe añadirse al rotor por fase para limitar la corriente de arranque a un valor de 100 A de línea, ¿qué par de arranque producirá el motor en esta situación?

Nota: $r_m = r_n = 2$.

Resp.: a) 940 r/min; $R_1 = R_2' = 0,258 \Omega$; $X_{cc} = 0,766 \Omega$; b) 30,32 kW; 308 N · m; 88,7%;
c) 716,4 N · m; 176,12 A; 0,812; d) 0,416 Ω ; 550,3 N · m

4.44. Se dispone de un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 6 polos, 400/690 V, 50 Hz, que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente por fase: $R_1 = R_2' = 0,6 \Omega$; $X_1 = X_2' = 2,5 \Omega$; $r_m = r_n = 2$. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y se consideran nulas las pérdidas mecánicas. Si se conecta el motor *correctamente* a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz, responder a las preguntas siguientes:

- Realizar la forma de conexión del estátor del motor y el dibujo de la placa de bornes correspondiente, indicando los nombres normalizados de sus terminales y la disposición de los puentes de conexión.
- Calcular corriente de arranque de línea (es decir en la red de alimentación) con los anillos deslizantes cortocircuitados y f.d.p. correspondiente.
- Si la velocidad del motor a plena carga con los anillos cortocircuitados es de 960 r/min, calcular la potencia nominal o de plena carga del motor y el rendimiento en este régimen.
- Determinar el par de arranque, el par de plena carga y el par máximo del motor (suponiendo en los tres casos que los anillos están cortocircuitados). Dibujar a continuación la curva par-velocidad del motor, señalando los puntos correspondientes a los tres pares anteriores;
- ¿qué resistencia debe añadirse al rotor por fase para que pueda arrancar el motor?
- En el caso anterior, si el motor mueve un par resistente constante igual al nominal ¿a qué velocidad girará la máquina?

Resp.: a) Triángulo; b) 134,7 A; 0,233; c) 25,8 kW; 92,3%;
d) 104 N · m; 256,2 N · m; 406,7 N · m; e) 0,2725 Ω ; f) 887 r/min

4.45. Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Se sabe que en el motor se cumple que $R_1 = R_2'$ y que las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío son despreciables (no considerar la rama paralelo del circuito equivalente). Cuando el motor funciona a plena carga se observa que gira a 960 r/min, absorbiendo en estas condiciones una corriente de la red de 14,54 A y una potencia eléctrica activa de 9892 W. Calcular:

- Los valores de los parámetros del motor R_1 , R_2' y $X_{cc} = X_1 + X_2'$.
- La potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga, el par correspondiente en el eje y el rendimiento del motor a plena carga.
- Si se utiliza esta máquina asíncrona como aerogenerador en una central eólica y gira a la velocidad supersíncrona de 1030 r/min ¿qué potencia eléctrica activa entregará en estas condiciones la máquina a la red de alimentación de 400 voltios de línea? ¿Cuál será el rendimiento del aerogenerador?

Resp.: a) $R_1 = R_2' = 0,6 \Omega$; $X_{cc} = 3 \Omega$; b) 9,13 kW; 90,9 N · m; 92,33%;
c) 8,06 kW; 94,25%

4.46. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, con rotor en jaula de ardilla, se conecta correctamente a una red trifásica de 230 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea a plena carga es de 75,7 A y se observa que en el arranque la corriente absorbida es 5,9 veces la de plena carga, desarrollando un par que es 1,4 veces el nominal o de plena carga. La resistencia por fase del estator es igual a la reducida del rotor (es decir se cumple que $R_1 = R'_2$), se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y en el hierro (es decir, se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente). Se pide:

- La velocidad del rotor a plena carga y valores de los parámetros R_1 , R'_2 y $X_{cc} = X_1 + X'_2$ del motor.
- La potencia mecánica, el par y el rendimiento del motor a plena carga.
- Con el motor girando en condiciones nominales, se produce de repente una caída de tensión en la red de un 15%, ¿cuál será la nueva velocidad que adquirirá el motor y la corriente absorbida de la red, si el par resistente es constante?
- Si el motor se hace funcionar como generador asíncrono a una velocidad de 1 040 r/min, determinar la potencia activa suministrada a la red, si $U_{red} = 230V$.

Resp.: a) 960 r/min; $R_1 = R'_2 = 0,2 \Omega$; $X_{cc} = 0,8 \Omega$; b) 27,5 kW; 273,6 N · m; 92,25%; c) 939 r/min; 111,6 A; d) 32,2 kW

4.47. Un motor asíncrono trifásico de 15 kW, 6 polos, 230/400 V, 50 Hz, con rotor en jaula de ardilla tiene una resistencia del estator por fase de 0,2 Ω . Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea y 50 Hz y se observa que en el arranque el motor absorbe una corriente de línea de 109 A con f.d.p. 0,33 inductivo. Determinar:

- Los parámetros del circuito equivalente por fase del motor, es decir: R_1 , R'_2 y $X_{cc} = X_1 + X'_2$.
- El motor arrastra una carga cuyo par resistente es constante y de valor 120 N · m. ¿A qué velocidad girará el motor? Calcular el valor de la potencia mecánica producida y el rendimiento del motor en estas condiciones.
- Con el motor girando con la carga anterior se produce en la red de alimentación una caída de tensión de un 20%, ¿cuál será la nueva velocidad que adquirirá el motor?
- Si se utiliza este motor asíncrono en un aerogenerador (central eólica) y se mueve el rotor a una velocidad de 1 050 r/min, ¿qué potencia entregará la máquina asíncrona a una red de 400 V de línea en estas condiciones?

Resp.: a) $R_1 = 0,2$ (dato); $R'_2 = 0,5 \Omega$; $X_{cc} = 2 \Omega$; b) 958,3 r/min; 12,05 kW; 94,3%; c) 930,5 r/min; d) 15,7 kW.

4.48. Se dispone de un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 4 polos, 230/400V, 50 Hz, que se conecta correctamente a una red trifásica de 400 V de línea y 50 Hz. Los parámetros por fase del motor son los siguientes: $R_1 = R'_2 = 0,2 \Omega$; $X_{cc} = X_1 + X'_2 = 0,5 \Omega$. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y se considera que a efectos prácticos no existe la rama paralelo del circuito equivalente.

- Cuando el motor mueve un par resistente constante igual al de plena carga, se observa que absorbe una corriente de línea de 50 A estando los anillos deslizantes cortocircuitados. ¿A qué velocidad gira el motor? ¿Qué par mecánico desarrolla en el eje? ¿Cuál es el rendimiento correspondiente?
 - Calcular la velocidad del motor cuando trabaja en las condiciones de par máximo con los anillos deslizantes en cortocircuito. ¿Cuánto vale el par máximo del motor?
 - ¿Qué resistencia debe añadirse al rotor por fase para limitar la corriente de arranque a 150 A de línea? ¿Cuál es el par de arranque en estas condiciones?
- Nota: se cumple la igualdad en las relaciones de transformación de corrientes y tensiones: $r_{iu} = r_{ri} = 2$.
- Si el motor gira con los anillos deslizantes en cortocircuito y se arrastra el rotor por encima de la velocidad de sincronismo mediante un motor diésel a una velocidad de 1 530 r/min. ¿Qué potencia activa entrega la máquina asíncrona (trabajando como generador) a la red?

Resp.: a) 1431 r/min; 207,6 N · m; 91,2%; b) 942,9 r/min; 689,6 N · m; c) 0,264 Ω ; 538,9 N · m; d) 16,3 kW

4.49. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 400/690 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R'_2 = 0,5 \Omega$; $X_1 = X'_2 = 2,5 \Omega$. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente del motor. Al conectar el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz y arrastrar la máquina un par resistente igual al de plena carga o nominal, la corriente absorbida de la red fue de 49,7 A. Calcular, en estas condiciones:

- La velocidad a la que girará el motor y la potencia mecánica desarrollada por el mismo.
- par mecánico en el eje y el rendimiento del motor en la misma situación.
- La velocidad del motor para el par máximo y valor en $N \cdot m$ de este par máximo.
- Si el motor mueve una bomba centrífuga que eleva el agua de un pozo hasta un depósito situado a una altura de 50 m (respecto al nivel del pozo), con un caudal de 30 l/s y se considera que el rendimiento de la bomba es del 60%, calcular la velocidad a la que girará el motor (tómese la más elevada de las dos posibles), la corriente absorbida de la red y su f.d.p.

Resp.: a) 1440 r/min; 29,7 kW; b) 196,6 N·m; 92,31%;
c) 1350 r/min; 276,5 N·m; d) 1455 r/min; 38,7 A; 0,96

4.50. Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 50 Hz tiene una potencia mecánica asignada de 40 kW a la velocidad de 1425 r/min. La impedancia del estátor es despreciable y también las pérdidas mecánicas y en el hierro. Tanto el estátor como el rotor están conectados en estrella siendo la resistencia por fase de este 0,05 Ω y la capacidad de sobrecarga $T_{m\acute{a}x}/T_N$ del motor de 2,5. Calcular la resistencia por fase que es necesario añadir en el reóstato de arranque del rotor en las hipótesis siguientes:

- Para obtener el par máximo en el arranque.
- Cuando el motor mueve una carga tipo ventilador a una velocidad final de 1375 r/min, cuyo par resistente es de la forma: $T_r = 6,4 \cdot 10^{-5} \cdot n^2$ (donde n se mide en r/min).
- Cuando el motor realiza un frenado a contracorriente al descender un peso de 100 kg que pende del extremo de un cable arrollado alrededor de una polea de 0,50 m de diámetro, con una velocidad de descenso de 1,2 m/s, teniendo en cuenta que entre el motor y la polea existe una caja de engranajes con una desmultiplicación de velocidad de relación 10:1 y se supone que la caja tiene un rendimiento unidad.

Resp.: a) $R_{a2} = 0,152 \Omega$; b) $R_{a2} = 0,14 \Omega$; c) $R_{a2} = 1,39 \Omega$

4.51. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 230/400 V, 50 Hz con rotor en jaula de ardilla tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R'_2 = 0,2 \Omega$; $X_1 = X'_2 = 0,6 \Omega$; se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y se consideran nulas las pérdidas mecánicas. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Determinar

- El par de arranque del motor y calcular la velocidad a la que girará finalmente la máquina si arrastra una carga cuyo par resistente es constante y de valor 150 $N \cdot m$.
- En el caso anterior, la corriente absorbida de la red y su factor de potencia, la potencia mecánica desarrollada por el motor y el rendimiento de la máquina.
- Si se dispone de un arrancador electrónico de modo que la tensión y la frecuencia que produce es la mitad que la nominal (es decir, U_1 (línea) = 190 V, $f_1 = 25$ Hz), ¿cuál será el valor del par de arranque de la máquina?

Resp.: a) 191 $N \cdot m$; 979,3 r/min; b) 23,25 A; f.d.p. 0,993; 15,34 kW; 95,9%; c) 293,8 $N \cdot m$

4.52. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 400/690 V, 50 Hz con rotor devanado o con anillos deslizantes, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 0,4 \Omega$; $R'_2 = 0,6 \Omega$; $X_{1c} = X'_2 = 5 \Omega$; $r_m \approx r_H \approx 2$. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y en el hierro (es decir, se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente). La red de alimentación tiene 400 V de línea y 50 Hz.

- El motor se conecta en triángulo y se arranca en directo (con los anillos en cortocircuito) moviendo un par resistente constante de 100 $N \cdot m$. Calcular la velocidad a la que girará el motor, potencia mecánica desarrollada y rendimiento en estas condiciones.

400 V de línea, 50 Hz se observa que la corriente de arranque de línea en directo (es decir, la corriente absorbida de la red y con los anillos deslizantes en cortocircuito) es de 442,4 A; se sabe además que el motor desarrolla su par máximo a 1050 r/min.

- Dibujar la caja de bornes del motor, señalando las letras de identificación de los terminales y la disposición correcta de los puentes de conexión;
- Hallar los valores R_2' y X_2' del circuito equivalente.
- Si el motor mueve un par resistente constante de 250 N · m, con los anillos deslizantes cortocircuitados, calcular la velocidad a la que girará el rotor, la potencia mecánica desarrollada y el rendimiento del motor;
- Determinar el par de arranque del motor con los anillos deslizantes cortocircuitados y la resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que pueda arrancar una carga con un par resistente constante de 700 N · m. Se sabe que $r_{\text{ro}} = r_{\text{ri}} = 1$.
- Si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque, ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente anterior de 700 N · m?

Resp. a) Triángulo; b) $R_2' = 0,45 \Omega$; $X_2' = 1,5 \Omega$; c) 1443,9 r/min; 37,8 kW; 96,3%; d) 560,7 N · m; 0,15 Ω ; e) 1261,5 r/min

4.56. Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 19 kW, 4 polos, 230/400 V, 50 Hz con rotor devanado o con anillos. Se considera despreciable la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$) y se pueden despreciar la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas del motor. Se conecta el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz. Se sabe que con los anillos cortocircuitados (es decir, la resistencia del reóstato de arranque en ese momento es cero), las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo (con el deslizamiento de par máximo) son 8 veces las que tiene cuando gira con un deslizamiento del 3%. Calcular:

- La velocidad del motor con par máximo.
- La corriente que absorbe el motor de la red cuando trabaja a plena carga (es decir, cuando suministra la potencia mecánica nominal de 19 kW, si se sabe que en estas condiciones el deslizamiento es del 3%), el par de plena carga y el rendimiento del motor en estas condiciones.
- La resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que la corriente de arranque no sea superior al triple de la corriente de plena carga. Se sabe que $r_{\text{ro}} = r_{\text{ri}} = 2$.
- Si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque, ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al nominal? ¿Qué corriente absorberá el motor de la red en estas condiciones?

Resp. a) 1326 r/min; b) Se deben calcular primeramente los valores: $R_2' = 0,23 \Omega$; $X_2' = 1,98 \Omega$; 29,2 A; 126,7 N · m; 97%; c) 0,38 Ω ; d) 1152 r/min; 29,6 A

4.57. Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 400/690 V, 50 Hz, con un rotor devanado o con anillos, en el que se considera insignificante la impedancia del estator ($R_1 = X_1 = 0$) y se pueden despreciar tanto la rama paralelo del circuito equivalente como las pérdidas mecánicas del motor. Al conectar el motor correctamente a una red trifásica de 400 V de línea, 50 Hz, se observa que la corriente de arranque de línea en directo (es decir, la corriente absorbida de la red y con los anillos deslizantes en cortocircuito) es de 442,4 A. Se sabe además que el motor desarrolla su par máximo a 1050 r/min.

- Dibujar la caja de bornes del motor, señalando las letras de identificación de los terminales y la disposición correcta de los puentes de unión para que el motor se pueda conectar a la red de 400 V de línea.
- Hallar los valores R_2' y X_2' del circuito equivalente.
- Si el motor mueve un par resistente constante de 250 N · m, con los anillos deslizantes cortocircuitados, calcular la velocidad a la que girará el rotor, potencia mecánica desarrollada y el rendimiento del motor.

- d) Determinar el par de arranque del motor con los anillos deslizantes cortocircuitados y resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que pueda arrancar una carga con un par resistente constante de 700 N.m. Se sabe que $r_{ra} = r_{ri} = 0,75$.

Resp. a) Triángulo; b) $R'_2 = 0,45 \Omega$; $X'_2 = 1,5 \Omega$;
c) 1445 r/min; 37,8 kW; 97,3%; d) 560,7 N · m; 0,26 Ω

- 4.58. Un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla de 45 kW, 400/690 V; 970 r/min; 50 Hz tiene un rendimiento a plena carga del 93% y un f.d.p. a plena carga de 0,87. La corriente de arranque en directo es seis veces la de plena carga y el par de arranque correspondiente es 2,2 veces el de plena carga. Calcular la corriente de arranque y el par correspondiente si el motor se arranca mediante un autotransformador. con una tensión inicial del 75% de la nominal.

Resp. 271 A; 548,2 N · m

- 4.59. Se dispone de un motor asíncrono trifásico de jaula de ardilla conectado en estrella de 2 polos, 50 Hz, que tiene una velocidad de 2910 r/min cuando se alimenta por su tensión compuesta asignada de 3000 voltios. Los ensayos con rotor libre han dado las siguientes medidas: U_1 (línea) = 3000 V; I_0 (línea) = 20 A, P_0 (total) = 30 kW; además, los ensayos a rotor bloqueado han dado los siguientes valores: U_{1cc} (línea) = 500 V; I_{1cc} (línea) = 120 A, P_{cc} (total) = 36 kW. Las pérdidas mecánicas a la velocidad de régimen asignada son de 3 kW y la resistencia medida entre dos terminales del estátor con el tercero abierto, es de 0,8 Ω . Calcular:

- El circuito equivalente aproximado por fase del motor reducido al estátor.
- La corriente absorbida por el motor, su factor de potencia y la potencia eléctrica absorbida de la red, cuando el motor se alimenta a la tensión asignada de 3000 voltios de línea y el rotor se mueve a la velocidad asignada de 2910 r/min.
- La potencia mecánica desarrollada por el motor, el par producido y el rendimiento de la máquina, en el caso anterior.

Resp. a) $R_{Fe} = 300 \Omega$; $X_{\mu} = 90,5 \Omega$; $R_1 = 0,4 \Omega$; $R'_2 = 0,432 \Omega$; $X_{cc} = 2,26 \Omega$;
b) $I_1 = 125,5$ A, 0,988; 644,3 kW; c) 557,7 kW; 1830 N·m; 86,6%

- 4.60. En una industria se dispone de un motor asíncrono trifásico de 600 kW, 1730/3000 V conectado en estrella, de 10 polos, 50 Hz. Se ha realizado un ensayo del motor anterior a rotor libre (vacío) dando los siguientes valores: U_1 (línea) = 3000 V; I_0 (línea) = 38 A; P_0 (total) = 40 kW. Se sabe, además, que las pérdidas mecánicas son despreciables y que la resistencia medida entre dos terminales del estátor con el tercero desconectado es de 0,2 Ω . En un ensayo con el rotor bloqueado se han obtenido los siguientes resultados: U_{1cc} (línea) = 600 V; I_{1cc} (línea) = 200 A; P_{cc} (total) = 50 kW. Este motor está alimentado por un transformador trifásico Yy0, 30000/3000 V, que tiene una impedancia total por fase reducida al secundario de $0,03 + j0,3 \Omega$, siendo despreciable la corriente de vacío. Se desea saber:

- El circuito equivalente aproximado por fase reducido al estátor del motor asíncrono.
- La potencia mecánica desarrollada por el motor cuando gira a una velocidad de 588 r.p.m. si se aplica al primario del transformador una tensión de 30000 V.
- La tensión compuesta en bornes del motor, el f.d.p. con el que trabaja y su rendimiento, en el caso anterior.
- La potencia activa absorbida por el conjunto transformador-motor y el rendimiento de la instalación.

Nota: desprecíense las pérdidas en el cobre del estátor en el ensayo de vacío del motor.

Resp. a) $R_{Fe} = 228 \Omega$; $X_{\mu} = 46,5 \Omega$; $R_1 = 0,1 \Omega$; $R'_2 = 0,316 \Omega$; $X_{cc} = 1,68 \Omega$; b) $P_{mi} \approx 532,4$ kW;
c) $U_{1motor} = 2967$ V; f.d.p. = 0,922; $\eta = 90,8\%$; d) $P_1 = 587,2$ kW; $\eta = 90,67\%$

Máquinas síncronas

Contenido

- 5.1. Fuerza electromotriz de un alternador
 - 5.2. Regulación de tensión de un alternador
 - 5.3. Análisis lineal de la máquina síncrona. Método de la impedancia síncrona
 - 5.4. Análisis no lineal de la máquina síncrona. Método de Potier
 - 5.5. Regulación de tensión en las máquinas síncronas de polos salientes. Teoría de las dos reacciones
 - 5.6. Máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita
 - 5.7. Funcionamiento en paralelo de alternadores alimentando una impedancia de carga
 - 5.8. Motor síncrono
 - 5.9. Transitorio de cortocircuito de una máquina síncrona
- Ejercicios resueltos
Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

5.1. Fuerza electromotriz de un alternador

a) F.e.m. media generada por una bobina de N espiras

$$E_{med} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(-N \frac{d\phi}{dt} \right) dt \quad (5.1)$$

E_{med} :	f.e.m. media;
T :	periodo;
N :	número de espiras;
ϕ :	flujo magnético.

b) F.e.m. eficaz generada por una bobina de N espiras

$$E = 4,44 k_f k_d k_p N \phi_m \quad (5.2)$$

E :	f.e.m. eficaz;
k_f :	factor de forma;
k_d :	factor de distribución;
k_p :	factor de paso o acortamiento;
N :	número de espiras;
ϕ_m :	flujo magnético máximo.

5.2. Regulación de la tensión de un alternador

a) Ecuación de la f.e.m.

$$\underline{E}_r = \underline{U} + R\underline{I} + jX_\sigma \underline{I} \quad (5.3)$$

\underline{E}_r :	f.e.m. resultante por fase;
\underline{U} :	tensión por fase en los bornes del generador;
R :	resistencia por fase;
X_σ :	reactancia de dispersión por fase;
\underline{I} :	corriente del inducido.

b) F.m.m. del alternador

$$\underline{F}_{mr} = \underline{F}_{me} + \underline{F}_{mi} \quad (5.4)$$

\underline{F}_{mr} :	f.m.m. resultante;
\underline{F}_{me} :	f.m.m. total de excitación;
\underline{F}_{mi} :	f.m.m. de reacción del inducido.

c) Regulación de la tensión del alternador

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} \cdot 100\% \quad (5.5)$$

E_0 : f.e.m. en vacío producida por la f.m.m. total de excitación F_{me} ;
 U : tensión en los bornes del generador.

5.3.

Análisis lineal de la máquina síncrona. Método de la impedancia síncrona

a) Ecuación de la f.e.m. resultante

$$\underline{E}_r = \underline{E}_0 + \underline{E}_p = \underline{E}_0 - jX_p \underline{I} \quad (5.6)$$

\underline{E}_r : f.e.m. resultante por fase;
 \underline{E}_0 : f.e.m. total por fase;
 \underline{E}_p : f.e.m. de reacción de inducido;
 X_p : reactancia de reacción de inducido;
 \underline{I} : corriente del inducido.

Nota: la f.m.m. de reacción de inducido se sustituye por la caída de tensión en la reactancia X_p .

b) Ecuación de la f.e.m. de vacío

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + R\underline{I} + jX_\sigma \underline{I} + jX_p \underline{I} \quad (5.7)$$

\underline{E}_0 : f.e.m. en vacío por fase;
 \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
 R : resistencia del inducido por fase;
 X_σ : reactancia de dispersión por fase;
 X_p : reactancia de reacción de inducido por fase;
 \underline{I} : corriente del inducido por fase.

c) Reactancia síncrona. Impedancia síncrona

$$X_s = X_p + X_\sigma \quad ; \quad \underline{Z}_s = R + jX_s \quad (5.8)$$

R : resistencia del inducido por fase;
 X_s : reactancia síncrona por fase;
 X_σ : reactancia de dispersión por fase;
 X_p : reactancia de reacción de inducido por fase.

d) Impedancia base

$$Z_b = \frac{U_N}{I_N} \tag{5.9}$$

U_N : tensión asignada por fase;
 I_N : corriente asignada por fase.

e) Valores por unidad

$$R \text{ (p.u.)} = \frac{R}{Z_b}; X_s \text{ (p.u.)} = \frac{X_s}{Z_b} \tag{5.10}$$

f) Determinación de la impedancia síncrona saturada

$$Z_s = \frac{E_0}{I_{\text{corto}}} \tag{5.11}$$

Z_s : impedancia síncrona por fase;
 E_0 : f.e.m. por fase del ensayo de vacío;
 I_{corto} : corriente de cortocircuito por fase.

Nota: se toma $E_0 = U_N$ (tensión asignada) en la curva de vacío y se señala la corriente de excitación necesaria. A continuación, con esta corriente de excitación se observa la corriente de cortocircuito que origina utilizando la característica de cortocircuito.

g) Determinación de la reactancia síncrona

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R^2} \tag{5.12}$$

Z_s : impedancia síncrona por fase;
 R : resistencia del inducido por fase;
 X_s : reactancia síncrona por fase.

5.4. Análisis no lineal de la máquina síncrona. Método de Potier

a) Ecuación de la f.e.m

$$\underline{E}_r = \underline{U} + R\underline{I} + jX_\sigma \underline{I} \tag{5.13}$$

\underline{E}_r : f.e.m. resultante por fase;
 \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
 R : resistencia por fase;
 X_σ : reactancia de dispersión por fase;
 \underline{I} : corriente del inducido.

Nota: La caída de tensión en la reactancia de dispersión $X_a I$ se determina construyendo el triángulo de Potier a la tensión de funcionamiento; la base del triángulo se obtiene del ensayo de cortocircuito como f.m.m. necesaria para producir la corriente asignada en cortocircuito y el vértice derecho del triángulo se debe apoyar en la curva reactiva a la tensión de funcionamiento. Al trazar una paralela desde el vértice del triángulo de Potier a la recta de entrehierro se obtiene un punto de corte con la curva de vacío; la distancia desde este punto de corte a la base del triángulo de Potier nos da el valor de la caída de tensión en la reactancia de dispersión del alternador, teniendo en cuenta la saturación de la máquina.

b) Ecuación de las f.m.m. del alternador

$$\underline{F}_{mr} = \underline{F}_{mc} + \underline{F}_{mi} \quad (5.14)$$



- \underline{F}_{mr} : f.m.m. resultante;
 \underline{F}_{mc} : f.m.m. total de excitación;
 \underline{F}_{mi} : f.m.m. de reacción del inducido.

Nota: la f.m.m. de reacción de inducido se determina construyendo el triángulo de Potier a la tensión de funcionamiento; la base del triángulo se obtiene del ensayo de cortocircuito como f.m.m. necesaria para producir la corriente asignada en cortocircuito, el vértice derecho del triángulo se debe apoyar en la curva reactiva a la tensión de funcionamiento. Al trazar una paralela desde el vértice del triángulo de Potier a la recta de entrehierro se obtiene un punto de corte con la curva de vacío; trazando a continuación desde este punto una perpendicular a la base del triángulo de Potier, se obtiene un punto cuya distancia horizontal a la curva reactiva nos da el valor de la f.m.m. de reacción de inducido \underline{F}_{mi} .

c) Regulación de la tensión del alternador

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} \cdot 100 \% \quad (5.15)$$

- E_0 : f.e.m. en vacío producida por la f.m.m. total de excitación F_{mc} ;
 U : tensión en los bornes del generador.

5.5.

Regulación de la tensión en las máquinas síncronas de polos salientes. Teoría de las dos reacciones

a) Ecuación de la f.e.m. y de las corrientes

$$\underline{E}_t = \underline{U} + R\underline{I} + jX_a \underline{I} + jX_{pd} \underline{I}_d + jX_{pq} \underline{I}_q, \quad \underline{I} = \underline{I}_d + \underline{I}_q \quad (5.16)$$

- \underline{E}_t : f.e.m. de vacío por fase;
 \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
 R : resistencia por fase;
 X_a : reactancia de dispersión por fase;
 \underline{I} : corriente del inducido;
 \underline{I}_d : corriente en el eje directo;
 \underline{I}_q : corriente en el eje cuadratura;
 X_{pd} : reactancia de reacción de inducido en el eje directo;
 X_{pq} : reactancia de reacción de inducido en el eje cuadratura.

b) Reactancias síncronas de eje directo y cuadratura

$$X_d = X_\sigma + X_{pd} \quad ; \quad X_q = X_\sigma + X_{pq} \quad (5.17)$$

- X_d : reactancia síncrona de eje directo;
- X_q : reactancia síncrona de eje cuadratura.

c) Ecuación de la f.e.m. en función de las reactancias síncronas de eje directo y cuadratura (resistencia del inducido despreciable)

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_d \underline{I}_d + jX_q \underline{I}_q \quad (5.18)$$

- \underline{E}_0 : f.e.m. de vacío por fase;
- \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
- \underline{I}_d : corriente en el eje directo;
- \underline{I}_q : corriente en el eje cuadratura;
- X_d : reactancia síncrona en el eje directo;
- X_q : reactancia síncrona en el eje cuadratura.

d) Ecuación de la f.e.m. para determinar la alineación de la f.e.m. de vacío

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_q \underline{I} + j(X_d - X_q) \underline{I}_d \quad (5.19)$$

- \underline{E}_0 : f.e.m. de vacío por fase;
- \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
- \underline{I}_d : corriente en el eje directo;
- \underline{I}_q : corriente en el eje cuadratura;
- X_d : reactancia síncrona en el eje directo;
- X_q : reactancia síncrona en el eje cuadratura.

5.6. Máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita

a) Ecuación de la f.e.m. para máquinas de polos lisos

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + \underline{Z}_s \underline{I} \quad (5.20)$$

- \underline{E}_0 : f.e.m. de vacío por fase;
- \underline{U} : tensión por fase en los bornes del generador;
- \underline{I} : corriente del inducido;
- $\underline{Z}_s = R + jX_s$: impedancia síncrona.

b) Potencia activa suministrada por un generador de polos lisos

$$P = 3UI \cos \varphi = 3 \frac{(E_0 U \cos \delta - U^2) R + E_0 U X_s \sin \delta}{Z_s^2} = 3 \left[\frac{E_0 U}{Z_s} \sin(\delta + \alpha) - \frac{U^2}{Z_s} \sin \alpha \right] \quad (5.21)$$

- E_0 : f.e.m. de vacío por fase;
 U : tensión por fase en los bornes del generador;
 I : corriente del inducido; $\cos\varphi$: f.d.p.;
 $Z_s = R + jX_s$: impedancia síncrona;
 $\alpha = \arctg(R/X_s)$;
 δ : ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con U).

Nota: en el caso en que se desprecie la resistencia del inducido, la ecuación equivalente a (5.21) es la siguiente:

$$P = 3UI \cos \varphi = 3 \frac{E_0 U}{X_s} \sin \delta \quad (5.22)$$

c) Potencia reactiva suministrada por un generador de polos lisos

$$Q = 3UI \sin \varphi = 3 \frac{(E_0 U \cos \delta - U^2) X_s - E_0 U R \sin \delta}{Z_s^2} = 3 \left[\frac{E_0 U}{Z_s} \cos(\delta + \alpha) - \frac{U^2}{Z_s} \cos \alpha \right] \quad (5.23)$$

Nota: en el caso en que se desprecie la resistencia del inducido, la ecuación equivalente a (5.23) es la siguiente:

$$Q = 3UI \sin \varphi = 3 \frac{E_0 U \cos \delta - U^2}{X_s} \quad (5.24)$$

d) Ecuación de la f.e.m. para un alternador de polos salientes (resistencia del inducido despreciable)

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_d I_d + jX_q I_q \quad (5.25)$$

- E_0 : f.e.m. de vacío por fase;
 U : tensión por fase en los bornes del generador;
 I_d : corriente en el eje directo;
 I_q : corriente en el eje cuadratura;
 X_d : reactancia síncrona en el eje directo;
 X_q : reactancia síncrona en el eje cuadratura.

e) Potencia activa suministrada por un generador de polos salientes

$$P = 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \sin \delta + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \right] \quad (5.26)$$

- E_0 : f.e.m. de vacío por fase;
 U : tensión por fase en los bornes del generador;
 δ : ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con U);
 X_d : reactancia síncrona en el eje directo;
 X_q : reactancia síncrona en el eje cuadratura.

f) Potencia reactiva suministrada por un generador de polos salientes

$$Q = 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \sin \delta - U^2 \left(\frac{\sin^2 \delta}{X_q} + \frac{\cos^2 \delta}{X_d} \right) \right] \quad (5.27)$$

5.7. Funcionamiento en paralelo de alternadores alimentando una impedancia de carga

a) Corrientes suministradas

$$I_1 = \frac{(E_1 - E_2)Z_1 + E_1 Z_2}{Z_L(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}; \quad I_2 = \frac{(E_2 - E_1)Z_1 + E_2 Z_2}{Z_L(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2} \quad (5.28)$$

- E_1 : f.e.m. de vacío del primer alternador;
 E_2 : f.e.m. de vacío del segundo alternador;
 Z_1 : impedancia síncrona del primer generador;
 Z_2 : impedancia síncrona del segundo generador;
 Z_L : impedancia de la carga.

b) Tensión en la barra común

$$\underline{U} = Z_L (I_1 + I_2) = Z_L \frac{E_1 Z_2 + E_2 Z_1}{Z_L (Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2} \quad (5.29)$$

c) Corriente de sincronización

$$I_s = Z_L \frac{E_1 - E_2}{Z_L (Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2} \quad (5.30)$$

5.8. Motor síncrono

a) Velocidad de sincronismo

$$n = n_s = \frac{60f}{p} \quad (5.31)$$

b) Ecuación de la f.e.m. para motores de polos lisos

$$\underline{U} = \underline{E}_0 + \underline{Z}_s \underline{I} \quad (5.32)$$

c) Ecuación de la f.e.m. para un motor de polos salientes

$$\underline{U} = \underline{E}_0 + R\underline{I} + jX_d\underline{I}_d + jX_q\underline{I}_q \quad (5.33)$$

d) Par motor para máquinas de polos lisos

$$T = \frac{3E_0U}{\Omega_s X_s} \sin \delta \quad (5.34)$$

- T : par;
 E_0 : f.e.m. de vacío por fase;
 U : tensión por fase en los bornes del generador;
 δ : ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con U);
 X_s : reactancia síncrona;
 Ω_s : velocidad angular de sincronismo.

e) Par motor para máquinas de polos salientes

$$T = 3 \left[\frac{E_0U}{\Omega_s X_d} \sin \delta + \frac{U^2}{2\Omega_s} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \right] \quad (5.35)$$

- T : par;
 E_0 : f.e.m. de vacío por fase;
 U : tensión por fase en los bornes del generador;
 δ : ángulo de carga (ángulo que forman E_0 con U);
 X_d : reactancia síncrona en el eje directo;
 X_q : reactancia síncrona en el eje cuadratura;
 Ω_s : velocidad angular de sincronismo.

5.9. Transitorio de cortocircuito de una máquina síncrona

a) Corriente instantánea de cortocircuito

$$i_{\text{corto}}(t) = (I'' - I')e^{-t/T} + (I - I_{\text{corto}})e^{-t/T} + I_{\text{corto}} \quad (5.36)$$

- I_{corto} : corriente permanente de cortocircuito;
 I' : corriente transitoria de cortocircuito;
 I'' : corriente subtransitoria de cortocircuito.

b) Componentes de la corriente instantánea de cortocircuito

$$I_{\text{corto}} = \frac{E_0}{X_s}; I' = \frac{E_0}{X'_s}; I'' = \frac{E_0}{X''_s} \quad (5.37)$$

- X_s : reactancia síncrona;
 X'_s : reactancia síncrona transitoria;
 X''_s : reactancia síncrona subtransitoria.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1.** Un alternador trifásico de 6 polos, 1000 r/min, tiene un estátor de 54 ranuras sobre el que se sitúa un devanado de paso diámetro, l que contiene 10 conductores/ranura. Si el flujo por polo es de 0,02 Wb y de forma sinusoidal, determinar la f.e.m. inducida por fase.

Solución

La f.e.m. inducida por fase en un alternador, que tiene un número de espiras por fase N , un flujo máximo por polo Φ_m , y una frecuencia f , siendo los factores de forma, distribución y acortamiento o de paso, respectivamente: k_f , k_d y k_p , responde a la siguiente expresión:

$$E = 4k_f k_d k_p f N \Phi_m$$

Como quiera que la f.e.m. es sinusoidal, el factor de forma es $k_f = 1,11$. Por otro lado, al tener las bobinas paso diámetro, el coeficiente de paso o acortamiento es $k_p = 1$. El coeficiente de distribución viene expresado por:

$$k_d = \frac{\frac{\text{sen } \frac{q\gamma}{2}}{2}}{q \frac{\text{sen } \frac{\gamma}{2}}{2}}$$

donde γ es el ángulo geométrico entre ranuras consecutivas y que en este caso vale:

$$\gamma = \frac{360}{54} = 6,6^\circ$$

Como quiera que el alternador tiene 54 ranuras ($Q = 54$), 6 polos ($p = 3$), y es trifásico ($m = 3$), el número q de ranuras por polo y fase es:

$$q = \frac{\text{número de ranuras}}{\text{polo y fase}} = \frac{Q}{2 \cdot p \cdot m} = \frac{54}{6 \cdot 3} = \frac{54}{18} = 3$$

por lo que el coeficiente de distribución vale:

$$k_d = \frac{\frac{\text{sen } \frac{3 \cdot 6,6^\circ}{2}}{2}}{3 \frac{\text{sen } \frac{6,6^\circ}{2}}{2}} = \frac{0,5}{3 \cdot 0,1736} = 0,960$$

Teniendo en cuenta que hay 54 ranuras con 10 conductores por ranura y que cada dos conductores se forma una espira, el número total de espiras por fase es:

$$N = \frac{54 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 90$$

por lo que el valor de la f.e.m. inducida por fase es:

$$E = 4,44 \cdot 0,96 \cdot 50 \cdot 90 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 383,6 \text{ V}$$

- 5.2.** Un alternador trifásico de 750 r/min, 50 Hz, está diseñado para generar una f.e.m. de 3500 V/fase. El devanado del estátor tiene 120 ranuras con 24 conductores/ranura y la anchura de las bobinas es de 12 ranuras. Calcular el flujo máximo por polo si su distribución es sinusoidal.

Solución

La f.e.m. inducida es: $E = 4k_r k_d k_p f N \Phi_m$. Como quiera que el alternador gira a 750 r/min y que la frecuencia es de 50Hz, el número de polos se obtiene de la expresión:

$$n = \frac{60f}{p} \Rightarrow p = \frac{60 \cdot 50}{750} = 4 \Rightarrow 2p = 8$$

El número total de ranuras del inducido es $Q = 120$ y al tener la máquina 8 polos, el paso polar vale:

$$\text{paso polar} = \frac{Q}{2p} = \frac{120}{8} = 15$$

Por tanto, si una bobina tiene una anchura de 12 ranuras, existe un acortamiento de paso de tres ranuras. Además, el ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas es igual a:

$$\gamma = \frac{360^\circ}{Q} = \frac{360}{120} = 3^\circ$$

Teniendo en cuenta que las bobinas están acortadas 3 ranuras, el ángulo geométrico de acortamiento es $\alpha = 9^\circ$ y el factor de paso de las bobinas vale, por consiguiente:

$$k_p = \cos \frac{p\alpha}{2} = \cos \frac{4 \cdot 9^\circ}{2} = 0,951$$

Al mismo tiempo, las bobinas están distribuidas en ranuras a lo largo del inducido, siendo el coeficiente de distribución:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{q\gamma}{2}}{q \text{sen} \frac{p\gamma}{2}}$$

en el que el número de ranuras por polo y fase es igual a:

$$q = \frac{Q}{2pm} = \frac{120}{8 \cdot 3} = 5$$

por lo que el coeficiente de distribución es finalmente:

$$k_d = \frac{\text{sen} \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2}}{5 \text{sen} \frac{4 \cdot 3}{2}} = \frac{\text{sen} 30^\circ}{5 \cdot \text{sen} 6^\circ} = \frac{0,5}{5 \cdot 0,105} \approx 0,957$$

Como quiera que el número N de espiras por fase es:

$$N = \frac{120 \text{ ranuras} \cdot 24 \text{ conductores/ranura}}{2 \text{ conductores/espira} \cdot 3 \text{ fases}} = 480$$

llevando los valores anteriores a la expresión de la f.e.m. inducida por fase resulta:

$$E = 4,44 \cdot 0,951 \cdot 0,957 \cdot 480 \cdot 50 \cdot \Phi_m = 3500 \text{ V}$$

de donde se obtiene un flujo máximo por polo:

$$\Phi_m = 0,0361 \text{ Wb}$$

5.3. Un alternador trifásico de 1500 kVA, 6600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{12210 \cdot F_{mc}}{4250 + F_{mc}}$$

donde E_0 se expresa en tensión de línea y F_{mc} representa la f.m.m. de excitación en At/polo. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son $0,6 \Omega$ y $2,3 \Omega$, respectivamente. La f.m.m. de reacción del inducido a plena carga es de 2500 At/polo. Determinar:

- La f.e.m. E_r de línea a plena carga y con f.d.p. 0,8 inductivo.
- La corriente de excitación necesaria en el inductor cuando la máquina está girando a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo, si se sabe además que la máquina tiene polos salientes devanados, con 190 espiras cada uno.
- Si en la situación del apartado anterior se desconecta repentinamente la carga ¿cuál será el valor de la tensión de línea que aparecerá en bornes de la máquina?
- ¿Cuánto vale la regulación de la tensión de la máquina?

Solución

a) La f.e.m. E_r inducida por fase se obtiene sumando a la tensión terminal por fase, la caída de tensión en la resistencia del devanado y en la reactancia de dispersión del mismo, lo que da lugar a:

$$E_r = \underline{U} + (R + jX_s) \cdot \underline{I} = \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,6 + j2,3) \cdot 131,22 \angle -36,87^\circ = 4059,83 \angle 2,74^\circ \text{ V}$$

donde se ha tenido en cuenta que la corriente de línea de plena carga es:

$$I = \frac{1500000}{\sqrt{3} \cdot 6600} = 131,22 \text{ A, con f.d.p. 0,8 inductivo}$$

La f.e.m. de línea es por consiguiente: $E_r(\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 4059,23 = 7030,8 \text{ V}$.

b) De la curva de vacío del alternador se obtiene la f.m.m. resultante:

$$E = 7030,8 = \frac{12210 F_{mr}}{4250 + F_{mr}} \Rightarrow F_{mr} = 5769,4 \text{ At/polo}$$

La f.m.m. anterior se adelanta 90° a la f.e.m. resultante E_r , tal como se muestra en composición fasorial de la Figura 5.1. La expresión fasorial de esta f.m.m. es:

$$\underline{F}_{mr} = 5769,4 \angle (90^\circ + 2,74^\circ) = 5769,4 \angle 92,74^\circ \text{ At / polo}$$

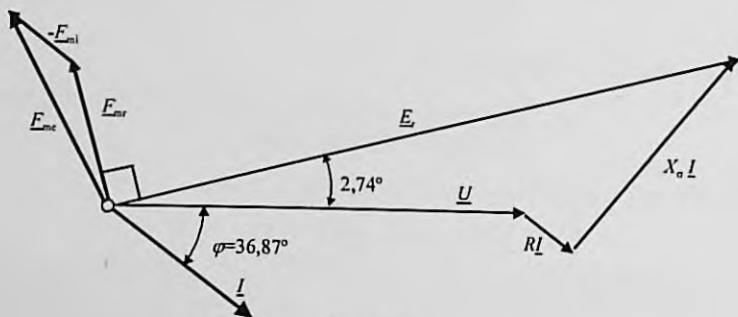


Figura 5.1

Como quiera que la f.m.m. de reacción de inducido es de 2 500 At/polo y que debe ir en fase con la corriente del inducido, se tiene:

$$\underline{F}_{m2} = 2\,500 \angle 36,87^\circ \text{ At/polo}$$

La f.m.m. de excitación es:

$$\underline{F}_{m1} = \underline{F}_{m2} - \underline{F}_{m3} = 5769,4 \angle 92,74^\circ - 2\,500 \angle -36,87^\circ = 7\,611 \angle 107,4^\circ \text{ At/polo}$$

Teniendo en cuenta que cada polo tiene 190 espiras, corresponde a una corriente de excitación:

$$I_c = \frac{F_{m1}}{N_c} = \frac{7\,611}{190} \approx 40 \text{ A}$$

c) Si con la corriente anterior se desconecta repentinamente la carga, la f.e.m. de línea que se obtendrá en los terminales se deduce de la curva de vacío, lo que da lugar a:

$$E_0 = \frac{12\,210 \cdot 7\,611}{4\,250 + 7\,611} = 7\,834,95 \approx 7\,835 \text{ V}$$

d) La regulación de la tensión del alternador será:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{7\,835 - 6\,600}{6\,600} = 18,71\%$$

5.4. Un alternador trifásico de 5000 kVA, 6600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{7\,400 I_c}{85 + I_c}$$

donde E_0 se expresa en voltios por fase e I_c representa la corriente de excitación. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son $0,2 \Omega$ y 1Ω , respectivamente. La f.m.m. de reacción del inducido es equivalente a una corriente de excitación de 20 A. Calcular:

- El rango de excitación necesario para dar la tensión asignada de 6600 V desde vacío a la plena carga con f.d.p. 0,6 inductivo.
- El rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,6, si las pérdidas en el hierro, por fricción y rozamiento con el aire ascienden a un total de 100 kW y las bobinas de campo están alimentadas con una excitatriz a 200 V.

Solución

a) La tensión entre terminales en vacío es la f.e.m.:

$$E_0 = U \text{ (por fase)} = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} = 3\,810,5 \text{ V} = \frac{7\,400 I_c}{85 + I_c}$$

lo que requiere una corriente de excitación $I_c = 90,23 \text{ A}$. En carga la corriente asignada vale:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} U} = \frac{5\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 437,39 \text{ A}$$

y por consiguiente, para producir la tensión asignada con la corriente de plena carga anterior con f.d.p. 0,6 inductivo, se requiere una f.e.m. resultante:

$$E_r = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,2 + j 1) \cdot 437,39 \angle -53,13^\circ = 4\,217,3 \angle 2,62^\circ \text{ V}$$

por lo que al llevar a la curva de vacío del alternador, se necesita una corriente:

$$4217,3 = \frac{7400I_r}{85 + I_r} \Rightarrow I_r = 112,63 \text{ A}$$

La corriente anterior (realmente la f.m.m. correspondiente) está adelantada 90° respecto a la f.e.m. E_r y por tanto, su expresión fasorial es:

$$\underline{I}_r = 112,63 \angle (2,62^\circ + 90^\circ) = 112,63 \angle 92,62^\circ \text{ A}$$

De este modo, la corriente total de excitación del inductor será:

$$\underline{I}_e = \underline{I}_r - \underline{I}_l = 112,63 \angle 92,62^\circ - 20 \angle -53,13^\circ = 129,64 \angle 97,6^\circ \text{ A}$$

es decir, el rango de excitación necesario oscila entre 90,23 A en vacío hasta 129,64 A a plena carga.

b) La potencia útil del alternador es:

$$P_u = S_N \cdot \cos \varphi = 5000 \cdot 0,6 = 3000 \text{ kW}$$

Las pérdidas fijas (hierro más mecánicas) y de la excitación (cobre de inductor) son respectivamente:

$$P_{Fe} + P_{fw} = 100 \text{ kW} ; P_{exc} = UI_e = 200 \cdot 129,6 = 25,92 \text{ kW}$$

y las pérdidas en el cobre del inducido a plena carga con la corriente I calculada anteriormente valen:

$$P_{cu} = 3RI^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 437,39^2 = 114,8 \text{ kW}$$

por consiguiente la potencia total requerida es:

$$P_T = 3000 + 100 + 25,92 + 114,8 = 3240,72 \text{ kW}$$

y por tanto, el rendimiento vale:

$$\eta = \frac{3000}{3240,72} = 92,57\% \approx 92,6\%$$

5.5. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 4600 V, tiene una impedancia síncrona de $2 + j20 \Omega$ /fase. Determinar la regulación a plena carga con factores de potencia:

- Unidad.
- 0,75 inductivo.

Solución

a) La corriente de plena carga del alternador vale:

$$I = \frac{1000000}{\sqrt{3} \cdot 4600} = 125,5 \text{ A}$$

por lo que la f.e.m. necesaria por fase para un f.d.p. unidad es:

$$E_0 = \frac{4600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (2 + j20) \cdot 125,5 \angle 0^\circ = 3840,51 \angle 40,81^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un valor de línea E_0 (línea) = $\sqrt{3} \cdot 3840,51 \approx 6651,95 \text{ V}$ y a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{6651,95 - 4600}{4600} = 44,61\%$$

b) De un modo similar, cuando el f.d.p. es 0,75 inductivo, se tiene:

$$\underline{E}_0 = \frac{4\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (2 + j\,20) \cdot 125,5 \angle -41,41^\circ = 4\,820,24 \angle 20,86^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un valor de línea E_0 (línea) = $4\,820,24\sqrt{3} = 8\,348,9 \text{ V}$ y a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{8\,348,9 - 4\,600}{4\,600} = 81,5\%$$

5.6. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6 600 V, tiene una impedancia síncrona de $0,4 + j\,6 \, \Omega$ /fase. Calcular la regulación de la máquina cuando suministra una potencia de 1 000 kW a la tensión asignada con f.d.p.:

- 0,866 inductivo.
- Unidad.
- 0,866 capacitivo.

Solución

a) La corriente de plena carga es igual a:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi} = \frac{1\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot 0,866} = 101,01 \text{ A}$$

y, tomando la tensión de fase como referencia, se requiere una f.e.m. en vacío cuando el f.d.p. es 0,866 inductivo:

$$\underline{E}_0 = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,4 + j\,6) \cdot 101,01 \angle -30^\circ = 4\,179,12 \angle 6,94^\circ \text{ V}$$

Teniendo en cuenta que la tensión por fase es:

$$U = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\,810,51 \angle 0^\circ \text{ V}$$

la regulación correspondiente es:

$$\varepsilon = \frac{4\,179,62 - 3\,810,51}{3\,810,51} = 9,67\%$$

b) Cuando el factor de potencia es la unidad. La corriente vale entonces:

$$I = \frac{1\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot 1} = 87,48 \text{ A} \Rightarrow \underline{I} = 87,48 \angle 0^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. es ahora:

$$\underline{E}_0 = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} + (0,4 + j\,6) \cdot 7,48 \angle 0^\circ = 3\,881,17 \angle 7,8^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una regulación:

$$\varepsilon = \frac{3\,881,17 - 3\,810,51}{3\,810,51} = 1,85\%$$

c) Cuando el f.d.p. es 0,866 capacitivo, la magnitud de la corriente es la misma que en el caso a), pero su expresión fasorial es ahora:

$$\underline{I} = 101,01 \angle 30^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. vale:

$$\underline{E}_0 = \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,4 + j6) \cdot 101,01 \angle 30^\circ = 3584,16 \angle 8,75^\circ \text{ voltios}$$

por lo que la regulación es ahora negativa:

$$\varepsilon = \frac{3584,16 - 3810,51}{3810,51} = -5,94\%$$

5.7. Un alternador trifásico conectado en estrella de 4000 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito:

I_e (A)	10	20	30	40	60	80	100
E_o /fase (V)	960	1920	2800	3440	4220	4600	4800
I_{cc} (A)	232	464	-	-	-	-	-

La resistencia del inducido es despreciable. Calcular:

- La regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo;
- La corriente de excitación necesaria en el caso anterior.

Nota: tómesese como reactancia síncrona la primera aproximación obtenida de los ensayos, es decir la que corresponde a la excitación necesaria para obtener la tensión asignada en vacío.

Solución

a) En la Figura 5.2 se han dibujado tanto la curva de vacío o de f.e.m. del alternador como la recta de cortocircuito. La tensión por fase del alternador es:

$$U = \frac{6600}{\sqrt{3}} = 3810,5 \text{ V}$$

que corresponde, en la curva de vacío, a una corriente de excitación de aproximadamente $I_e = 50$ A. Con esta excitación la corriente del inducido en cortocircuito se observa que es de 1120 A. De este modo, la impedancia síncrona saturada de la máquina síncrona vale:

$$Z_s = X_s = \frac{3810,5}{1120} = 3,40 \Omega$$

Además la corriente de plena carga es:

$$I = \frac{4000000}{\sqrt{3} \cdot 6600} \approx 350 \text{ A}$$

Tomando la tensión simple como referencia de fases, los valores fasoriales de la tensión y la corriente son, respectivamente:

$$\underline{U} = 3810,5 \angle 0^\circ \text{ V} \quad ; \quad \underline{I} = 350 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. en vacío que debe producir el alternador es:

$$\underline{E}_0 = 3810,5 + j3,4 \cdot 350 \angle -36,87^\circ = 4623,6 \angle 11,9^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a un regulación:

$$\varepsilon = \frac{4623,6 - 3810,5}{3810,5} = 21,33\%$$

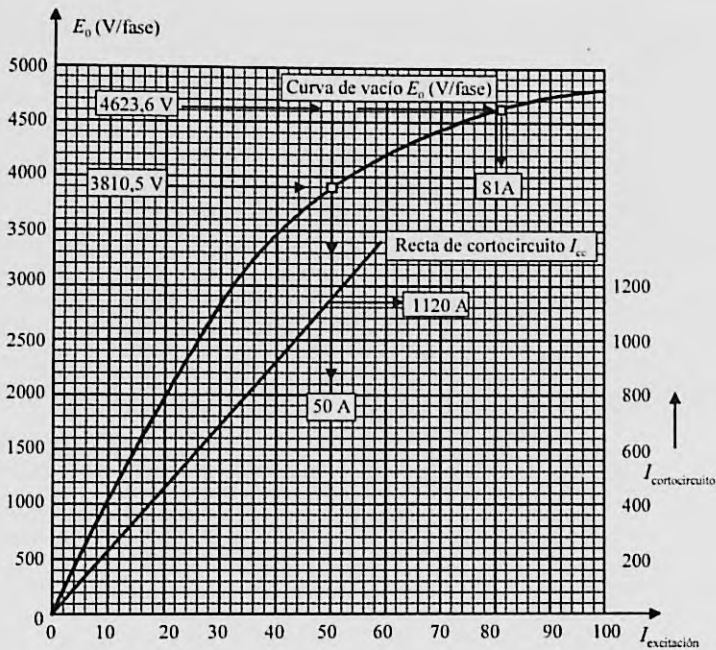


Figura 5.2

b) Para producir la f.e.m. anterior se requiere, de acuerdo con la curva de vacío mostrada en la Figura 5.2, una corriente de excitación de aproximadamente 81 A.

5.8. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

Excitación (At/polo)	2000	3250	4025	5200	6500
E_0 (línea)	4300	6600	7250	7920	8580

Por el método de Potier se ha determinado el valor de la reactancia de dispersión y la f.m.m. de reacción de inducido a plena carga, resultando los valores: $X_\sigma = 3,1 \Omega$; $F_{mi} = 2000$ At/polo. Calcular:

- La f.m.m. de excitación necesaria a plena carga, con f.d.p. 0,8 inductivo.
- La regulación de la tensión.

Solución

a) La corriente de inducido de plena carga es:

$$I = \frac{1\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} \approx 87,5 \text{ A}$$

y tomando la tensión simple como referencia, los valores fasoriales de la tensión y de la corriente son:

$$\underline{U} = \frac{6\ 600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\ 810,5 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = 87,5 \angle -36,87^\circ \text{ amperios}$$

Teniendo en cuenta el valor de la reactancia de dispersión obtenida por el método de Potier, la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_\sigma \underline{I} = 3\ 810,5 + j3,1 \cdot 87,5 \angle -36,87^\circ = 3\ 979,2 \angle 3,1^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E_r (línea) = $3\ 979,2\sqrt{3} \approx 6\ 892 \text{ V}$. Con este valor de f.e.m., la curva de vacío del alternador que se ha representado en la Figura 5.3, nos señala una f.m.m. resultante:

$$F_{mr} = 3\ 600 \text{ At/polo}$$

La f.m.m. anterior va adelantada 90° respecto a la f.e.m. E_r , por lo que su expresión fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 3\ 600 \angle (3,1^\circ + 90^\circ) = 3\ 600 \angle 93,1^\circ \text{ At/polo}$$

Teniendo en cuenta que la f.m.m. de reacción de inducido es de $2\ 000 \text{ At/polo}$ y que va en fase con la corriente del inducido, la f.m.m. de excitación será:

$$\underline{F}_{me} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 3\ 600 \angle 93,1^\circ - 2\ 000 \angle -36,87^\circ \approx 5\ 120 \angle 110,52^\circ \text{ At/polo}$$

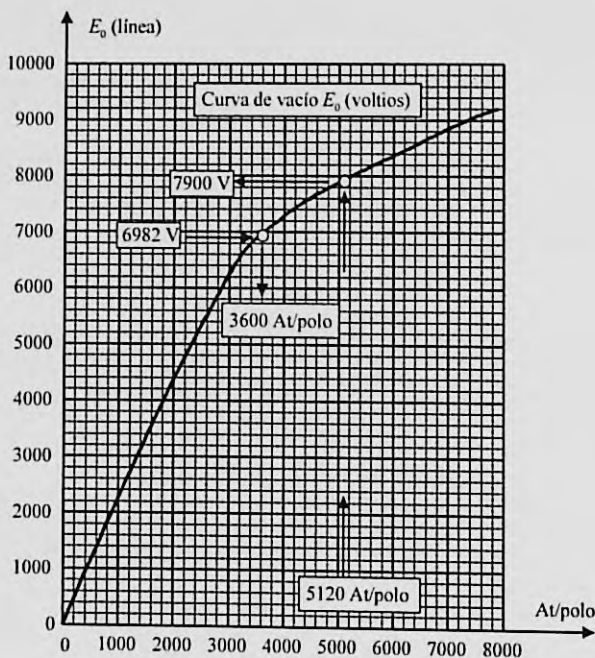


Figura 5.3

b) La f.m.m. anterior produce, de acuerdo con la curva de vacío del alternador, una f.e.m. de línea de $7\ 900 \text{ V}$, por lo que la regulación de la tensión es:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{7\ 900 - 6\ 600}{6\ 600} = 19,7\%$$

5.9. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultando en un ensayo de vacío:

E_0 (V) línea	1848	3696	5511	6600	7128	7590	7986
F_{me} (At/polo)	1000	2000	3500	5000	6000	7000	8000

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga para una excitación de 2500 At/polo. En un ensayo con carga reactiva se necesitan 8250 At/polo para que circule la corriente asignada a la tensión de régimen de 6600 V. Calcular:

- La f.m.m. de excitación necesaria en los polos cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.
- La f.e.m. correspondiente en vacío.
- La regulación de la tensión del alternador en este régimen.

Solución

a) En la Figura 5.4 se ha representado la curva de vacío, de acuerdo con la tabla numérica del enunciado. En este gráfico, el punto A' (situado abajo en el eje de abscisas) corresponde a una f.m.m. de 2500 At/polo, que es el valor de la f.m.m. necesaria para que circule la corriente de plena carga en cortocircuito. El punto A del triángulo de Potier, que se muestra en la parte superior, se obtiene del ensayo con carga inductiva pura (para la corriente de plena carga y con la tensión nominal asignada en los terminales del alternador) y que según el enunciado vale 8250 At/polo. Partiendo de este punto A, se toma la distancia $AD = A'O$, lo que define el punto D y a continuación, se traza una paralela a la recta de entrehierro por este punto, que da lugar a DM. Esta recta corta a la curva de vacío en el punto C. La distancia CB, expresada en valor simple o de fase representa la caída de tensión en la reactancia de dispersión, mientras que el segmento BA nos da la f.m.m. F_{mi} de reacción de inducido. Los valores medidos en esta figura son, aproximadamente:

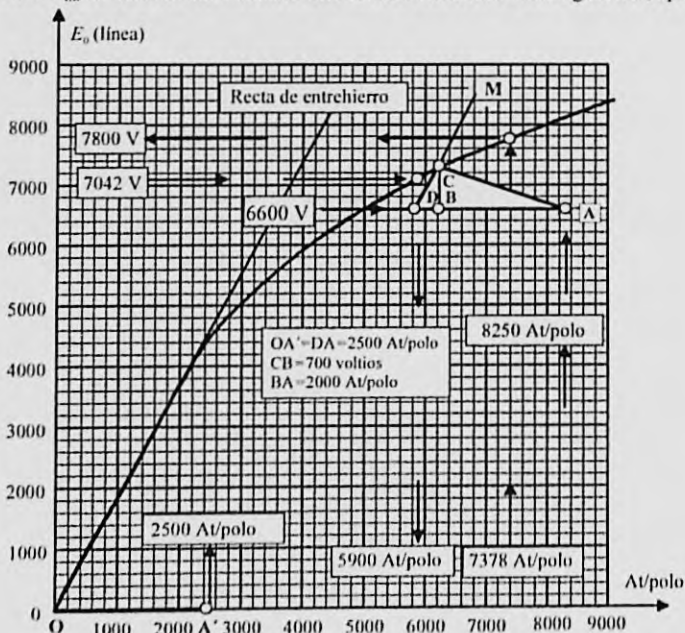


Figura 5.4

Tomando, a continuación, la tensión simple del alternador como referencia y teniendo en cuenta que la corriente de plena carga vale:

$$I = \frac{1\,500\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 131,2 \text{ A}$$

se tiene:

$$\underline{U} = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V/fase}; \quad \underline{I} = 131,2 \angle -36,87^\circ \text{ amperios}$$

y por consiguiente la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_\sigma \underline{I} = 3\,810,5 \angle 0^\circ + 404 \angle 53,13^\circ \approx 4\,066 \angle 4,6^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a un valor de línea $E_r(\text{línea}) = 4\,066\sqrt{3} \approx 7\,042 \text{ V}$. Llevando a la curva de vacío, se observa que para producir esta f.e.m. se requiere una f.m.m. de $F_{mr} = 5\,900 \text{ At/polo}$, cuya fase se adelanta 90° a la f.e.m., por lo que su expresión fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 5\,900 \angle +94,6^\circ \text{ At/polo}$$

Como la f.m.m. de reacción de inducido va en fase con la corriente, su valor es:

$$\underline{F}_{mi} = 2\,000 \angle -36,87^\circ \text{ At/polo}$$

y, por tanto, la f.m.m. total de excitación es:

$$\underline{F}_{mc} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 5\,900 \angle 94,6^\circ - 2\,000 \angle -36,87^\circ \approx 7\,378 \angle 106,3^\circ \text{ At/polo}$$

b) Con el valor de la f.m.m. de $7\,378 \text{ At/polo}$, la curva de vacío señala una f.e.m. compuesta de valor: $E_0 \approx 7\,800 \text{ V}$.

c) En consecuencia, la regulación de la tensión del alternador será:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{7\,800 - 6\,600}{6\,600} \approx 18,2\%$$

5.10 Un alternador trifásico de $1\,000 \text{ kVA}$, $11\,000 \text{ V}$, conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable. Los ensayos de vacío y con carga reactiva pura a la intensidad asignada han dado los siguientes resultados:

$I_a \text{ (A)}$	20	25	55	70	90
$E_0 \text{ (V) (línea)}$	5800	7000	12500	13750	15000
$U \text{ (f.d.p. = 0)}$	0	1400	8500	10500	12400

Determinar por el método de Potier:

- La caída de tensión en la reactancia de dispersión a plena carga.
- La f.m.m. de reacción de inducido con la corriente asignada.
- La f.e.m. resultante E_r cuando la máquina funciona a plena carga con la tensión asignada de $11\,000 \text{ V}$ y f.d.p. $0,8$ inductivo.
- La f.m.m. necesaria en la excitación en el caso anterior.
- La f.e.m. E_0 que producirá en vacío la excitación anterior.
- La regulación de la tensión de la máquina en las condiciones anteriores.

Solución

a y b) En la Figura 5.5 se muestran las construcciones de la curva de vacío del alternador y del f.d.p. nulo, o ensayo con carga reactiva pura. De esta figura se deduce las siguientes magnitudes:

$$X_{\sigma} I = \frac{2200}{\sqrt{3}} \approx 1270 \text{ V/fase}; F_{mi} = 11 \text{ A}$$

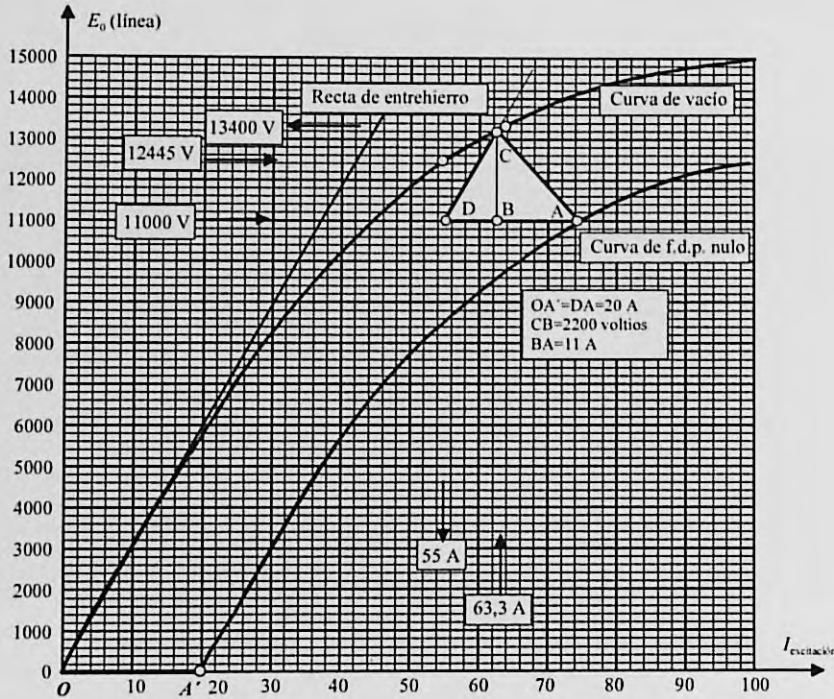


Figura 5.5

c) Tomando la tensión simple del alternador como referencia de fase, se tienen las magnitudes fasoriales siguientes:

$$\underline{U} = \frac{11\,000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 6\,350,8 \angle 0^\circ \text{ voltios} \quad \underline{E}_{mi} = 11 \angle -36,87^\circ \text{ amperios}; \quad \underline{I} = I \angle -36,87^\circ$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_{\sigma} \underline{I} = 6\,350,8 \angle 0^\circ + j 1270 \angle -36,87^\circ \approx 7\,185 \angle 8,1^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea: $E_r (\text{línea}) = 7\,185\sqrt{3} \approx 12\,445 \text{ V}$.

d) Para la f.e.m. anterior se obtiene, en la curva de vacío, una f.m.m. resultante de 55 A y su valor fasorial correspondiente que está adelantado 90° respecto a la f.e.m. resultante vale:

$$\underline{F}_{mr} = 55 \angle 98,1^\circ \text{ A}$$

Es por ello que la f.m.m. de excitación, medida en amperios vale:

$$F_{me} = F_{mr} - F_{mi} = 55 \angle 98,1^\circ - 11 \angle -36,87^\circ \approx 63,3 \angle 105,2^\circ \text{ amperios}$$

es decir, la corriente total de excitación debe ser de 63,3 A.

e) La f.m.m. anterior da lugar, en la curva de vacío del alternador, a una f.e.m. de vacío:

$$E_0 = 13\,400 \text{ V}$$

f) y la regulación será, por tanto:

$$\varepsilon = \frac{13\,400 - 11\,000}{11\,000} = 21,8\%$$

5.11. Un alternador trifásico de 5 000 kVA, 6 600 V, conectado en estrella, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y f.d.p nulo con corriente de plena carga:

F_{me} (At/polo)	3 200	5 000	7 500	10 000	14 000
E_0 (V) (línea)	3 100	4 900	6 600	7 500	8 300
U (f.d.p = 0)	0	1 850	4 250	5 800	7 000

La resistencia del inducido es despreciable. Determinar por el método de Potier:

- La caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido.
- La f.m.m. de reacción de inducido con corriente asignada.
- Repetir los apartados anteriores para una corriente de carga de 500 A.
- Las f.m.m. de excitación necesarias en el inductor cuando la máquina suministra una corriente de 500 A a la tensión asignada, con factores de potencia: unidad, 0,9 capacitivo, 0,71 inductivo.
- En las condiciones del apartado anterior las f.e.m. producidas en vacío.

Solución

a) y b) En la Figura 5.6 se muestran las curvas de vacío y de f.d.p. nulo del mismo. Al construir el triángulo de Potier se obtienen los siguientes resultados:

$$X_\sigma I = \frac{900}{\sqrt{3}} = 519,6 \text{ V}; \quad F_{mi} = 2\,200 \text{ At/polo}$$

c) La corriente asignada de plena carga del alternador es:

$$I = \frac{5\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 437,4 \text{ A}$$

Como quiera que las caídas de tensión en la reactancia de Potier y la f.m.m. de reacción de inducido son proporcionales a la corriente, con una intensidad de 500 A, se tendrán los siguientes resultados:

$$X_\sigma I' = 519,6 \frac{500}{437,4} = 594 \text{ V}; \quad F'_{mi} = F_{mi} \frac{500}{437,4} = 2\,200 \frac{500}{437,4} = 2\,515 \text{ At/polo}$$

d) Tomando la tensión simple de la red como referencia de fases, se tienen los siguientes valores fasoriales de tensión y corriente:

$$\underline{U} = \frac{6600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3810,5 \angle 0^\circ \text{ V} ; \underline{I}' = 500 \angle 0^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_\sigma \underline{I}' = 3810,5 \angle 0^\circ + j594 \angle 0^\circ = 3856,5 \angle 8,9^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea: $E_r(\text{línea}) = 3856,5\sqrt{3} \approx 6680 \text{ V}$. Al llevar este valor a la curva de vacío se obtiene un valor de la f.m.m. de 7700 At/polo, que está adelantada 90° respecto a la f.e.m. por lo que su valor fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 7700 \angle 98,9^\circ \text{ At/polo}$$

De este modo, la f.m.m. de excitación es finalmente:

$$\underline{F}_{mc} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 7700 \angle +98,9^\circ - 2515 \angle 0^\circ = 8462 \angle 116^\circ \text{ At/polo}$$

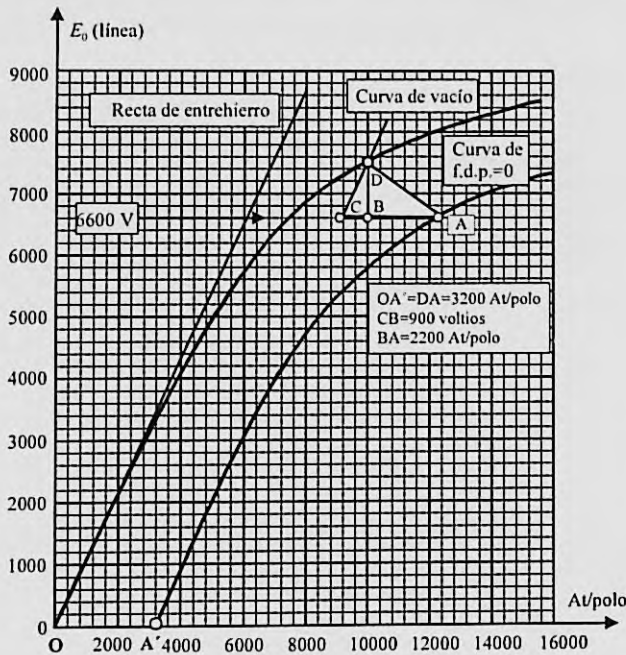


Figura 5.6

En el caso de que el f.d.p. sea 0,9 capacitivo, la corriente de inducido y la f.m.m. de reacción de inducido tienen las formas fasoriales siguientes:

$$\underline{I}' = 500 \angle 25,84^\circ \text{ amperios} \Rightarrow \underline{F}_{mi} = 2515 \angle 25,84^\circ \text{ At/polo}$$

y al tomar la tensión simple de la red como referencia, se tiene una f.e.m. resultante:

$$\underline{E}_r = 3810,5 \angle 0^\circ + j594 \angle 25,84^\circ = 3591,6 \angle 8,6^\circ \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea $E_r(\text{línea}) = 3591,6\sqrt{3} = 6220,8 \text{ V}$. Al llevar este valor a la curva de vacío, la f.m.m. necesaria es $F_{mr} = 6800 \text{ At/polo}$, que en forma fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 6800 \angle 98,6^\circ \text{ At/polo}$$

y a una f.m.m. de excitación:

$$\underline{E}_{mc} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 6800 \angle 98,6^\circ - 2515 \angle 25,84^\circ \approx 6514 \angle 120,2^\circ \text{ At/polo}$$

es decir, se requiere una f.m.m. de 6514 At/polo.

d3) Cuando el f.d.p. es 0,71 inductivo se tiene de una forma similar:

$$\underline{I}' = 500 \angle -44,77^\circ \text{ amperios}; \underline{F}_{mi} = 2515 \angle -44,77^\circ \text{ At/polo}$$

y la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = 3810,5 \angle 0^\circ + j594 \angle -44,77^\circ = 4249,8 \angle 5,7^\circ \text{ voltios}$$

que es una f.e.m. de línea E_r (línea) = $4249,6\sqrt{3} = 7360,8 \text{ V}$. La f.m.m. necesaria resultante, de acuerdo con la curva de vacío de 9600 At/polo, vale en forma fasorial:

$$\underline{F}_{mr} = 9600 \angle 95,7^\circ \text{ At/polo}$$

siendo la f.m.m. de excitación será:

$$\underline{F}_{mr} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 9600 \angle 95,7^\circ - 2515 \angle -44,77^\circ \approx 11650 \angle 103,6^\circ \text{ At/polo}$$

e) Las f.e.m. que se generan en vacío en los casos anteriores se obtienen directamente de las curvas de vacío, entrando con las f.m.m. de excitación. Así resulta:

- 1) Para $\cos \varphi = 1$, resultaba una f.m.m. de 8462 At/polo, que da lugar a una f.e.m. en vacío de 7000 voltios de línea.
- 2) Para $\cos \varphi = 0,9$ capacitivo, resultaba una f.m.m. de 6514 At/polo, que da lugar a una f.e.m. en vacío de 6000 voltios de línea.
- 3) Para $\cos \varphi = 0,7$ inductivo, resultaba una f.m.m. de 11650 At/polo, que da lugar a una f.e.m. en vacío de 7900 voltios de línea.

5.12. Un alternador trifásico conectado en estrella de 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

I_0 (A)	10	15	21	31	39	50	65
E_0 (línea)	3000	4200	5400	6600	7200	7700	8100

En cortocircuito se necesita una excitación de 24 A para que circule la corriente de plena carga. En un ensayo con carga reactiva se obtienen 6100 V con una corriente 125% de la asignada, para una excitación de 66 A. La resistencia del inducido es despreciable. Calcular:

- a) La caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido.
- b) La f.m.m. del inducido con corriente asignada de plena carga.
- c) La f.m.m. necesaria en la excitación cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. unidad y 0,8 inductivo.
- d) La f.e.m. producidas en vacío en las condiciones del apartado anterior.
- e) Las regulaciones de tensión correspondientes.

Solución

a) De acuerdo con el enunciado, se necesitan 24 A en la excitación para que circule la corriente nominal asignada en cortocircuito. Por consiguiente, cuando la corriente de cortocircuito sea 1,25 veces la asignada, la intensidad correspondiente necesaria en la excitación debe ser de $1,25 \cdot 24 = 30$ A. En la Figura 5.7 se muestra la curva de vacío de acuerdo con la tabla presentada en el enunciado y en la que se ha dibujado el triángulo de Potier en base a los datos del problema. Si se introduce en este gráfico la corriente de excitación $I_e = 30$ A, se obtiene el punto A' del eje de abscisas. Tomando $U = 6100$ V e $I_e = 66$ A se obtiene el punto A. Llevando la distancia $AD = A'O = 30$ se obtiene el punto D. Por este punto se traza una paralela a la recta de entrehierro que corta a la curva de vacío en el punto C. El segmento CB da la caída de tensión en la reactancia de dispersión cuando la corriente que circula por el inducido es 1,25 veces la nominal (asignada). La medida CB corresponde a 120 V de tensión compuesta. Por consiguiente, resulta:

$$X_\sigma I_N = \frac{1200}{\sqrt{3}} \frac{1}{1,25} = 554 \text{ V/fase}$$

Debe recordarse la propiedad de mantenerse constante el triángulo de Potier del diagrama. Por eso se puede construir con $U = 6100$ V y no es necesario en la característica reactiva hacerlo con $U_N = 6600$ V.

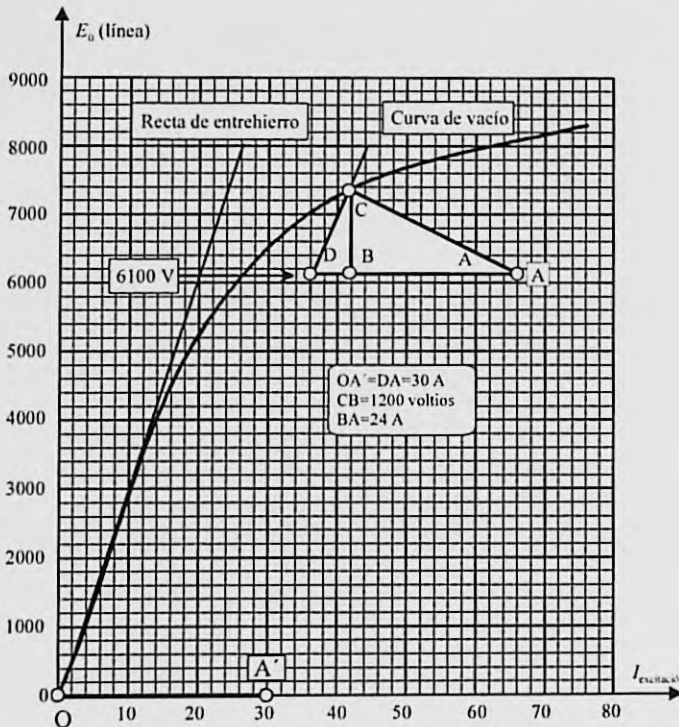


Figura 5.7

b) La distancia AB nos proporciona la f.m.m de reacción del inducido con una intensidad 1,25 veces la nominal. Su valor es de 24 A y, por consiguiente, la f.m.m. de reacción de inducido con corriente nominal es:

$$\frac{24}{1,25} = 19,2 \approx 19 \text{ A}$$

c) Para $\cos\varphi = 1$, al tomar la tensión en bornes del alternador como referencia, se tienen las expresiones fasoriales siguientes:

$$\underline{U} = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = I_N \angle 0^\circ \text{ A}; \quad \underline{E}_{mi} = 19 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Teniendo en cuenta el valor de la caída de tensión en la reactancia de dispersión de 554 voltios, obtenido en el apartado anterior mediante el triángulo de Potier, la f.e.m. por fase resultante del alternador es:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_\sigma \underline{I} = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j\,554 \angle 0^\circ = 3\,850,6 \angle 8,3^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una valor de línea E_r (línea) = $\sqrt{3} \cdot 3\,850,6 = 6\,669,4 \text{ V}$. Si con esta f.e.m. se va a la curva de vacío de la Figura 5.7, la f.m.m. resultante (medida en amperios de excitación) es de 32 amperios. Esta f.m.m. va adelantada 90° respecto a la f.e.m. anterior, por lo que su expresión fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 32 \angle 98,3^\circ \text{ A}$$

y, de este modo, la f.m.m. de excitación es:

$$\underline{F}_{me} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 32 \angle 98,3^\circ - 19 \angle 0^\circ = 39,5 \angle 127^\circ \text{ A}$$

Cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo, de un modo similar al anterior, resulta:

Las expresiones fasoriales de tensión y corriente son:

$$\underline{U} = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = I_N \angle -36,8^\circ \text{ A}; \quad \underline{E}_{mi} = 19 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

y el valor de la f.e.m. resultante por fase vale:

$$\underline{E}_r = \underline{U} + jX_\sigma \underline{I} = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j\,554 \angle -36,87^\circ = 4\,166,54 \angle 6,1^\circ \text{ V}$$

que corresponde a una valor de línea E_r (línea) = $\sqrt{3} \cdot 4\,166,54 = 7\,216,6 \text{ V}$. Si con esta f.e.m. se va a la curva de vacío de la Figura 5.6, la f.m.m. resultante (medida en amperios de excitación) es de 38 A. Esta f.m.m. va adelantada 90° respecto a la f.e.m. anterior, por lo que su expresión fasorial es:

$$\underline{F}_{mr} = 38 \angle 96,1^\circ \text{ A}$$

De este modo la f.m.m. de excitación es:

$$\underline{F}_{me} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 38 \angle 96,1^\circ - 19 \angle -36,87^\circ = 52,8 \angle 111,4^\circ \text{ A}$$

d) Llevando las corrientes de excitación calculadas en el apartado anterior a la curva de vacío, se obtienen las f.e.m. de vacío de línea siguientes: 7300 V cuando el f.d.p. es la unidad, y 7800 V cuando el f.d.p. es 0,8 inductivo.

e) De este modo, las regulaciones de tensión respectivas son:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - U}{U} = \frac{7\,300 - 6\,600}{6\,600} = 10\%; \quad \varepsilon = \frac{-7\,800 - 6\,600}{6\,600} = 18,2\%$$

5.13. Un alternador trifásico conectado en estrella de 5 000 kVA, 6 600 V, tiene una resistencia del inducido despreciable. El ensayo de vacío a la velocidad de sincronismo ha dado los siguientes resultados:

I_e (A)	24	35	50	71	90	120	140
E_0 (línea)	3000	4200	5400	6600	7300	8000	8300

En cortocircuito es necesaria una corriente de excitación de 37 A para que circule una corriente de 300 A en el inducido. En un ensayo con carga reactiva y corriente asignada, se obtiene una tensión de 6000 V para una excitación de 130 A. Cuando la máquina suministre los 3/4 de la plena carga a la tensión asignada con f.d.p. 0,8 inductivo, se pide:

- La caída de tensión en la reactancia de dispersión.
- La f.m.m. de reacción de inducido.
- La excitación necesaria en el inductor.
- La f.e.m. que producirá la excitación anterior al dejar la máquina en circuito abierto.
- La regulación de la tensión correspondiente.

Solución

a) En la Figura 5.8 se muestra la curva de vacío correspondiente. La corriente nominal es:

$$I = \frac{5\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} = 437,4 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta que en el ensayo de cortocircuito se sabe que es necesaria una corriente de excitación de 37 A, para que circule una corriente de inducido de 300 A, al ser la característica de cortocircuito lineal, para una corriente de cortocircuito igual a la nominal será necesaria una corriente de excitación:

$$I'_{\text{exc}} = 37 \frac{437,4}{300} \approx 54 \text{ A}$$

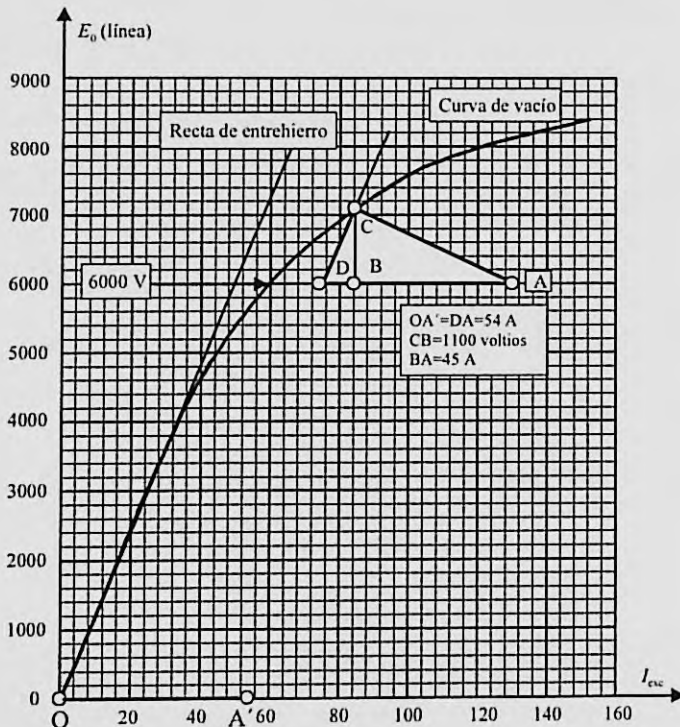


Figura 5.8

Por otro lado, la característica reactiva indica que para una tensión de 6000 V y corriente nominal, se tiene una corriente de excitación de 130 A, lo que da lugar al punto A del triángulo de Potier señalado en la Figura 5.7. Tomando $AD = A'O$ se fija el punto D. Trazando ahora desde este punto una paralela a la recta de entrehierro se obtiene el punto C y en su vertical, el punto B. Midiendo la distancia CB se obtiene la caída de tensión en la reactancia de dispersión con *corriente nominal*, que vale:

$$|CB| = X_{\sigma} I (\text{valor compuesto}) = 1100 \text{ V} \Rightarrow X_{\sigma} I = \frac{1100}{\sqrt{3}} = 635 \text{ V}$$

El segmento BA señala la reacción de inducido correspondiente, que midiendo vale 45 A, es decir, la f.m.m. de reacción de inducido con corriente nominal es $F_{mi} = 45 \text{ A}$.

a) y b) Por tanto, los valores correspondientes, cuando la corriente de inducido es 3/4 de la corriente nominal serán, respectivamente:

$$X_{\sigma} I = \frac{3}{4} 635 = 476 \text{ V}; F_{mi} = \frac{3}{4} 45 = 33,75 \text{ A}$$

c) La intensidad del inducido 3/4 veces la nominal vale:

$$I = \frac{3}{4} \cdot 437,4 = 328 \text{ A}$$

Tomando la tensión simple del alternador como referencia fases, resulta:

$$\underline{U} = \frac{6000}{\sqrt{3}} = 3810,5 \angle 0^{\circ} \text{ V}; \underline{I} = 328 \angle -36,87^{\circ} \text{ amperios}$$

Además se tiene, de acuerdo con los apartados anteriores:

$$\underline{F}_{mi} = 33,75 \angle -36,87^{\circ} \text{ amperios}; X_{\sigma} I = 476 \text{ voltios}$$

por lo que la f.e.m. resultante es:

$$\underline{E}_r = 3810,5 \angle 0^{\circ} + j 476 \angle -36,87^{\circ} = 4113,76 \angle 5,3^{\circ} \text{ voltios}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea E_r (línea) $= \sqrt{3} \cdot 4113,76 = 7125,25 \text{ V}$. Llevando este valor a la curva de vacío, le corresponde una f.m.m. resultante de 84 A, que al estar adelantada 90° respecto a la f.e.m., tiene la expresión fasorial siguiente:

$$\underline{F}_{mr} = 84 \angle +95,3^{\circ} \text{ A}$$

La f.m.m. de excitación será:

$$\underline{F}_{me} = \underline{F}_{mr} - \underline{F}_{mi} = 84 \angle 95,3^{\circ} - 33,75 \angle -36,87^{\circ} = 109,6 \angle 108,5^{\circ} \text{ amperios}$$

d) Al llevar la f.m.m. anterior a la curva de vacío se obtiene una f.e.m. de $E_0 = 7800 \text{ V}$.

e) En consecuencia, la regulación de la tensión del alternador es:

$$\varepsilon = \frac{7800 - 6000}{6000} = 18,2\%$$

5.14. Un alternador trifásico tiene una impedancia sincrónica de $0 + j 5 \Omega$ y está conectado a una red de potencia infinita de 6000 V. La excitación es tal que la f.e.m. inducida en vacío es de 6000 V. Determinar la potencia activa máxima que en estas condiciones podrá suministrar la máquina sin que exista pérdida de estabilidad. Hallar también la corriente de inducido y el f.d.p. para dicha carga.

Solución

Los valores de la tensión y f.e.m. generada por fase del alternador son respectivamente:

$$U = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} = 3\,810,51 \text{ V}; \quad E_{0f} = \frac{6\,000}{\sqrt{3}} = 3\,464,1 \text{ V}$$

La potencia activa que suministra el generador en función del ángulo de carga δ , que forman la f.e.m. E_0 y la tensión terminal U , es:

$$P = \frac{3E_0U}{X_s} \sin\delta$$

por consiguiente, el valor anterior será máximo cuando el ángulo de carga sea de 90° , lo que corresponde a una potencia activa:

$$P_{\text{máx}} = \frac{3E_0U}{X_s}$$

En la Figura 5.9 se muestra el diagrama fasorial correspondiente en el que se cumple:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s I \quad \Rightarrow \quad 3\,464,1 \angle 90^\circ = 3\,810,51 \angle 0^\circ + j5I \angle \varphi$$

Pasando a la forma binómica las expresiones polares de los números complejos anteriores resulta:

$$j\,3464,1 = 3810,51 + (-5I \sin\varphi + j5I \cos\varphi)$$

y que al igualar las partes reales e imaginarias da lugar a:

$$3810,51 - 5I \sin\varphi = 0 \Rightarrow I \sin\varphi = 762,1; \quad I \cos\varphi = \frac{3464,1}{5} = 692,82$$

Dividiendo entre sí ambas ecuaciones resulta:

$$\tan\varphi = 1,1 \Rightarrow \varphi = 47,73^\circ \Rightarrow \sin\varphi = 0,74; \quad \cos\varphi = 0,673 \text{ capacitivo}$$

y, por consiguiente, se obtiene una corriente:

$$I \cdot 0,74 = 762,1 \Rightarrow I = 1029,95 \text{ A}$$

que corresponde a una potencia activa:

$$P = \sqrt{3}UI \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot 1\,029,95 \cdot 0,673 \approx 7\,920 \text{ kW}$$

que puede comprobarse también de este modo:

$$P = 3 \frac{E_0 U}{X_s} = 3 \frac{\frac{6\,000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6\,600}{\sqrt{3}}}{5} = \frac{6\,000 \cdot 6\,600}{5} = 7\,920 \text{ kW}$$

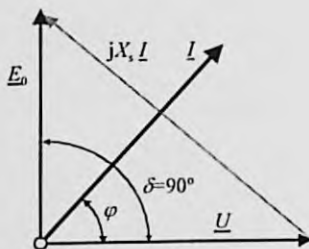


Figura 5.9

5.15. Un alternador trifásico tiene una impedancia síncrona de $0 + j 10 \Omega$ y está conectado a una red de potencia infinita de 11000 V suministrando una corriente de 220 A, con f.d.p. unidad. Sin cambiar la entrada de potencia a la máquina motriz, se eleva la f.e.m. un 25%. Calcular:

- La intensidad del inducido y f.d.p. en estas condiciones.
- La potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo, con el nuevo valor de la excitación.
- La intensidad y el f.d.p. en las condiciones del apartado anterior.

Solución

a) La tensión simple de la red es:

$$\underline{U} = \frac{11000}{\sqrt{3}} = 6350,85 \text{ V}$$

Como la f.e.m. es igual a la tensión terminal más la caída de tensión en la impedancia síncrona, si se toma la tensión como referencia de fases, se cumple:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s I = 6350,85 \angle 0^\circ + j10 \cdot 220 \angle 0^\circ = 6721,11 \angle 19,11^\circ \text{ V}$$

Al elevarse la f.e.m. (actuando sobre la excitación), el nuevo valor de la misma es:

$$E_0' = 1,25 \cdot 6721,11 = 8401,39 \text{ V}$$

y teniendo en cuenta que la potencia activa inicial era:

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 1100 \cdot 220 \cdot 1 = 4191563 \text{ W}$$

Como esta potencia se mantiene constante, se puede calcular el ángulo de carga en la nueva situación, es decir, al aumentar la f.e.m., mediante la expresión:

$$4191563 = \frac{3E_0'U}{X_s} \sin \delta \Rightarrow 4191563 = \frac{3 \cdot 8401,39 \cdot 6350,85}{10} \sin \delta \Rightarrow \sin \delta = 0,2618 \Rightarrow \delta = 15,18^\circ$$

De acuerdo con este resultado, la fase de la nueva f.e.m. es de $15,18^\circ$ adelantada a la tensión terminal, por lo que la nueva ecuación que relaciona la f.e.m. con la tensión es ahora:

$$\underline{E}_0' = \underline{U} + jX_s I \Rightarrow 8401,4 \angle 15,18^\circ = 6350,85 \angle 0^\circ + j10 \cdot I \angle \varphi$$

y al pasar la ecuación anterior a la forma binómica resulta:

$$8108 + j2199,9 = 6350,85 + 10I \sin \varphi + j10I \cos \varphi$$

Igualando las partes reales e imaginarias de los dos miembros de la ecuación anterior, da lugar a las soluciones siguientes:

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,798 \Rightarrow \varphi = 38,61^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,781 \Rightarrow I = \frac{219,99}{0,781} = 281,5 \text{ A}$$

b) La potencia máxima se obtiene para un ángulo de carga igual a 90° , por lo que la ecuación de la potencia correspondiente, teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, vale:

$$P = 3 \frac{E_0'U}{X_s} \sin 90^\circ = 3 \frac{8401,39 \cdot 6350,85}{10} \approx 16 \text{ MW}$$

c) En las condiciones del apartado anterior se cumplirá:

$$\underline{E}_0' = \underline{U} + jX_s I \Rightarrow 8401,39 \angle 90^\circ = 6350,85 \angle 0^\circ + j10I \angle \phi$$

que al igualar partes reales e imaginarias, da lugar a los resultados siguientes:

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,756 \Rightarrow \varphi = 37,09^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,7977 \text{ capacitivo ; } I = 1053,17 \text{ A}$$

5.16. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $30 \Omega/\text{fase}$. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y desarrolla 4 000 kVA, con f.d.p. unidad. Si se aumenta la f.e.m. un 20%, permaneciendo constante la entrada de potencia a la máquina motriz, determinar el nuevo f.d.p. con que trabajará la máquina y la potencia aparente que suministra.

Solución

La corriente que suministra el alternador a la red es:

$$I = \frac{4\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 11\,000} = 209,95 \text{ A}$$

Tomando como referencia la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente son, respectivamente:

$$\underline{U} = \frac{11\,000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 6\,350,85 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = 209,95 \angle 0^\circ \text{ amperios}$$

por lo que el valor de la f.e.m. del alternador debe ser:

$$\underline{E}_0 = 6\,350,85 + j30 \cdot 209,95 = 8\,944,52 \angle 44,76^\circ \text{ V}$$

Al aumentar la excitación, la nueva f.e.m. inducida tiene un módulo:

$$E'_0 = 1,2 \cdot 8\,944,52 = 10\,733,4 \text{ V}$$

Como la potencia se mantiene constante, al expresar esta en función de la nueva f.e.m. y del ángulo de carga, se tiene:

$$P = \sqrt{3} \cdot 11\,000 \cdot 209,95 \cdot 1 = 4\,000 \text{ kW} = \frac{3E'_0 U}{X_s} \sin \delta$$

de donde se deduce:

$$\sin \delta = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 30}{3 \cdot 10\,733,4 \cdot 6\,350,85} = 0,5868 \Rightarrow \delta = 35,93^\circ$$

Escribiendo la ecuación de la f.e.m. en esta nueva situación, resulta:

$$10\,733,4 \angle 35,93^\circ = 6\,350,85 \angle 0^\circ + j30I \angle -\varphi$$

que al igualar partes reales e imaginarias de cada lado, da lugar a las siguientes soluciones:

$$\operatorname{tg} \varphi = -0,3716 \Rightarrow \varphi = -20,38^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,937 \text{ capacitivo } I \approx 224 \text{ A}$$

y por consiguiente, la nueva potencia aparente será:

$$S = \sqrt{3} \cdot 11\,000 \cdot 223,97 = 4\,267 \text{ kVA}$$

5.17. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona de $8 \Omega/\text{fase}$. La curva de vacío está definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{20\,240 I_e}{42 + I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e , la corriente de excitación. Se conecta el generador a una red de potencia infinita de 11 kV suministrando en un momento dado una potencia activa de 3 810 kW, con f.d.p. unidad. En esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50% sin modificar la apertura de distribuidor de turbina. Calcular:

- La intensidad del inducido y el f.d.p. en estas condiciones.
- La potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo con el nuevo valor de la excitación.
- La intensidad y el f.d.p. en el caso anterior.

Solución

a) La corriente que entrega el alternador a la red es:

$$I = \frac{3810000}{\sqrt{3} \cdot 11000 \cdot 1} \approx 200 \text{ A}$$

y como quiera que el f.d.p. es la unidad, la f.e.m. necesaria por fase es:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s I = \frac{11000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + j 8 \cdot 200 \angle 0^\circ = 6549,3 \angle 14,14^\circ \text{ V}$$

Esta f.e.m. corresponde a un valor de línea:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 6549,3 = 11343,7 \text{ V}$$

y para generar la f.e.m. anterior se requiere una corriente en el inductor:

$$11343,7 = \frac{20240 I_c}{42 + I_c} \Rightarrow I_c = 53,55 \text{ A}$$

Si se aumenta ahora la corriente de excitación un 50%, la corriente correspondiente es:

$$I'_c = 1,5 \cdot 53,55 = 80,33 \text{ A}$$

que generará una f.e.m. de línea:

$$E'_0 (\text{línea}) = \frac{20240 \cdot 80,33}{42 + 80,33} = 13291 \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de fase $E'_0 = 13291 / \sqrt{3} = 7673,6 \text{ V}$ y, como no se modifica la posición del distribuidor, la potencia activa que entrega el alternador a la red no cambia. Expresando la potencia en función del ángulo de carga resulta:

$$P = 3810 \text{ kW} = \frac{3 \cdot 7673,6 \cdot 6350,85}{8} \text{ sen } \delta$$

que da lugar a:

$$\text{sen } \delta = 0,208 \Rightarrow \delta = 12,03^\circ$$

y, en consecuencia, la ecuación de la f.e.m. del generador es ahora:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s I \Rightarrow 7673,6 \angle 12,03^\circ = 6350,85 \angle 0^\circ + j 8 I \angle -\varphi$$

Al igualar partes reales e imaginarias en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\text{tg } \varphi = 0,7217 \Rightarrow \varphi = 35,82^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,811 ; I = \frac{1599,4}{8 \cdot 0,811} = 246,6 \text{ A}$$

b) La potencia máxima que puede entregar el alternador sin perder el sincronismo se cumple para un ángulo de carga de 90° , lo que da lugar a un valor:

$$P = 3 \frac{E_0 U}{X_s} \text{ sen } 90^\circ = 3 \frac{7673,6 \cdot 6350,85}{8} = 18,28 \text{ MW}$$

que se cumple cuando el generador trabaja con un f.d.p. capacitivo. Si se denomina α al ángulo de adelanto de la corriente respecto a la tensión terminal, la ecuación de la f.e.m. del alternador en esta situación es:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s I \Rightarrow 7673,6 \angle 90^\circ = 6350,85 \angle 0^\circ + j 8 I \angle \alpha$$

y al igualar las partes reales e imaginarias de los dos miembros de la ecuación anterior resulta:

$$\text{tg } \alpha = 0,8276 \Rightarrow \alpha = 39,6^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0,77 ; I = 1245,5 \text{ A}$$

5.18. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona constante. La curva de vacío está definida por la ecuación.

$$E_0 = \frac{12\,210I_e}{85 + I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación. Se conecta la máquina a una red de potencia infinita; una vez efectuado el acoplamiento y sin cambiar la corriente de excitación, se abre el distribuidor de agua a la turbina hasta que el alternador suministra a la red una potencia activa de 10 MW. En esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50% respecto al valor de conexión sin modificar la potencia de entrada a la máquina motriz comprobándose entonces que se obtiene un f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular:

- La reactancia síncrona del alternador.
- El f.d.p. con el que trabaja la máquina antes de cambiar la excitación y entregando la potencia de 10 MW.

Solución

a) Al conectar el alternador a la red, la f.e.m. en bornes del generador debe coincidir con la tensión de la red; es por ello que si con esta f.e.m. generada se va a la curva de vacío del alternador, se obtendrá la corriente necesaria en la excitación, resultando:

$$E_0 = U = 6600 = \frac{12\,210I_e}{85 + I_e} \Rightarrow I_e = 100 \text{ amperios}$$

Si, en esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50%, su valor será ahora: $I'_e = 1,5 \cdot 100 = 150 \text{ A}$ y la f.e.m. generada de línea correspondiente será:

$$E'_0 = \frac{12\,210 \cdot 150}{85 + 150} = 7\,793,6 \text{ V}$$

Como la potencia activa no varía, ya que no se ha modificado el distribuidor de la turbina, denominando I a la corriente del alternador y teniendo en cuenta que ahora trabaja con un f.d.p. 0,8 inductivo, resulta:

$$P = 10 \text{ MW} = 10^7 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I \cdot 0,8 \Rightarrow I = 1\,093,5 \text{ amperios}$$

En consecuencia en esta situación, si se toma la tensión simple como referencia de fases se tiene:

$$E'_0 (\text{fase}) = \frac{7\,793,6}{\sqrt{3}} = 4\,499,64 \text{ V} \Rightarrow \underline{E}'_0 (\text{fase}) = 4\,499,64 \angle \delta;$$

$$\underline{U}_t = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V}; \underline{I} = 1\,093,5 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Aplicando la ecuación que relaciona la f.e.m. y la tensión, se puede escribir:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + jX_s \underline{I} \Rightarrow 4\,499,64 \angle \delta = 3\,810,5 \angle 0^\circ + jX_s \cdot 1\,093,5 \angle -36,87^\circ$$

cuya composición fasorial se muestra en la Figura 5.10. Al pasar a forma binómica la última ecuación se tiene:

$$4\,499,64 \cos \delta + j 4\,499,64 \sin \delta = 3\,810,5 + 1\,093,5 X_s (\cos 53,13^\circ + j \sin 53,13^\circ)$$

igualando partes reales e imaginarias da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$4\,499,64 \cdot \cos \delta = 3\,810,5 + 1\,093,5 \cdot X_s \cdot 0,6; \quad 4\,499,64 \cdot \sin \delta = 1\,093,5 X_s \cdot 0,8$$

cuyas soluciones son:

$$\sin \delta = 0,182; \quad X_s = 0,936 \Omega$$

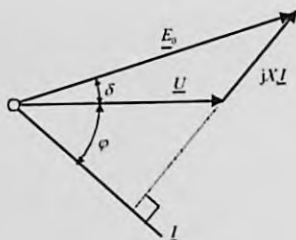


Figura 5.10

b) Antes de cambiar la excitación, la f.e.m. de línea coincide con la tensión de línea y, al ser la potencia activa entregada a la red de 10 MW, se puede escribir:

$$P = 10^7 = \frac{6\,600 \cdot 6\,600}{0,936} \sin \delta \Rightarrow \sin \delta = 0,2148 \Rightarrow \delta = 12,41^\circ$$

La ecuación de la f.e.m. generada se escribe ahora del siguiente modo:

$$3\,810,5 \angle 12,41^\circ = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j\,0,936 I \angle -\phi$$

y al igualar parte reales e imaginarias se obtiene finalmente:

$$\cos \phi = 0,994 \text{ capacitivo}; I = 880 \text{ amperios}$$

5.19. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $10 \Omega/\text{fase}$. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y se sabe que desarrolla una potencia con f.d.p. 0,673 inductivo, siendo el ángulo de carga $\delta = 10^\circ$. Calcular:

- La f.e.m. de línea producida por el generador.
- La potencia activa que suministra a la red.

Solución

a) La tensión simple del generador es:

$$U = \frac{11\,000}{\sqrt{3}} = 6\,350,85 \text{ V}$$

Tomando la tensión simple de la red como referencia de fase, los valores fasoriales de la tensión y de la corriente, teniendo en cuenta que $\arcs 0,673 = 47,7^\circ$ son, respectivamente:

$$\underline{U} = 6\,350,85 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = I \angle -47,7^\circ \text{ amperios}$$

Como quiera que el ángulo de carga es de 10° , de acuerdo con el esquema fasorial de la Figura 5.10 del problema anterior, que es válido para la referencia actual, se tiene la siguiente ecuación de f.e.m.:

$$E_0 \angle 10^\circ = 6\,350,85 \angle 0^\circ + j\,10 I \angle -47,7^\circ = 6\,350,85 + 10 \cdot I \cdot 0,74 + j\,10 \cdot I \cdot 0,673$$

que al igualar partes reales e imaginarias conduce a las siguientes soluciones:

$$I = 206,4 \text{ A}; \quad E_0 = 8\,000 \text{ V}$$

siendo la f.e.m. de línea:

$$E_0(\text{línea}) = 8\,000 \cdot \sqrt{3} \approx 13\,856 \text{ V}$$



b) La potencia activa que suministra a la red el alternador es:

$$P = \sqrt{3}UI\cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 11\,000 \cdot 206,4 \cdot 0,673 = 2\,646,5 \text{ kW}$$

5.20. Dos alternadores idénticos de 2000 kVA funcionan en paralelo alimentando una carga aislada. El regulador de la primera máquina es tal que la frecuencia cae uniformemente de 50 Hz en vacío a 48 Hz a plena carga. La correspondiente caída uniforme de velocidad de la segunda máquina es de 50 Hz a 47,5 Hz.

- ¿Cómo se distribuirán entre los dos generadores una potencia activa consumida por la carga de 2700 kW?
- ¿Cuál es la potencia activa máxima con f.d.p. unidad que puede suministrarse sin sobrecargar ninguno de los alternadores?

Solución

a) En la Figura 5.11 se muestran las rectas de la frecuencia/potencia de los alternadores. Las ecuaciones matemáticas de ambas rectas son:

$$\text{Alternador I: } P_1 = \frac{2\,000}{50 - 48}(50 - f) = 1\,000 \cdot (50 - f) \Rightarrow f = 50 - \frac{P_1}{1\,000}$$

$$\text{Alternador II: } P_{II} = \frac{2\,000}{50 - 47,5}(50 - f) = 800 \cdot (50 - f) \Rightarrow f = 50 - \frac{P_{II}}{800}$$

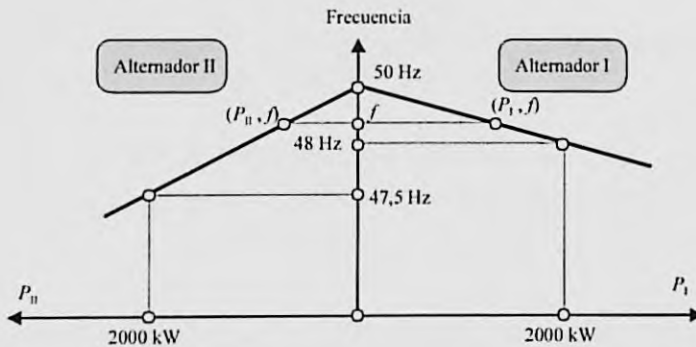


Figura 5.11

Teniendo en cuenta que la potencia que deben suministrar ambos generadores es de 2700 kW, se cumplirá:

$$P_1 + P_{II} = 2\,700 \quad \text{a)}$$

$$50 - \frac{P_1}{1\,000} = 50 - \frac{P_{II}}{800} \Rightarrow P_{II} = 0,8P_1 \quad \text{b)}$$

que da lugar a los siguientes resultados:

$$P_1 = 1\,500 \text{ kW} \quad ; \quad P_{II} = 0,8 \cdot 1\,500 = 1\,200 \text{ kW}$$

b) Si el alternador I (más cargado) entrega su potencia asignada con f.d.p. unidad, es decir, 2000 kW, la potencia activa del generador II, de acuerdo con la ecuación b), suministrará una potencia del 80% del generador I, es decir, 1600 kW, por lo que ambos generadores pueden entregar una potencia conjunta de 3600 kW.

- 5.21. Dos alternadores trifásicos funcionan en paralelo suministrando a una carga una potencia de 6 MW, con f.d.p. 0,8 inductivo. La frecuencia de uno de ellos cae uniformemente de 51 Hz en vacío a 49,75 Hz cuando se carga con una potencia activa de 10 MW, y en el otro la frecuencia pasa de 51 Hz a 49,5 Hz cuando se carga con 2 MW. Determinar las potencias activas suministradas por cada generador y el f.d.p. con el que trabaja el primero, si el f.d.p. del segundo es de 0,71 inductivo.

Solución

a) Las ecuaciones de la rectas frecuencia/potencia de los alternadores, son de acuerdo con los datos del enunciado, las siguientes:

$$\text{Alternador I: } P_I = \frac{10\,000}{51 - 49,75}(51 - f) \Rightarrow f = 51 - \frac{P_I}{8\,000}$$

$$\text{Alternador II: } P_{II} = \frac{2\,000}{51 - 49,5}(51 - f) \Rightarrow f = 51 - \frac{P_{II}}{1\,333,33}$$

y teniendo en cuenta que la potencia conjunta es de 6 MW, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$P_I + P_{II} = 6\,000 \text{ kW} \quad \text{a)}$$

$$\frac{P_I}{8\,000} = \frac{P_{II}}{1\,333,33} \Rightarrow P_I = 6P_{II} \quad \text{b)}$$

cuyas soluciones son: $P_I \approx 5\,143 \text{ kW}$; $P_{II} \approx 857 \text{ kW}$

La potencia total tiene un f.d.p. 0,8 inductivo, su expresión compleja es:

$$\underline{S}_{\text{total}} = 6000 + j4500$$

y como quiera que el segundo generador trabaja con un f.d.p. 0,71 inductivo, la potencia compleja que suministra es:

$$\underline{S}_{II} = 1207,04 \angle 44,77^\circ = 857 + j850$$

por lo que resulta:

$$\underline{S}_{\text{total}} = \underline{S}_I + \underline{S}_{II} \Rightarrow \underline{S}_I = (6000 + j4500) - (857 + j850) = 5143 + j3650$$

que en forma polar es: $\underline{S}_I = 5143 + j3650 = 6306,6 \angle 35,36^\circ$. Por consiguiente, el f.d.p. con el que trabaja el primer alternador es $\cos 35,36^\circ = 0,815$.

- 5.22. Dos alternadores idénticos de 15 MVA, 6,6 kV, 50 Hz conectados en estrella, están acoplados en paralelo, suministrando en conjunto a una red aislada una potencia de 20 MW, con f.d.p. 0,8 inductivo. Ambos generadores tienen resistencias de inducido despreciables y reactancias síncronas de un valor de 2,83 Ω /fase. Sabiendo que la potencia activa se reparte por igual entre ambos generadores y que el primero tiene una f.e.m. de 11 484 V de línea, calcular:

- Las corrientes suministradas por cada generador con sus f.d.p. respectivos;
- La f.e.m. generada por el segundo alternador.

Nota: se supone que la tensión común en barras de ambos generadores permanece constante en el valor nominal de 6600 V.

Solución

a) En la Figura 5.12 se muestra el diagrama fasorial de las f.e.m. y las corrientes de ambos generadores, en el que se ha tomado la tensión simple común en barras como referencia de fases. Los fasores de las magnitudes implicadas son:

$$\underline{E}_1 = 6630,3 \angle \delta_1; \quad \underline{E}_2 = E_2 \angle \delta_2; \quad \underline{I}_1 = I_1 \angle -\varphi_1; \quad \underline{I}_2 = I_2 \angle -\varphi_2$$

y teniendo en cuenta que la potencia total es de 20 MW con f.d.p. 0,8 inductivo, la corriente total es:

$$20 \cdot 10^6 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I \cdot 0,8 \Rightarrow I = 2\,186,9 \text{ A} \Rightarrow \underline{I} = 2\,186,9 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Como ambos generadores entregan la misma potencia activa (de 10 MW), se tiene:

$$10 \cdot 10^6 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I_2 \cos \varphi_2 \Rightarrow E_2 \angle \delta_2 = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j 2,83 I_2 \angle -\varphi_2 \quad \text{a)}$$

y aplicando a cada generador la ecuación de sus f.e.m. respectivas y sus relaciones con la tensión terminal, resulta:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} + j X_s \underline{I} \Rightarrow 6\,630,3 \angle \delta_1 = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j 2,83 I_1 \angle -\varphi_1; E_2 \angle \delta_2 = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j 2,83 I_2 \angle -\varphi_2 \quad \text{b)}$$

que al igualar partes reales e imaginarias en cada ecuación, dan lugar al conjunto siguiente:

$$6\,630,3 \cos \delta_1 = 3\,810,5 + 2,83 I_1 \sin \varphi_1; \quad 6\,630,3 \sin \delta_1 = 2,83 I_1 \cos \varphi_1 \quad \text{c)}$$

$$E_2 \cos \delta_2 = 3\,810,5 + 2,83 I_2 \sin \varphi_2; \quad E_2 \sin \delta_2 = 2,83 I_2 \cos \varphi_2 \quad \text{d)}$$

Por otro lado, la corriente total es igual a la suma de las corrientes que entregan los alternadores:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \Rightarrow 2\,186,9 \angle -36,87^\circ = I_1 \angle -\varphi_1 + I_2 \angle -\varphi_2 \quad \text{e)}$$

Igualando partes reales e imaginarias se tiene:

$$2\,186,9 \cos 36,87^\circ = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 = 1\,749,6; \quad 2\,186,9 \sin 36,87^\circ = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 = 1\,312,14 \quad \text{f)}$$

La ecuación a), junto con la primera ecuación f), da lugar a:

$$I_1 \cos \varphi_1 = I_2 \cos \varphi_2 = \frac{1\,749,6}{2} = 874,76 \text{ A} \quad \text{g)}$$

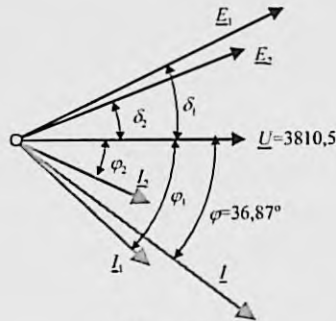


Figura 5.12

Resultado que al llevar a la segunda ecuación c) nos da:

$$6\,630,3 \sin \delta_1 = 2,83 \cdot 874,76 = 2\,475,6 \Rightarrow \sin \delta_1 = 0,373 \Rightarrow \delta_1 = 21,92^\circ \quad \text{h)}$$

Si esta solución se sustituye en la primera ecuación c) resulta:

$$6\,630,3 \cdot \cos 21,92^\circ = 6\,150,81 = 3\,810,5 + 2,83 I_1 \sin \varphi_1 \Rightarrow I_1 \sin \varphi_1 = 826,96 \quad \text{i)}$$

teniendo en cuenta f) y h), se obtiene:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0,945 \Rightarrow \varphi_1 = 43,39^\circ \Rightarrow \cos \varphi_1 = 0,727 \quad \text{j)}$$

y de acuerdo con los resultados de f) e i), se obtiene el valor de la corriente del primer alternador:

$$I_1 = \frac{874,76}{0,727} = 1\,203,25 \text{ A} \quad \text{k)}$$

Llevando los resultados de i) y j) a la segunda ecuación f), se tiene:

$$I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 = 1312,14 \Rightarrow I_2 \sin \varphi_2 = 1312,14 - 826,96 = 485,18 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{485,18}{874,76} = 0,5546 \quad \text{l)}$$

y por consiguiente, resulta:

$$\varphi_2 = 29,01^\circ \Rightarrow \cos \varphi_2 = 0,875 \Rightarrow I_2 = 999,7 \approx 1000 \text{ A}$$

Es decir, las corrientes suministradas por cada generador son, respectivamente:

$$I_1 = 1203,25 \text{ A}; I_2 = 1000 \text{ A}$$

b) Para determinar la f.e.m. que genera el segundo alternador, si se tiene en cuenta las ecuaciones d), resulta:

$$E_2 \sin \delta_2 = 2,83 \cdot 874,76 = 2475,6; E_2 \cos \delta_2 = 3810,5 + 2,83 \cdot 485,18 = 5183,6 \quad \text{m)}$$

que al dividir ambas ecuaciones entre sí da lugar a:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = 0,478; \delta_2 = 25,53^\circ; \cos \delta_2 = 0,902; \sin \delta_2 = 0,431$$

Resultados que al llevar a l) nos da finalmente:

$$E_2 = 5744,36 \text{ V}; E_2 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 5744,36 \approx 9950 \text{ V}$$

5.23. Dos alternadores idénticos conectados en estrella, están acoplados en paralelo alimentando una carga aislada. Ambas máquinas, tienen sus resistencias de inducido despreciables y sus reactancias síncronas son de $10 \Omega/\text{fase}$. Las f.e.m. generadas por cada alternador son $E_1 = 6700 \text{ V/fase}$ y $E_2 = 6500 \text{ V/fase}$, con la f.e.m. E_2 adelantándose 10° eléctricos respecto a E_1 . Si la carga absorbe una corriente total de 500 A , que está desfasada 37° respecto a la f.e.m. E_1 , calcular:

- La tensión en la barra común a ambas máquinas en voltios por fase.
- Las corrientes suministradas por cada alternador con sus f.d.p.
- El f.d.p. de la carga.

Solución

a) En la Figura 5.13 se muestra el diagrama fasorial de las magnitudes implicadas. Las expresiones fasoriales son:

$$\underline{E}_1 = 6700 \angle \delta_1; \underline{E}_2 = 6500 \angle (\delta_1 + 10^\circ); \underline{I}_1 = I_1 \angle -\varphi_1; \underline{I}_2 = I_2 \angle -\varphi_2; \underline{I} = 500 \angle (\delta_1 - 37^\circ)$$

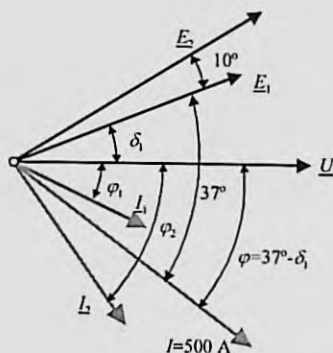


Figura 5.13

La ecuación de f.e.m. del primer alternador es:

$$6\,700 \angle \delta_1 = U + j10I_1 \angle -\varphi_1 \Rightarrow 6\,700 \cos \delta_1 = U + 10I_1 \sin \varphi_1 ; 6\,700 \sin \delta_1 = 10I_1 \cos \varphi_1$$

Para el segundo alternador se cumple:

$$6\,500 \angle (\delta_1 + 10^\circ) = U + j10I_2 \angle -\varphi_2 \Rightarrow 6\,500 \cos(\delta_1 + 10^\circ) = U + 10I_2 \sin \varphi_2 ; \\ 6\,500 \sin(\delta_1 + 10^\circ) = 10I_2 \cos \varphi_2$$

La corriente total es la suma de las corrientes, es decir:

$$500 \angle (\delta_1 - 37^\circ) = I_1 \angle -\varphi_1 + I_2 \angle -\varphi_2 ; 500 \cos(\delta_1 - 37^\circ) = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 ; 500 \sin(\delta_1 - 37^\circ) = -I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2$$

Operando las ecuaciones anteriores, se obtienen los siguientes resultados:

$$\delta_1 = 15,87^\circ ; \cos \varphi_1 = 0,836 ; U \approx 5\,245 \text{ voltios} ; I_1 \approx 219 \text{ amperios} ; \cos \varphi_2 = 0,978 ; I_2 = 290 \text{ amperios}$$

b) El f.d.p. de la carga es, por tanto:

$$\cos \varphi = \cos(37^\circ - \delta_1) = \cos(37^\circ - 15,87^\circ) = 0,933$$

5.24. Dos alternadores idénticos de 5 000 kVA, 6,6 kV conectados en estrella funcionan en paralelo con las mismas excitaciones y se reparten por igual una potencia activa de 8 MW a 6,6 kV, con f.d.p. 0,8 inductivo. Las resistencias de los inducidos son despreciables y las reactancias sincronicas por fase valen 17,4 Ω .

- Calcular las f.e.m. de línea de cada generador.
- Si la f.e.m. de uno de los generadores se reduce un 15%, determinar la f.e.m. que tendrá que generarse en el otro para evitar un cambio en la tensión en barras y un suministro adicional de vapor a cada uno. Calcular a continuación las corrientes suministradas por cada generador y sus f.d.p.

Solución

a) Teniendo en cuenta que entre los dos alternadores dan una potencia activa de 8 MW, la corriente total correspondiente es:

$$8 \cdot 10^6 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I \cdot 0,8 \Rightarrow I = 874,77 \text{ A}$$

que al tomar como referencia de fases la tensión simple en las barras, se puede poner de acuerdo con la Figura 5.14:

$$\underline{U} = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V} ; \underline{I} = 874,77 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

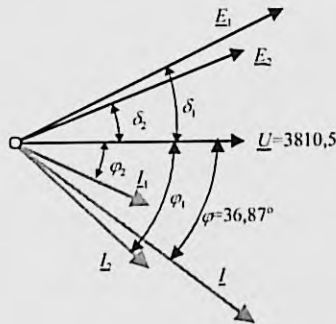


Figura 5.14

Como ambos alternadores generan la misma potencia activa, se puede escribir:

$$4 \cdot 10^6 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot I_2 \cos \varphi_2 \Rightarrow I_1 \cos \varphi_1 = I_2 \cos \varphi_2 = 349,91 \text{ A} \quad \text{a)}$$

Además, al trabajar ambos generadores con la misma excitación, las f.e.m. de ambos son idénticas, y dado que también tienen las mismas reactancias síncronas, las corrientes que entregan a la carga deben ser iguales, es decir:

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} = 437,39 \text{ A}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 36,87^\circ \quad \text{b)}$$

y los valores de sus f.e.m. son:

$$\underline{E} = \underline{E}_1 = \underline{E}_2 = 3\,810,5 \angle 0^\circ + j 17,4 \cdot 437,39 \angle -36,87^\circ = 10\,355,73 \angle 36^\circ \text{ V} \quad \text{c)}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea

$$E (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 10\,355,73 \approx 17\,937 \text{ V} .$$

b) Si se supone que es el primer alternador el que reduce su f.e.m. un 15%, el valor correspondiente será:

$$E_1 = 0,85 \cdot 10\,355,73 = 8\,802,4 \text{ V}$$

Planteando ahora las ecuaciones de la f.e.m. de los alternadores, teniendo en cuenta que las nuevas corrientes son I_1 e I_2 y sus desfases respecto a la tensión en barras son φ_1 e φ_2 , resulta:

$$\text{Alternador 1: } 8\,802,4 \angle \delta_1 = 3\,810,5 + j 17,4 \cdot I_1 \angle -\varphi_1 \quad \text{d)}$$

$$\text{Alternador 2: } E_2 \angle \delta_2 = 3\,810,5 + j 17,4 \cdot I_2 \angle -\varphi_2 \quad \text{e)}$$

Como la corriente total debe ser la suma de las corrientes que entrega cada generador, se tiene:

$$874,77 \angle -36,87^\circ = I_1 \angle -\varphi_1 + I_2 \angle -\varphi_2 \quad \text{f)}$$

A estas ecuaciones debe añadirse la señalada en a), que representaba la igualdad de potencias entregadas por cada generador, es decir:

$$I_1 \cos \varphi_1 = I_2 \cos \varphi_2 = 349,91 \text{ A} \quad \text{g)}$$

Las dos componentes (parte real e imaginaria) de la ecuación d) son, respectivamente:

$$8\,802,4 \cos \delta_1 = 3\,810,5 + 17,4 I_1 \sin \varphi_1; \quad 8\,802,4 \sin \delta_1 = 17,4 I_1 \cos \varphi_1 \quad \text{h)}$$

Al sustituir el resultado g) en la segunda ecuación h), se tiene:

$$8\,802,4 \sin \delta_1 = 17,4 \cdot 349,91 = 6\,088,4 \Rightarrow \sin \delta_1 = \frac{6\,088,4}{8\,802,4} = 0,692 \Rightarrow \delta_1 = 43,76^\circ \Rightarrow \cos \delta_1 = 0,722$$

Llevando este resultado a la primera ecuación g) resulta:

$$I_1 \sin \varphi_1 = \frac{8\,802,4 \cdot 0,722 - 3\,810,5}{17,4} = 146,3 \quad \text{i)}$$

Si se dividen entre sí las ecuaciones i) y g), se obtiene:

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{146,3}{349,91} = 0,418 \Rightarrow \varphi_1 = 22,7^\circ \quad \text{j)}$$

por lo que se deduce:

$$\cos \varphi_1 = 0,923; \quad I_1 = 379,3 \text{ A}$$

Por otro lado, las dos componentes (parte real e imaginaria) de la ecuación e) son, respectivamente:

$$E_2 \cos \delta_2 = 3\,810,5 + 17,4 I_2 \sin \varphi_2; \quad E_2 \sin \delta_2 = 17,4 I_2 \cos \varphi_2 \quad \text{k)}$$

De un modo análogo, las partes real e imaginaria de la ecuación f), son:

$$874,77 \cos 36,87^\circ = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2; \quad 874,77 \sin 36,87^\circ = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 \quad \text{l)}$$

pero al cumplir la igualdad g), es inmediato obtener:

$$I_1 = 379,3 \text{ A} ; \cos \varphi_1 = 0,923 ; \cos \varphi_2 = 0,679 ; I_2 = 515,44 \text{ A}$$

soluciones que llevadas a k) permiten obtener:

$$\delta_2 = 30,35^\circ ; E_2 = 12\,048 \text{ V} \Rightarrow E_2 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 12\,048 \approx 20\,868 \text{ V}$$

- 5.25.** Un motor síncrono trifásico conectado en estrella, de 75 kW, 500 V tiene una impedancia síncrona $Z_s = 0,03 + j3 \Omega/\text{fase}$. Si funciona a plena carga con un f.d.p. 0,8 capacitivo y rendimiento del 90%. Calcular la f.e.m. inducida E_0 y la potencia activa absorbida de la red.

Solución

Si la potencia mecánica del motor síncrono es de 75 kW, la potencia eléctrica que absorbe de la red es:

$$P_{\text{eléctrica}} = \frac{P_{\text{méc}}}{\eta} = \frac{75}{0,9} = 83,33 \text{ kW}$$

por lo que la corriente absorbida de la red es:

$$I = \frac{83333}{\sqrt{3} \cdot 500 \cdot 0,8} = 120,28 \text{ A}$$

Al tomar la tensión de fase como referencia, se puede poner:

$$\underline{U} = \frac{500}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 288,68 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Según la ecuación de la f.e.m. del motor y su relación con la tensión, resulta:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - \underline{Z}_s \underline{I} = 288,68 \angle 0^\circ - (0,03 + j3) \cdot 120,28 \angle 36,87^\circ = 309 \angle -5,8^\circ$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta el carácter capacitivo de la corriente. En consecuencia, la f.e.m. de línea es:

$$E_0 (\text{línea}) = 309 \cdot \sqrt{3} = 535,21 \text{ V}$$

- 5.26.** Un motor síncrono trifásico conectado en estrella de 4 polos, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $3 \Omega/\text{fase}$. Está conectado a una red de 2000 V, 50 Hz. La excitación es constante y produce una f.e.m. de 1150 V/fase. Calcular la potencia activa absorbida de la línea, el factor de potencia y el par desarrollado en el eje si la corriente del inducido es de 200 A.

Nota: despreciar las pérdidas en el motor.

Solución

Si se elige como referencia de fases la tensión simple de la red se tiene:

$$\underline{U} = \frac{2\,000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 1\,154,7 \angle 0^\circ ; \underline{I} = 200 \angle -\varphi$$

y teniendo en cuenta la relación:

$$\underline{U} = \underline{E}_0 + jX_s \underline{I}$$

Si se supone que la f.e.m. del motor se adelanta δ grados respecto a la tensión, la ecuación anterior nos da:

$$1\,154,7 \angle 0^\circ = 1\,150 \angle \delta + j3 \cdot 200 \angle -\varphi = 1\,150 \angle \delta + 600 \angle (90^\circ - \varphi)$$

que al igualar partes reales e imaginarias de cada miembro se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$1\,154,7 = 1\,150 \cos \delta + 600 \sin \varphi ; 0 = 1\,150 \sin \delta + 600 \cos \varphi \Rightarrow \sin \delta = -0,522 \cos \varphi$$

y que, al resolver, da lugar a:

$$\operatorname{sen} \varphi = 0,267 \Rightarrow \varphi = 15,5^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0,964$$

En consecuencia la potencia activa que el motor absorbe de la red es:

$$P_e = \sqrt{3} \cdot 2\,000 \cdot 200 \cdot 0,964 \approx 668 \text{ kW}$$

La potencia anterior coincidirá con la potencia mecánica en el eje, al no existir pérdidas en el motor. Como la velocidad de sincronismo del motor es:

$$n = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1\,500 \text{ r/min}$$

el par mecánico que desarrolla vale:

$$T = \frac{P_{\text{mec}}}{\Omega} = \frac{668\,000}{2\pi \frac{1\,500}{60}} = 4\,250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5.27. Un motor síncrono trifásico de 6 600 V conectado en estrella, trabaja con tensión constante y excitación constante. Su impedancia síncrona es $2 + j\,20 \Omega/\text{fase}$. Cuando la entrada es de 1 000 kW, el f.d.p. es de 0,8 capacitivo. Hallar el f.d.p. cuando se aumenta la entrada a 1 500 kW.

Solución

Como el motor absorbe una potencia eléctrica de 1 000 kW, la corriente de la red es:

$$I = \frac{1\,000\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot 0,8} = 109,35 \text{ A}$$

y al considerar como referencia de fase la tensión simple de la red y teniendo en cuenta el carácter capacitivo de la corriente, se pueden escribir las siguientes expresiones fasoriales:

$$\underline{U} = \frac{6\,600}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 3\,810,5 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = 109,35 \angle 36,87^\circ \text{ A}$$

por lo que la ecuación de la f.e.m. del alternador se podrá escribir de este modo:

$$\underline{U} = \underline{E}_0 + \underline{Z} \underline{I} \Rightarrow 3\,810,5 \angle 0^\circ = E_0 \angle \delta + (2 + j\,20) \cdot 109,35 \angle 36,87^\circ$$

En la última ecuación se ha supuesto que la f.e.m. forma δ grados con la tensión. De aquí se deduce:

$$E_0 \angle \delta = 3\,810,5 \angle 0^\circ - 2\,197,91 \angle 121,16^\circ = 5\,293,2 \angle -20,81^\circ$$

es decir, la f.e.m. simple es de 5 293,2 V, que corresponde a una f.e.m. de línea:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 5\,293,2 \approx 9\,168 \text{ V}.$$

Si ahora aumenta la potencia eléctrica de entrada a 1 500 kW, la corriente absorbida de red en función de su nuevo factor de potencia es:

$$I = \frac{1\,500\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600 \cdot \cos \varphi} = \frac{131,22}{\cos \varphi}$$

por lo que la nueva corriente tiene la siguiente expresión fasorial:

$$\underline{I} = \frac{131,22}{\cos \varphi} \angle \varphi \text{ A}$$

y que al plantear la nueva ecuación de la f.e.m. del motor se tiene:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - \underline{Z}I \Rightarrow E_0 \angle \delta' = 3810,5 - (2 + j 20) \frac{131,22}{\cos \varphi} \angle \varphi$$

En la última expresión se ha supuesto que la f.e.m. E_0 se adelanta δ' grados respecto a la tensión. Al sustituir ahora el valor de la f.e.m. calculada antes, se obtiene:

$$3810,5 - \frac{262,44}{\cos \varphi} \angle \varphi - \frac{2624,4}{\cos \varphi} \angle (90^\circ + \varphi) = 5293,2 \angle \delta'$$

que al igualar partes reales e imaginarias, después de algunas transformaciones trigonométricas, se deducen los resultados siguientes:

$$\varphi = 20,74^\circ ; \cos \varphi = 0,935 ; \delta' \approx -31^\circ$$

es decir, el motor trabajará con un f.d.p. de 0,935.

5.28. Un motor síncrono trifásico de 400 V, 6 polos, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una impedancia síncrona de $0,5 + j 4 \Omega$ /fase. Absorbe una corriente de 15 A con f.d.p. unidad cuando funciona con una cierta excitación. Si se aumenta el par de carga hasta que la corriente de línea sea de 60 A, permaneciendo constante la excitación, hallar el par total desarrollado y el nuevo f.d.p.

Solución

Inicialmente, cuando el motor trabaja con f.d.p. unidad, si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente son:

$$\underline{U} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 230,94 \angle 0^\circ \text{ V} ; \underline{I} = 15 \angle 0^\circ \text{ A}$$

y la f.e.m. del motor es:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - \underline{Z}I = 230,94 - (0,5 + j 4) \cdot 15 = 223,44 - j 60 = 231,36 \angle -15,03^\circ \text{ V}$$

Si en la situación anterior se aumenta el par de carga, la corriente se modifica y cambia, según el enunciado, a 60 amperios con un ángulo φ de fase, que vamos a considerar adelantado de la tensión, es decir su expresión fasorial es de la forma $\underline{I}' = 60 \angle \varphi$, y la nueva ecuación de la f.e.m. vale ahora:

$$\underline{E}_0' = 230,94 - (0,5 + j 4) \cdot 60 \angle \varphi = 231,36 \angle \delta$$

que al operar se obtiene:

$$231,36 \angle \delta = (230,94 - 30 \cos \varphi + 240 \text{sen} \varphi) - j(30 \text{sen} \varphi + 240 \cos \varphi)$$

e igualando los módulos de ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$231,36 = \sqrt{(230,94 - 30 \cos \varphi + 240 \text{sen} \varphi)^2 + (30 \text{sen} \varphi + 240 \cos \varphi)^2}$$

Después de algunas simplificaciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$5,83 + 11,08 \text{sen} \varphi + 1,39 \cos \varphi = 0$$

y teniendo en cuenta las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\text{sen} \varphi = \frac{\text{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} ; \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}}$$

se transforma en:

$$88,8 \text{tg}^2 \varphi + 30,8 \text{tg} \varphi - 32,07 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se obtienen las dos soluciones siguientes:

$$\operatorname{tg} \varphi = -0,799 \text{ (inductivo)} ; \operatorname{tg} \varphi = +0,452 \text{ (capacitivo)} \Rightarrow \cos \varphi = 0,911$$

El segundo resultado es el válido, puesto que se ha partido del supuesto de que la corriente se adelanta a la tensión. Por tanto, la potencia activa que el motor absorbe de la red es:

$$P = \sqrt{3}UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 60 \cdot 0,911 = 37,87 \text{ kW}$$

y como la velocidad de sincronismo del motor es:

$$n = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1\,000 \text{ r/min}$$

el par mecánico desarrollado vale:

$$T = \frac{37\,870}{\frac{1\,000}{2\pi \cdot 60}} = 361,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5.29. Una carga eléctrica de 250 kVA, tiene un f.d.p. de 0,65 inductivo. Se conecta a la misma red un motor síncrono en estrella de 75 kW de rendimiento 88% para elevar el factor de potencia de la instalación a 0,85 inductivo. Calcular:

- La potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja.
- La f.e.m E_0 inducida en esta máquina, si la tensión de alimentación es de 380 V y el motor tiene una impedancia síncrona de $0 + j\,0,5 \Omega/\text{fase}$.

Solución

a) La carga eléctrica tiene un f.d.p. 0,65 inductivo, por lo que $\varphi_1 = \arcsin 0,65 = 49,5^\circ$ y la potencia compleja correspondiente es:

$$\underline{S}_1 = 250 \angle 49,5^\circ = 162,5 + j190$$

La potencia eléctrica activa que el motor síncrono absorbe de la red es:

$$P_e = \frac{P_{\text{mec}}}{\eta} = \frac{75}{0,88} = 85,23 \text{ kW}$$

Teniendo en cuenta que la instalación ha de tener un f.d.p. total de 0,85 ($\varphi_T = \arcsin 0,85 = 31,8^\circ$), se debe cumplir que la potencia compleja total ha de ser igual a la suma de las potencias complejas de las cargas: carga 1 + motor síncrono, es decir:

$$\underline{S}_T = \underline{S}_1 + \underline{S}_m = (162,5 + j190) + (85,23 + jQ_m) = \underline{S}_T \angle 31,8^\circ \quad \text{a)}$$

En la Figura 5.15 se muestra el esquema eléctrico de la instalación y la composición fasorial de la suma de las potencias complejas de la ecuación anterior. El problema se puede resolver de forma analítica o gráfica, tal como señala la figura anterior. Desde el punto de vista analítico, si se tiene en cuenta la ecuación a) se puede poner:

$$\underline{S}_T = \underline{S}_1 + \underline{S}_m = (162,5 + j190) + (85,23 + jQ_m) = S_T \cdot \cos 31,8^\circ + jS_T \cdot \sin 31,8^\circ \quad \text{b)}$$

que al igualar partes reales e imaginarias da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$S_T \cdot \cos 31,8^\circ = 0,85 \cdot S_T = 162,5 + 85,23 ; \quad S_T \cdot \sin 31,8^\circ = 0,527 \cdot S_T = 190 + Q_m \quad \text{c)}$$

cuyos resultados son:

$$S_T = \frac{162,5 + 85,23}{0,85} = 291,45 \text{ kVA} ; \quad Q_m = 0,527 \cdot 291,45 - 190 = -36,4 \text{ kVAr} \quad \text{d)}$$

Por tanto, la expresión compleja de la potencia suministrada por el motor síncrono es:

$$\underline{S}_m = (85,23 - j36,4) \approx 92,7 \angle 23,1^\circ$$

y su factor de potencia es:

$$\cos \varphi_m = \cos 23,1^\circ = 0,919$$

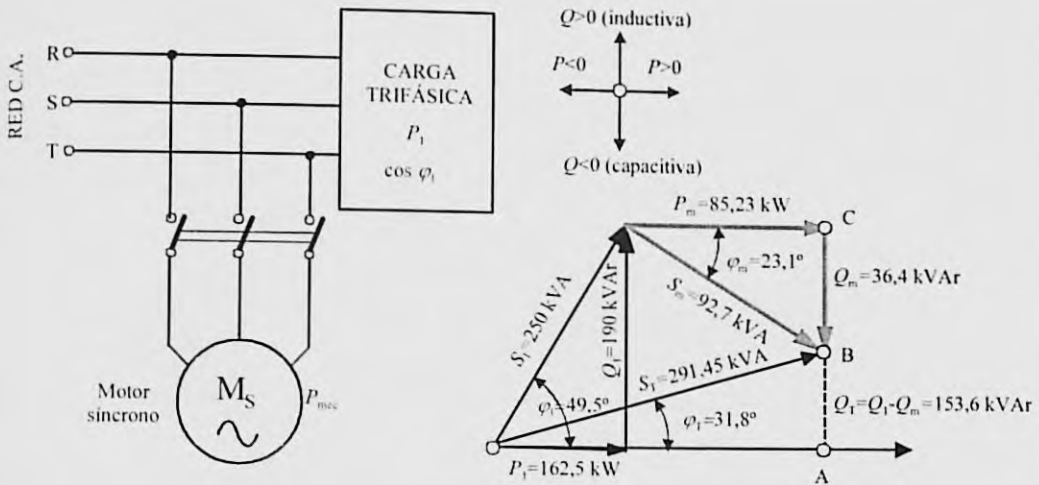


Figura 5.15

b) Si se toma la tensión simple de la red como referencia de fases, se pueden expresar los fasores de tensión y corriente del motor síncrono del modo siguiente:

$$\underline{U} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 219,39 \angle 0^\circ \text{ V}; \quad I = \frac{92700}{\sqrt{3} \cdot 380} = 140,84 \text{ A} \Rightarrow \underline{I} = 140,84 \angle 23,17^\circ \text{ A}$$

por lo que f.e.m. inducida por fase en el motor síncrono es:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - \underline{Z}I = 219,39 \angle 0^\circ - j 0,5 \cdot 140,84 \angle 23,17^\circ = 255,4 \angle -14,7^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de la tensión compuesta o de línea:

$$E_0 \text{ (línea)} = \sqrt{3} \cdot 255,4 = 442,4 \text{ V}$$

5.30. Una industria absorbe una potencia activa de 2000 kW, con f.d.p. 0,6 inductivo de una red de 6000 V. Se coloca un motor síncrono conectado en estrella que va a desarrollar una potencia mecánica de 400 kW, con rendimiento 0,8 para elevar el f.d.p. de la instalación a la unidad.

- Determinar la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p con el que trabaja.
- Si el motor tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $2 \Omega/\text{fase}$, con la curva de vacío determinada por la ecuación:

$$E_0 = \frac{9000I_c}{30 + I_c}$$

donde E_0 se expresa en voltios de línea, e I_c en amperios de excitación, calcular la f.e.m. E_0 del motor y la excitación necesaria en el inductor.

Solución

a) Como a industria absorbe 2000 kW con f.d.p. 0,6 inductivo (arcos $0,6 = 53,13^\circ$), la potencia reactiva será igual a $2000 \cdot \operatorname{tg} 53,13^\circ = 2666,67$ kVAr y la potencia compleja de la carga es:

$$\underline{S} = 2000 + j2666,67$$

El motor desarrolla una potencia mecánica de 400 kW. Como el rendimiento es 0,8, la potencia activa que debe absorber de la red es:

$$P = \frac{400}{0,8} = 500 \text{ kW}$$

por lo que la potencia compleja del motor síncrono se puede escribir del modo siguiente:

$$\underline{S}_m = 500 - jQ$$

De este modo, la potencia compleja del conjunto de la industria, (incluyendo el motor síncrono) vale:

$$\underline{S}_{\text{total}} = (2000 + j2666,67) + (500 - jQ)$$

Como el f.d.p. de toda la instalación es la unidad, significa que la parte imaginaria anterior es nula, por lo que la potencia reactiva del motor debe ser de $Q = 2666,67$ kVAr. En definitiva, la expresión compleja de la potencia del motor síncrono es:

$$\underline{S}_m = 500 - j2666,67 = 2713,1 \angle -79,38^\circ$$

es decir, el motor síncrono tiene una potencia compleja de 2713,1 kVA con un f.d.p.:

$$\cos 79,38^\circ = 0,184 \text{ capacitivo}$$

b) De acuerdo con el resultado anterior, la corriente que absorbe el motor síncrono de la red es:

$$I = \frac{2713100}{\sqrt{3} \cdot 6000} = 261,1 \text{ A}$$

y al tomar la tensión simple de la red como referencia de fases se tiene:

$$\underline{U} = \frac{6000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \text{ V}; \quad \underline{I} = 261,1 \angle 79,38^\circ \text{ A}$$

por lo que la f.e.m. inducida en el motor síncrono es:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{6000}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - j2 \cdot 261,1 \angle 79,38^\circ = 3464,1 \angle 0^\circ - 522,2 \angle 169,38^\circ = 3978,5 \angle -1,39^\circ \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de la tensión compuesta o de línea:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 3978,5 = 6891 \text{ V}$$

Llevando esta tensión a la curva de vacío, resulta una corriente de excitación en el motor:

$$6891 = \frac{9000 I_c}{30 + I_c} \Rightarrow I_c \approx 98 \text{ A}$$

5.31. Un alternador hidráulico de polos salientes de 1500 kVA, 3000 V, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una reactancia síncrona de eje directo $X_d = 2 \Omega$, y una reactancia síncrona en el eje en cuadratura $X_q = 1,5 \Omega$. Calcular la f.e.m. inducida cuando trabaja a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

$$\underline{E} = \underline{U} + jX_q I = 1732,1 \angle 0^\circ + j1,5 \cdot 288,7 \angle -36,87^\circ = 1992 + j346,35 \approx 2022 \angle 9,9^\circ$$

lo que significa que el ángulo de carga del alternador es de $9,9^\circ$. Si se tiene en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 5.16, el ángulo ψ que forman \underline{E}_0 e I vale:

$$\psi = \delta + \varphi = 9,9^\circ + 36,87^\circ = 46,77^\circ$$

El ángulo anterior permite descomponer la corriente de inducido I en sus componentes en el eje directo y cuadratura del alternador, lo que da lugar a:

$$I_d = I \sin \psi = 288,7 \cdot \sin 46,77^\circ \approx 198 \text{ A}; \quad I_q = I \cos \psi = 288,7 \cdot \cos 46,77^\circ \approx 210 \text{ A}$$

Para obtener la f.e.m. de vacío \underline{E}_0 se pueden sumar aritméticamente la magnitud de la f.e.m. E' con la magnitud $(X_d - X_q)I_d$, cuyo valor es:

$$(X_d - X_q)I_d = (2 - 1,5) \cdot 198 = 99 \text{ V}$$

por lo que la f.e.m. de vacío tiene una magnitud:

$$E_0 = E' + (X_d - X_q)I_d = 2022 + 99 = 2121 \text{ V}$$

y su expresión fasorial es:

$$\underline{E}_0 = 2121 \angle 9,9^\circ \text{ V/fase}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 2121 \approx 3674 \text{ V}$$

5.32. El alternador hidráulico del problema anterior trabaja en las condiciones señaladas, es decir generando una tensión de 2121 V/fase en una red de 3000 V de tensión compuesta.

- Calcular la potencia activa máxima que puede suministrar a la red.
- Determinar la máxima potencia aparente que puede entregar a la red.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.17 se muestra el diagrama fasorial de un alternador de polos salientes, en el que se ha elegido como referencia de fases la f.e.m. de vacío por fase. Por ello la expresión fasorial de la tensión simple de la red es de la forma $\underline{U} = U \angle -\delta$. Las magnitudes o módulos de las corrientes de eje directo y cuadratura se pueden obtener de forma muy simple a partir del diagrama fasorial de la figura y valen:

$$I_q = \frac{U \sin \delta}{X_q}; \quad I_d = \frac{E_0 - U \cos \delta}{X_d} \quad (a)$$

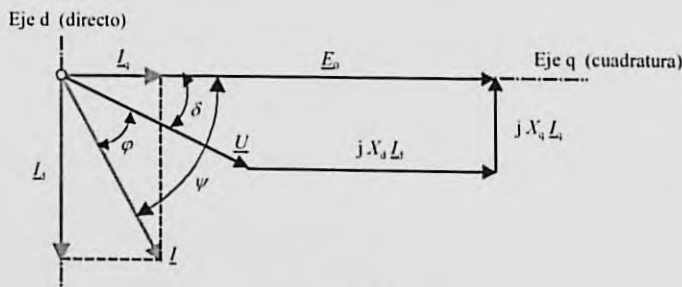


Figura 5.17

En consecuencia, el valor de la potencia compleja que entrega el generador a la red viene expresada por:

$$\underline{S} = 3 \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 3 \cdot U \angle -\delta \cdot (I_q \angle 0^\circ + I_d \angle -90^\circ) \quad (b)$$

que al sustituir los valores calculados en (a) resulta:

$$\underline{S} = 3 \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 3 U (\cos\delta - j \operatorname{sen}\delta) \left(\frac{U \operatorname{sen}\delta}{X_q} - j \frac{E_0 - U \cos\delta}{X_d} \right) \quad (c)$$

que operando nos da:

$$\underline{S} = 3 \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \operatorname{sen}\delta + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \operatorname{sen}2\delta \right] + j 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \operatorname{sen}\delta - U^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{X_q} + \frac{\operatorname{cos}^2\delta}{X_d} \right) \right] \quad (d)$$

Es decir, las expresiones de la potencia activa y reactiva que desarrolla un alternador de polos salientes vienen determinadas por las ecuaciones siguientes:

$$P = 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \operatorname{sen}\delta + \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \operatorname{sen}2\delta \right]; \quad Q = 3 \left[\frac{E_0 U}{X_d} \operatorname{sen}\delta - U^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2\delta}{X_q} + \frac{\operatorname{cos}^2\delta}{X_d} \right) \right] \quad (e)$$

a) En este problema, y de acuerdo con los datos y resultados del ejercicio anterior, se conocen los siguientes valores:

$$X_d = 2 \Omega; X_q = 1,5 \Omega; U = 1732,1 \text{ V}; E_0 = 2121 \text{ V}$$

por lo que, al sustituir los valores anteriores en la expresión de la potencia activa, resulta:

$$P = 3 \left[\frac{2121 \cdot 1732,1}{2} \operatorname{sen}\delta + \frac{1732,1^2}{2} \left(\frac{1}{1,5} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}2\delta \right] = 5,51 \operatorname{sen}\delta + 0,75 \operatorname{sen}2\delta \text{ MW}$$

Para que la potencia anterior sea máxima, la derivada con respecto al ángulo de carga debe ser cero, es decir:

$$\frac{dP}{d\delta} = 0 \Rightarrow 5,51 \operatorname{cos}\delta + 1,5 \operatorname{cos}2\delta = 0$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{cos}2\delta = \operatorname{cos}^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta = 2\operatorname{cos}^2\delta - 1$$

da lugar a la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3 \operatorname{cos}^2\delta + 5,51 \operatorname{cos}\delta - 1,5 = 0$$

de donde se deduce un ángulo $\delta \approx 76^\circ$. El lector puede comprobar que para este ángulo de carga, la potencia activa es máxima. Solamente tiene que calcular la derivada segunda de la potencia respecto a δ y ver que es negativa. Para este valor de δ , la potencia activa vale:

$$P_{\max} = 35,51 \cdot \operatorname{sen}76^\circ + 0,75 \cdot \operatorname{sen}152^\circ = 5,7 \text{ MW}$$

b) Para ver el valor de la potencia aparente máxima es preciso calcular el valor de la potencia reactiva para el mismo ángulo anterior, que da lugar a:

$$Q = 3 \left[\frac{2121 \cdot 1732,1}{2} \operatorname{sen}76^\circ - 1732,1^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 76^\circ}{1,5} + \frac{\operatorname{cos}^2 76^\circ}{2} \right) \right] = -4,06 \text{ MVar}$$

y por tanto, la potencia aparente máxima es:

$$S_{\max} = \sqrt{P_{\max}^2 + Q^2} = \sqrt{5,7^2 + 4,06^2} \approx 7 \text{ MVA}$$

5.33. Un motor síncrono trifásico de polos salientes conectado en estrella de 500 kVA, 400 V, tiene una resistencia de inducido despreciables y las reactancias síncronas de eje directo y cuadratura son, respectivamente $X_d = 0,32 \Omega$, $X_q = 0,2 \Omega$. Calcular la f.e.m. de línea cuando absorbe de la red la potencia de 500 kVA, con un f.d.p. 0,8 capacitivo.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.18 se muestra el diagrama fasorial de un alternador de polos salientes. La f.e.m. de vacío, si se desprecia la resistencia del inducido, viene expresada por la ecuación:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - jX_d I_d - jX_q I_q \tag{a}$$

expresión que se puede escribir del siguiente modo equivalente:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - jX_d I_d - jX_q I_q + (jX_q I_d - jX_q I_d) \tag{b}$$

es decir:

$$\underline{E}_0 = \underline{U} - jX_q (I_d + I_q) - j(X_d - X_q) I_d = \underline{U} - jX_q I - j(X_d - X_q) I_d \tag{c}$$

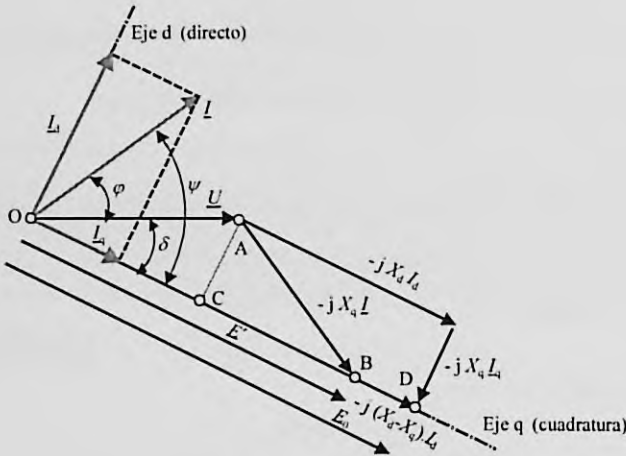


Figura 5.18

Denominando f.e.m. \underline{E}' a $\underline{U} - jX_q I$, la expresión (c) se puede poner así:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}' - j(X_d - X_q) I_d \tag{d}$$

Obsérvese, en la Figura 5.18, que el $-j(X_d - X_q) I_d$ tiene la misma dirección que la f.e.m. de vacío \underline{E}_0 , lo que permite definir la alineación de la f.e.m. anterior, que es la misma dirección que la f.e.m. \underline{E}' . En definitiva, la Figura 5.18 es un método inteligente de determinar la posición del fasor de f.e.m. Lo anterior implica que el ángulo de carga δ de la f.e.m. \underline{E}' es el mismo que el de la f.e.m. de vacío \underline{E}_0 .

En este problema la corriente de plena carga de alternador es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} U} = \frac{500000}{\sqrt{3} \cdot 400} = 721,7 \text{ A}$$

Si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red, las expresiones fasoriales de la tensión y de la corriente del alternador son, respectivamente:



$$\underline{U} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 230,94 \angle 0^\circ \text{ V} ; \underline{I} = 721,7 \angle +36,87^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la f.e.m. \underline{E}' vale:

$$\underline{E}' = \underline{U} - j X_q \underline{I} = 230,94 \angle 0^\circ - j 0,2 \cdot 721,7 \angle +36,87^\circ \approx 338 \angle -20^\circ \text{ V}$$

lo que significa que el ángulo de carga del alternador es de 20° . Si se tiene en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 5.18, el ángulo ψ que forman \underline{E}_0 e \underline{I} es:

$$\psi = \delta + \varphi = 20^\circ + 36,87^\circ = 56,87^\circ$$

El ángulo anterior permite descomponer la corriente de inducido \underline{I} en sus componentes en el eje directo y cuadratura del alternador, lo que da lugar a:

$$I_d = I \sin \psi = 721,7 \sin 56,87^\circ \approx 604,4 \text{ A} ; I_q = I \cos \psi = 721,7 \cos 56,87^\circ \approx 394,4 \text{ A}$$

Para obtener la f.e.m. de vacío \underline{E}_0 se pueden sumar *aritméticamente* la magnitud de la f.e.m. E' con la magnitud $(X_d - X_q)I_d$, cuyo valor es:

$$(X_d - X_q)I_d = (0,32 - 0,2) \cdot 604,4 = 72,5 \text{ voltios}$$

por lo que la f.e.m. de vacío tiene una magnitud:

$$E_0 = E' + (X_d - X_q)I_d = 338 + 72,5 = 410,5 \text{ V}$$

Su expresión fasorial es:

$$\underline{E}_0 = 410,5 \angle -20^\circ \text{ V/fase}$$

que corresponde a una tensión de línea:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 410,5 \approx 711 \text{ V}$$

5.34. Un alternador trifásico conectado en estrella de 100 kVA, 3 000 V, 50 Hz, está trabajando en vacío con la tensión nominal en sus bornes. De repente, se produce un cortocircuito trifásico en sus terminales. Si el generador tiene unas resistencias del inductor e inducido despreciables y las reactancias en valores por unidad son: reactancia síncrona: $X_s = 1$; reactancia síncrona transitoria: $X'_s = 0,4$; reactancia síncrona subtransitoria: $X''_s = 0,2$ y las constantes de tiempo son: constante de tiempo transitoria = 1 segundo; constante de tiempo subtransitoria = 0,03 segundos. Despreciando la componente de c.c. de la corriente, calcular:

- La corriente inicial de cortocircuito.
- La corriente al final de tres ciclos, de siete ciclos y al cabo de cinco segundos.

Solución

Teoría previa

En la Figura 5.19 se muestra un oscilograma de la componente de c.a. de cortocircuito, es decir, al haber eliminado la componente de c.c. La expresión matemática de esta señal es:

$$I_{\text{corto}}(t) = (I'' - I') e^{-t/T'} + (I' - I_{\text{corto}}) e^{-t/T} + I_{\text{corto}} \quad (\text{a})$$

En la expresión anterior, I' es la corriente transitoria de cortocircuito, I'' es la componente subtransitoria e I_{corto} es la corriente de cortocircuito permanente, y vienen definidas respectivamente por las expresiones siguientes:

$$I' = \frac{E_0}{X'_s} ; I'' = \frac{E_0}{X''_s} ; I_{\text{corto}} = \frac{E_0}{X_s} \quad (\text{b})$$

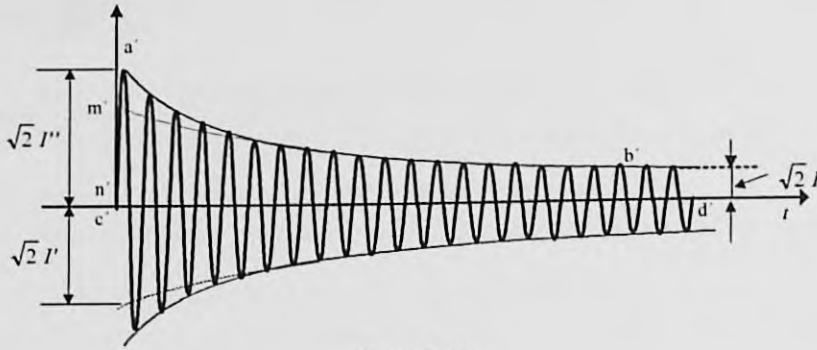


Figura 5.19

a) La corriente inicial de cortocircuito es, de acuerdo con el oscilograma de la Figura 5.19, la componente subtransitoria. En valores por unidad, la tensión entre terminales es la asignada, es decir 1 pu, y tomando la potencia del generador como base, la corriente base de los cálculos es:

$$I_{\text{base}} = \frac{100000}{\sqrt{3} \cdot 3000} \approx 19,25 \text{ A}$$

siendo la corriente subtransitoria, de acuerdo con (b):

$$I'' = \frac{E_0}{X_s'} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ p.u.}$$

que corresponde a un valor real de $5 \cdot 19,25 = 96,25 \text{ A}$.

b) La corriente transitoria de cortocircuito, de acuerdo con (b), tiene un valor:

$$I' = \frac{E_0}{X_s} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ p.u.}$$

y la corriente de cortocircuito permanente es:

$$I_{\text{corto}} = \frac{E_0}{X_s} = \frac{1}{1} = 1 \text{ p.u.}$$

De este modo, el valor instantáneo de la corriente de cortocircuito de acuerdo con (a), vale:

$$I_{\text{corto}}(t) = 2,5e^{-t/0,03} + 1,5e^{-t} + 1$$

Como la frecuencia del alternador es $f = 50 \text{ Hz}$, el periodo correspondiente es $T = 1/f = 20 \text{ ms}$, por lo que tres ciclos equivalen a 60ms, que al llevar a la expresión anterior nos da:

$$I_{\text{corto}}(t = 60 \text{ ms}) = 2,5e^{-0,06/0,03} + 1,5e^{-0,06} + 1 \approx 0,34 + 1,41 + 1 = 2,75 \text{ p.u.}$$

Al final de siete ciclos, es decir, 140 ms, la corriente de cortocircuito vale:

$$I_{\text{corto}}(t = 0,140 \text{ s}) = 2,5e^{-0,140/0,03} + 1,5e^{-0,140} + 1 \approx 0,024 + 1,3 + 1 = 2,324 \text{ p.u.}$$

y al cabo de cinco segundos, la corriente de cortocircuito vale:

$$I_{\text{corto}}(t = 5 \text{ s}) = 2,5e^{-5/0,03} + 1,5e^{-5} + 1 \approx 0 + 0,01 + 1 = 1,01 \text{ p.u.}$$

es decir, prácticamente la corriente de cortocircuito permanente.

5.35. En la Figura 5.20 se muestra una instalación trifásica que se compone de un alternador de A.T. a principio de línea, un transformador reductor y una red de B.T. de impedancia total $0,06 + j 0,08 \Omega/\text{hilo}$, que alimenta al final de la misma a un motor asíncrono trifásico, existiendo en el punto mitad de esta red de B.T. un motor síncrono que se utiliza para mover una carga mecánica y además para corregir la potencia reactiva de la instalación.

Las especificaciones de las máquinas eléctricas mostradas en la Figura 5.20 son las siguientes:

- Transformador: potencia: 400 kVA, conexión Yy0, relación 6600/440 V, $P_{cc} = 6 \text{ kW}$; $\epsilon_{cc} = 4\%$; $I_0 =$ despreciable.
- Motor asíncrono: potencia mecánica: 200 kW, 400 V, 4 polos, 50 Hz, conexión estrella, velocidad 1440 r/min. Se sabe además que la impedancia del estátor es despreciable y que la reactancia del rotor es 12 veces la resistencia del mismo. Las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío son despreciables.
- Motor síncrono: potencia: 150 kVA, 400 V, 8 polos, 50 Hz, conexión estrella. Las pérdidas mecánicas y en el hierro son despreciables.
- Alternador: potencia: 400 kVA, 6600 V, 6 polos, 50 Hz, conexión estrella. Impedancia síncrona: $2 + j8 \Omega/\text{fase}$. La curva de vacío del alternador está definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{16000 I_e}{12 + I_e}$$

siendo E_0 la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación del alternador.

Se considera en todo el problema, que el motor asíncrono o de inducción conectado al final de línea, funciona a plena carga, es decir desarrolla una potencia mecánica de 200 kW cuando gira a 1440 r/min.

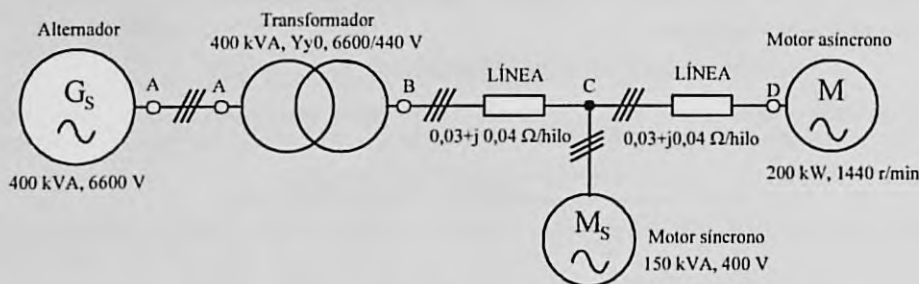


Figura 5.20

- Si la tensión en bornes del motor asíncrono o de inducción es la asignada de 400 V, calcular la tensión que debe existir en los bornes del motor síncrono para que se cumplan las especificaciones de funcionamiento del motor asíncrono.
- Calcular la potencia aparente y el f.d.p. con el que trabaja el motor síncrono, sabiendo que absorbe de la red una potencia activa de 60 kW y que debe elevar el f.d.p. de la instalación en el punto de conexión C a la unidad.
- Calcular la tensión secundaria del transformador para que el motor asíncrono funcione a plena carga y a su tensión nominal de 400 V de línea, teniendo en cuenta el consumo existente a mitad de la línea del motor síncrono.
- Calcular en el caso anterior la tensión primaria del transformador.
- Calcular la corriente de excitación necesaria en el alternador para que funcione toda la instalación en las condiciones señaladas.

Solución

a) El circuito equivalente por fase del motor asíncrono reducido al estator es el mostrado en la Figura 5.21. Teniendo en cuenta que tiene 4 polos y que la frecuencia es de 50 Hz, la velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ r/min} \quad (1)$$

y como gira a una velocidad de 1440 r/min, el deslizamiento correspondiente es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 4\% \quad (2)$$

Como la tensión compuesta en bornes del motor es de 400 voltios, y está conectado en estrella, la tensión simple vale $U_m = U_1 = 400/\sqrt{3}$. Si se toma esta tensión como referencia de fases, y sabiendo que la reactancia del rotor es doce veces su resistencia, la corriente que absorbe el motor con un deslizamiento del 4 % es:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{\frac{R_2}{0,04} + jX_2'} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{25R_2 + j12R_2} \text{ A} \quad (3)$$

Como la potencia mecánica a plena carga es de 200 kW, al ser esta la potencia absorbida por la resistencia de carga, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$P_m = 200\,000 = 3R_c I_1^2 = 3 \cdot R_2 \left(\frac{1}{0,04} - 1 \right) \frac{(400/\sqrt{3})^2}{(25R_2)^2 + (12R_2)^2} \quad (4)$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$R_2 = 0,025 \Omega; \quad X_2' = 12R_2 = 0,3 \Omega \quad (5)$$

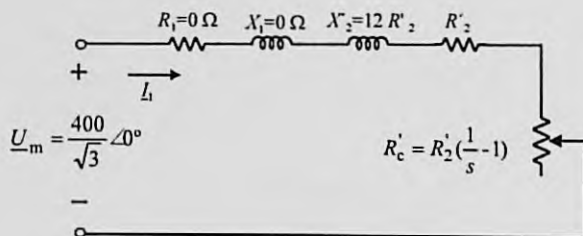


Figura 5.21

Llevando estos resultados a la ecuación (3), resulta una corriente compleja en el motor:

$$I_1 = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ}{0,625 + j0,3} = 333,12 \angle -25,64^\circ \text{ A} \quad (6)$$

De acuerdo con la Figura 5.20, la tensión en los bornes del motor síncrono es la tensión en el nudo C de la red, y la tensión en el motor asíncrono o de inducción, es la tensión en el nudo D. Si se continúa tomando la tensión en este nudo como referencia de fases, la tensión simple en el nudo C es igual a la tensión en el nudo D más la caída de tensión en la impedancia de línea en el tramo CD, es decir:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_D + (R_{CD} + jX_{CD}) \cdot \underline{I}_1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,03 + j0,04) \cdot 333,12 \angle -25,64^\circ = 245,83 \angle 1,8^\circ \text{ V} \quad (7)$$

Es decir, la tensión simple en el nudo C es de 245,83 voltios que corresponde a una tensión compuesta:

$$U_C (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 245,83 = 425,8 \text{ V} \quad (8)$$

b) En el nudo C, se tiene, por tanto, una potencia activa total (sin tener en cuenta la carga del motor síncrono) de valor:

$$P = 3 U_C I_1 \cos(1,8^\circ + 25,64^\circ) = 3 \cdot 245,83 \cdot 333,12 \cdot \cos 27,44^\circ \approx 218 \text{ kW} \quad (9)$$

donde se ha tenido en cuenta que la tensión forma con la corriente un ángulo de $27,44^\circ$. La potencia anterior puede comprobarse sumando las potencias siguientes: mecánica del motor asíncrono, más pérdidas en el cobre del motor asíncrono, más pérdidas en el tramo de la línea CD, es decir:

$$P = P_{mi} + 3R_L I_1^2 + 3R_2 I_1^2 = 200000 + 3 \cdot 0,03 \cdot 333,12^2 + 3 \cdot 0,025 \cdot 333,12^2 = 218,3 \text{ kW} \approx 218 \text{ kW} \quad (10)$$

que coincide con la anterior (salvo errores de redondeo). En definitiva, la carga que se ve desde el nudo C hacia la derecha de la Figura 5.20 es una potencia activa de 218 kW, con un ángulo inductivo de $27,44^\circ$. Esto significa una potencia compleja:

$$\underline{S}_{\text{carga}} = 218 + j218 \cdot \text{tg} 27,44^\circ = 218 + j113,2 \text{ kVA}$$

Como quiera entonces que en el nudo C se conecta un motor síncrono que absorbe una potencia activa de 60 kW y que debe elevar el f.d.p. total hasta la unidad, la potencia total compleja $\underline{S}_{\text{total}}$ que entra al nudo C, por el tramo de línea BC deberá ser la suma compleja siguiente:

$$\underline{S}_{\text{total}} = \underline{S}_{\text{carga}} + \underline{S}_{\text{síncrono}} = (218 + j113,2) + (60 + jQ_{\text{síncrono}}) \text{ kVA} \quad (11)$$

que debe dar como resultado un número real, ya que el motor síncrono ha de compensar la potencia reactiva que existe a la derecha del punto C. Por consiguiente, es evidente que la potencia compleja del motor síncrono deberá ser:

$$\underline{S}_{\text{síncrono}} = 60 - j113,2 = 128,12 \angle -62,07^\circ \text{ kVA} \quad (12)$$

Es decir, el motor síncrono trabaja absorbiendo una potencia aparente de 128,12 kVA, con un f.d.p. capacitivo igual al $\cos 62,07^\circ = 0,468$.

c) Recapitulando los cálculos hasta el momento, en el nudo C existe una potencia compleja total, de acuerdo con (11) y (12):

$$\underline{S}_{\text{total}} = 278 + j0 \text{ kVA} \quad (13)$$

Para mayor sencillez en los cálculos, es interesante ahora tomar la tensión en el nudo C como referencia de fases, de modo que la corriente total que llega a este nudo está en fase con la tensión, debido a la acción correctora del motor síncrono. La corriente total que debe llegar por el tramo BC se puede obtener de un modo simple, sabiendo que la potencia que llega a C es de 278 kW con f.d.p. unidad y, por consiguiente, se tiene una corriente que vamos a denominar I_{BC} que vale:

$$I_{BC} = \frac{278000}{3 \cdot 245,83 \cdot 1} = 376,95 \text{ A} \quad (14)$$

Vamos a determinar, a continuación, la tensión en el nudo B, es decir, en el secundario del transformador. Para ello, a la tensión en el nudo C habrá que sumar la caída de tensión en el tramo BC de la línea. Teniendo en cuenta la referencia de fases que se ha señalado, se cumple:

$$\underline{U}_B = \underline{U}_C + (R_{BC} + jX_{BC}) \cdot \underline{I}_{BC} = 245,83 \angle 0^\circ + (0,03 + j0,04) \cdot 376,95 \angle 0^\circ = 257,6 \angle 3,4^\circ \text{ V} \quad (15)$$

Es decir, la tensión compuesta en el secundario del transformador es:

$$U_B (\text{línea}) = U_2 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 257,6 = 446,1 \text{ V} \quad (16)$$

d) Antes de comenzar a resolver este apartado, debe calcularse la impedancia de cortocircuito del transformador a partir de los datos del fabricante. Se va a determinar esta impedancia reducida al primario del transformador. Téngase en cuenta que la caída de tensión relativa de cortocircuito del transformador es del 4% y que las pérdidas en cortocircuito son de 6 kW. Como quiera que el transformador es de 400 kVA y la tensión asignada de primario es de 6 600 V, la corriente nominal o asignada al primario es:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{\sqrt{3} U_{1N}} = \frac{400\,000}{\sqrt{3} \cdot 6\,600} \approx 35 \text{ A} \quad (17)$$

y de la definición de caída de tensión relativa en la impedancia de cortocircuito, se tiene:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{Z_{cc1} I_{1N}}{U_{1N}} \Rightarrow 0,04 = \frac{Z_{cc1} \cdot 35}{6\,600 / \sqrt{3}} \Rightarrow Z_{cc1} = 4,35 \, \Omega \quad (18)$$

Teniendo en cuenta el valor de las pérdidas en cortocircuito (es decir con corriente de plena carga), denominando R_{cc1} a la resistencia de cortocircuito del transformador reducida al primario, se cumple:

$$P_{cc} = 3R_{cc1} I_{1N}^2 \Rightarrow 6\,000 = 3R_{cc1} \cdot 35^2 \Rightarrow R_{cc1} = 1,63 \, \Omega \quad (19)$$

y con estos resultados se puede calcular la reactancia de cortocircuito del transformador reducida al primario del siguiente modo:

$$X_{cc1} = \sqrt{Z_{cc1}^2 - R_{cc1}^2} = \sqrt{4,35^2 - 1,63^2} = 4,03 \, \Omega \Rightarrow \underline{Z}_{cc1} = 1,63 + j4,03 \, \Omega \quad (20)$$

Además, la relación de transformación y la corriente reducida al primario son, respectivamente:

$$r_t = \frac{6\,600}{440} = 15 \Rightarrow \frac{\underline{I}_{BC}}{r_t} = \frac{376,95 \angle 0^\circ}{15} = 25,13 \angle 0^\circ \text{ A} \quad (21)$$

por lo que la tensión primaria se calculará de este modo:

$$U_1 = r_t \underline{U}_2 + (R_{cc1} + jX_{cc1}) \cdot \frac{\underline{I}_{BC}}{r_t} = 15 \cdot 257,6 \angle 3,4^\circ + (1,63 + j4,03) \cdot 25,13 \angle 0^\circ \approx 3\,911,8 \angle 4,8^\circ \text{ V} \quad (22)$$

que corresponde a una tensión compuesta en el primario del transformador, es decir, en el nudo A de entrada de la Figura 5.20:

$$U_1 (\text{línea}) = U_A (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 3\,911,8 = 6\,775,4 \text{ V} \quad (23)$$

e) La tensión anterior es la que existe en bornes del alternador y teniendo en cuenta el valor de su impedancia síncrona, la f.e.m. necesaria en el alternador debe ser:

$$\underline{E}_0 = \underline{U}_A + (R + jX_s) \cdot \frac{\underline{I}_{BC}}{r_t} = 3\,911,8 \angle 4,8^\circ + (2 + j8) \cdot 25,13 \angle 0^\circ \approx 3\,983,6 \angle 7,6^\circ \text{ V} \quad (24)$$

que corresponde a una f.e.m. compuesta en el alternador:

$$E_0 (\text{línea}) = \sqrt{3} \cdot 3\,983,6 \approx 6\,900 \text{ V} \quad (25)$$

Para generar la f.e.m. anterior, es necesaria una corriente de excitación, que se obtiene de la curva de vacío del transformador del siguiente modo:

$$E_0 = \frac{16\,000 \cdot I_e}{12 + I_e} \Rightarrow 6\,900 = \frac{16\,000 \cdot I_e}{12 + I_e} \Rightarrow I_e \approx 9,1 \text{ A} \quad (26)$$

que es el resultado solicitado.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

5.36. Un alternador trifásico, conectado en estrella, de 250 kVA, 400 V, 10 polos, 50 Hz, gira a 600 r/min, generando la tensión de 400 V en vacío. Se provoca a continuación un cortocircuito en los terminales del inducido dando lugar a una corriente en el mismo de 1000 A. La resistencia del inducido es despreciable. Calcular:

- La impedancia síncrona.
- La regulación de la tensión del generador cuando trabaja a plena carga a la tensión de 400 V, con un f.d.p. 0,8 inductivo.

Resp. a) 0,231 Ω ; b) 25%

5.37. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido de 2 Ω /fase. La curva de vacío se puede aproximar por la siguiente ecuación:

$$E_0 = \frac{9000 I_c}{30 + I_c}$$

en la que E_0 es la f.e.m. de línea e I_c la corriente de excitación correspondiente. La característica de cortocircuito está definida por la ley lineal $I_{cc} = 6 I_c$ (I_{cc} : corriente de cortocircuito del inducido; I_c : corriente de excitación). Calcular:

- La impedancia síncrona.
- La reactancia síncrona.
- La regulación a plena carga, con f.d.p. 0,8 inductivo, unidad y 0,8 capacitivo.

Resp. a) 7,7 Ω ; b) 7,44 Ω ; c) 22%; 9,9%; -6,6%

5.38. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1000 kVA, 6600 V, 10 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido de 3 Ω /fase. El ensayo de vacío ha dado el resultado siguiente:

I_e (A)	10	20	30	40	50	60
E_0 (línea)	3300	5280	6600	7520	8050	8510

Se requiere una corriente de 10 A en la excitación para que circule la corriente de plena carga en el inducido cuando está en cortocircuito. El devanado de excitación tiene una resistencia por polo de 4 Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son de 50 kW. Si el generador funciona a plena carga con un f.d.p. unidad, calcular:

- La regulación de la tensión correspondiente;
- El rendimiento del generador.

Resp. a) 11,8%; b) 85,3%

5.39. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

I_e (A)	4	8	12	16	20	24	28	32
E_0 (línea)	1850	3700	5015	5940	6600	7130	7590	7990

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga con una excitación de 4 A. Además, en un ensayo con carga inductiva pura a la tensión asignada de 6600 V de línea y con corriente de plena carga en el inducido, se necesitó una corriente de excitación de 27 A. La resistencia del inducido es de $0,5 \Omega$ /fase. Calcular la f.e.m. necesaria en vacío y la regulación de la tensión del alternador por los siguientes procedimientos:

- Método de la impedancia síncrona.
- Método de Potier.

Resp. a) 7546,5 V; 14,34% b) 7260 V; 10%

- 5.40. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, tiene una impedancia síncrona de valor $Z_s = 0,5 + j 5 \Omega$ /fase y funciona a plena carga y a la tensión nominal asignada con f.d.p. 0,8 inductivo. Sin cambiar la excitación y con la misma corriente de carga alimenta una instalación que tiene un f.d.p. 0,8 capacitivo, ¿cuál será la tensión en bornes del alternador?

Resp. 7947 V

- 5.41. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1500 kVA, 6600 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

F_{me} (At/polo)	1200	2100	2700	3300	4200	5400
E_0 (línea)	3760	5540	6270	6930	7590	8250

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga con una f.m.m. de excitación de 100 At/polo. La resistencia del inducido es de $0,6 \Omega$ /fase y la reactancia de dispersión de $2,4 \Omega$ /fase. Calcular la f.m.m. necesaria en los polos cuando el generador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Resp. 4557 At/polo

- 5.42. Un turbogenerador síncrono trifásico con conexión en estrella, se conecta a una red de potencia infinita de 10 kV, 50 Hz, y suministra a la misma una corriente de 500 A con f.d.p. unidad. La impedancia síncrona del alternador es $Z_s = 2 + j 6 \Omega$ /fase. Calcular:

- El ángulo de carga con el que trabaja el alternador.
- El nuevo ángulo de carga, la nueva corriente de inducido y el f.d.p. con el que trabaja la máquina, cuando se eleva la corriente de excitación un 20 por ciento, sin cambiar la entrada de vapor de la turbina que mueve el generador.

Nota: el circuito magnético es lineal.

Resp. a) 23,9° eléctricos; b) 15,7° eléctricos; 582,2 A; 0,859 inductivo

- 5.43. Dos alternadores trifásicos idénticos conectados en estrella tienen una impedancia síncrona $Z_s = 0 + j 10 \Omega$ /fase y trabajan en paralelo en una pequeña red aislada. Las f.e.m. por fase generadas son $E_1 = 223$ V y $E_2 = 216$ V; estando E_2 adelantada respecto a E_1 un ángulo de 10° eléctricos. Se sabe además que la corriente de carga es de 16 A y está retrasada respecto a E_1 un ángulo de $36,87^\circ$. Calcular:

- a) El f.d.p. de la carga.
 b) La tensión común en la carga.
 c) Las corrientes suministradas por cada generador y sus f.d.p. respectivos.

Resp. a) 0,93; b) 175,8 V; c) 7 A, f.d.p. 0,822; 9,32 A; f.d.p. 0,976

- 5.44. Dos alternadores trifásicos idénticos trabajan en paralelo alimentando una impedancia de carga $Z_L = 7,5 + j 10 \Omega/\text{fase}$. Las impedancias síncronas de los alternadores son $Z_s = 0,5 + j 2,5 \Omega/\text{fase}$. Si la f.e.m. del primero es de 230 V y la del segundo de 250 V y están en fase, calcular:

- a) La tensión en la carga.
 b) Las potencias activas que suministran los generadores a la carga.

Resp. a) 219,6 V; b) 0,95 kW; 1,36 kW

- 5.45. Dos alternadores idénticos conectados en estrella de 10 kV, tienen una impedancia síncrona $Z_s = 5 + j 50 \Omega/\text{fase}$ y alimentan una carga que absorbe 1400 kW a 10 kV, con f.d.p. 0,8 inductivo. Ambos alternadores suministran la misma potencia activa y la excitación del primero de ellos se ajusta para que su corriente de inducido sea de 45 A y de carácter inductivo. Calcular:

- a) La corriente que entrega a la carga el segundo alternador.
 b) El f.d.p. con el que trabaja cada alternador.
 c) La f.e.m. de línea del primer alternador.

Resp. a) 57,4 A; b) 0,898 inductivo; 0,704 inductivo; c) 12516,5 V

- 5.46. Un alternador trifásico conectado en estrella está acoplado a una red de potencia infinita de 10 kV. La curva de vacío está expresada por la siguiente ecuación aproximada:

$$E_0 = \frac{26\,000 I_e}{135 + I_e}$$

donde E_0 representa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación correspondiente. La impedancia síncrona es $Z_s = 2 + j 10 \Omega/\text{fase}$. Calcular la potencia activa suministrada a la red si la corriente de excitación es de 150 A y el ángulo de carga es de 30° .

Resp. 6,9 MW

- 5.47. Dos alternadores hidráulicos trifásicos conectados en estrella de 50 Hz están acoplados en paralelo alimentando una carga conjunta de 200 MW, con f.d.p. 0,8 inductivo. Las ecuaciones de los reguladores de las turbinas respectivas, responden a las ecuaciones siguientes:

$$f_1 = 51 - \frac{P_1}{140} ; f_2 = 50,7 - \frac{P_2}{150}$$

donde f_1 y f_2 son las respectivas frecuencias en Hz, y P_1 y P_2 las potencias correspondientes en MW. Calcular:

- a) Las potencias activas suministradas por cada alternador.
 b) La frecuencia en hercios a la que trabaja el conjunto.
 c) Se desea que los grupos funcionen exactamente a la frecuencia asignada de 50 Hz, para ello se ajusta el primer regulador para que siga la ley:

$$f_1 = A - \frac{P_1}{140}$$

¿Cuál debe ser el valor de A para conseguir este objetivo? ¿Cómo se repartirán entonces la potencia de 200 MW entre los dos alternadores?

Resp. a) $P_1 = 118,3$ MW; $P_2 = 81,7$ MW; b) 50,155 Hz;
 c) $A = 50,68$; $P_1 = 95$ MW; $P_2 = 105$ MW

- 5.48.** Un alternador hidroelectrico trifásico de 40 polos debe conectarse a una red de potencia infinita, de tensión constante y de 50 Hz. Entre las fases R, S y T del alternador y las fases R, T y S de la red de potencia infinita, respectivamente, se conectan tres lámparas, utilizadas para realizar la operación de sincronización para la puesta en paralelo. Si las lámparas lucen 24 veces por minuto, determinar la velocidad del alternador.

Resp. 148,8 r/min o 151,2 r/min según que el sentido de iluminación de las lámparas sea a derechas o a izquierdas; estas velocidades corresponden a las frecuencias de 49,6 Hz o 50,4 Hz generada por el alternador

- 5.49.** Dos turbogeneradores trifásicos de 50 Hz están acoplados en paralelo, alimentando una carga conjunta de 300 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. El generador 1 tiene una frecuencia en vacío de 51,5 Hz y una constante de su regulador de velocidad de 200 MW/Hz. El segundo generador tiene una frecuencia en vacío de 51 Hz, con la misma constante del regulador. Calcular:

- a) Las potencias activas suministradas por cada generador.
 b) La frecuencia a la que trabaja el conjunto.
 c) Si se conecta una carga adicional de 100 MW ¿cuáles serán los valores de las potencias activas suministradas por cada generador y la frecuencia común de funcionamiento?

Resp. a) 200 MW, 100 MW; b) 50,5 Hz;
 c) 250 MW, 150 MW, 50,25 Hz

- 5.50.** Un alternador hidráulico trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 4Ω /fase. Está conectado a una red de potencia infinita de 6,6 kV de tensión compuesta, entregando una potencia de 2 MVA, con f.d.p. 0,8 inductivo. Se abre el distribuidor de agua de la turbina que mueve el generador hasta que la máquina entrega a la red una potencia de 6 MVA.

- a) ¿Cuál es la variación del ángulo de carga del generador?
 b) Si cuando entrega a la red la potencia de 6 MVA se reduce la excitación un 20%, ¿cuál será el nuevo ángulo de carga del alternador?
 c) Calcular en el caso anterior, la corriente que entrega el generador a la red y el f.d.p. con el que trabaja.

Nota: se supone un circuito magnético lineal.

Resp. a) El ángulo de carga oscila entre $7,5^\circ$ eléctricos cuando el generador produce una potencia de 2 MVA, hasta $29,4^\circ$ eléctricos cuando entrega a la red una potencia de 6 MVA. b) $37,9^\circ$ eléctricos. c) 594,5 A; 0,883 capacitivo

- 5.51. Un alternador hidráulico trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $6 \Omega/\text{fase}$. Está conectado a una red de potencia infinita de 10 kV, de tensión compuesta. En un momento determinado el alternador entrega a la red una potencia activa de 4 MW, con f.d.p. 0,8 inductivo. Si la posición del regulador de la turbina no se modifica, calcular el tanto por ciento de variación en la corriente de excitación que se requiere para elevar el f.d.p. con el que trabaja el alternador a la unidad.

Nota: se supone un circuito magnético lineal.

Resp. Reducción del 14,6 por ciento en la excitación respecto al valor inicial

- 5.52. Un turbogenerador trifásico conectado en estrella, de 1000 kVA, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $2 \Omega/\text{fase}$. Está conectado a una red de potencia infinita de 3 kV de tensión compuesta, entregando una potencia de 600 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. Si se aumenta la corriente un 30% aumentando la entrada de vapor a la turbina, sin cambiar la excitación, calcular:
- La variación del ángulo de carga del turbogenerador.
 - La potencia activa y reactiva que entrega a la red en la situación final.

Resp. a) El ángulo de carga oscila entre $6,9^\circ$ eléctricos cuando el generador produce una potencia de 600 kW, hasta $10,3^\circ$ eléctricos cuando se reduce la excitación pero entregando la misma potencia. b) 893 kW; 392 kVAr.

- 5.53. Un alternador de polos salientes conectado en estrella de 270 kVA, 400 V, tiene unas reactancias de eje directo y cuadratura $X_d = 0,8 \Omega$ y $X_q = 0,6 \Omega$ y alimenta a una carga resistiva que consume 390 A. La curva de vacío viene expresada por:

$$E_0 = \frac{1800I_c}{70 + I_c} \quad (E_0: \text{f.e.m. de línea}; I_c: \text{corriente de excitación})$$

Calcular:

- La regulación de la tensión del alternador en este régimen.
- La corriente de excitación requerida por el alternador.

Resp. a) 41 A; b) 66,4%

- 5.54. Un generador síncrono trifásico de rotor cilíndrico conectado en estrella está acoplado a una red de potencia infinita de 10 kV, 50 Hz y suministra a la misma una corriente de 500 A con f.d.p. unidad. La impedancia síncrona del alternador $Z_s = 2 + j 6 \Omega/\text{fase}$. Calcular:
- El ángulo de carga.
 - El nuevo ángulo de carga, la nueva corriente y el f.d.p. con el que trabaja la máquina cuando se eleva la corriente de excitación un 20%, pero sin cambiar la entrada de vapor a la turbina que mueve el generador.

Nota: el circuito magnético es lineal.

Resp. a) $25,6^\circ$ eléctricos; b) $15,7^\circ$ eléctricos; 582,2 A; 0,859 inductivo

- 5.55. Un motor síncrono conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $2 \Omega/\text{fase}$. Está conectado a una red trifásica de 2000 V de línea. Al mover un cierto par resistente, se observa que absorbe de la red una potencia activa de 800 kW, siendo la f.e.m. inducida de línea correspondiente de 2450 V. Calcular:
- La corriente de línea, el ángulo de carga y el f.d.p. con el que trabaja el motor.
 - El nuevo ángulo de carga y las potencias activa y reactiva que el motor absorbe de la red, si se aumenta un 30% la corriente de excitación del motor sin cambiar el par resistente.
 - Repetir el apartado anterior si se reduce un 30% la corriente de excitación.

Resp. a) 248,3 A; $\delta = 19^\circ$; 0,93 capacitivo;
b) $14,6^\circ$; 800 kW; -1083 kVAr ; c) $27,8^\circ$; 800 kW; $+483,2 \text{ kVAr}$

- 5.56. Un motor síncrono de 4 polos, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de $4 \Omega/\text{fase}$. Está conectado a una red trifásica de 400 V de línea. Al mover un cierto par resistente se observa que absorbe de la red una corriente de 15 A con f.d.p. unidad. Sin modificar la excitación, se aumenta el par de carga hasta que la corriente absorbida es de 60 A. Calcular, en esta situación:
- Las potencias activa y reactiva absorbida de la red y el f.d.p. con el que trabaja el motor.
 - El par desarrollado si se desprecian las pérdidas del motor.

Resp. a) 36,3 kW; $+20,2 \text{ kVAr}$; 0,863 inductivo; b) 231,1 N·m

- 5.57. La reactancia síncrona en valor por unidad y las constantes de tiempo de un generador síncrono de 50 Hz, son las siguientes: $X_s = 1,25 \text{ pu}$; $X_s' = 0,27 \text{ pu}$; $X_s'' = 0,2 \text{ pu}$; $T = 0,3 \text{ segundos}$; $T' = 0,05 \text{ segundos}$; $T'' = 1 \text{ segundo}$. Con el generador funcionando en vacío a su tensión asignada, se produce un cortocircuito trifásico en sus terminales,
- Determinar la expresión de la corriente instantánea de cortocircuito;
 - Calcular el valor de la corriente de cortocircuito al cabo de dos ciclos.

Nota: despreciese la componente de c.c. de la corriente de cortocircuito.

Resp. a) $i(t) = 1,3e^{-t} + 2,9e^{-20t} + 0,8$; b) 3,35 pu

- 5.58. Un motor de inducción trifásico, conectado en estrella, de 1000 V, 50 Hz, tiene el rotor en jaula de ardilla con una relación de transformación de $r_m = r_l = 3,6$. La resistencia del rotor por fase es de $0,01 \Omega$ y la inductancia de $0,32 \text{ mH}$. Se desprecian las pérdidas mecánicas y en el hierro y también la impedancia del estator del motor. Calcular:
- La corriente de arranque del rotor cuando se alimenta el motor a la tensión asignada de 1000 V de línea.
 - El factor de potencia del rotor en el arranque.
 - La corriente del rotor con el 3% de deslizamiento y potencia mecánica útil correspondiente (que se considera que corresponde al régimen de plena carga).
 - Este motor recibe la tensión de alimentación de un alternador conectado en estrella, que gira a 500 r/min para dar la frecuencia asignada de 50 Hz, y que tiene una característica de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{1800I_e}{0,5I_e + 1,5}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea generada por el alternador e I_e , la intensidad de excitación correspondiente; la resistencia interna del inducido del alternador es despreciable, la reactancia síncrona media es de $0,75 \Omega/\text{fase}$ y las bobinas inductoras tienen una resistencia de 10Ω por polo; si el motor funciona con el mismo par resistente que en el apartado anterior, calcular la tensión compuesta que debe aplicarse al motor para que gire a la mitad de la velocidad de plena carga.

- e) Calcular la excitación necesaria en el alternador en la situación del apartado anterior y la tensión continua que debe aplicarse a las bobinas inductoras en estas condiciones.

Resp. a) 1 591 A; b) 0,1; c) 459,4 A; 205,4 kW; d) 1 213 V; e) 3,32 A; 398,4 V

- 5.59. Se tienen tres motores trifásicos asíncronos iguales, conectados en estrella, que absorben cada uno de ellos a plena carga, y a la tensión asignada de 3 000 V de línea, una corriente de 1 020 A, con f.d.p. 0,896 inductivo. Estos motores son alimentados por otros tantos transformadores trifásicos idénticos cuyos datos asignados son: 5 500 kVA, 15 000/3 000 V, conexión Yy0, $\varepsilon_{cc} = 8\%$, $P_{cc} = 110$ kW, I_0 despreciable. Los primarios de los transformadores están unidos a las barras de distribución de un generador síncrono cuyas características son las siguientes: potencia, 20 MVA; conexión en estrella; frecuencia, 50 Hz; número de polos, 2; tensión compuesta asignada, 15 000 V; resistencia del inducido despreciable; reactancia síncrona media por fase, 2Ω , con una curva de vacío definida por la siguiente tabla de valores:

E_0 (compuesta) en kV	6,6	11,3	13,6	15,5	17,2	17,9	18,4
AV polo de excitación	1000	1800	2400	3000	4000	4500	5000

Se pide:

- La impedancia de cortocircuito de cada uno de los transformadores reducida al primario.
- La tensión que debe proporcionar el generador síncrono, en barras para obtener en los secundarios de los transformadores las condiciones exigidas por los motores asíncronos.
- La f.e.m. en vacío de línea del alternador y la excitación por polo necesaria para que los motores funcionen en el régimen de funcionamiento señalado.

Resp. a) $Z_{cc1} = 0,82 + j 3,17 \Omega/\text{fase}$;
b) 15 781 V; c) 16 927 V; 3 820 A/polo

- 5.60. Una red trifásica de 1 732 V de línea y 50 Hz alimenta a un motor asíncrono conectado en estrella, que gira a una velocidad de 2 910 r/min. De los ensayos efectuados al motor se conocen los siguientes parámetros de su circuito equivalente:

$$R_1 = R_2' = 0,05 \Omega \quad ; \quad X_1 + X_2' = 1,02 \Omega$$

Se sabe también que las pérdidas mecánicas son de 60 kW y la corriente de vacío despreciable. Calcular:

- La corriente absorbida por el motor y su factor de potencia.
- El par útil desarrollado por el motor.
- El rendimiento del motor.

- d) La compañía suministradora de energía exige un factor de potencia no inferior a 0,9 y por ello se opta por incluir en paralelo con el motor anterior un motor síncrono, conectado en estrella, que ha de desarrollar una potencia mecánica de 75 kW a una velocidad de 1000 r/min. El rendimiento de este motor es del 90%, su impedancia síncrona es de $0,5 + j 4,5 \Omega/\text{fase}$ y su característica de vacío está definida por la tabla siguiente:

E_0 (línea)	150	275	500	1000	1500	2000	2500
At/polo	500	900	1500	3000	4500	6000	7500

- ¿Cuál es el valor de la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja?
- e) ¿Cuál es el valor mínimo de la excitación, en At/polo, del motor síncrono del caso anterior?

Resp. a) ≈ 501 A; 0,86; b) 3 795 N·m; c) 90,2%;
d) 131,5 kVA; 0,634 capacitivo; e) $\approx 4 500$ At/polo

6

Máquinas de corriente continua

Contenido

- 6.1. Principio de funcionamiento de una máquina de c.c.
- 6.2. Reacción del inducido y conmutación
- 6.3. Generadores de corriente continua
- 6.4. Motores de corriente continua
- 6.5. Frenado de los motores de corriente continua
- Ejercicios resueltos
- Problemas suplementarios

SUMARIO DE FÓRMULAS

6.1. Principio de funcionamiento de una máquina de c.c.

a) Tipos de devanados de máquinas de corriente continua

$$\text{Imbricado simple: } 2a = 2p \quad (6.1)$$

$$\text{Ondulado simple: } 2a = 2 \quad (6.2)$$

$2a$: número de circuitos derivados;

$2p$: número de polos.

b) F.e.m. inducida en las máquinas de corriente continua

$$E = \frac{n}{60} z \Phi \frac{p}{a} = k_E n \Phi \quad (6.3)$$

E : f.e.m. inducida;

Φ : flujo magnético;

$2p$: número de polos;

$2a$: número de circuitos derivados;

n : velocidad en revoluciones por minuto (r/min);

z : número de conductores del inducido; la constante

k_E constante: $k_E = zp/60a$.

c) F.e.m. inducida en las máquinas de corriente continua

$$E = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi n}{60} z \Phi \frac{p}{a} = k_T \Omega \Phi \quad (6.4)$$

Ω : velocidad angular mecánica (rad/s);

k_T : constante: $k_T = zp/2\pi a$, por lo que la relación entre las constantes k_E y k_T es:

$$k_E = \frac{2\pi}{60} k_T$$

c) Par motor en las máquinas de c.c. en función del flujo magnético

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{a} z \Phi I_i = k_T I_i \Phi \quad (6.5)$$

T : par motor;

I_i : corriente del inducido;

Φ : flujo magnético;

d) Par motor en las máquinas de c.c. en función de la f.c.e.m.

$$T = \frac{E I_i}{2\pi \frac{n}{60}} \quad (6.6)$$

T :	par motor;
E :	f.c.e.m. del motor;
I_i :	corriente del inducido;
n :	velocidad en r/min.

6.2. Reacción del inducido y conmutación

a) Corriente que circula por los conductores del inducido

$$I(\text{conductor}) = \frac{I_i}{2a} \quad (6.7)$$

I_i :	corriente total del inducido;
$2a$:	número de circuitos derivados.

b) Número de conductores por polo

$$z(\text{polo}) = \frac{z}{2p} \quad (6.8)$$

z :	número total de conductores del inducido;
$2p$:	número de polos.

c) Número de amperivoltas del inducido por polo

$$F_{mi}(\text{polo}) = \frac{1}{2} \frac{I_i}{2a} \frac{z}{2p} = \frac{I_i z}{8pa} \quad (6.9)$$

z :	número total de conductores del inducido;
$2p$:	número de polos.
I_i :	corriente total del inducido;
$2a$:	número de circuitos derivados.

d) F.m.m. antagonista o desmagnetizante (por polo) cuando las escobillas se giran un ángulo θ

$$F_{mi} = \frac{I_i z}{8pa} \frac{2\theta}{180^\circ} \quad [\text{At/polo}] \quad (6.10)$$

z :	número total de conductores del inducido;
$2p$:	número de polos.
I_i :	corriente total del inducido;
$2a$:	número de circuitos derivados;
θ :	ángulo en grados eléctricos que se han girado las escobillas.

e) F.m.m. transversal (por polo) cuando las escobillas se giran un ángulo θ

$$F_{mi} = \frac{I_i z}{8pa} \frac{180^\circ - 2\theta}{180^\circ} = \frac{I_i z}{8pa} \left(1 - \frac{2\theta}{180^\circ} \right) \quad [\text{At/polo}] \quad (6.11)$$

- z : número de conductores del inducido;
- $2p$: número de polos.
- I_i : corriente total del inducido;
- $2a$: número de circuitos derivados;
- θ : ángulo en grados eléctricos que se han girado las escobillas.

f) F.e.m. de conmutación

$$e_c = B_c 2L v N \tag{6.12}$$

- e_c : f.e.m. de conmutación;
- B_c : inducción magnética en la sección conmutada;
- L : longitud de los conductores (longitud axial de los polos auxiliares);
- v : velocidad tangencial de los conductores;
- N : número de espiras de la sección conmutada.

g) F.m.m. necesaria en los polos auxiliares

$$F_{m,aux} = \frac{I_i}{8pa} z + \frac{B_c}{\mu_0} g_{aux} \quad [At/polo] \tag{6.13}$$

- B_c : inducción magnética en la sección conmutada;
- g_{aux} : entrehierro de los polos auxiliares;
- z : número de conductores del inducido;
- $2p$: número de polos;
- I_i : corriente total del inducido;
- $2a$: número de circuitos derivados;
- μ_0 : permeabilidad del vacío.

6.3. Generadores de corriente continua

a) Ecuación de la f.e.m. del inducido

$$E = U + R_i I_i + U_{esc} \tag{6.14}$$

- E : f.e.m. del generador;
- U : tensión en bornes;
- R_i : resistencia del inducido;
- I_i : corriente del inducido;
- U_{esc} : caída de tensión en las escobillas.

b) Ecuación de tensión del inductor

$$U_e = R_e I_e \tag{6.15}$$

- U_e : tensión en el devanado inductor;
- R_e : resistencia del devanado inductor;
- I_e : corriente de excitación.

c) Balance de potencias en el inducido del generador

$$E I_1 = U I_1 + R_1 I_1^2 + U_{esc} I_1 \quad (6.16)$$

- $P_{em} = E I_1$: potencia electromagnética desarrollada por la máquina;
 $P_2 = U I_1$: potencia eléctrica de salida suministrada por el generador;
 $P_{Cui} = R_1 I_1^2$: pérdidas en el cobre del inducido;
 $P_{esc} = U_{esc} I_1$: pérdidas en los contactos de las escobillas.

d) Potencia en el inductor o excitación del generador

$$P_{exc} = U_c I_c = R_c I_c^2 \quad (6.17)$$

- P_{exc} : potencia de la excitación del generador;
 U_c : tensión en el devanado de excitación;
 R_c : resistencia de la excitación;
 I_c : corriente de excitación.

e) Potencia total absorbida por el generador

$$P_1 = P_{exc} + P_{fw} + P_{Fe} + P_{em}; \quad P_{em} = P_2 + P_{Cui} + P_{esc} \quad (6.18)$$

- P_1 : potencia de entrada;
 P_{em} : potencia electromagnética;
 P_2 : potencia eléctrica útil;
 P_{Cui} : pérdidas en el cobre del inducido;
 P_{Fe} : pérdidas en el hierro;
 P_{exc} : pérdidas en la excitación.

f) Relación de f.e.m. inducidas respecto a las velocidades a flujo constante

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'} \quad (6.19)$$

- E : f.e.m. inducida a velocidad n ;
 E' : f.e.m. inducida a velocidad n' .

6.4. Motores de corriente continua

a) Ecuación de la f.e.m. del inducido

$$U = E + R_1 I_1 + U_{esc} \quad (6.20)$$

- U : tensión aplicada al motor;
 E : f.c.e.m. del motor;
 R_1 : resistencia del inducido;
 I_1 : corriente del inducido;
 U_{esc} : caída de tensión en las escobillas.

b) Balance de potencias en el inducido del motor

$$U I_1 = E I_1 + R_1 I_1^2 + U_{esc} I_1 \quad (6.21)$$

- $P_1 = UI_i$: potencia eléctrica aplicada al inducido;
 $P_a = EI_i$: potencia electromagnética desarrollada por el motor;
 $P_{Cui} = R_i I_i^2$: pérdidas en el cobre del inducido;
 $P_{esc} = U_{esc} I_i$: pérdidas en los contactos de las escobillas.

c) Potencia mecánica útil del motor

$$P_2 = P_{em} - P_{Fe} - P_{fw} \quad (6.22)$$

- P_2 : potencia mecánica útil;
 P_{em} : potencia electromagnética desarrollada;
 P_{Fe} : pérdidas en el hierro;
 P_{fw} : pérdidas mecánicas.

d) Potencia eléctrica absorbida por el motor

$$P_1 = P_i + P_{exc} \quad (6.23)$$

- P_1 : potencia eléctrica total de entrada;
 P_i : potencia absorbida por el inducido;
 P_{exc} : potencia absorbida por el circuito de excitación.

e) Rendimiento del motor

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (6.24)$$

- P_1 : potencia eléctrica total de entrada;
 P_2 : potencia mecánica útil.

f) Par motor desarrollado en función de la f.c.e.m.

$$T = \frac{EI_i}{2\pi \frac{n}{60}} \quad (6.25)$$

- T : par motor en N · m;
 E : f.c.e.m. del motor;
 I_i : corriente del inducido; n : r/min del rotor.

g) Par motor desarrollado en función del flujo

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{a} z\Phi I_i = k_T \Phi I_i \quad (6.26)$$

- T : par motor;
 I_i : corriente del inducido;
 Φ : flujo magnético;
 $2p$: número de polos;
 $2a$: número de circuitos derivados;
 z : número de conductores del inducido;
 k_T : constante: $k_T = zp/2\pi a$.

h) Ecuación de la velocidad del motor en r/min

$$n = \frac{U - R_i I_i}{k_E \Phi} \quad (6.27)$$

n : velocidad del motor en r/min;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

I_i : corriente del inducido;

Φ : flujo magnético;

$$k_E = zp/60a.$$

i) Ecuación de la velocidad del motor en rad/s

$$\Omega = \frac{U - R_i I_i}{k_T \Phi} \quad (6.28)$$

Ω : velocidad angular del motor en rad/s;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

I_i : corriente del inducido;

Φ : flujo magnético;

$$k_T = zp/2\pi a.$$

j) Ecuación de la velocidad del motor en función del par resistente

$$n = \frac{U - R_i I_i}{k_E \Phi} = \frac{1}{k_E \Phi} U - \frac{R_i}{k_E k_T \Phi^2} T \quad (6.29)$$

n : velocidad del motor en r/min;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

I_i : corriente del inducido;

Φ : flujo magnético;

$$k_E = zp/60a;$$

$$k_T = zp/2\pi a;$$

T : par resistente.

k) Velocidad en vacío del motor

$$n_0 = \frac{1}{k_E \Phi} U \quad (6.30)$$

l) Ecuación del par y de la corriente de inducido en un motor serie de c.c

$$T = k_T k_i I_i^2 \Rightarrow I_i = \sqrt{\frac{T}{k_T k_i}} \quad (6.31)$$

m) Ecuación de la velocidad en un motor serie de c.c.

$$n = \frac{U - R_i I_i}{k_E \Phi} = \frac{U - R_i I_i}{k_E k_1 I_i} - \frac{R_i}{k_E k_1} = \frac{1}{k_E} \sqrt{\frac{k_T}{k_1}} \frac{U}{\sqrt{T}} - \frac{R_i}{k_E k_1} \quad (6.32)$$

n : velocidad del motor en r/min;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

I_i : corriente del inducido;

$k_E = zp/60a$;

$k_T = zp/2\pi a$;

$\Phi = k_1 I_i$ (circuito magnético lineal);

T : par motor.

6.5. Frenado de los motores de corriente continua

a) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado por recuperación de energía

$$I_i = \frac{U - E}{R_i} = \frac{U - k_E n \Phi}{R_i} \quad (6.33)$$

n : velocidad del motor en r/min;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

I_i : corriente del inducido;

Φ : flujo magnético inductor;

$k_E = zp/60a$.

b) Ecuación de la velocidad

$$n = \frac{U}{k_E \Phi} - \frac{R_i}{k_E k_T \Phi^2} T \quad (6.34)$$

n : velocidad del motor en r/min;

U : tensión aplicada al inducido;

R_i : resistencia del inducido;

Φ : flujo magnético inductor;

$k_E = zp/60a$;

$k_T = zp/2\pi a$;

T : par resistente.

c) Velocidad en vacío

$$n_0 = \frac{U}{k_E \Phi} \quad (6.35)$$

d) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado por resistencias externas

$$I_i = -\frac{E}{R_i + R_{\text{ext}}} = -\frac{k_E n \Phi}{R_i + R_{\text{ext}}} \quad (6.36)$$

- I_i : corriente del inducido;
 R_i : resistencia del inducido;
 R_{ext} : resistencia externa de carga del inducido
 Φ : flujo magnético inductor;
 $k_E = zp/60a$; n : velocidad.

e) Par de frenado reostático (con resistencias externas)

$$T = k_T \Phi I_i = -\frac{k_T k_E n \Phi^2}{R_i + R_{\text{ext}}} \quad (6.37)$$

- T : par de frenado;
 R_i : resistencia del inducido;
 R_{ext} : resistencia externa de carga del inducido;
 Φ : flujo magnético inductor;
 $k_E = zp/60a$;
 $k_T = zp/2\pi a$;
 n : velocidad.

f) Ecuación de la corriente del inducido en el frenado a contracorriente

$$I_i = -\frac{U + E}{R_i + R_r} \quad (6.38)$$

- I_i : corriente del inducido;
 U : tensión aplicada;
 E : f.c.e.m. del motor;
 R_i : resistencia del inducido;
 R_r : resistencia limitadora de la corriente del inducido.

e) Par de frenado a contracorriente

$$T = k_T \Phi I_i = -k_T \Phi \frac{U + E}{R_i + R_r} \quad (6.39)$$

- T : par de frenado;
 R_i : resistencia del inducido;
 R_r : resistencia limitadora de la corriente del inducido;
 Φ : flujo magnético inductor;
 $k_T = zp/2\pi a$;
 U : tensión aplicada;
 E : f.c.e.m. del motor.

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1. Una dinamo de 4 polos tiene un inducido con 600 conductores que gira a 800 r/min, siendo el flujo por polo de 20 mWb. La corriente que circula por los conductores es igual a 60 A. Calcular la corriente total, la f.e.m. y la potencia electromagnética desarrollada ($E I$) si el devanado es

- a) Ondulado simple.
- b) Imbricado simple.

Solución

a) Si se denomina n a la velocidad de giro de la dinamo expresada en r/min, z al número de conductores del inducido, $2p$ al número de polos (que es igual a 4) y $2a$ al número de circuitos derivados, la f.e.m. producida por la máquina si el devanado es ondulado, es decir cuando $2a = 2$, es igual a:

$$E = n z \Phi \frac{p}{a} = \frac{800}{60} \cdot 600 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2}{1} = 320 \text{ V}$$

La corriente que circula por los conductores I es igual a 60 A, la corriente total del inducido I_1 está relacionada con la corriente I por medio de la ecuación:

$$I = \frac{I_1}{2a} = 60 = \frac{I_1}{2} \Rightarrow I_1 = 120 \text{ A}$$

y, por consiguiente, la potencia electromagnética tiene un valor:

$$P = E \cdot I_1 = 320 \cdot 120 = 38,4 \text{ kW}$$

b) Cuando el devanado es imbricado, se cumple $2a = 2p$, es decir el número de circuitos derivados es igual al número de polos, por lo que se cumple $2a = 4$; de este modo, la f.e.m. generada por la máquina tiene ahora un valor:

$$E = \frac{800}{60} \cdot 600 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 160 \text{ V}$$

En este caso, la corriente del inducido será igual a:

$$I_1 = 60 \cdot 4 = 240 \text{ A}$$

Por tanto, la potencia electromagnética tendrá un valor:

$$P = 160 \cdot 240 = 38,4 \text{ kW}$$

que coincide con el caso anterior.

6.2. Una máquina de corriente continua tetrapolar tiene un inducido bobinado con un arrollamiento imbricado simple. El rotor tiene 50 ranuras con 10 conductores por ranura y el devanado es de simple capa. La máquina gira a 1200 r/min, siendo el flujo útil por polo de 25 mWb. Calcular:

- a) La f.e.m. generada.
- b) El par electromagnético, si la corriente del inducido es de 10 A.

Solución

a) Si se denomina n a la velocidad de giro de la máquina expresada en r/min; z al número de conductores del inducido, que en el caso de simple capa es igual al producto de las ranuras por los conductores que contiene cada ranura, cuyo valor es $z = 500$; $2p$ al número de polos (que es igual a 4) y $2a$ al número de circuitos derivados, la f.e.m. producida por la máquina si el devanado es imbricado simple, es decir cuando $2a = 2p = 4$, es igual a:

$$E = n z \Phi \frac{p}{a} = \frac{1200}{60} \cdot 500 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2}{2} = 250 \text{ V}$$

b) El valor del par electromagnético correspondiente es:

$$T = \frac{E I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{250 \cdot 10}{2\pi \frac{1200}{60}} = 19,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

6.3. Una máquina de corriente continua de 2 polos y devanado ondulado simple, tiene un rotor con 20 ranuras y con devanado de doble capa, con 15 espiras por bobina. La inducción magnética media debajo de cada polo es de 0,8 teslas. El radio del rotor es de 10 cm y la longitud axial es de 20 cm. Sabiendo que los polos cubren el 80% de la periferia del inducido y que la máquina gira a 1000 r/min, calcular:

- El flujo magnético por polo.
- La f.e.m. generada.

Solución

a) El área lateral del inducido del rotor es:

$$S_{\text{lat}} = 2\pi RL = 2\pi \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,126 \text{ m}^2$$

El área anterior se distribuye entre dos polos que cubren, cada uno de ellos, el 80% de la periferia del inducido; es por ello que la sección transversal de cada polo tiene un valor:

$$S_{\text{polo}} = 0,8 \frac{0,126}{2} = 0,05 \text{ m}^2$$

Y como la inducción magnética debajo de cada polo es de 0,8 teslas, el flujo magnético correspondiente es:

$$\Phi = B_{\text{md}} S_{\text{polo}} = 0,8 \cdot 0,05 = 0,04 \text{ Wb}$$

b) El número de conductores del inducido es:

$$z = 20 \cdot 2 \cdot 15 = 600 \text{ conductores}$$

Y al ser el devanado ondulado simple ($2a = 2$) se tendrá una f.e.m. generada:

$$E = n z \Phi \frac{p}{a} = \frac{1000}{60} \cdot 600 \cdot 0,04 \cdot \frac{1}{1} = 400 \text{ V}$$

6.4. Un generador tipo derivación desarrolla una f.e.m. de 130 V. Cuando se conecta una carga, la tensión terminal baja a 120 V. Hallar la corriente de carga si la resistencia del circuito de campo es de 10Ω y la resistencia total del inducido de $0,05 \Omega$. Prescindase de la reacción del inducido.

Solución

En la Figura 6.1 se muestra el esquema eléctrico correspondiente. La corriente de excitación o campo, teniendo en cuenta que la tensión entre terminales del generador es de 100 V, vale:

$$I_e = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}$$

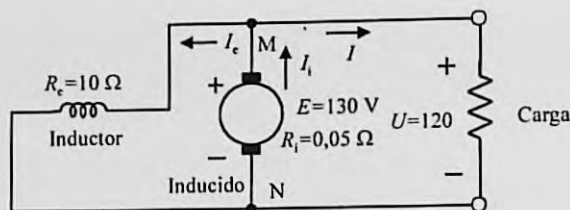


Figura 6.1

Por otro lado, de la relación entre la f.e.m, tensión y corriente del inducido se puede obtener el valor de esta:

$$U = E - R_1 I_i \Rightarrow 120 = 130 - 0,05 \cdot I_i \Rightarrow I_i = \frac{10}{0,05} = 200 \text{ A}$$

Por tanto, la corriente de carga, de acuerdo con el esquema de la Figura 6.1 es igual a:

$$I = I_i - I_c = 200 - 12 = 188 \text{ A}$$

6.5. Un generador tipo derivación de 4 polos, 1 500 r/min tiene una curva de vacío (a la velocidad asignada) definida por la tabla de valores siguiente:

I_e (A)	0	0,1	0,4	0,6	1	1,14	1,32	1,56	2,4	3,04
E (V)	6	20	80	120	200	220	240	260	300	320

Calcular:

- La tensión en vacío que desarrollará la máquina cuando la resistencia total del circuito de excitación sea de 125 Ω ;
- El valor crítico de la resistencia del circuito de campo.
- La tensión en vacío a 1 000 r/min con una resistencia del inductor igual a 125 Ω .
- La velocidad a la cual se hace crítica la resistencia de campo de 125 Ω .

Solución

En la Figura 6.2 se muestra la curva de vacío del generador a la velocidad asignada de 1 500 r/min.

a) Para $R = 125 \Omega$ se dibuja la recta del inductor del siguiente modo: se considera una corriente de excitación $I_e = 1 \text{ A}$ para la cual el valor de la d.d.p. en bornes de la excitación, que coincide con la d.d.p. en bornes de la máquina, tiene un valor $U = R_{exc} I_e = 125 \cdot 1 = 125 \text{ V}$, lo que da lugar al punto D' en el gráfico de la Figura 6.2 y la recta OM. Esta recta corta a la curva de vacío en el punto A, que corresponde a una f.e.m. $E = 298 \approx 300 \text{ V}$.

b) El valor crítico de la resistencia de excitación es el que corresponde a la tangente a la curva de vacío (recta ON). Para medir la pendiente, se toma un punto cualquiera de esta recta (por ejemplo, el punto B) para el cual $E = 200 \text{ V}$, $I_{exc} = 1 \text{ A}$, resultando:

$$R = \frac{200}{1} = 200 \Omega$$

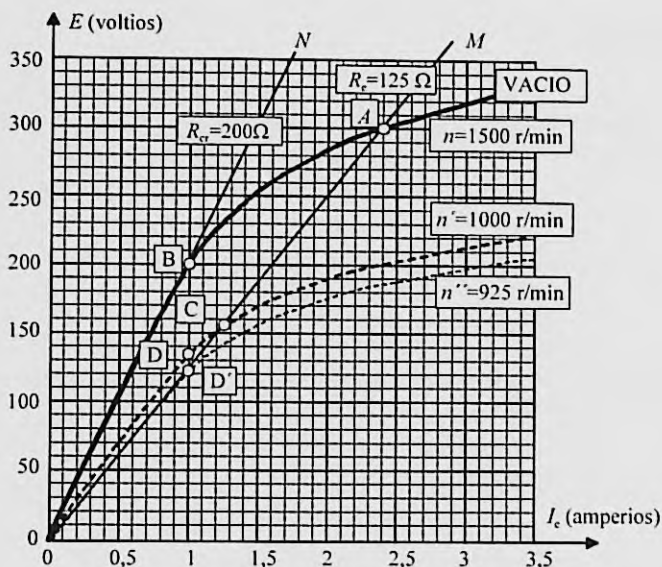


Figura 6.2

c) Los valores de la curva de vacío, para $n = 1000 \text{ r/min}$, se obtienen de la proporción entre f.e.m. y velocidades, es decir:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'}$$

De acuerdo con esta relación, se puede construir la siguiente tabla de valores:

E a 1500 r/min	6	20	80	120	200	220	240	260	300	320
E' a 1000 r/min	4	13,3	53,3	80	133,3	146,7	160	173,3	200	213,3

Esta curva se ha dibujado en trazo discontinuo en la Figura 6.3. El corte de la recta OM con la curva de vacío a 1000 r/min es el punto C, que corresponde a una f.e.m. $E' \approx 155 \text{ V}$.

d) La curva de vacío correspondiente deberá ser tangente a la recta OM ($R = 125 \Omega$). Para los puntos D y D' se tienen las siguientes f.e.m.: $E' = 133 \text{ V}$ en la curva correspondiente a $n' = 1000 \text{ r/min}$; $E'' = 123 \text{ V}$ en el punto D' correspondiente a la curva de vacío tangente a la recta OM, que corresponderá a una velocidad incógnita n'' . De este modo se puede escribir:

$$\frac{E'}{E''} = \frac{n'}{n''} \Rightarrow \frac{123}{133} = \frac{1000}{n''} \Rightarrow n'' = 1000 \frac{123}{133} = 925 \text{ r/min}$$

6.6. Un generador tipo derivación tiene una característica de circuito abierto expresada por la ecuación:

$$E = \frac{200I_c}{K + I_c}$$

Para una corriente de excitación de $1,5 \text{ A}$ se obtiene una f.e.m. en vacío de 150 V . Determinar el valor de la resistencia crítica del devanado inductor en derivación y la tensión en vacío cuando la resistencia del campo es de 200Ω .

Solución

Este problema se puede resolver de forma analítica aprovechando que la curva de vacío está definida por una función matemática. El valor de la constante K se puede obtener fácilmente puesto que, según el enunciado, para $I_c = 1,5$ A, la f.e.m. es $E = 150$ V, es decir:

$$I_c = 1,5 \Rightarrow E = \frac{200 \cdot 1,5}{K + 1,5} = 150 \Rightarrow K = 0,5$$

Por consiguiente, la curva de vacío de la máquina estará expresada por:

$$E = \frac{200I_c}{0,5 + I_c}$$

Como quiera que la resistencia crítica es aquella que es tangente a la curva de vacío en el origen, se puede obtener la pendiente de esta recta (en definitiva su tangente) derivando la ecuación de la curva de vacío y calculando su valor para $I_c = 0$, lo que da lugar a:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\frac{dE}{dI_c} \right]_{I_c=0} = \frac{200(0,5 + I_c) - 200I_c}{(0,5 + I_c)^2} = \frac{100}{(0,5 + I_c)^2} = \frac{100}{0,5^2} = 400 \Rightarrow R_{cr} = 400 \Omega$$

Cuando la resistencia del inductor o campo es $R_c = 200 \Omega$, en vacío se cumple que $U = E = R_c I_c$. Al sustituir en la curva de vacío se obtiene una corriente de excitación:

$$U = E = \frac{200I_c}{0,5 + I_c} = R_c I_c = 200I_c \Rightarrow 0,5 + I_c = 1 \Rightarrow I_c = 0,5 \text{ A}$$

que corresponde a una f.e.m. o tensión en vacío:

$$E = \frac{200 \cdot 0,5}{0,5 + 0,5} = 100 \text{ V}$$

6.7. La característica en vacío de un generador derivación que gira a 1200 r/min es:

E (V)	47	85	103	114	122	127	135	141
I_c (A)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0

La resistencia del devanado inductor es de 55Ω . Determinar:

- La resistencia que hay que añadir al circuito de campo para que la máquina genere una tensión de 120 V en vacío cuando gira a 1200 r/min;
- La tensión en circuito abierto cuando se añade al inductor una resistencia de 20Ω y la velocidad se reduce a 800 r/min.

Solución

En la Figura 6.3 se ha construido la curva de vacío de la máquina para una velocidad de 1200 r/min de acuerdo con los valores del enunciado. En esta curva se observa que, para un valor de la f.e.m. $E_b = 120$ V, se obtiene el punto de trabajo A, dando lugar a la recta de inductor OM. Para el punto de trabajo A se cumple:

$$E = U = 120 \text{ V}; I_c \approx 0,95 \text{ A.}$$

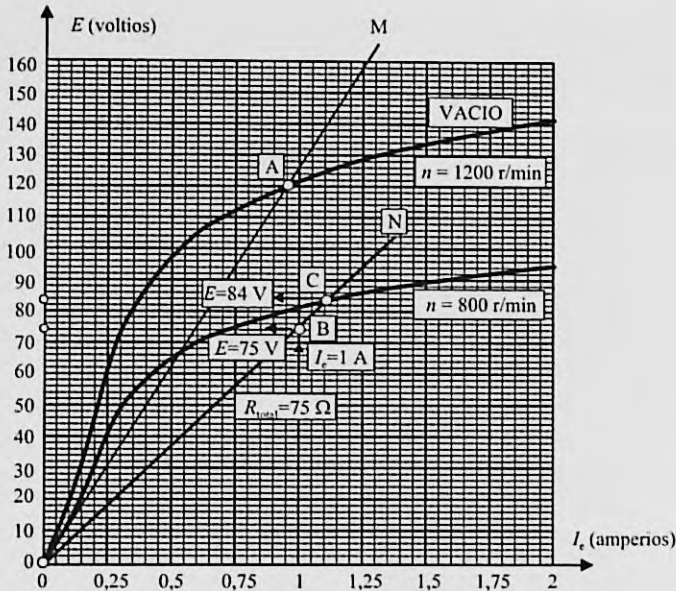


Figura 6.3

De acuerdo con el resultado anterior, el valor de la resistencia total del inductor o devanado de excitación es igual a:

$$R_{\text{exc total}} = \frac{120}{0,95} = 126,3 \Omega$$

de donde se deduce el valor de la resistencia adicional:

$$R_{\text{ad}} = 126,3 - 55 = 71,3 \Omega$$

b) En la Figura 6.3 se ha dibujado, a continuación, la curva de vacío correspondiente a la velocidad de 800 r/min, tomando como referencia la curva de vacío para 1200 r/min, (lo que se realiza teniendo en cuenta la proporcionalidad entre la f.e.m. y las velocidades para la mismas corrientes de excitación). La resistencia total del devanado inductor es ahora:

$$R_{\text{exc total}} = 55 + 20 = 75 \Omega$$

que da lugar a la recta del inductor ON (esta recta pasa por el origen, punto O, y el punto B correspondiente a $I_e = 1 \text{ A}$ y $E = R_{\text{ind total}} I_e = 75 \cdot 1 = 75 \text{ V}$); esta recta corta a la curva de vacío de la máquina para $n = 800 \text{ r/min}$ en el punto C, que corresponde a una f.e.m. de 83 V, que será la nueva tensión que generará la máquina en circuito abierto

6.8. La característica en vacío de un generador, tipo derivación, que gira a 1000 r/min está representada por la ecuación:

$$E = \frac{240I_e}{5 + I_e}$$

La resistencia del devanado inductor es de 10Ω y la del inducido $0,1 \Omega$. Se desprecia la reacción de inducido y la caída de tensión en las escobillas.

- Se carga el generador y se coloca un réostato en serie con el inductor, que se ajusta hasta que la tensión entre terminales es de 150 V, observando entonces que la corriente en el inducido es de 100 A. ¿Cuál es el valor de resistencia del réostato?
- Suponiendo que las pérdidas mecánicas son de 463 W, ¿cuál es el rendimiento del generador en el caso anterior?

- c) Se desconecta la carga eléctrica y se ajusta la resistencia del reóstato hasta obtener $1,9 \Omega$ y se reduce asimismo, la velocidad de accionamiento del generador a 750 r/min . ¿Cuál será el valor de la f.e.m. generada y la tensión en los bornes de la dinamo en estas condiciones?

Solución

a) En la Figura 6.4 se muestra el esquema eléctrico del generador. El valor de la f.e.m. de la dinamo es:

$$E = U + R_a I_a = 150 + 0,1 \cdot 100 = 160 \text{ V}$$

Teniendo en cuenta la curva de vacío del generador a la velocidad de giro de 1000 r/min , se puede escribir:

$$E = \frac{240 I_c}{5 + I_c} = 160 \quad \Rightarrow \quad I_c = 10 \text{ A}$$

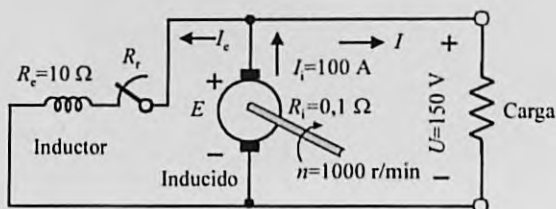


Figura 6.4

En el circuito eléctrico inductor se puede escribir:

$$U = R_{exc} I_c \quad \Rightarrow \quad R_{exc} = \frac{U}{I_c} = \frac{150}{10} = 15 = 10 + R_r \quad \Rightarrow \quad R_r = 5 \Omega$$

que es el valor de la resistencia del reóstato del circuito de excitación.

b) La potencia eléctrica suministrada por el generador a la resistencia de carga es:

$$P_2 = UI = 150 (100 - 10) = 13\,500 \text{ W}$$

y la potencia perdida en la máquina vale:

$$P_p = P_{cu} + P_{exc} + P_{fw} = 0,1 \cdot 100^2 + (10 + 5) \cdot 10^2 + 463 = 2\,963 \text{ W}$$

Por lo que la potencia que debe absorber el generador es:

$$P_1 = P_2 + P_p = 13\,500 + 2\,963 = 16\,463 \text{ W}$$

y por consiguiente, el rendimiento es:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{13\,500}{16\,463} = 82\%$$

c) En la Figura 6.5 se muestra el esquema de circuito en esta situación en la que se ha desconectado la carga eléctrica, por lo que la corriente I es igual a cero.

Por otra parte, al cambiar la velocidad de giro, la nueva curva de vacío del generador será de la forma:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'} \quad \Rightarrow \quad E' = E \frac{n'}{n} = \frac{240 I_c'}{5 + I_c'} \cdot \frac{750}{100} = \frac{180 I_c'}{5 + I_c'} \quad (1)$$

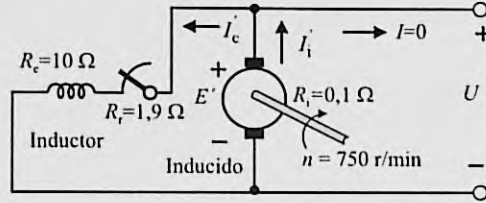


Figura 6.5

donde los valores primados se refieren a las nuevas relaciones entre la f.e.m. y la corriente de excitación para la nueva velocidad de 750 r/min. En la situación de la Figura 6.5, la corriente del inducido I_i coincide con la del inductor I_c debido a que la corriente de carga es nula, por lo que en la malla formada por el circuito del inductor y el inducido se cumple:

$$E' = (R_i + R_c + R_r)I_c = (0,1 + 10 + 1,9) = 12I_c \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la expresión (1) de la f.e.m., al sustituir en (2) se obtiene:

$$\frac{180I_c}{5 + I_c} = 12I_c \quad \Rightarrow \quad 15 = 5 + I_c \quad \Rightarrow \quad I_c = I_i = 10 \text{ A}$$

por lo que la nueva f.e.m. generada tiene un valor:

$$E' = \frac{180I_c}{5 + I_c} = \frac{180 \cdot 10}{5 + 10} = 120 \text{ V}$$

y la tensión en los terminales de la máquina es:

$$U = E' - R_i I_i = 120 - 0,1 \cdot 10 = 119 \text{ V}$$

6.9. Un generador tipo compuesto, de gran derivación, suministra una corriente de carga de 50 A a 500 V y tiene unas resistencias de inducido, campo en serie y campo en derivación, de 0,05 Ω; 0,03 Ω y 250 Ω, respectivamente. Calcular la f.e.m. generada y la corriente en el inducido. Considérese una caída de contacto de 1 V por escobilla.

Solución

En la Figura 6.6 se muestra el esquema del generador. De acuerdo con esta figura la corriente de excitación del devanado inductor derivación tiene un valor:

$$I_c = \frac{U}{R_d} = \frac{500}{250} = 2 \text{ A}$$

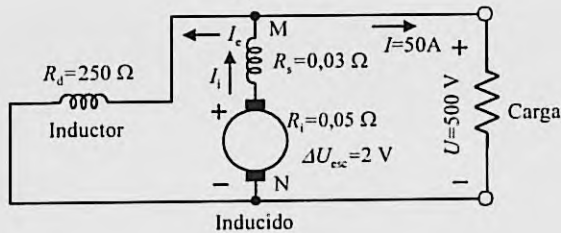


Figura 6.6

Por consiguiente, el valor de la corriente que circula por el inducido será:

$$I_i = I + I_c = 50 + 2 = 52 \text{ A}$$

y la f.e.m. que debe generar la máquina es:

$$E = U + R_i I_i + R_s I_i + \Delta U_{esc} = 500 + 0,05 \cdot 52 + 0,03 \cdot 52 + 2 = 506,16 \text{ V}$$

6.10. Un motor tipo derivación de 240 V, tiene una resistencia del inducido de $0,2 \Omega$. Calcular:

- El valor de la resistencia que debe introducirse en el circuito del inducido para limitar la corriente de arranque a 40 A.
- La f.e.m. generada cuando el motor está girando a velocidad constante con esta resistencia adicional en el circuito para una corriente del inducido igual a 30 A.

Solución

a) En la Figura 6.7 se muestra el montaje correspondiente. Como en el arranque la velocidad es cero, la f.c.e.m. producida en ese momento por el motor también será cero. Aplicando el segundo lema de Kirchoff al circuito del inducido se puede escribir:

$$U = E + (R_i + r) I_i \Rightarrow 240 = 0 + (0,2 + r) \cdot 40$$

de donde se deduce un valor de la resistencia necesaria en el reóstato conectado en serie con el inducido, de $r = 5,8 \Omega$.

b) Con el valor de la resistencia anterior, cuando el motor gira absorbiendo una corriente de inducido de 30 A, la f.c.e.m. del motor tendrá un valor:

$$E = 240 - (0,2 + 5,8) \cdot 30 = 60 \text{ V}$$

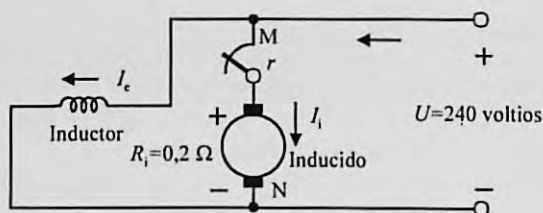


Figura 6.7

6.11. Un motor tipo derivación de 250 V, tiene una resistencia de inducido de $0,2 \Omega$ y una resistencia del inductor de 250Ω . El motor gira en vacío a 1000 r/min y absorbe una corriente de la red de 5 A. Cuando funciona en carga, se observa que absorbe una corriente de 50 A. Calcular en estas condiciones, la velocidad de giro y el par desarrollado, suponiendo despreciable la reacción de inducido.

Solución

En la Figura 6.8 se muestra el esquema eléctrico del motor. Vamos a calcular, en primer lugar, el valor de la f.c.e.m. producida por el motor en vacío. El valor de la corriente de excitación es:

$$I_c = \frac{U}{R_c} = \frac{250}{250} = 1 \text{ A}$$

Teniendo en cuenta que, en vacío, el motor absorbe de la alimentación una corriente total de 5 A, el valor de la corriente de inducido en vacío es $I_i = 5 - 1 = 4 \text{ A}$ y, por tanto, la f.c.e.m. del motor en vacío debe ser:

$$E = U - R_i I_i = 250 - 0,2 \cdot 4 = 249,2 \text{ V}$$

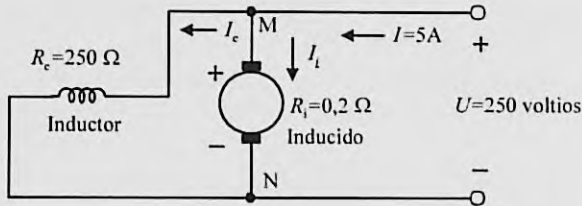


Figura 6.8

Cuando el motor trabaja en carga, absorbe una corriente total de 50 A, y como la corriente de excitación sigue siendo de 1 A, la corriente de inducido será entonces $I_i = 50 - 1 = 49 \text{ A}$, que corresponde a una f.c.e.m. generada en carga de:

$$E' = 250 - 0,2 \cdot 49 = 240,2 \text{ V}$$

Ahora bien, en vacío se cumple:

$$E = k n \Phi \quad \Rightarrow \quad 249,2 = k \cdot 1000 \cdot \Phi$$

donde en la ecuación anterior Φ indica el flujo de la máquina en vacío. De un modo análogo, la f.c.e.m. del motor en carga cuando gira a una velocidad n' y con un nuevo flujo Φ' vale:

$$E' = k n' \Phi' \quad \Rightarrow \quad 240,2 = k n' \Phi' = k n' \Phi$$

donde, al ser despreciable la reacción del inducido, el flujo de entrehierro en carga es el mismo flujo que en vacío. Dividiendo entre sí las dos ecuaciones anteriores se obtiene finalmente:

$$\frac{249,2}{240,2} = \frac{1000}{n'} \Rightarrow n' = 963,9 \text{ r/min}$$

que será la velocidad a la que girará el motor en carga.

El par desarrollado en carga, es decir cuando la corriente de inducido $I_i = 49 \text{ A}$, vendrá expresado por la ecuación:

$$T = \frac{E' I_i}{\Omega} = \frac{240,2 \cdot 49}{2\pi \frac{963,9}{60}} = 116,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- 6.12.** Un motor tipo derivación de 250 V tiene una resistencia de inducido de $0,5 \Omega$ y una resistencia de campo de 250Ω . Cuando mueve a 600 r/min una carga cuyo par es constante, el inducido absorbe 20 A. Si se desea elevar la velocidad de 600 r/min a 800 r/min, ¿qué resistencia debe insertarse en el circuito de excitación, suponiendo que la curva de magnetización sea una línea recta?

Solución

En la Figura 6.9a se muestra el esquema del motor y en la Figura 6.9b se señala la curva de magnetización correspondiente que es una recta de pendiente k' .

Cuando el motor gira a 600 r/min, la corriente de inducido es, según el enunciado, de 20 A y la corriente del devanado de excitación conectado en paralelo vale:

$$I_c = \frac{U}{R_c} = \frac{250}{250} = 1 \text{ A}$$

La f.c.e.m. del motor en esta situación es:

$$E = U - R_i I_i = 250 - 0,5 \cdot 20 = 240 \text{ V}$$

que se puede escribir en función de la velocidad y de la corriente de excitación de este modo:

$$E = 240 = kn\Phi = knk'I_c = bnI_c = b \cdot 600 \cdot 1$$

donde se ha tenido en cuenta que la recta de magnetización es de la forma: $\Phi = k'I_c$ y donde se ha llamado b al producto kk' . Se puede calcular asimismo el valor del par producido por el motor y que tiene que contrarrestar el par resistente a partir de la expresión:

$$T = \frac{EI_i}{\Omega} = \frac{240 \cdot 20}{2\pi \frac{600}{60}} = 76,39 \text{ N} \cdot \text{m} = \text{constante}$$

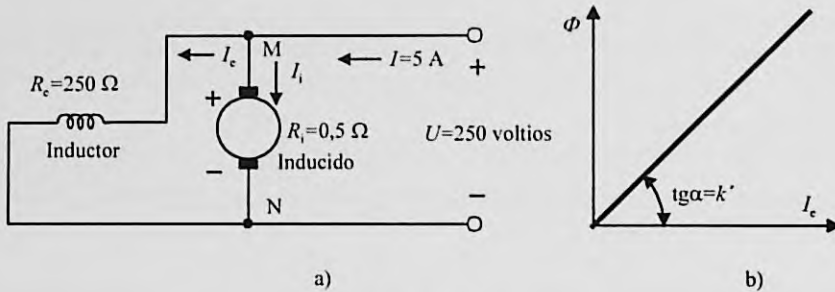


Figura 6.9

Ahora bien, es conveniente ver explícitamente de quién depende el par. Téngase en cuenta que el par se puede expresar en función del flujo de la máquina y por tanto, en función de la corriente de excitación por medio de las ecuaciones siguientes:

$$E = kn\Phi \Rightarrow T = \frac{EI_i}{\Omega} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{k k'}{2\pi} I_c I_i = A I_c I_i = 76,39 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De acuerdo con lo anterior, al ser constante el valor de la fracción, se deduce que el par desarrollado por el motor es de la forma: $T = A I_c I_i$, es decir, es proporcional al producto de la corriente de excitación por la corriente de inducido.

Aplicando este resultado al problema, se cumplirá a 600 r/min:

$$T = 76,39 = A I_c I_i = A \cdot 1 \cdot 20$$

Cuando la máquina gira a 800 r/min, la nueva corriente de inducido se denominará I'_i y a la nueva corriente de inductor la designaremos ahora por I'_c . Además, debe tenerse en cuenta que el par resistente es constante e igual al caso anterior. De este modo, y según se muestra en la Figura 6.10, habrá que añadir en el circuito del inductor un reóstato de regulación para que se cumplan las condiciones anteriores.

Cuando la máquina gira a 800 r/min, la f.c.e.m. del motor es igual a:

$$E' = 250 - 0,5 I'_i = bn I'_c = b \cdot 800 \cdot I'_c$$

y teniendo en cuenta la expresión de la f.c.e.m. a 600 r/min calculada anteriormente:

$$E = 240 = kn\Phi = knk'I_c = bnl_c = b \cdot 600 \cdot 1$$

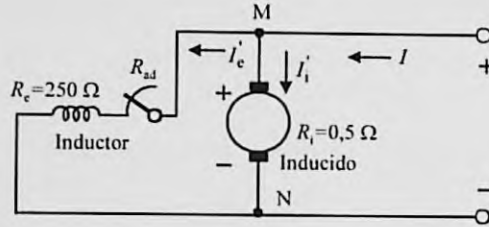


Figura 6.10

Al dividir entre sí las dos últimas ecuaciones resulta:

$$\frac{240}{250 - 0,5I_c'} = \frac{600}{800I_c'} \quad (a)$$

Por otro lado, al ser el par resistente constante, se podrá escribir en ambos casos:

$$T = A I_c I_1 \Rightarrow \text{para } n = 600 \text{ r/min: } T = A I_c I_1 = A \cdot 1 \cdot 20; \text{ para } n' = 800 \text{ r/min: } T = A \cdot I_c' \cdot I_1'$$

y al ser el par en ambas situaciones el mismo, se obtiene:

$$T = A \cdot 20 = A \cdot I_c' \cdot I_1' \Rightarrow I_c' \cdot I_1' = 20 \Rightarrow I_c' = \frac{20}{I_1'} \quad (b)$$

resultado que al sustituir en la ecuación (a), da lugar a:

$$250 - 0,5 \frac{20}{I_c'} = \frac{800 \cdot 240}{600} = 320 I_c'$$

es decir:

$$320 I_c'^2 - 250 I_c' + 10 = 0 \Rightarrow I_c' = 0,739 \text{ A} ; I_1' = 0,042 \text{ A}$$

Al sustituir en (b) se obtienen las siguientes corrientes de inducido posibles:

$$I_1' = \frac{20}{I_c'} = \frac{20}{0,739} = 27,06 \text{ A} ; I_1' = \frac{20}{0,042} = 496,2 \text{ A}$$

Evidentemente, la solución válida es la primera, ya que la segunda da lugar a una corriente de inducido que no soportaría el motor. Por consiguiente, el valor de la resistencia total del circuito de excitación cuando la máquina gira a 800 r/min, debe ser:

$$R_{\text{total}} = \frac{250}{0,739} \approx 338 \Omega$$

y como quiera que el devanado inductor tiene una resistencia propia de 250 Ω, el valor de la resistencia adicional que debe añadir el reóstato de regulación será:

$$R_{\text{ad}} = 338 - 250 \approx 88 \Omega$$

6.13. Un motor tipo derivación de 250 V tiene una corriente de inducido de 20 A cuando gira a 1000 r/min venciendo el par de plena carga. La resistencia del inducido es de 0,5 Ω. ¿Qué resistencia debe insertarse en serie con el inducido para reducir la velocidad a 500 r/min con el mismo par, y cuál será la velocidad si el par de carga se reduce a la mitad, estando dicha resistencia en circuito? Supóngase que el flujo permanece constante.

Solución

En la Figura 6.11 se muestra el esquema eléctrico del motor. Inicialmente, cuando gira a 1000 r/min, la f.c.e.m. del motor vale:

$$E = 250 - 0,5 \cdot 20 = 240 \text{ V}$$

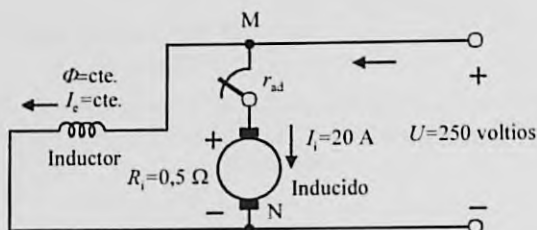


Figura 6.11

Las expresiones de la f.c.e.m. del motor y del par, al ser el flujo magnético constante, son:

$$E = kn\Phi = bn; T = \frac{EI_i}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = A\Phi I_i = A' I_i \quad (\text{donde } A' = A\Phi)$$

es decir, la f.c.e.m. es directamente proporcional a la velocidad de giro y el par es directamente proporcional a la corriente de inducido. De acuerdo con estas ecuaciones, cuando el motor gira a 1000 r/min y absorbe una corriente de 20 A, se cumple:

$$240 = b \cdot 1000; T = A' \cdot 20$$

Por consiguiente, si el motor va a trabajar con el mismo par, la corriente de inducido será la misma, es decir $I_i = 20 \text{ A}$, y al conectar una resistencia adicional en serie con el inducido, se tendrá una nueva f.c.e.m. del motor que debe cumplir la siguiente ecuación:

$$E' = 250 - (0,5 + r_{ad}) \cdot 20$$

Pero al ser la f.c.e.m. proporcional a la velocidad, es evidente que la f.c.e.m. cuando el motor gira a 500 r/min, será la mitad que a 1000 r/min, es decir debe valer 120 V, por lo que se obtiene:

$$E' = 120 = 250 - (0,5 + r_{ad}) \cdot 20 \Rightarrow r_{ad} = \frac{250 - 120}{20} - 0,5 = 6 \Omega$$

Si con la resistencia anterior puesta en el circuito se reduce el par a la mitad del original, la corriente del inducido será la mitad que la original, es decir, de 10 A y por tanto, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E'' = 250 - (0,5 + 6) \cdot 10 = 185 \text{ V}$$

Como la f.c.e.m. es proporcional a la velocidad, se tendrá:

$$\frac{240}{185} = \frac{1000}{n} \Rightarrow n \cong 771 \text{ r/min}$$

- 6.14.** Un motor tipo derivación de 7,5 kW, 450 V, tiene una entrada de 9000 W cuando desarrolla un par en el eje de $80 \text{ N} \cdot \text{m}$. a 900 r/min. ¿En qué tanto por ciento debe reducirse el campo para aumentar la velocidad a 1100 r/min con un par en el eje de $60 \text{ N} \cdot \text{m}$? La resistencia del inducido es de 1Ω , la resistencia del circuito de campo a 900 r/min es de 600Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes. Prescindase de la reacción de inducido.

Solución

La corriente de excitación del motor se obtiene como cociente entre la tensión de alimentación y la resistencia del devanado paralelo y es:

$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{450}{600} = 0,75 \text{ A}$$

mientras que la corriente total I absorbida por la máquina es el cociente entre la potencia absorbida y la tensión de alimentación:

$$I = \frac{9000}{450} = 20 \text{ A}$$

En la Figura 6.12 se muestra el esquema correspondiente. La corriente del inducido es, de este modo, igual a:

$$I_i = 20 - 0,75 = 19,25 \text{ A}$$

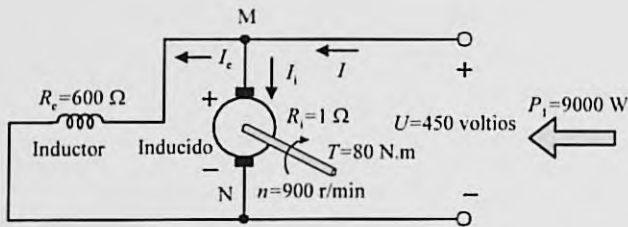


Figura 6.12

Como quiera que el par desarrollado por el motor es $80 \text{ N} \cdot \text{m}$ a 900 r/min , el valor de la potencia mecánica útil que desarrolla el motor a esta velocidad vale:

$$P_{\text{mec útil}} = T\Omega = 80 \cdot 2\pi \frac{900}{60} \approx 7540 \text{ W}$$

Las pérdidas en el cobre en los devanados inductor e inducido son respectivamente:

$$P_{\text{exc}} = R_e \cdot I_e^2 = 600 \cdot 0,75^2 \approx 337,5 \text{ W}; \quad P_{\text{cui}} = R_i \cdot I_i^2 = 1 \cdot 19,25^2 \approx 370,5 \text{ W}$$

En la Figura 6.13 se muestra el reparto de potencias en el motor. De este esquema se deduce que las pérdidas fijas, constituidas por las pérdidas en el hierro y mecánicas, tienen un valor:

$$P_f = 9000 - 337,5 - 370,5 - 7540 = 752 \text{ vatios} = P_{\text{fijas}} = \text{constantes}$$

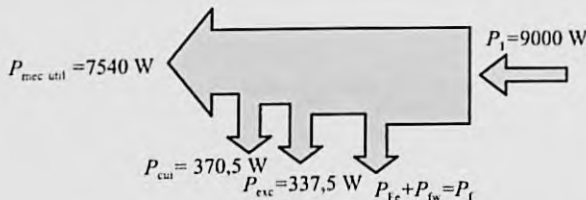


Figura 6.13

La potencia mecánica total, o potencia electromagnética de entrehierro, es la suma de la potencia mecánica útil más las pérdidas anteriores, que a su vez es el producto de la f.c.e.m. del motor por la corriente del inducido, es por ello que resulta:

$$P_{\text{mec total}} = 7\,540 + 752 = 8\,292 = EI_i = E \cdot 19,25 \Rightarrow E = 430,75 \text{ V}$$

Cuando el motor gira a una velocidad de 1 100 r/min y con un par de 60 N · m, el valor de la nueva potencia mecánica útil es:

$$P_{\text{mec útil}}' = T' \Omega' = 60 \cdot 2\pi \frac{1\,100}{60} = 6\,911,50 \text{ W}$$

Como quiera que las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes y su valor se ha determinado anteriormente, se obtiene una potencia mecánica total, que es igual al producto de la nueva f.c.e.m. del motor E' por la nueva corriente de inducido I_i' :

$$P_{\text{mec total}}' = 6\,911,50 + 752,1 = 7\,663,60 \text{ W} = E' \cdot I_i'$$

Pero como la f.c.e.m. del motor se puede poner en función de la tensión de alimentación mediante la expresión:

$$E' = 450 - 1 \cdot I_i'$$

al sustituir esta en la ecuación anterior, resulta la siguiente ecuación de segundo grado:

$$7\,663,6 = (450 - I_i')I_i' \Rightarrow I_i'^2 - 450I_i' + 7\,663,6 = 0$$

que conduce a las siguientes corrientes:

$$I_i' = 432,27 \text{ A} \quad ; \quad I_i' = 17,73 \text{ A}$$

La primera solución es físicamente imposible ya que da lugar a una corriente que no soportaría el inducido. Tomando como correcta la segunda, el valor de la f.c.e.m. del motor sería, en esta situación, igual a:

$$E' = 450 - 1 \cdot 17,73 = 432,27 \text{ V}$$

Teniendo en cuenta, además, la relación de la f.c.e.m. con el flujo y la velocidad, se pueden escribir las siguientes ecuaciones para ambas situaciones de funcionamiento:

$$E = 430,75 = kn\Phi = k \cdot 900 \cdot \Phi \quad ; \quad E' = 432,27 = k \cdot 1100 \cdot \Phi'$$

Al dividir entre sí ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{430,75}{432,27} = \frac{900 \Phi}{1100 \Phi'} \Rightarrow \Phi' = 0,82 \Phi$$

lo que significa una reducción de flujo magnético en el segundo caso de valor: $\Phi - 0,82\Phi = 0,18\Phi$; es decir una reducción del flujo magnético del 18%.

- 6.15.** Un motor tipo derivación de 250 V, con un flujo inductor constante, mueve una carga cuyo par varía con el cubo de la velocidad. Cuando gira a 500 r/min el inducido absorbe 40 A. Hallar la velocidad a que girará si se conecta una resistencia de 25 Ω en serie con el inducido. Prescindase de las pérdidas del motor.

Solución

En la Figura 6.14 se muestra el esquema de la máquina. Si las pérdidas del motor del motor son nulas, significa que se pueden despreciar las pérdidas mecánicas, las pérdidas en el hierro y la resistencia del inducido. Es evidente que por el inductor circulará una corriente para producir el flujo magnético de la máquina, y el que las pérdidas sean nulas para este devanado significa que la corriente de excitación es muy reducida (y que no interviene en el cálculo). De este modo, el valor de la f.c.e.m. de motor es igual a la tensión de alimentación del mismo, y al ser el flujo magnético constante, la f.c.e.m. será proporcional a la velocidad; por consiguiente, se puede poner:

$$E = U = 250 \text{ V} = k \cdot n = k \cdot 500 \quad (a)$$

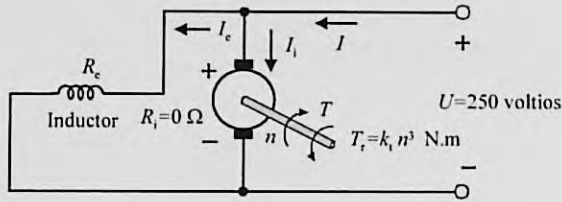


Figura 6.14

La potencia mecánica desarrollada por el motor es, de este modo:

$$P_{\text{mec}} = E \cdot I_i = 250 \cdot 40 = 10\,000 \text{ W} = T_i \Omega$$

Teniendo en cuenta que el par depende del cubo de la velocidad de giro y que la velocidad angular mecánica es $\Omega = 2\pi n / 60$, al sustituir en la ecuación anterior, resulta:

$$10\,000 = k_t n^3 \cdot 2\pi \frac{n}{60} = A n^4 = A \cdot 500^4 \quad (\text{b})$$

donde se ha denominado como constante A a la expresión

$$A = 2\pi k_t / 60$$

Al introducir en el circuito del inducido una resistencia de 25Ω , la f.c.e.m. en esta situación será:

$$E' = U - R_i I_i' = 250 - 25 \cdot I_i'$$

y al ser el flujo magnético siempre constante, la f.c.e.m. del motor será proporcional en cada caso a la velocidad; por tanto, se puede poner:

$$E' = U - R_i I_i' = 250 - 25 \cdot I_i' = k \cdot n' \quad (\text{a}')$$

Al dividir entre sí las ecuaciones (a) y (a') se obtiene:

$$\frac{250}{250 - 25 I_i'} = \frac{500}{n'} \Rightarrow 250 - 25 I_i' = \frac{n'}{2} \Rightarrow I_i' = 10 - \frac{n'}{50} \quad (\text{c})$$

Por otro lado, la potencia mecánica desarrollada por el motor con la resistencia adicional conectada en serie con el inducido, en este caso, viene expresada por:

$$P'_{\text{mec}} = E' I_i' = (250 - 25 \cdot I_i') \cdot I_i' = A \cdot n'^4 \quad (\text{b}')$$

y dividiendo entre sí las ecuaciones (b) y (b') resulta:

$$\frac{10\,000}{(250 - 25 I_i') I_i'} = \frac{n^4}{n'^4} = \frac{500^4}{n'^4} \quad (\text{c}')$$

Al sustituir los valores de $250 - 25 I_i'$ y de I_i' de la ecuación (c) y llevarlos a (c'), se obtiene:

$$\frac{10^4}{\frac{n'}{2} \left(10 - \frac{n'}{50}\right)} = \frac{500^4}{n'^4} = \frac{625 \cdot 10^8}{n'^4} \Rightarrow 625 \cdot 10^4 \left(5 - \frac{n'}{100}\right) = n'^3$$

resultando la siguiente ecuación:

$$n'^3 + 6,25 \cdot 10^4 n' - 3,125 \cdot 10^7 = 0$$

que el lector puede comprobar que da lugar a una solución real $n' = 250 \text{ r/min}$ y a dos soluciones complejas conjugadas. Por consiguiente, el motor girará a una velocidad de 250 r/min .

6.16. Se dispone de un motor derivación de 200 V, cuya excitación se mantiene constante. El circuito del inducido tiene en serie un reóstato de arranque. Calcular el número de secciones de este reóstato y las resistencias de cada sección, sabiendo que la resistencia del inducido es de $0,5 \Omega$, y que las corrientes en este circuito deben estar comprendidas:

- a) Entre 25 A y 50 A.
- b) Entre 30 A y 50 A.

Sugerencia: se deben demostrar las siguientes relaciones:

$$\frac{R_T}{R_i} = \gamma^n ; \frac{R_k}{R_{k+1}} = \gamma$$

donde R_T representa la resistencia total del circuito del inducido: propia + reóstato de arranque; R_i es la resistencia del inducido; R_k y R_{k+1} son las resistencias totales del circuito del inducido hasta las secciones k y $k + 1$, respectivamente del reóstato de arranque; γ es el cociente I_{\max}/I_{\min} del inducido en el proceso de arranque.

Solución

En la Figura 6.15a se muestra el esquema de circuito correspondiente, mientras que en la Figura 6.15b se ha dibujado con detalle el reóstato de excitación con 5 secciones, en el que se incluyen las resistencias parciales: r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 (que corresponden a 6 posiciones de la manivela giratoria sobre los plots del reóstato). En el momento del arranque se incluye la máxima resistencia adicional del reóstato de arranque (posición 1 del reóstato), la velocidad es cero y, por consiguiente, la f.c.e.m. del motor es nula, lo que da lugar a una elevada corriente de arranque en el inducido. Si se denomina R_1 a la resistencia total del circuito del inducido en el arranque (es decir, desde el terminal M hasta el plot 1 de la Figura 6.15b) e I_{\max} a la máxima corriente de inducido permitida, se puede escribir:

$$E = 0 \Rightarrow U = E + R_1 I \Rightarrow U = 0 + R_1 I_{\max} \Rightarrow R_1 = \frac{U}{I_{\max}} \tag{a}$$

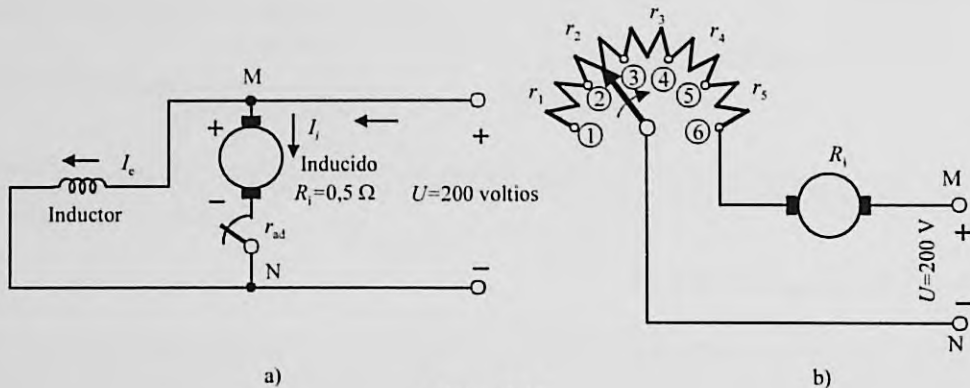


Figura 6.15

Con el reóstato en el plot 1 y conforme se acelera el motor, la f.c.e.m. del motor deja de ser cero y se va elevando gradualmente con el aumento de velocidad, lo que se traduce en una reducción de la corriente del inducido, que disminuye hasta un valor I_{\min} , de modo que al cabo de este tiempo se cumplirá la ecuación:

$$U = E_1 + I_{\min} R_1 \tag{b}$$

En la Figura 6.16 se muestra la forma en la que evoluciona la corriente de arranque con el tiempo. En la primera posición del reóstato corresponde a la onda de corriente comprendida entre 0 y t_1 segundos (y la ecuación anterior (b) corresponde al punto de trabajo A). Cuando finaliza este primer periodo de arranque, el reóstato se pasa a la posición 2, lo cual elimina la resistencia r_1 del primer tramo del reóstato de arranque (la resistencia total desde M hasta el plot 2 pasa a tener

un valor total R_2), por lo que, en ese momento, la corriente adquiere un valor máximo (punto de trabajo B), que nuevamente se va a limitar al valor I_{\max} . En el momento del cambio del *plot* 1 al *plot* 2, la velocidad es constante, por lo que la f.c.e.m. del motor sigue siendo E_1 y la ecuación del inducido es de la forma:

$$U = E_1 + I_{\max} R_2 \quad (c)$$

De las ecuaciones (b) y (c) se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{R_1}{R_2} = \gamma \quad (d)$$

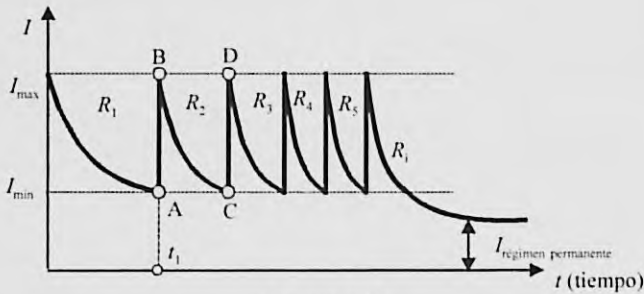


Figura 6.16

El motor sigue aumentando de velocidad en la posición del *plot* 2 con la consiguiente reducción de la corriente. Al llegar a un valor mínimo nuevamente I_{\min} (punto de trabajo C) hace que se pase el reóstato a la posición 3 (con resistencia total entre M y el *plot* 3 de valor R_3 y punto de trabajo D), por lo que se obtiene una relación similar a la anterior:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{R_2}{R_3} = \gamma \quad (e)$$

El proceso de arranque continúa hasta que se elimina totalmente el reóstato de arranque (quedando solamente la resistencia del inducido R_i) y se alcanza el régimen permanente. Aplicando relaciones similares a (c) y (d) en cada posición del reóstato, el lector puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \gamma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_4}{R_5} = \frac{R_5}{R_i} = \frac{R_k}{R_{k+1}} \quad (f)$$

por lo que es inmediato escribir:

$$\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_4} \cdot \frac{R_4}{R_5} \cdot \frac{R_5}{R_i} = \gamma^5 \quad (g)$$

En general, si se denomina n al número de secciones del reóstato, $R_T = R_1$ a la resistencia total del circuito del inducido (inducido + total del reóstato) en el momento del arranque y R_i a la resistencia propia del inducido y se denomina γ al cociente entre la corriente máxima y mínima permitida, se puede escribir:

$$\frac{R_T}{R_i} = \gamma^n \quad (h)$$

siendo las resistencias totales en función de las parciales las siguientes:

$$R_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + R_i ; R_2 = r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + R_i ; R_3 = r_3 + r_4 + r_5 + R_i ; R_4 = r_4 + r_5 + R_i ; R_5 = r_5 + R_i ;$$

a) En este caso, la corriente solamente debe variar entre 25 y 50 A y, por consiguiente, se cumple:

$$R_1 = 0,5 ; \gamma = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{50}{25} = 2$$

Pero de acuerdo con (a), la resistencia total inicial del circuito del inducido debe valer:

$$R_T = R_1 = \frac{U}{I_{\max}} = \frac{200}{50} = 4 \Omega$$

y teniendo en cuenta la ecuación (h), el número de plots n o posiciones del reóstato de arranque será:

$$\frac{R_T}{R_1} = \frac{4}{0,5} = 8 = 2^n \Rightarrow n = 3$$

y por tanto los valores totales de la resistencias para cada posición, de acuerdo con (f), son:

$$R_T = R_1 = 4 \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{4}{2} = 2 \Omega ; R_3 = \frac{R_2}{\gamma} = \frac{2}{2} = 1 \Omega ; R_4 = 0,5 \Omega$$

que corresponden a las resistencias parciales siguientes:

$$r_1 = R_1 - R_2 = 4 - 2 = 2 \Omega ; r_2 = R_2 - R_3 = 2 - 1 = 1 \Omega ; r_3 = R_3 - R_4 = 1 - 0,5 = 0,5 \Omega$$

b) En este caso, la corriente solamente debe variar entre 30 y 50 A, por lo que se cumple:

$$R_1 = 0,5 \Omega ; \gamma = \frac{50}{30} = 1,6 ; R_T = \frac{200}{50} = 4 \Omega$$

y por tanto:

$$\frac{R_T}{R_1} = \frac{4}{0,5} = 8 \Omega = \left(\frac{50}{30}\right)^n \Rightarrow n \log \frac{50}{30} = \log 8 \Rightarrow n (\log 50 - \log 30) = \log 8 \Rightarrow n = \frac{0,903}{1,6989 - 1,477} = 4,07 \approx 4$$

Los valores de la resistencias totales de los tramos serán:

$$R_T = R_1 = 4 \Omega \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{\gamma} = \frac{4}{1,6} = 2,4 \Omega ; R_3 = \frac{2,4}{1,6} = 1,44 \Omega ; R_4 = \frac{1,44}{1,6} = 0,864 \Omega$$

que corresponden a unas resistencias parciales de:

$$r_1 = R_1 - R_2 = 4 - 2,4 = 1,6 \Omega ; r_2 = R_2 - R_3 = 2,4 - 1,44 = 0,96 \Omega ; r_3 = R_3 - R_4 = 1,44 - 0,864 = 0,576 \Omega ; r_4 = R_4 - R_1 = 0,864 - 0,5 = 0,364 \Omega$$

- 6.17.** Se dispone de un motor serie tetrapolar de 240 V que tiene 200 conductores en el inducido, con un devanado imbricado simple ($2p = 2a = 4$). La característica del circuito magnético es lineal, de modo que el flujo por polo (expresado en Wb) es $\Phi = 3,6 \cdot 10^{-3} I_e$, siendo I_e la corriente de excitación en A; se sabe además que la resistencia del inducido es igual a 1Ω . Calcular la corriente absorbida por el motor y su velocidad cuando mueve un par resistente cuadrático de la forma $T_L = 10^{-4} n^2$ (N · m), siendo n la velocidad de rotación en r/min.

Solución

La expresión de la f.c.e.m. del motor es:

$$E = n z \Phi \frac{D}{a} = \frac{n}{60} \cdot 200 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot I_e \frac{2}{2} = 0,012 n I_e = 0,012 n I_i \quad (1)$$

ya que al ser un motor serie, la corriente de excitación I_e es la misma que la corriente de inducido I_i . La relación entre la f.c.e.m. y la tensión aplicada al motor es:

$$E = U - R_1 I_i \Rightarrow E = 240 - 1 \cdot I_i \quad (2)$$

Al sustituir la ecuación (1) en (2) se obtienen las relaciones siguientes:

$$I_i = \frac{240}{1 + 0,012 n} \Rightarrow E = 0,012 n \frac{240}{1 + 0,012 n} \quad (3)$$

El par electromagnético desarrollado por el motor es:

$$T = \frac{EI_1}{\Omega} = \frac{EI_1}{2\pi \frac{n}{60}} = 0,012n \cdot \left(\frac{240}{1+0,012n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{6\,600,5}{(1+0,012n)^2}$$

que para una determinada velocidad debe coincidir con el valor del par resistente, y se cumple:

$$T = \frac{6\,600,5}{(1+0,012n)^2} = T_r = 10^{-4} n^2$$

Al sacar la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene la velocidad de equilibrio de régimen permanente:

$$\frac{81,2435}{1+0,012n} = 0,01n \Rightarrow 0,012n^2 + n - 8124,35 = 0 \Rightarrow n = 782,2 \text{ r/min}$$

y llevando este resultado a la primera ecuación (3) se obtiene una corriente de inducido:

$$I_1 = \frac{240}{1+0,012n} = \frac{240}{1+0,012 \cdot 782,2} = 23,1 \text{ A}$$

6.18. Un motor serie de 240 V, tiene una resistencia de $0,2 \Omega$. A la velocidad de 1800 r/min absorbe 40 A. Hallar la resistencia que debe añadirse

- Para limitar la velocidad a 3600 r/min cuando la corriente sea de 10 A, suponiendo un flujo proporcional a la corriente entre 10 y 40 A.
- Para que la velocidad sea de 900 r/min para una corriente de 60 A, sabiendo que el flujo a 60 A es un 18% mayor que el flujo a 40 A ¿a qué velocidad girará el motor cuando se conecte directamente a la línea y absorba 60 A?

Solución

En la Figura 6.17a se muestra el esquema del motor y en la Figura 6.17b la curva de imanación de la máquina. Inicialmente, cuando el motor gira a 1800 r/min y absorbe 40 A, la f.c.e.m. del motor es igual a:

$$E = U - R_1 I = 240 - 0,2 \cdot 40 = 232 \text{ V} ; E = k_1 n \Phi = k_1 n k I = A \cdot 40 n = 232 = A \cdot 40 \cdot 1800 \quad (\text{a})$$

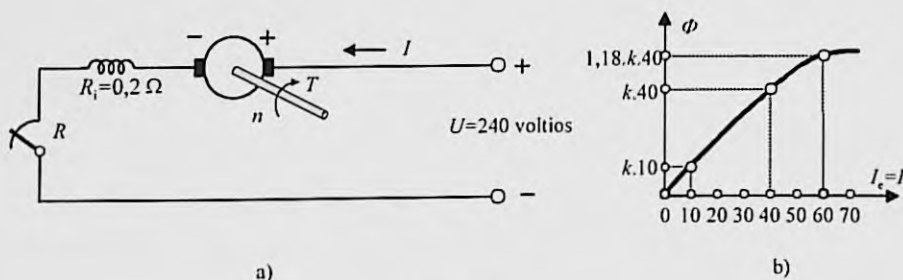


Figura 6.17

a) Cuando el motor gira a 3600 r/min y absorbe 10 A, se tiene:

$$n' = 3600 \Rightarrow E' = A n' I' = A \cdot 3600 \cdot 10 \quad (\text{b})$$

Teniendo en cuenta la relación (a), se cumple:

$$\frac{232}{E'} = \frac{A \cdot 40 \cdot 1800}{A \cdot 10 \cdot 3600} = 2$$

de donde se deduce:

$$E' = 116 \text{ V} = U - RI = 240 - R \cdot 10 \Rightarrow R = 12,4 \Omega$$

Como la resistencia del inducido vale $0,2 \Omega$, la resistencia adicional del reóstato conectado en serie debe ser:

$$R_{\text{ad}} = 12,4 - 0,2 = 12,2 \Omega$$

b) Cuando el motor gira a 900 r/min con una corriente de 60 A , y al ser el flujo magnético un 18% mayor que cuando la corriente absorbida es de 40 A , se tiene una f.c.e.m. del motor:

$$E'' = k_1 n'' \Phi'' = k_1 n'' k \cdot 1,18 \cdot 40 = A \cdot 1,18 \cdot 40 \cdot 900 \quad (\text{c})$$

y teniendo en cuenta la relación (a), resulta:

$$\begin{aligned} 232 &= A \cdot 40 \cdot 1800 \\ E'' &= A \cdot 1,18 \cdot 40 \cdot 900 \Rightarrow E'' = 136,88 = 240 - R'' \cdot 60 \Rightarrow R'' = 1,719 \Omega \end{aligned}$$

que corresponde a una resistencia adicional:

$$R_{\text{ad}}^* = 1,719 - 0,2 = 1,519 \Omega$$

c) Si el motor se conecta directamente a la red y absorbe 60 A , la f.c.e.m. es igual a:

$$E''' = U - R_1 I = 240 - 0,2 \cdot 60 = 228 \text{ V} = A \cdot 1,18 \cdot 40 \cdot n'''$$

y teniendo en cuenta (a), da lugar a:

$$\begin{aligned} 232 &= A \cdot 40 \cdot 1800 \\ 228 &= A \cdot 1,18 \cdot 40 \cdot n''' \Rightarrow n''' = \frac{228 \cdot 40 \cdot 1800}{232 \cdot 1,18 \cdot 40} = 1499,12 \text{ r/min} \end{aligned}$$

que será la velocidad a la que girará el motor.

6.19. Un motor serie de 250 V , tiene una resistencia del inducido de $0,4 \Omega$ y una resistencia del inductor de $0,2 \Omega$. El motor absorbe 60 A cuando gira a una velocidad de 1000 r/min . Calcular la velocidad del motor y la corriente absorbida cuando se coloca en paralelo con el devanado inductor una resistencia de $0,2 \Omega$ a la vez que se aumenta el par un 60% .

Nota: supóngase que el circuito magnético es lineal.

Solución

En la Figura 6.18 se muestran los esquemas eléctricos correspondientes. En la situación inicial (Figura 6.18a), la f.c.e.m. del motor es igual a:

$$E = U - (R_i + R_e)I = 250 - (0,4 + 0,2) \cdot 60 = 214 \text{ V}$$

y el par electromagnético (igual al par resistente) producido por el motor vale:

$$T = \frac{EI}{\Omega} = \frac{214 \cdot 60}{2\pi \frac{1000}{60}} = 122,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

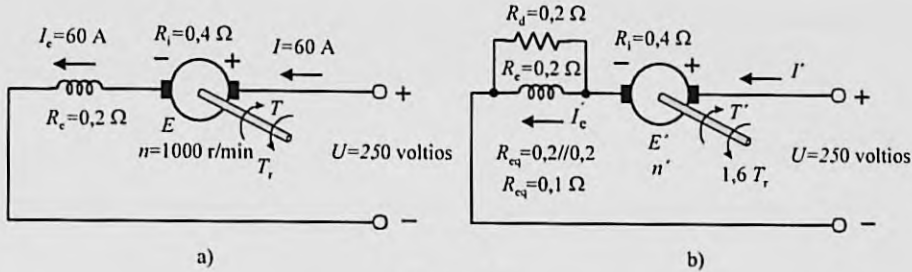


Figura 6.18

En el segundo caso (Figura 6.18b) el par resistente es un 60 por ciento mayor que el anterior, es decir el par es igual a $1,6 \cdot 122,6 = 196,2 \text{ N} \cdot \text{m}$. Si en esta situación denominamos I' a la nueva corriente absorbida por el motor y E' a la f.c.e.m. correspondiente, teniendo en cuenta que la resistencia del inducido de $0,2 \Omega$ está en paralelo con una resistencia del mismo valor, su valor equivalente es de $0,1 \Omega$ y se cumple:

$$E = U - (R_a + R_{eq})I = 250 - (0,4 + 0,1)I' = 250 - 0,5I'$$

Por otro lado, al ser el circuito magnético lineal, la f.c.e.m. se puede poner de la forma siguiente:

$$E = kn\Phi = kn(k')I_e = AnI_e$$

En la ecuación anterior k' es la pendiente de la curva de imanación y A es la constante producto de k por k' . Debe observarse que la f.c.e.m. es proporcional al producto de la velocidad n por la corriente que pasa por el devanado de excitación I_e , que en el primer caso coincide con la corriente I absorbida por el motor y que en el segundo caso, I_e es la mitad de la corriente absorbida por el motor (por estar en paralelo el devanado de excitación con una resistencia del mismo valor). De este modo se puede escribir:

$$E = 214 = k \cdot 1000 \cdot 60; \quad E' = 250 - 0,5I' = kn' \frac{I'}{2} \quad (1)$$

y de este modo la relación entre ambas f.c.e.m.s es:

$$\frac{214}{250 - 0,5I'} = \frac{1000 \cdot 60}{n'(I'/2)} \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que en el caso de la Figura 6.18b el par es de $196,2 \text{ N} \cdot \text{m}$, la ecuación del par en esta situación es:

$$T' = 196,2 = \frac{EI_e}{2\pi \frac{n'}{60}} = \frac{(250 - 0,5I')I'}{2\pi \frac{n'}{60}} \Rightarrow (250 - 0,5I') = 196,2 \frac{2\pi \frac{n'}{60}}{I'} \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) resulta:

$$\frac{214}{196,2 \frac{2\pi \frac{n'}{60}}{I'}} = \frac{1000 \cdot 60}{n'(I'/2)} \Rightarrow I' = 107,3 \text{ A} \quad (4)$$

que al sustituir en (3) da lugar a una velocidad:

$$n' = 1025,7 \text{ r/min}$$

6.20. Un motor serie que tiene una resistencia de 1Ω entre terminales, mueve un ventilador, para el cual, el par varía con el cuadrado de la velocidad. A 220 V el conjunto gira a 300 r/min y absorbe 25 A . Debe aumentarse la velocidad a 400 r/min aumentando la tensión. Hallar la tensión y la corriente para los casos límites siguientes:

- a) Cuando el circuito magnético esté saturado, es decir para flujo constante.
 b) Cuando el circuito magnético no esté saturado, es decir, cuando el flujo magnético es directamente proporcional a la corriente.

Solución

En la Figura 6.19 se muestra el esquema del motor. Cuando este gira a 300 r/min alimentado por una tensión de 220 V y absorbiendo 25 A, la f.c.e.m. del motor y el par correspondiente son, respectivamente:

$$E = 220 - 1 \cdot 25 = 195 = kn\Phi = k \cdot 300 \cdot \Phi ; T = \frac{EI}{\Omega} = \frac{195 \cdot 25}{2\pi \frac{300}{60}} = k_1 n^2 = k_1 \cdot 300^2 \quad (a)$$

a) Si se desea aumentar la velocidad a 400 r/min y el flujo permanece constante, y se denominan respectivamente U' e I' a la tensión aplicada y corriente absorbida por el motor, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E' = U' - I' = kn'\Phi' = k \cdot 400 \cdot \Phi' \quad (b)$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación (a) y dividiéndola por (b), da lugar a:

$$\frac{195}{E'} = \frac{300}{400} \Rightarrow E' = 260 = U' - I' \quad (c)$$

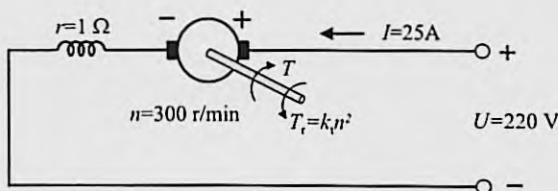


Figura 6.19

Por otro lado, el nuevo valor del par del motor vendrá expresado por:

$$T' = \frac{EI'}{\Omega'} = \frac{260 \cdot I'}{2\pi \frac{n'}{60}} = C \cdot 400^2 \quad (d)$$

y dividiendo entre sí la segunda ecuación (a) por (d), resulta:

$$\frac{195 \cdot 25}{300} \cdot \frac{400}{260 I'} = \frac{300^2}{400^2} \Rightarrow I' = 44,44 \text{ A}$$

por lo que según (b), corresponde a una tensión de alimentación U' :

$$260 = U' - 44,44 \Rightarrow U' = 304,44 \text{ V}$$

b) Si se desea aumentar la velocidad a 400 r/min y el flujo es proporcional a la corriente, y se denominan, respectivamente U'' e I'' a la tensión aplicada y corriente absorbida por el motor, la nueva f.c.e.m. del motor será:

$$E'' = U'' - I'' = kn''\Phi'' = k \cdot 400 \cdot \Phi'' = k \cdot 400 \cdot k' I'' = A \cdot 400 \cdot I'' \quad (e)$$

Teniendo en cuenta el carácter lineal del circuito magnético, la primera ecuación (a) se puede escribir de esta forma:

$$E = 195 = k \cdot 300 \cdot \Phi = k \cdot 300 \cdot k' I = A \cdot 300 \cdot I$$

Dividiendo esta última ecuación por la (e), se obtiene:

$$\frac{195}{E''} = \frac{300 \cdot 25}{400 I''} \Rightarrow E'' = 10,4 I'' \quad (f)$$

Por otro lado, la nueva expresión del par desarrollado por la máquina es:

$$T'' = \frac{E'' I''}{\Omega''} = \frac{10,4 I''^2}{2\pi \frac{n''}{60}} = k_t \cdot 400^2$$

y dividiendo entre sí la segunda ecuación (a) por la anterior, resulta una corriente absorbida por la máquina:

$$\frac{10,4 \cdot I''^2}{n''} \cdot \frac{300}{195 \cdot 25} = \frac{400^2}{300^2} \Rightarrow I'' = 33,33 \text{ A}$$

Que corresponde, según (f), a una f.c.e.m. del motor:

$$E'' = 10,4 \cdot 33,33 = 346,66 \text{ V}$$

y a una tensión de alimentación, según (e):

$$U'' = E'' + r I'' = 346,66 + 1 \cdot 33,33 = 380 \text{ V}$$

6.21. Un motor serie de c.c. con el circuito magnético lineal de 250 V, absorbe 50 A, cuando da su par asignado a 1 000 r/min. La resistencia del motor (inducido + inductor) es de 0,4 Ω . Calcular la resistencia que debe añadirse en serie con el motor para obtener el par asignado,

- En el arranque.
- A 500 r/min.

Solución

La f.c.e.m del motor vale, inicialmente:

$$E = 250 - 0,4 \cdot 50 = 230 \text{ V}$$

Pero al ser el circuito magnético lineal se puede escribir:

$$E = k n \Phi = k n k' I = c n I \quad (a)$$

donde c es una constante e igual al producto kk' . Por otro lado, la expresión del par producido por el motor se puede poner:

$$T = \frac{EI}{\Omega} = \frac{c n I^2}{2\pi \frac{n}{60}} = A I^2$$

es decir, el par es proporcional al cuadrado de la corriente que absorbe el motor. Esto significa que si el par del motor no varía, la corriente absorbida por la máquina en todas situaciones será de 50 A.

a) En el arranque, al ser la velocidad nula, la f.c.e.m. producida en ese instante es cero, además la corriente debe ser de 50 A porque el par es constante. Como consecuencia de haber colocado una resistencia en serie de valor R con el motor, se cumple:

$$E = 0 = 250 - (R + 0,4) \cdot 50$$

de donde se deduce que $R = 4,6 \Omega$.

b) Si el motor debe producir el par asignado a 500 r/min, la corriente absorbida será nuevamente de 50 A y si se denomina R' a la resistencia colocada en serie, la f.c.e.m. E' del motor será:

$$E' = 250 - (R' + 0,4) \cdot 50$$

Teniendo en cuenta la expresión (a) y que la corriente es constante e igual a 50 A a 500 r/min (que es la mitad de la velocidad asignada), se producirá la mitad de f.c.e.m., es decir el valor de E' debe ser de 115 V, valor que al sustituir en la ecuación anterior nos da un valor de la resistencia R' :

$$E' = 115 = 250 - (R' + 0,4) \cdot 50 \Rightarrow R' = 2,3 \Omega$$

6.22. Un motor serie, con un circuito magnético no saturado (es decir, el circuito magnético trabaja en la zona lineal) y con una resistencia de inducido despreciable, absorbe 50 A a 500 V cuando gira a una cierta velocidad con una carga dada. Si el par de carga varía con el cubo de la velocidad, hallar la resistencia adicional colocada en serie con el motor para poder reducir la velocidad

- a) Un 50%.
b) Un 20%.

Solución

En la Figura 6.20a se muestra el circuito del motor y en la Figura 6.20b se observa la característica lineal del circuito magnético de la máquina. El valor de la f.c.e.m. del motor, cuando absorbe 50 A, es igual a la tensión aplicada de 500 V, ya que se desprecian la resistencia interna del motor. Las expresiones de la f.c.e.m. del motor y del par y su relación con la velocidad y la corriente I absorbida por la máquina son de la forma:

$$E = U = 500 = kn\Phi = cnI \quad ; \quad T = \frac{EI}{\Omega} = \frac{500 \cdot 50}{2\pi \frac{n}{60}} = k_1 n^3 \Rightarrow E \cdot I = 25000 = \frac{2\pi}{60} k_1 n^4 = An^4 \quad (a)$$

ya que el par de carga varía con el cubo de la velocidad, siendo c , k_1 y A parámetros constantes.

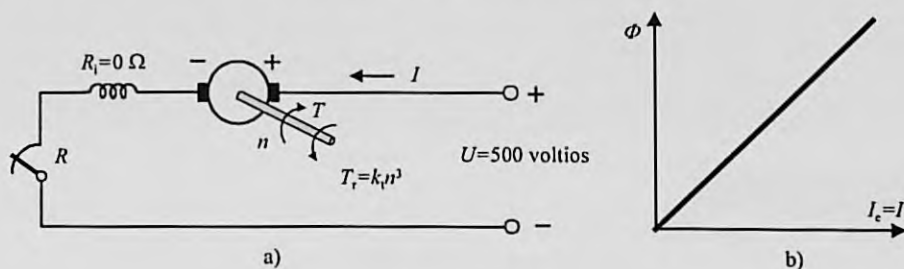


Figura 6.20

a) Si la velocidad se reduce un 50%, es decir, la nueva velocidad será $n' = 0,5 n$, denominando E' e I' a los valores correspondientes de la f.c.e.m. y corriente absorbida por el motor, se cumple:

$$\text{f.c.e.m.: } E' = 500 - RI' = cn'I'; \quad \text{potencia: } E'I' = (500 - RI')I' = An'^4 \quad (b)$$

De este modo, si se dividen las expresiones (a) por (b), resulta:

$$\frac{500}{E'} = \frac{nI}{n'I'} = 2 \frac{I}{I'} = \frac{100}{I'} \Rightarrow \frac{E'}{I'} = \frac{500}{100} = 5$$

$$\frac{25000}{E'I'} = \frac{n^4}{0,5n^4} = 2^4 = 16 \Rightarrow 25000 = 16 \cdot E'I' = 16 \cdot 5 \cdot I'^2 = 80 \cdot I'^2$$

de donde se deduce:

$$I' = 17,678 \text{ A} \Rightarrow E' = 5 \cdot I' = 88,388 \text{ V} = 500 - RI' = 500 - R \cdot 17,678 \Rightarrow R = 23,284 \Omega$$

b) Si la velocidad se reduce un 20%, es decir, la nueva velocidad es $n' = 0,8 n$, los valores correspondientes de la f.c.e.m. y corriente absorbida por el motor se denominan ahora E'' e I'' , respectivamente, por lo que se cumple:

$$\text{f.c.e.m.: } E'' = 500 - RI'' = cn''I''; \quad \text{potencia: } E''I'' = (500 - RI'')I'' = An''^4 \quad (c)$$

y al dividir las ecuaciones (a) por (c) se obtiene:

$$\frac{500}{E''} = \frac{nI}{n''I''} = \frac{n \cdot 50}{0,8 \cdot n \cdot I''} = \frac{62,5}{I''} \Rightarrow \frac{E''}{I''} = 8 \Rightarrow E'' = 8I''$$

$$\frac{25000}{E'' I''} = \left(\frac{n}{0,8n} \right)^4 = 2,441 \quad \Rightarrow \quad 25000 = 2,441 E'' I'' = 2,441 \cdot 8 I''^2 = 19,53 I''^2$$

de donde se deduce:

$$I'' = 35,777 \text{ A} \Rightarrow E'' = 8 I'' = 286,216 = 500 - R' \cdot 35,777 \Rightarrow R' = 5,975 \Omega$$

6.23. Un motor serie de 4 polos, gira normalmente a 600 r/min, con una alimentación a 250 V, absorbiendo 20 A. Todas las bobinas de campo están conectadas en serie. Estimar la velocidad y la corriente consumida por el motor si las bobinas se vuelven a conectar en dos grupos en paralelo de dos bobinas en serie. El par de carga es de tipo «ventilador», aumentando con el cuadrado de la velocidad. Supóngase que el flujo es directamente proporcional a la intensidad de excitación y prescindase de las pérdidas de potencia y caídas de tensión.

Solución

En la Figura 6.21a se muestra el esquema inicial del motor con todas las bobinas de excitación puestas en serie. En la Figura 6.21b se señala el carácter lineal del circuito magnético. Al prescindir de las caídas de tensión de la máquina, la f.c.e.m. del motor viene expresada inicialmente por:

$$E = U = 250 = kn\Phi = knk' I = A \cdot 600 \cdot 20 \quad (a)$$

y el par del motor será de la forma:

$$T = \frac{EI}{\Omega} = \frac{EI}{2\pi \frac{n}{60}} = c \frac{EI}{n} = c \frac{250 \cdot 20}{600} = k_1 n^2 = k_1 \cdot 600^2 \quad (b)$$

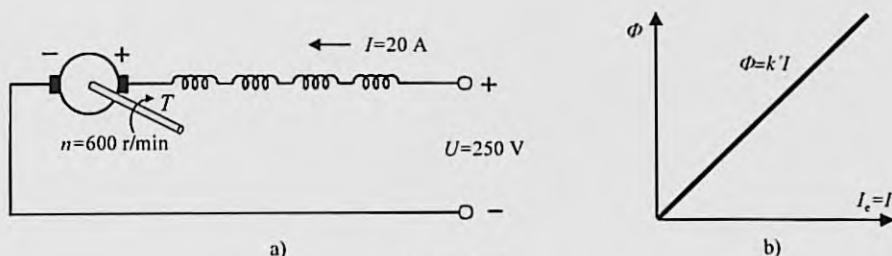


Figura 6.21

Cuando el motor se conecta como señala la Figura 6.22, es decir, con los devanados de excitación unidos en paralelo con dos bobinas en serie, la corriente que circulará por los devanados de excitación es igual a $I'/2$, siendo I' la nueva corriente absorbida por el motor; por tanto, la nueva f.c.e.m. del motor vendrá expresada por:

$$E' = U' = 250 = kn'\Phi' = kn'k' \frac{I'}{2} = An' \frac{I'}{2} \quad (c)$$

Al dividir las expresiones (a) por (c) resulta:

$$A \cdot 600 \cdot 20 = An' \frac{I'}{2} \Rightarrow 24000 = n' I' \quad (d)$$

Si en esta situación el motor gira a una velocidad n' , el par correspondiente teniendo en cuenta (b), será de la forma:

$$T' = \frac{E' I'}{\Omega'} = \frac{E' I'}{2\pi \frac{n'}{60}} = c \frac{E' I'}{n'} = c \frac{250 I'}{n'} = k_1 n'^2 \quad (e)$$

y al dividir entre sí las ecuaciones (b) y (e) se obtiene:

$$\frac{20n'}{600I'} = \frac{600^2}{n'^2} \quad (f)$$

Al sustituir el valor de la corriente I' de la ecuación (d) en la expresión (f), resulta una velocidad:

$$\frac{20n'^2}{600 \cdot 24000} = \frac{600^2}{n'^2} \Rightarrow n'^4 = \frac{600^3 \cdot 24000}{20} \Rightarrow n' = 713,52 \text{ r/min}$$

que corresponde a una corriente absorbida por el motor:

$$I' = \frac{24000}{713,52} = 33,64 \text{ A}$$

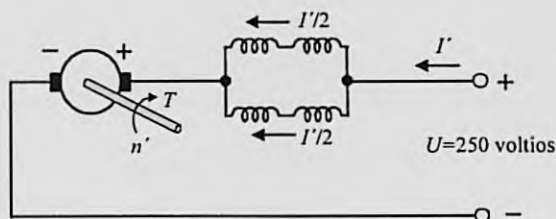


Figura 6.22

6.24. Un motor *shunt* o derivación de 500 V absorbe una corriente de inducido de 240 A cuando gira a la velocidad asignada de 1000 r/min, al mover un cierto par resistente. De repente se quiere frenar el motor desconectando el inducido de la red y cerrándole sobre una resistencia de 1,95 Ω , permaneciendo la excitación del devanado inductor. Calcular:

- La corriente de frenado inicial.
- El par de frenado a 800 r/min como tanto por ciento del par a la velocidad asignada de 1000 r/min.

Nota. Se sabe que la resistencia del inducido del motor es de 0,05 Ω .

Solución

a) La f.c.e.m. del motor en las condiciones iniciales de funcionamiento es:

$$E = 500 - 0,05 \cdot 240 = 488 \text{ V}$$

Por tanto, al cerrar el inducido por una resistencia de 1,95 Ω , se producirá inicialmente una corriente de inducido de valor:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R} = \frac{488}{0,05 + 1,95} = 244 \text{ A}$$

b) Por otro lado, en la etapa de frenado, si el flujo magnético que produce el devanado de excitación es constante, la f.c.e.m. del motor será siempre proporcional a la velocidad. Por consiguiente, la f.c.e.m. E' del motor, a la velocidad de 800 r/min, será igual a:

$$E' = E \frac{n'}{n} = 488 \frac{800}{1000} = 390,4 \text{ V}$$

Como el inducido en esta etapa de frenado dinámico está cerrado sobre una resistencia adicional de 1,95 Ω , la corriente que circulará por el mismo a la velocidad de 800 r/min, es:

$$I_i' = \frac{E'}{R_i + R} = \frac{390,4}{0,05 + 1,95} = 195,2 \text{ A}$$

En definitiva, la corriente del inducido en la etapa de frenado es directamente proporcional a la velocidad del motor. Si esta es de 800 r/min y la asignada es de 1000 r/min, la corriente de inducido, a 800 r/min será el 80% de la corriente inicial de frenado (compruébese que $195,2/244 = 0,8$). Además, como el par del motor es de la forma:

$$T = \frac{EI_i}{\Omega} = \frac{kn\Phi I_i}{2\pi \frac{n}{60}} = A \cdot I_i$$

Este par es directamente proporcional a la corriente que atraviesa el inducido, es decir, el valor del par de frenado a 800 r/min, será el 80% del par a la velocidad asignada de 1000 r/min.

6.25. Una máquina de c.c. tipo serie tiene una resistencia total (inductor + inducido) de 1Ω . Se mueve esta máquina mediante un motor externo que hace trabajar al motor de c.c. como generador, a una velocidad de ensayo de 500 r/min, dando lugar a la siguiente curva de vacío:

E (V)	10	20	30	35	40	45	50	60
I_e (A)	194	302	370	397	418	437	453	480

Cuando la máquina eléctrica funciona como motor serie mueve un ventilador cuyo par resistente viene expresado por la ecuación:

$$T_r = 10 + \frac{n^2}{1600} \quad (T_r \text{ se expresa en } \text{N} \cdot \text{m} \text{ y } n \text{ en r/min})$$

Calcular la velocidad de funcionamiento en régimen permanente y el par desarrollado por el motor cuando se conecta a una red de c.c. cuya tensión es de 500 V.

Solución

La resolución de este problema debe realizarse por un método gráfico que requiere dibujar las curvas par-velocidad del motor y de la carga, de modo que el punto de intersección de ambas curvas será el punto de funcionamiento o de equilibrio del sistema motor-carga. Para determinar la curva par-velocidad del motor de c.c. se parte de los valores de la curva de vacío. Para cada valor de la corriente de inducido debe calcularse la f.c.e.m. del motor mediante la ecuación:

$$E' = U - rI_i$$

De este modo, se calcula la velocidad angular de funcionamiento correspondiente a partir de la expresión:

$$\Omega' = \Omega_n \frac{E'}{E}$$

donde Ω_n es la velocidad angular a la que se ha realizado el ensayo de vacío, E' es la f.c.e.m. del motor para la corriente de funcionamiento y E es la f.c.e.m. de la máquina trabajando como generador y que se obtiene de la curva de vacío. A partir de estos valores se calcula el par electromagnético del motor de acuerdo con la ecuación:

$$T = \frac{E' I_i}{\Omega'}$$

En la Tabla 6.1 se indican los resultados obtenidos para una velocidad de ensayo, que en rad/s tiene un valor:

$$\Omega_n = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{500}{60} = 52,36 \text{ rad/s}$$

Para que el lector comprenda la preparación y confección de esta tabla, se van a determinar la columna correspondiente a una corriente de inducido de 30 A, a la que corresponden una f.e.m. de 370 V y una velocidad de 500 r/min; de este modo, la f.c.e.m. del motor será:

$$E' = U - R_1 I_1 = 500 - 1 \cdot 30 = 470 \text{ V}$$

La velocidad correspondiente en rad/s será:

$$\Omega' = \Omega_n \frac{E'}{E} = 52,36 \frac{470}{370} \approx 66,5 \text{ rad/s}$$

que corresponde a una velocidad en r/min:

$$\omega' = 2\pi \frac{n}{60} \Rightarrow n = \frac{60}{2\pi} \Omega' = \frac{60}{2\pi} 66,5 \approx 635 \text{ r/min}$$

Por consiguiente, el par electromagnético producido por el motor vale:

$$T = \frac{E' I_1}{\Omega'} = \frac{470 \cdot 30}{66,5} \approx 212 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y el par resistente que ejerce el ventilador es igual a:

$$T_r = 10 + \frac{n^2}{1600} = 10 + \frac{635^2}{1600} \approx 262 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Tabla 6.1

$\Omega_n = 52,36 \text{ rad/s}$	$I_1 = I_0 \text{ (A)}$	10	20	30	35	40	45	50	60
	$E \text{ (V)}$	194	302	370	397	418	437	453	480
$E' = U - R_1 I_1$		490	480	470	465	460	455	450	440
$\Omega' = \Omega_n E' / E$	Ω'	132,2	83,2	66,5	61,3	57,6	54,5	52	48
$n' = 60 \Omega' / 2\pi$	n'	1262,4	794,5	635	585,6	550	520,6	496,6	458,4
Par motor: $T = E' I_1 / \Omega'$		37,1	115,4	212	265,5	319,4	375,7	432,7	550
Par resistente: $T_r = 10 + n'^2 / 1600$		1005	404,5	262	224	199	179,3	164	141,3

Con este procedimiento se pueden construir las curvas par-velocidad, tanto del motor como del ventilador, como se muestra en la Figura 6.23. El punto A de intersección de ambas curvas indica la igualdad entre los pares motor (electromagnético) y resistente y será el punto de funcionamiento del sistema motor-ventilador, que corresponde de un modo aproximado a los valores: $T \approx 240 \text{ N} \cdot \text{m}$; $n \approx 600 \text{ r/min}$. Se puede llegar a los mismos resultados dibujando las curvas de pares en función de las corrientes de inducido como se muestra en la Figura 6.23 (y que en algunos casos da lugar a resultados más precisos cuando se tienen altos valores de los pares y velocidades). El punto de intersección B de ambas curvas corresponde a los valores: $I_1 \approx 31,5 \text{ A}$; $T = 230 \text{ N} \cdot \text{m}$

Partiendo de estos valores, se puede obtener la velocidad de funcionamiento del grupo sustituyendo en la ecuación del par resistente del ventilador, lo que da lugar a:

$$T_r = 230 = 10 + \frac{n^2}{1600} \Rightarrow n = \sqrt{1600 \cdot (230 - 10)} \approx 593 \text{ r/min}$$

que también se puede comprobar con las ecuaciones del motor, ya que para este punto de trabajo y partiendo de que $I_1 = 31,5 \text{ A}$, se obtienen los siguientes resultados:

La f.c.e.m. del motor valdrá:

$$E' = U - r I_1 = 500 - 1 \cdot 31,5 = 468,5 \text{ V}$$

La velocidad correspondiente en rad/s. será:

$$\Omega' = \Omega_n \frac{E'}{E} = 52,36 \frac{468,5}{370} \approx 66,3 \text{ rad/s}$$

que corresponde a una velocidad aproximada de 633 r/min, que es algo diferente a la velocidad obtenida a partir del par resistente de la bomba. Por otra parte, el par electromagnético producido por el motor vale:

$$T = \frac{E' I_1}{\Omega'} = \frac{468,5 \cdot 31,5}{66,3} = 223 \text{ N} \cdot \text{m} \approx 230 \text{ N} \cdot \text{m}$$

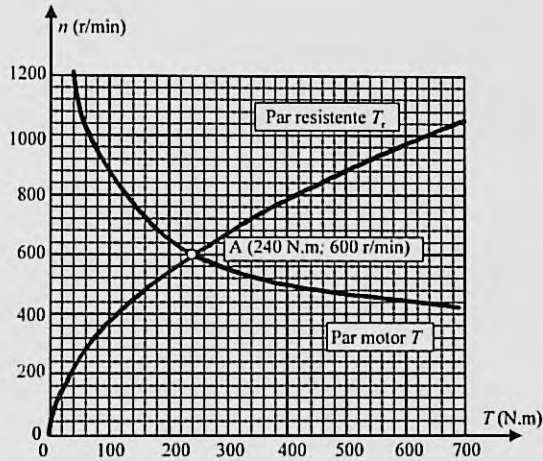


Figura 6.23

El resultado anterior es consistente con el valor que se obtiene en la curva de la Figura 6.24.

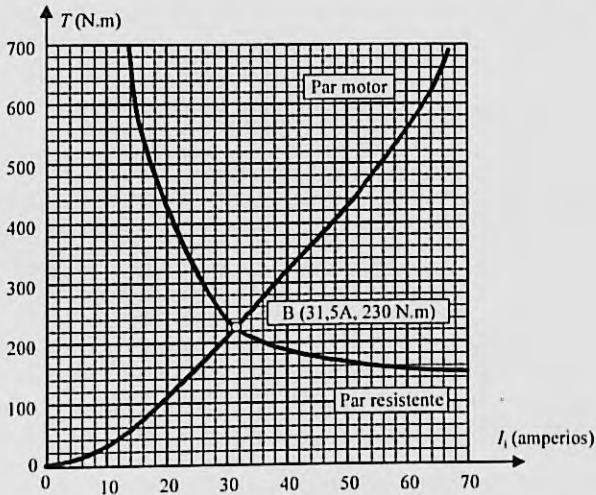


Figura 6.24

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 6.26. Un generador de c.c. con excitación derivación, se ha sometido a un ensayo de vacío a la velocidad asignada de 1000 r/min, dando lugar a la siguiente tabla de valores:

E (V)	23	43	76	104	126	145	161
I_e (A)	1	2	4	6	8	10	12

La resistencia del devanado inductor es de 15Ω y la resistencia total del inducido es de $0,02 \Omega$. Si el generador gira a la velocidad asignada de 1000 r/min, determinar la corriente que la dinamo suministrará a la carga cuando la tensión terminal sea de 120 V.

Resp. $I = 292$ A

- 6.27. Un generador *shunt* tiene una curva de vacío medida a 500 r/min expresada por la ecuación:

$$E = \frac{350I_c}{1 + I_c}$$

La resistencia del devanado de campo es de 100Ω y la del inducido de $0,2 \Omega$. El devanado de campo o inductor tiene en serie un reóstato de regulación para el ajuste de la tensión producida por la máquina.

- Calcular el valor de la resistencia que debe incluirse en el reóstato anterior para que al girar a 500 r/min, la dinamo produzca una tensión en bornes de 220 V, cuando la máquina entregue una corriente de 50 A a una carga conectada en sus terminales.
- Calcular la resistencia del reóstato de regulación para que la máquina genere en vacío una tensión de 180 V a la velocidad de 500 r/min.
- Si se elimina la resistencia del reóstato y la máquina gira en vacío a 250 r/min, calcular la tensión producida por el generador.

Resp. a) $R = 4,78 \Omega$; b) $R = 70 \Omega$; c) 75 V

- 6.28. Un generador derivación de 4 polos, tiene un devanado imbricado simple con 1500 conductores. Si el flujo magnético por polo es de $2 \cdot 10^{-2}$ Wb

- Determinar la velocidad a la que debe girar la máquina para obtener una tensión de 500 V en vacío.
- Si la resistencia del devanado de excitación es de 250Ω y la del inducido es de $0,1 \Omega$, calcular la velocidad a la que debe girar el generador para mantener la tensión terminal de 500 V cuando la corriente de carga sea de 150 A.

Resp. a) 1000 r/min; b) 1030,4 r/min

- 6.29. Un generador derivación que tiene una resistencia total del inducido de $0,3 \Omega$, se conecta a una red de c.c. de 500 V. Cuando el generador tiene un flujo por polo de $0,03$ Wb y gira a 1000 r/min, suministra a la red una corriente de 50 A.

- Si el flujo por polo se reduce de repente a $0,025$ Wb, calcular la corriente del inducido del generador en el instante inmediato al cambio de flujo magnético, indicando en ese momento si la máquina trabaja como generador o como motor.
- Se desea que la máquina vuelva al funcionamiento original, entregando a la red la misma corriente de 50 A. ¿Cuál debe ser la velocidad a la que tendrá que girar la máquina?

Resp. a) 236,11 A, motor; b) 1200 r/min

- 6.30. Una dinamo derivación tiene una curva de vacío a la velocidad asignada que responde a la ecuación:

$$E = \frac{360I_e}{0,7 + I_e}$$

Las resistencias de los devanados inductor e inducido son, respectivamente de 200Ω y 1Ω . El generador se mueve a la velocidad asignada alimentando una resistencia de carga R_L . Calcular:

- Los valores posibles de esta resistencia de carga si se sabe que en ella se disipa una potencia de 2 kW.
- La tensión en bornes de la máquina para los valores de las resistencias anteriores.

Resp. a) $R_L = 21,08 \Omega$; $R_L = 1,065 \Omega$; b) 205,35 V; 46,15 V. Realmente, la solución físicamente posible es la primera, ya que conduce a una corriente de carga menor y a una pequeña caída de tensión de la máquina; la otra solución obligaría a que el generador suministrara una corriente muy elevada que produciría el deterioro de la máquina

- 6.31. Un generador derivación se mueve a velocidad constante y tiene una curva de vacío expresada por la siguiente tabla de valores:

E (V)	0	124	248	318	364	386	392
I_e (A)	0	1	2	3	4	5	6

Calcular:

- La tensión generada en vacío si la resistencia del inductor es de 80Ω .
- La resistencia adicional que debe conectarse en serie con el devanado inductor para reducir la tensión de vacío en 20 V.
- resistencia crítica del devanado inductor.

Resp. a) 384 V; b) 11 Ω ; c) 124 Ω

- 6.32. Una dinamo *shunt* movida por una correa de transmisión, gira a 250 r/min sobre unas barras colectoras de 500 V, a las que entrega una potencia eléctrica de 200 kW. De repente se rompe la correa y la máquina continúa girando como motor, absorbiendo una potencia eléctrica de las barras de 20 kW. Si la resistencia del inductor es de 100Ω y la del inducido de $0,04 \Omega$, ¿a qué velocidad girará la máquina como motor?

Resp. 241,5 r/min

- 6.33. Una dinamo con excitación independiente gira a 500 r/min y alimenta una carga de resistencia constante, siendo la tensión en la misma de 250 V y la corriente en el inducido de 200 A. La resistencia del inducido es de $0,05 \Omega$. Si se reduce la velocidad de rotación de la máquina a 400 r/min, permaneciendo constante la corriente de excitación, ¿Cuál será el valor de la corriente que la dinamo suministrará a la carga?

Resp. 160 A

- 6.34. Un motor de c.c. tipo derivación tiene una resistencia de inducido de $0,5 \Omega$ y una resistencia del devanado inductor de 100Ω . El motor se alimenta por medio de una red de c.c. de 200 V y gira a 1000 r/min, absorbiendo en esa situación una corriente de la red de 20 A. Suponiendo que el motor trabaja en la zona lineal de la curva de imanación, calcular la velocidad a la que girará el motor cuando absorba de la red una corriente de 15,6 A y se coloque una resistencia de 25Ω en serie con el devanado inductor.

Resp. 1263 r/min

- 6.35. Un motor derivación tiene unas resistencias de inducido e inductor de $0,5 \Omega$ y 250Ω , respectivamente. Cuando se conecta a una red de 250 V y mueve una carga de par constante, gira a 600 r/min y absorbe una corriente de la red de 21 A . Si el circuito magnético es lineal y se desea elevar la velocidad del motor hasta 800 r/min , ¿cuál será el valor de la resistencia que deberá colocarse en serie con el devanado inductor?

Resp. $88,3 \Omega$

- 6.36. Un motor *shunt* de 4 polos tiene un devanado de inducido tipo imbricado simple con 1 000 conductores, siendo el flujo magnético por polo de $0,028 \text{ Wb}$. Las resistencias del inducido e inductor son, respectivamente, de 1Ω y 400Ω .
- ¿Cuál será la velocidad del motor, si se sabe que al conectarlo a una red de 400 V absorbe una corriente de 20 A ?
 - Calcular el par electromagnético desarrollado por el motor y el par útil si las pérdidas mecánicas y en el hierro son de 1 kW .
 - Calcular el rendimiento del motor.

Resp. a) $816,4 \text{ r/min}$; b) $84,7 \text{ N} \cdot \text{m}$; $73 \text{ N} \cdot \text{m}$; c) 78%

- 6.37. Un motor derivación tiene una resistencia de inducido de $0,5 \Omega$ y se conecta a una red de 220 V , absorbiendo una corriente de inducido de 40 A cuando mueve un par resistente constante. Si en estas circunstancias se quiere aumentar la velocidad un 50% , ¿en qué tanto por ciento se debe reducir el flujo magnético inductor para conseguirlo?

Resp. $37,3\%$

- 6.38. Se necesita un reóstato de arranque de cinco secciones para un motor derivación con valores asignados de 10 kW y 440 V . El rendimiento a plena carga del motor es del 80% y las resistencias del devanado inductor e inducido son, respectivamente, de 1000Ω y de $0,6 \Omega$. Se supone que la corriente inicial de arranque es la de plena carga del motor y los picos de corriente máximos en los cambios posteriores no deben ser superiores a 1,5 veces la corriente de plena carga. Calcular la corriente mínima de arranque que se produce y los valores de las resistencias de las cinco secciones del reóstato de arranque.

Resp. $21,85 \text{ A}$; $7,54 \Omega$; $3,92 \Omega$; $2,05 \Omega$; $1,06 \Omega$; $0,56 \Omega$

- 6.39. Un motor de c.c. tipo derivación está alimentado por una red de 440 V y absorbe a plena carga una corriente de inducido de 100 A cuando gira a 1000 r/min . Con el motor funcionando en estas condiciones se desea frenar la máquina a contracorriente, es decir, invirtiendo la tensión de alimentación y limitando la corriente de inducido a 120 A .
- ¿Qué resistencia externa conectada en serie con el inducido se necesita?
 - ¿Cuál será el par de frenado inicial?
 - Calcular la corriente de frenado y el par de frenado cuando el motor pasa por la velocidad de 500 r/min .

Nota: la resistencia total del inducido es de $0,4 \Omega$.

Resp. a) $6,6 \Omega$; b) $458,37 \text{ N} \cdot \text{m}$; c) $91,43 \text{ A}$; $349,23 \text{ N} \cdot \text{m}$

- 6.40. Un motor serie, con un circuito magnético no saturado y con una resistencia de inducido despreciable, absorbe 40 A a 440 V cuando gira a una cierta velocidad con una carga dada. Si el par de carga varía con el cubo de la velocidad, hallar la resistencia adicional colocada en serie con el motor para poder reducir la velocidad a la mitad.

Resp. $R = 17,08 \Omega$

- 6.41. Un motor serie de c.c. se alimenta de una red de 200 V y absorbe una corriente de 50 A cuando gira a una velocidad de 1 500 r/min. La resistencia total del motor (inductor+ inducido) es de $0,1 \Omega$ y se supone que el circuito magnético es lineal. Si se coloca en serie con el motor una resistencia de $1,9 \Omega$, calcular la velocidad a la que girará el motor si el par resistente es constante.

Resp. 769 r/min

- 6.42. Un motor serie de c.c. se alimenta de una red de 440 V y absorbe una corriente de 80 A, girando a una velocidad de 1 000 r/min. Las resistencias de los devanados inductor e inducido son respectivamente de $0,2 \Omega$ y $0,3 \Omega$ y el circuito magnético es lineal.

- ¿Qué corriente absorberá el motor si se coloca en paralelo con el inductor una resistencia de $0,2 \Omega$ y se aumenta el par resistente un 50%?
- En el caso anterior, ¿a qué velocidad girará el motor?

Resp. a) 138,6 A; b) 1 110,2 r/min

- 6.43. Un motor serie tiene un circuito magnético lineal y sus resistencias de inducido e inductor son de $0,8 \Omega$ y $0,2 \Omega$, respectivamente. En condiciones de plena carga, el motor se conecta a una red de 220 V absorbe una corriente de 10 A y gira a 1 500 r/min

- Calcular la corriente que absorberá el motor de la red si se conecta en paralelo con el inductor una resistencia de $0,2 \Omega$ y se ajusta el par resistente para que la máquina gire a 900 r/min.
- Calcular, en el caso anterior, el valor del par resistente en función del par de plena carga.

Resp. a) 32,6 A; b) $T_2 = 5,31 T_{pc}$

- 6.44. Un motor serie de 220 V tiene una resistencia total (inducido + inductor) de $0,1 \Omega$. Se sabe que el motor trabaja en la zona lineal de la curva de imanación y que cuando mueve un cierto par resistente absorbe una corriente de 100 A al girar a 1 500 r/min. Se conecta una resistencia R en serie con el motor y el par resistente se reduce a la mitad del original, observándose que el motor gira entonces a 750 r/min, calcular en esta situación:

- La corriente absorbida por el motor.
- El valor de la resistencia adicional R .

Resp. a) 70,71 A; b) $1,96 \Omega$

- 6.45. Un motor serie de c.c. de 7,5 kW, 220 V, 1 500 r/min tiene un rendimiento a plena carga del 85,2%. El circuito magnético es lineal y las resistencias de inducido e inductor son de $0,3 \Omega$ y $0,15 \Omega$, respectivamente.

- ¿Qué resistencia debe añadirse en serie con el motor para que la corriente de arranque no supere la que requeriría el motor si el par resistente fuera 1,5 veces el de plena carga?
- Si la resistencia anterior permanece en el circuito y el motor mueve el par de plena carga ¿a qué velocidad girará el motor?
- En el caso anterior ¿cuál sería el valor de la resistencia de un reóstato de arranque para que la máquina se mueva a 900 r/min?

Resp. a) $4,04 \Omega$; b) 300 r/min; c) $2,02 \Omega$

- 6.46. Un motor serie de 220 V gira a 1000 r/min y absorbe una corriente de 70 A cuando mueve un cierto par resistente de plena carga. La resistencia total del motor (inducido + inductor) es de $0,3 \Omega$. ¿A qué velocidad girará el motor:
- Cuando el par resistente sea $2/3$ del par de plena carga, suponiendo que el flujo magnético sea proporcional a la corriente.
 - Cuando la corriente sea el doble suponiendo que el flujo magnético aumente un 20%.

Resp. a) 1301,3 r/min; b) 745,4 r/min

- 6.47. Un motor serie de c.c. se conecta a una red de 220 V y absorbe una corriente de 100 A al girar a una velocidad de 1000 r/min. El circuito magnético es lineal y la resistencia total del motor es de $0,2 \Omega$. Calcular la velocidad del motor si el par de carga se reduce al 60% del par de plena carga y la tensión de alimentación se reduce a 150 V.

Resp. 868,2 r/min

- 6.48. Un motor serie de 440 V gira a 1000 r/min y absorbe una corriente de 40 A cuando mueve un cierto par resistente. La resistencia total del motor (inductor + inducido) es de $0,5 \Omega$ y el circuito magnético es lineal. Indicar cuál será la velocidad del motor:
- Si el par de carga aumenta un 44%.
 - Cuando la corriente absorbida sea de 20 A.

Resp. a) 825,4 r/min; b) 2047,6 r/min

- 6.49. Un motor derivación de 54 kW, 600 V, 1000 r/min tiene un rendimiento a plena carga del 90%. Las resistencias de los devanados inductor e inducido son de 150Ω y $0,2 \Omega$, respectivamente.
- Calcular la corriente de inducido de plena carga.
 - Determinar la velocidad en cada una de las situaciones siguientes en las que se considera que la máquina desarrolla un par electromagnético igual al de plena carga:
 - Frenado regenerativo o por recuperación de energía sin que exista resistencia limitadora de la corriente de inducido.
 - Frenado a contracorriente cuando se incluye en el inducido una resistencia limitadora de $7,8 \Omega$.
 - Frenado dinámico al cargar el inducido con una resistencia externa de $2,5 \Omega$.

Resp. a) $I_1 = 96\text{A}$; b1) 1066 r/min; b2) 289,3 r/min; b3) 446,3 r/min

- 6.50. Un motor serie de c.c. tiene una resistencia total (inductor + inducido) de 3Ω . Se impulsa con un motor auxiliar a la velocidad de 600 r/min y se alimenta su circuito de excitación por una fuente externa de corriente continua, dando lugar a la siguiente característica de vacío:

I_e (A)	5	10	15	20	25	30
E (V)	325	400	433	452	464	472

Este motor se utiliza para mover un ventilador que requiere una potencia que varía con el cubo de la velocidad de acuerdo con la ecuación:

$$P = 1,7 \cdot 10^{-7} n^3 \quad (P \text{ se expresa en kW y } n, \text{ en r/min})$$

Calcular la velocidad en régimen permanente y la potencia absorbida por el motor de la red si las pérdidas mecánicas y en el hierro son de 500 W y se consideran constantes en todo el régimen de funcionamiento de la máquina.

Sugerencia: a partir de la curva de vacío debe construirse una tabla en la que se calculen las f.e.m. del motor para las diversas corrientes de inducido señaladas en la tabla. A partir de estas deben determinarse las velocidades correspondientes, las potencias electromagnéticas ($E I$), la potencia mecánica útil desarrollada por el motor en cada caso y la potencia requerida por el ventilador a las velocidades correspondientes. Una vez confeccionada esta tabla deben dibujarse las curvas de potencia útil del motor y de potencia absorbida por el ventilador en función de la corriente de inducido (este procedimiento tiene menos error que dibujar estas magnitudes en función de la velocidad). El punto de intersección de ambas curvas permite calcular la corriente de inducido que cumpliría la igualdad de potencias entre el motor y la carga. Con este valor es inmediato calcular la potencia absorbida por el motor de la red, su potencia mecánica útil y la velocidad de giro correspondiente.

Resp. 686 r/min; 6000 W

Bibliografía

- ALGER, P.L. *Nature of Polyphase Induction Machines*. J. Wiley. Nueva York, 1951.
- BROSAN, G. S; HAYDEN, J. T. *Advanced Electrical Power and Machines*. Pitman & Sons, Londres, 1966.
- CHAPMAN, S. J. *Máquinas Eléctricas*, McGraw-Hill Latinoamericana, SA, Bogotá, Colombia, 1987.
- CHATELAIN, J. *Traité d'électricité, Vol X. Machines électriques*. Editions Georgi, Lausana, 1983.
- CHILIKIN, M. *Accionamientos Eléctricos*. Mir, Moscú, 1972.
- CORTÉS, M. *Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas*. Editores Técnicos As, Barcelona, 1973.
- EL HAWARY, M. E. *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications*. Reston Book, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- ENGELMAN, R. H. *Static and Rotating Electromagnetic Devices*, Marcel Dekker, Inc. Nueva York, 1982.
- FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, CH., Jr; UMANS, S. D. *Máquinas Eléctricas, 6/E*; McGraw-Hill Interamericana, México, 2004.

- FRAILE MORA, J. *Máquinas Eléctricas, 7/E*; Ibergarcelona Publicaciones, SL, Madrid, 2015.
- GEMMELICH, D. K; HAMMOND, S. B. *Electromechanical Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1967.
- GÖNEN, T. *Electrical Machines*, Power International Press, California, 1998.
- GRAY, C .B. *Máquinas Eléctricas y Sistemas Accionadores*, Ediciones Alfaomega, México, 1993.
- GRIFFITHS, D. *Principles and Problems of Electrical Machines*. Prentice Hall Int., Londres, 1995.
- GURU, B. S.; HIZIROGLU, H. R. *Electrical Machinery and Transformers, 2/E*, Oxford University Press, Nueva York, 1995.
- HINDMARSH, J. *Electrical Machines and Drives: Worked Examples*, Butterworth-Heineman, 1996.
- KOSOW, I .L. *Electric Machinery and Transformers*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1972.
- LANGSDORF, A. S. *Teoría de las Máquinas de c.a.*, Ed. del Castillo, Madrid, 1967.
- LANGSDORF, A. S. *Principios de máquinas de c.c.*, Ed. Castillo, Madrid, 1964.
- MATSCH, L. W.; MORGAN, J. D. *Electromagnetic and Electromechanical Machines*, John. Wiley, Nueva York, 1986.
- Mc PHERSON, G. *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, John Wiley, Nueva York, 1981.
- NAGRATH. I. J.; KOTHARI, D. P. *Electric Machines*, Tata McGraw-Hill Pub., Nueva Delhi, 1985.
- PARKER SMITH, S. *Problemas de Ingeniería Eléctrica*, Ed. Selecciones Científicas, Madrid, 1961.
- POTTER, W. J. *Solutions of Problems in Electrical Machines*, Sir Isaac Pitman & Sons, Londres, 1961.
- RAMSHAW, R. S.; VAN HEESWIJK, R. G. *Energy Conversion*, Saunders Pub, Orlando, 1990.
- RAS, E: *Transformadores de potencia, de medida y de protección*, Ed. Técnicas Marcombo, Boixerau Ed., Barcelona, 1975.
- SANZ FEITO, J. *Máquinas Eléctricas*. Prentice Hall, Pearson Education, Madrid, 2002.
- SARMA, M. S. *Electric Machines, 2/E*, PWS Publishing Co. International Thomsom Pub., Boston, 1996.
- SAY, M. G. *Alternating Current Machines*, Pitman Pub Co., Londres, 1976.
- SCHMITZ.N. L.; NOVOTNY,D. W. *Introductory Electromechanics.*, The Ronald Press Co., Nueva York, 1965.
- SERRANO IRIBARNEGARAY, L, *Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas*, Marcombo Boixareu, Ed. Barcelona, 1989.
- SLEMON, G, *Electric Machines and Drives*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, 1995.
- STEIN, R.; HUNT, W. T. *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines*, Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York, 1979.
- DEL TORO, V. *Electric Machines and Power Systems*, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, 1985.
- WILDI, Th. *Electrical Machines, Drives and Power Systems*, Prentice Hall Int., 1997.

Problemas de Máquinas Eléctricas 2ª Edición

Este libro de *Problemas resueltos de Máquinas Eléctricas, 2ª edición*, es el complemento ideal del libro de *Máquinas Eléctricas, 7ª edición*, de Jesús Fraile Mora publicado por Ibergarceta Publicaciones, S.L. en el año 2015.

En este libro están **resueltos** con detalle no solamente los **problemas propuestos del libro Máquinas Eléctricas, 7ª edición** mencionado anteriormente, sino que se han añadido otros problemas suplementarios en los que se señala la respuesta final, lo que da lugar a un total de **321 problemas resueltos** que facilitan el estudio de todos los tipos de máquinas eléctricas.

Los apartados de los capítulos corresponden a los contenidos que normalmente se imparten en los cursos básicos de electrotecnia y/o de máquinas eléctricas de las Escuelas de Ingeniería. La estructura del libro es la siguiente:

- Cada capítulo comienza con un **sumario de fórmulas** a modo de recordatorio de los principios teóricos pertinentes; las fórmulas se presentan sin explicaciones detalladas, por lo que es necesario que el lector haya estudiado previamente la teoría correspondiente en su libro de texto.
- A continuación, se incluye una gama de **problemas totalmente resueltos**, elegidos de forma que proporcionen una visión clara y progresiva de los principios enunciados.
- Por último, se adjuntan unos **problemas suplementarios** en los que únicamente se ofrece el resultado final, que sirven como repaso completo del material del capítulo.

El gran número de problemas presentados sirve de revisión completa de toda la materia analizada en cada capítulo, aclarando y fijando los conceptos esenciales.

Garceta
grupo editorial



978-84-1622-81

